日本数学会

2015年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2015年9月

於　京都産業大学

日本数学会

2015年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2015年9月

於　京都産業大学

無 限 可 積 分 系

9月13日(日)　第IV会場

9:30〜12:00

14:15〜15:15　特別講演

9月14日(月)　第IV会場

9:30〜12:00

15 岩 尾 慎 介 (青 学 大 理 工) Kostant–Toda 階層, Totally nonnegative matrix と特異曲線 · · · (15) 43
西 山 享 (青 学 大 理 工)
小 川 竜 (東 海 大 理)

13:00〜14:00 特別講演

黒 木 玄 (東 北 大 理) パンルヴェ系の τ 函数の正準量子化について · 45

Ding-Iohara 代数のレベル 2 表現の結晶化

大久保勇輔　(名大・多元数理)
栗田英資　(名大・多元数理)
藤野弘基　(名大・多元数理)

Macdonald 多項式は変形 Virasoro 代数や Ding-Iohara 代数との相性がよく, 近年では AGT 予想を解析する重要な道具となっている. また Macdonald 多項式は Jack 多項式や Hall-Littlewood 多項式を一般化した多項式であるが, Hall-Littlewood 多項式への退化と同じ退化極限を変形 Virasoro 代数などに施したものを, ここではその結晶化と呼ぶことにする. (変形パラメータ q の $q \to 0$ 極限を見ていることから量子群の結晶基底に準えて.) この結晶化された場合では物事は簡単化され, パラメータが一般の場合では困難であった計算が容易になることが多い. その一つの例として本講演では Ding-Iohara 代数のレベル 2 表現の結晶化について説明し, ある演算子の 4 点相関関数が計算できることについて説明する.

まず t をパラメータとし, 交換関係 $[b_n^{(i)}, b_m^{(j)}] = n\frac{1}{1-t^{|n|}}\delta_{i,j}\,\delta_{n+m,0}$, $[b_n^{(i)}, U_j] = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ i, j = 1\,\mathrm{or}\,2)$ を満たす Heisenberg 代数を用いて, 次のような頂点作用素を導入する：

$$\tilde{\Lambda}^1(z) := \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(1)}\right\}\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}z^{-n}b_n^{(1)}\right\}U_1,$$

$$\tilde{\Lambda}^2(z) := \exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(1)}\right\}\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(2)}\right\}\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}z^{-n}b_n^{(2)}\right\}U_2.$$

さらにこの 2 つの作用素を用いて, $n \in \mathbb{Z}$ に対して生成元

$$\tilde{X}_n^{(1)} := \oint \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z}\left\{\theta[n \geq 0]\tilde{\Lambda}^1(z) + \theta[n \leq 0]\tilde{\Lambda}^2(z)\right\}z^n,$$

$$\tilde{X}_n^{(2)} := \oint \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} : \tilde{\Lambda}^1(z)\tilde{\Lambda}^2(z) : z^n$$

を定義する. ここに $:\quad:$ は Heisenberg 代数 $b_n^{(i)}$ に関する正規順序化の記号であり, $\theta[P]$ は P が真ならば 1 を, 偽ならば 0 を出力する関数である. するとこれは [2] におけるレベル 2 表現の作用素 $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}$ の結晶化に対応している. この生成元 $\tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)}$ から生成される結合代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を調べる. この $\tilde{\mathcal{A}}$ の表現を考えるために, 最高ウエイトベクトル $|\vec{u}\rangle$ とその双対 $\langle\vec{u}|$ を

$$b_n^{(i)}|\vec{u}\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad U_i|\vec{u}\rangle = u_i|\vec{u}\rangle,$$

$$\langle\vec{u}|\,b_n^{(i)} = 0 \quad (n < 0), \quad \langle\vec{u}|\,U_i = u_i\langle\vec{u}|$$

を満たすベクトルとし, $\mathcal{F}_{\vec{u}}$, $\mathcal{F}_{\vec{u}}^*$ をそれぞれ $|\vec{u}\rangle$ と $\langle\vec{u}|$ から生成される Fock 空間とその双対とする. この $\mathcal{F}_{\vec{u}}$, $\mathcal{F}_{\vec{u}}^*$ 上の $\tilde{\mathcal{A}}$ の表現を考えたとき, このように結晶化された場合では, 生成元 $\tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)}$ に関する PBW 型のベクトルは Hall-Littlewood 多項式 $Q_\lambda(p_n;t)$ を用いて [1] 以下のように表示することができる. ただし $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ はパーティションである. つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0$ を満たす整数の有限列である.

[1] $Q_\lambda(p_n;t)$ はモノミアル対称多項式 m_λ で展開したときの係数が $Q_\lambda = b_\lambda(t)m_\lambda + \cdots$ と規格化されているもので, 冪和対称多項式 $p_n (n \in \mathbb{N})$ を変数と見たものである. ただし $b_\lambda(t)$ は Theorem 3 を参照.

Proposition 1 ([1])**.** Fock空間 $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ と $\mathcal{F}^*_{\vec{u}}$ 上のベクトル $|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle := \tilde{X}^{(2)}_{-\lambda_1}\tilde{X}^{(2)}_{-\lambda_2}\cdots\tilde{X}^{(1)}_{-\mu_1}\tilde{X}^{(1)}_{-\mu_2}\cdots|\vec{u}\rangle$ と $\langle\tilde{X}_{\lambda,\mu}| := \langle\vec{u}|\cdots\tilde{X}^{(1)}_{\mu_2}\tilde{X}^{(1)}_{\mu_1}\cdots\tilde{X}^{(2)}_{\lambda_2}\tilde{X}^{(2)}_{\lambda_1}$ はそれぞれ

$$|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle = (u_1u_2)^{\ell(\lambda)}u_2^{\ell(\mu)}Q_\lambda(b^{(3)}_{-n};t^{-1})Q_\mu(b^{(4)}_{-n};t^{-1})\,|\vec{u}\rangle\,,$$
$$\langle\tilde{X}_{\lambda,\mu}| = u_1^{\ell(\mu)}(u_1u_2)^{\ell(\lambda)}t^{|\lambda|+|\mu|}\langle\vec{u}|Q_\mu(b^{(1)}_{n};t^{-1})Q_\lambda(b^{(3)}_{n};t^{-1})$$

と表示することができる. ここに

$$b^{(3)}_n := b^{(1)}_n + b^{(2)}_n, \qquad b^{(3)}_{-n} := b^{(2)}_{-n} \qquad (n>0),$$
$$b^{(4)}_n := b^{(2)}_n, \qquad b^{(4)}_{-n} := -b^{(1)}_{-n} + b^{(2)}_{-n} \qquad (n>0)$$

とした.

この表示を用いることにより, $|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle$ が $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ 上の基底を成すという主張の証明を得ることができる. また結晶化された場合で基底を成しているという事実から, パラメータ q が一般の場合にも, PBW型のベクトルが基底を成すという予想（[2, Conjecture 3.4] の生成元 $X^{(1)}_n$, $X^{(2)}_n$ を真空ベクトルに作用させる順序を入れ替えた場合）を解決することができる.

またさらに [2] の intertwining operator $\Phi(z)$ の z に適当な規格化を加えて極限 $q\to 0$ を考えると, 次のように定義した作用素 $\tilde{\Phi}(z)$ がその自然な結晶化になっていることが分かる.

Definition 2. 作用素 $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z) : \mathcal{F}_{\vec{u}} \to \mathcal{F}_{\vec{v}}$ を

$$\tilde{X}^{(1)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_n - v_1\,v_2\,z\,\tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_{n-1} \quad (n\le 0),$$
$$\tilde{X}^{(1)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_n \quad (n\ge 1),$$
$$\tilde{X}^{(2)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(2)}_n - v_1\,v_2\,z\,\tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(2)}_{n-1} \quad (\forall n),$$
$$\langle\vec{v}|\,\tilde{\Phi}(z)\,|\vec{u}\rangle = 1$$

を満たすものとして定義する.

演算子 $\Phi(z)$ の相関関数（q が一般の場合）は一般化された Macdonald 多項式に対応したベクトルを用いて組み合わせ論的に計算することができる [2, Conjecture 3.13]. 結晶化された場合においても一般化された Hall-Littlewood 多項式を用いて同様に計算することが可能である. しかし, 結晶化された場合においては, 演算子 $\tilde{\Phi}(z)$ の 4 点相関関数は PBW 型の基底で展開することにより, 一切の予想を用いずその公式を得ることができる：

Theorem 3 ([1])**.**

$$\langle\vec{w}|\,\tilde{\Phi}^{\vec{w}}_{\vec{v}}(z_2)\tilde{\Phi}^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z_1)\,|\vec{u}\rangle = \sum_\lambda\left(\frac{u_1u_2z_1}{w_1w_2z_2}\right)^{|\lambda|}\frac{\prod_{k=1}^{\ell(\lambda)}\left(1-t^{k-1}\frac{w_1w_2}{v_1v_2}\right)}{t^{2n(\lambda)}\,b_\lambda(t^{-1})}.$$

ここに $b_\lambda(t) := \prod_{j\ge1}\prod_{k=1}^{m_j}(1-t^k)$, $m_j := \#\{i|\lambda_i = j\}$, $n(\lambda) := \sum_{i\ge1}(i-1)\lambda_i$ とした.

参考文献

[1] H. Awata, H, Fujino, Y. Ohkubo, This paper will appear in arXiv.

[2] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, RIMS kōkyūroku **1765** (2011) 12–32.

中心拡大された超リー代数$\mathfrak{sl}(2|2)$ に付随する量子アファイン代数について

松本 拓也　(名古屋大学)*

概　要

超リー代数 $\mathfrak{sl}(2|2)$ は全ての超リー代数の中で唯一, 2次元の普遍中心拡大を持つことが知られている [1]. 今回は, 中心拡大された $\mathfrak{sl}(2|2)$ に付随する量子群とその無限次元への拡張である量子アファイン代数 [2] を紹介したい. この代数は, 超弦理論におけるゲージ/重力対応や q 変形された1次元ハバード模型の対称性として現れ, 物理的に重要な役割を果たしている.

1. 背景と動機

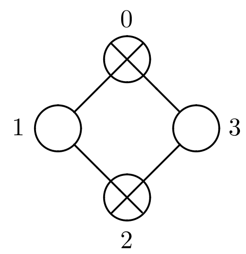
超リー代数 $\mathfrak{sl}(2|2)$ は全ての超リー代数の中で唯一, 2次元の普遍中心拡大を持つ特殊な代数である [1]. それを $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ を書くことにする. $\mathfrak{g}$ は連続パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつ例外型超リー代数 $D(2,1;\alpha)$ の $\alpha \to 0$ 極限としても実現されることが知られている. 近年, この代数は物理的に次の2つの文脈で注目されている. 1つは, 超弦理論に超弦理論におけるゲージ/重力対応の研究である. 特に, ゲージ理論と重力理論双方に共通する対称性をもつ可解模型の代数的対称性として $\mathfrak{g}$ が現れる. 実は, この量子可解模型は1次元ハバード模型と等価であることが知られており, 結果としてこの模型の Shastry の散乱行列の対称性にもなっていることが明らかになった. これが2つ目の文脈である. よって, 数学的な立場からこの超リー代数 $\mathfrak{g}$ とそれに付随する(無限次元)量子群, およびその表現論的研究を進めることが重要であると考えられる.

本公演では, 中心拡大された超リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子アファイン代数 [2] を紹介したい. この代数は, 量子変形 (q 変形) された1次元ハバード模型 [3] の無限次元対称性になっている.

2. 代数の定義

中心拡大された $\mathfrak{sl}(2|2)$ に付随する量子アファイン代数を $\widehat{\mathcal{Q}}$ と記すことにする. $\widehat{\mathcal{Q}}$ は, 2つの変形パラメータ $q, g \in \mathbb{C}$ を持ち, 生成元 $\mathrm{K}_j^{\pm 1}, \mathrm{E}_j, \mathrm{F}_j$ $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ と中心元 $\mathrm{U}_k^{\pm 1}, \mathrm{V}_k^{\pm 1}$ $(k = 0, 2)$ によって生成される. ここで, $\mathrm{E}_k, \mathrm{F}_k$ $(k = 0, 2)$ は odd 生成子であり, その他は even である. 対称化された Cartan 行列 b, 規格化行列 d, および対応する Dynkin 図として, 次のようなものを考える.;

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$



Dynkin 図において, 頂点 0 が affine 化によって新たに付与された odd root である.

キーワード：超リー代数, 量子アファイン代数, ハバード模型, AdS/CFT 対応
* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町名古屋大学高等研究院・多元数理科学研究科
e-mail: takuya.matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は次の(1)-(9)の定義関係式を満たす.; まずgroup-likeな元は,

$$\mathrm{X}\mathrm{X}^{-1}=1\,,\quad \mathrm{XY}=\mathrm{YX}\qquad \text{for}\qquad \mathrm{X},\mathrm{Y}\in\{1,\mathrm{K}_j,\mathrm{U}_k,\mathrm{V}_k\} \tag{1}$$

を満たす. 中心元 V_k とCartan生成子の間には次の関係がある.

$$\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_k^{-2}\mathrm{K}_3^{-1}=\mathrm{V}_k^2\qquad \text{for}\qquad k=0,2\,. \tag{2}$$

特徴的なのは, 関係式(4)で交換子 $[\mathrm{E}_2,\mathrm{F}_0]$ と $[\mathrm{E}_0,\mathrm{F}_2]$ が消えずに残る点である.

$$\mathrm{K}_i\mathrm{E}_j\mathrm{K}_i^{-1}=q^{b_{ij}}\mathrm{E}_j\,,\qquad \mathrm{K}_i\mathrm{F}_j\mathrm{K}_i^{-1}=q^{-b_{ij}}\mathrm{F}_j\,, \tag{3}$$

$$[\mathrm{E}_2,\mathrm{F}_0]=-\tilde{g}\big(\mathrm{K}_0-\mathrm{U}_2\mathrm{U}_0^{-1}\mathrm{K}_2^{-1}\big)\,,\qquad [\mathrm{E}_0,\mathrm{F}_2]=\tilde{g}\big(\mathrm{K}_2-\mathrm{U}_0\mathrm{U}_2^{-1}\mathrm{K}_0^{-1}\big)\,, \tag{4}$$

$$[\mathrm{E}_j,\mathrm{F}_j]=d_{jj}\frac{\mathrm{K}_j-\mathrm{K}_j^{-1}}{q-q^{-1}}\,,\qquad [\mathrm{E}_i,\mathrm{F}_j]=0\quad \text{for}\quad i\neq j,\,(i,j)\neq(0,2)\,,(2,0)\,. \tag{5}$$

ここで, $\tilde{g}:=g/\sqrt{1-g^2(q-q^{-1})^2}$ とおいた. Serre関係式は次のようなものを満たす.

$$[\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_3]=\mathrm{E}_2\mathrm{E}_2=\mathrm{E}_0\mathrm{E}_0=[\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_0]=0 \tag{6}$$

$$\big[\mathrm{E}_j,[\mathrm{E}_j,\mathrm{E}_k]\big]-(q-2+q^{-1})\mathrm{E}_j\mathrm{E}_k\mathrm{E}_j=0 \tag{7}$$

$$\big[[\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_k],[\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_k]\big]-(q-2+q^{-1})\mathrm{E}_k\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3\mathrm{E}_k=g(1-\mathrm{V}_k^2\mathrm{U}_k^2) \tag{8}$$

$$\big[[\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_k],[\mathrm{F}_3,\mathrm{F}_k]\big]-(q-2+q^{-1})\mathrm{F}_k\mathrm{F}_1\mathrm{F}_3\mathrm{F}_k=g(\mathrm{V}_k^{-2}-\mathrm{U}_k^{-2})\,, \tag{9}$$

ここで, $j=1,3$, $k=0,2$である. 関係式(6), (7)は, 中心拡大のない量子アファイン代数 $\mathrm{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2))$ にみられるものと同一であり, 生成子 E を F に形式的に置き換えたものも同様に成り立つ. 中心拡大の寄与は, 関係式(8), (9)に現れている. 代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は $g\to 0$ 極限において, $\mathrm{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2))$ に帰着する.

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ はホップ代数の構造を持つ. 特に, 生成子 E_i と F_i $(i=0,1,2,3)$ に対する余積は次のように定義される.

$$\Delta(\mathrm{E}_j)=\mathrm{E}_j\otimes 1+\mathrm{K}_j^{-1}\mathrm{U}_2^{+\delta_{j,2}}\mathrm{U}_0^{+\delta_{j,0}}\otimes\mathrm{E}_j\,,\quad \Delta(\mathrm{F}_j)=\mathrm{F}_j\otimes\mathrm{K}_j+\mathrm{U}_2^{-\delta_{j,2}}\mathrm{U}_0^{-\delta_{j,0}}\otimes\mathrm{F}_j\,.$$

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ の「導出」 上記のように定義された量子アファイン代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は, 簡単な物理的考察から「導出」することもできる[2]. まず q 変形されたハバード模型の散乱行列 R_{12} は $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{2|2}\otimes\mathbb{C}^{2|2})$ に値をとり, $\mathrm{E}_2\in\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$ の対称性を持っている. ここで散乱行列は「荷電共役変換」の下で不変である一方, 生成子 E_2 の $\mathbb{C}^{2|2}$ 上での基本表現はaffine生成子 E_0 のそれにmapされる.

$$\Delta^{\mathrm{op}}(\mathrm{E}_2)\,R_{12}=R_{12}\,\Delta(\mathrm{E}_2)\quad\Rightarrow\quad \Delta^{\mathrm{op}}(\mathrm{E}_0)\,R_{12}=R_{12}\,\Delta(\mathrm{E}_0) \tag{10}$$

このようにして構成されたaffine生成子 $\mathrm{E}_0\,,\mathrm{F}_0$ とその他の生成子から生成される無限次元代数が $\widehat{\mathcal{Q}}$ である. その構成から, q 変形されたハバード模型の散乱行列 R_{12} は $\widehat{\mathcal{Q}}$ の対称性を持つことになる. 時間が許せば, $q\to 1$ 極限において, ヤンギアン対称性 $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$ が回復されることにも触れたい.

参考文献

[1] Kenji Iohara and Yoshiyuki Koga, *Central extensions of Lie superalgebras*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 1, 110–154, DOI 10.1007/s000140050152. MR1819663 (2002g:17009)

[2] N. Beisert, W. Galleas and T. Matsumoto, “A Quantum Affine Algebra for the Deformed Hubbard Chain,” J. Phys. A **45** (2012) 365206 [arXiv:1102.5700 [math-ph]].

[3] N. Beisert and P. Koroteev, “Quantum Deformations of the One-Dimensional Hubbard Model,” J. Phys. A **41** (2008) 255204 [arXiv:0802.0777 [hep-th]].

closed vertex 上の位相的弦理論の開弦振幅

高崎金久　(近畿大学理工学部)
中津了勇　(摂南大学理工学部)

closed vertex は3次元トーリックカラビ・ヤウ多様体が図1のようなウェブ図形とトーリック図形をもつ場合を意味する．その分配函数（閉弦振幅）は代数幾何学的な方法や位相的頂点の方法によって求められている．本講演では，位相的頂点の方法によって開弦振幅の一部も計算できること，それらの1変数母函数がある種の q-差分方程式を満たすこと，の2点を報告する．

1．開弦振幅の計算

図2に示したように，内線にケーラーパラメータ Q_1, Q_2, Q_3 を与えて，下向きの外線に分割 β_1, β_2 を置いた場合の開弦振幅 $Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ を考える．位相的頂点の方法では，ウェブ図形の頂点に

$$C_{\lambda\mu\nu} = q^{\kappa(\mu)/2} s_{\,{}^{\mathrm{t}}\nu}(q^{-\rho}) \sum_{\eta} s_{\,{}^{\mathrm{t}}\lambda/\eta}(q^{-\nu-\rho}) s_{\mu/\eta}(q^{-\,{}^{\mathrm{t}}\nu-\rho}),$$

$$\kappa(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\mu_i - 2i + 1), \quad q^{-\nu-\rho} = (q^{-\nu_i+i-1/2})_{i=1}^{\infty},$$

という重み（近年用いられている定義に従う）を置き，内線にはケーラーパラメータに関連する重みを与えて，これらの重みの積を内線上の分割について総和する．

図2に対してこの総和を実行するために，ウェブ図形を上部の内線（その上の分割を α とする）で分離し，各部分の振幅への寄与を先に求める．このとき分離した内線の上側の部分は単一の頂点の振幅 $s_\alpha(q^{-\rho})$ であり, 下側の部分はジグザグなウェブ図形の振幅 $Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2}$ になる．求める振幅はこれらを内線の重みとともに α について総和したものとして

$$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2} = \sum_{\alpha} s_\alpha(q^{-\rho})(-Q_3)^{|\alpha|} Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2} \tag{1}$$

と表せる．$Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2}$ はいわゆる「帯上のウェブ図形」の振幅であり，シューア函数と複素自由フェルミオン系によるよく知られた表示がある．それを上の式に代入し，溶解結晶模型で用いた量子トーラス代数のシフト対称性を援用すれば，$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ に対して次の結果を得る．

定理1　$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ は次のようなフェルミオン表示をもつ：

$$\begin{aligned} Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2} =& q^{\kappa(\beta_2)/2} \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_1 Q_2 q^{-\beta_{1,i} - {}^{\mathrm{t}}\beta_{2,j} + i + j - 1})^{-1} \\ & \times \langle {}^{\mathrm{t}}\beta_1 \mid \Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})(-Q_1)^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})(-Q_3)^{L_0} \\ & \times \Gamma_-(q^{\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})(-Q_2)^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \mid {}^{\mathrm{t}}\beta_2\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで L_0 はフェルミオンのヴィラソロ代数のゼロモードであり，$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ はフェルミオンカレントのモード J_k, $k \in \mathbb{Z}$, を用いて定義される2種類の頂点作用素

$$\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k}\right), \quad \Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k}\right)$$

である．$\langle {}^{\mathrm{t}}\beta_1|$ と $|{}^{\mathrm{t}}\beta_2\rangle$ は ${}^{\mathrm{t}}\beta_1$ と ${}^{\mathrm{t}}\beta_2$ に対応する励起状態を表す．

科学研究費 No. 24540223, No. 25400111, No. 15K04912

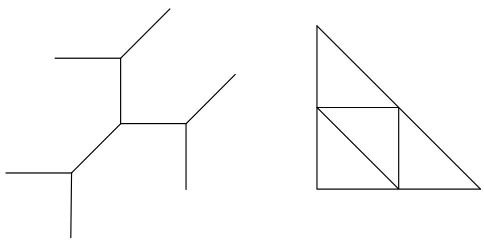


図 1: closed vertex のウェブ図形（左）とトーリック図形（右）

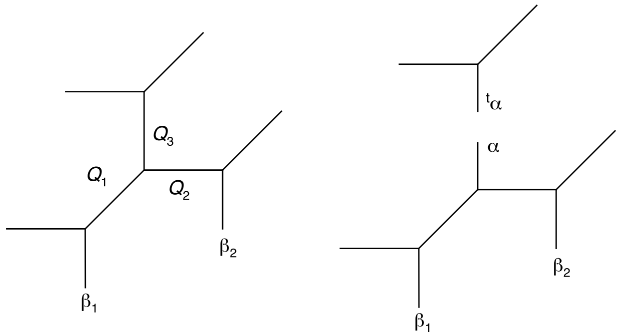


図 2: 開弦振幅の設定（左）とウェブ図形の分離・融合の仕方（右）

2. 開弦振幅の母函数が満たす q-差分方程式

以下では，上の開弦振幅を $\beta_1=(1^k)$（縦１列のヤング図形），$\beta_2=\emptyset$ に特殊化して $Z^{\mathrm{cv}}_{\emptyset\emptyset}$ で正規化したものの母函数

$$\Psi(x)=\frac{1}{Z^{\mathrm{cv}}_{\emptyset\emptyset}}\sum_{k=0}^{\infty}Z^{\mathrm{cv}}_{(1^k)\emptyset}x^k$$

（KP 階層の波動函数を初期時刻で考えることに相当する）について結果を述べるが，$\beta_1=(k)$（横１行のヤング図形）への特殊化や β_1,β_2 の役割を入れ替えた場合も同様である．

定理２　$\Psi(x)$ は次の q-差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned}&(1-Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x}-Q_1Q_2Q_3q^{1/2}x)(1-Q_1Q_2q^{-1}q^{x\partial_x}-Q_1q^{1/2}x)q^{x\partial_x}\Psi(x)\\&=(1-Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x}-Q_1Q_3q^{1/2}x)(1-Q_1Q_2q^{-1}q^{x\partial_x}-q^{1/2}x)\Psi(x).\end{aligned}\tag{3}$$

この結果から**意外なこと**がわかる．この方程式を（項を１辺に集めて）$\hat{H}(x,q^{x\partial_x})\Psi(x)=0$ と表そう．$q\to1$ の古典極限（これは q-差分方程式の WKB 近似によって正当化される）において非可換多項式 $\hat{H}(x,q^{x\partial_x})$ は可換多項式 $H(x,y)$ になるが，じつはこれらは

$$\hat{H}(x,q^{x\partial_x})=(1-Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x})\hat{K}(x,q^{x\partial_x}),\quad H(x,y)=(1-Q_1Q_2y)K(x,y)\tag{4}$$

というように因数分解する．具体的な形は省くが，$K(x,y)$ は x,y の，また，$\hat{K}(x,q^{x\partial_x})$ は $x,q^{x\partial_x}$ の２次多項式である．Dijkgraaf らの量子幾何学では，$H(x,y)=0$ はミラー曲線，$\hat{H}(x,q^{x\partial_x})\Psi(x)=0$ はその量子化と解釈される．しかしながら，ミラー曲線の方程式のニュートン図形はトーリック図形と同じ形をしている，という folklore（？）によれば，余分の因子 $1-Q_1Q_2y$ を落とした $K(x,y)=0$ の方がミラー曲線にふさわしい．この余分の因子（(2) の右辺の無限積に由来する）の存在は結び目の不変量の A-多項式の特徴に似ている．

多状態TASEPと四面体方程式

国場 敦夫　(東大総合文化)
丸山 翔也　(東大総合文化)
尾角 正人　(阪市大理)

1. n-TASEP

サイト数 L の周期的一次元格子を考える．各サイトは $i \in \mathbb{Z}_L$ でラベルされ，状態 $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ をとるものとする．$1, \dots, n$ はそれでラベルされる種の粒子がある状態，0 は無粒子状態を表す．任意の隣り合うサイト $(i, i+1)$ で，その状態 (α, β) が $\alpha > \beta$ のとき，一定の遷移確率で (β, α) に入れ替わるダイナミクスに従う確率過程を n-TASEP(totally asymmetric simple exclusion process) という．時刻 t に配置 $(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$ をとる (相対) 確率を $P(\sigma_1, \dots, \sigma_L; t)$ とし，

$$|P(t)\rangle = \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_L)\in\{0,1,\dots,n\}^L} P(\sigma_1, \dots, \sigma_L; t)\,|\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle$$

とおくと，n-TASEP は次のマスター方程式で特徴づけられる．

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = H|P(t)\rangle, \qquad H = \sum_{i\in\mathbb{Z}_L} h_{i,i+1}, \qquad h\,|\sigma, \sigma'\rangle = \begin{cases} |\sigma', \sigma\rangle - |\sigma, \sigma'\rangle & (\sigma > \sigma'), \\ 0 & (\sigma \le \sigma'). \end{cases}$$

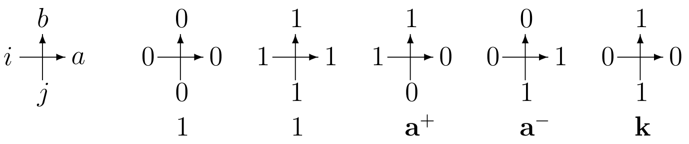
ここで，$h_{i,i+1}$ は $i, i+1$ 番目の成分に h，他の成分には 1 で作用する．我々は $H|P(t)\rangle = 0$ となる状態（定常状態）の $P(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$ に興味がある．

2. L 作用素と組合せ R

フォック空間 $F = \bigoplus_{m\ge0}\mathbb{C}|m\rangle$ 上の $q = 0$ 振動子 $\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k}$ の作用を次で定める．

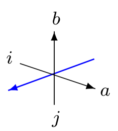
$$\mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \mathbf{a}^-|m\rangle = |m-1\rangle, \quad \mathbf{k}|m\rangle = \delta_{m,0}|m\rangle$$

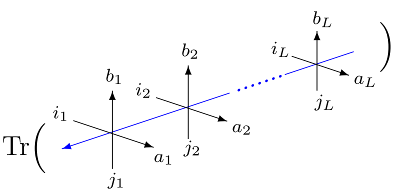
さらに $V = \mathbb{C}\,|0\rangle \oplus \mathbb{C}\,|1\rangle$ とおいて，L 作用素 $L = (L^{a,b}_{i,j}) \in \mathrm{End}(V \otimes V \otimes F)$($i, j, a, b$ は V の基底のラベル) を $L(|i, j\rangle \otimes |\chi\rangle) = \sum_{a,b} |a, b\rangle \otimes L^{a,b}_{i,j}|\chi\rangle$ ($|\chi\rangle \in F$) および

$L^{a,b}_{i,j} =$ 

で定める（$q = 0$ 振動子に値をとる 5 頂点模型）．[5] で得られた結果で $q = 0$ とすることにより，次の命題が成り立つ．

Proposition 1. $R^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathrm{Tr}_F(L^{a_1,b_1}_{i_1,j_1} \cdots L^{a_L,b_L}_{i_L,j_L})$ （$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots a_L)$, *etc*）と置くと，

$L^{a,b}_{i,j} =$ 

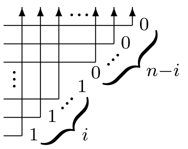
$R^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} =$ 

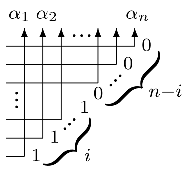
$R = (R^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})$ は各セクター $(|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|) = (|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}|) = (l, m)$ 毎に $U_q(\widehat{sl}_L)$ の反対称テンソル表現のクリスタルのテンソル積 $B^l \otimes B^m$ に付随する組合せ R [6] になっている．（$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_L$, etc）

この R の行列積表示は四面体方程式の簡約から得られる．

3. 主結果

Ferrari と Martin は [2] において，multiline process というアルゴリズムを用いて定常状態をある組合せ論的な対象からの射影で表した．これはクリスタル B^l と組合せ R の NY-rule [6] を用いて言い換えることができる．$X_i, \hat{X}_i \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ $(i = 0, \ldots, n)$ を次のように定める．

$X_i = \sum$ 

$\hat{X}_i = \sum(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ 

和 $\sum$ は与えられた境界条件を満たす 5 頂点模型のすべての状態にわたってとる．α_i は上部の各出力の値 $0, 1$ を表す．X_i は 5 頂点模型の角転送行列と考えることができる．このとき次が成り立つ [3, 4]．

Theorem 2.

$$P(\sigma_1, \ldots, \sigma_L) = \mathrm{Tr}_{F^{\otimes n(n-1)/2}}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$$

は n-TASEP の定常状態である．

Theorem 2 の導出は [2] の結果に基づいたものだが，[1] に倣って直接示すこともできる．$\mathrm{Tr}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$ が定常状態の確率であるためには

$$X_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\alpha X_\beta = \sum_{0 \le \gamma, \delta \le n} h^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta} X_\gamma X_\delta \quad (0 \le \alpha, \beta \le n)$$

$(h|\alpha, \beta\rangle = \sum_{0 \le \gamma, \delta \le n} h^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta} |\gamma, \delta\rangle)$ となる $\hat{X}_i \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ が見つかればよい．

Theorem 3. このような $\hat{X}_i$ は上で定義した $\hat{X}_i$ に *const* X_i を加えることによって実現できる．

参考文献

[1] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, J. Phys. A: Math.Gen. **26** 1493–1517 (1993).

[2] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, Ann. Probab. **35** (2007) 807–832.

[3] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, arXiv:1506.04490.

[4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, in preparation.

[5] A. Kuniba, M. Okado and S. Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, to appear in J. Phys. A: Math. Theor. (arXiv:1503.08536).

[6] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, Selecta Mathematica, New Ser. **3** (1997) 547–599.

5

Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees

中西　知樹　(名古屋大学)

一般団代数 (generalized cluster algebras) は 2011 年に Chekhov と Shapiro が団代数の一般化として導入したものである [2]. 通常の団代数においては団変数 (x 変数) の変異（交換関係式）の右辺に二項式が現れることが特徴的であるが, これを次数 2 以上の一般の多項式に置き換えたものが一般団代数である. 彼らは一般団代数においても団代数と同様に x 変数の Laurent 性が成り立つことを示し, また有限型一般団代数の分類が有限型団代数の分類に帰着されること示した. さらに一般団代数においても団代数と同様に x 変数や y 変数に対して c ベクトル, g ベクトルおよび F 多項式による分離公式がなりたつことが講演者により示された [7]. 以上は前回の学会講演で報告したことである.

本講演では, これに続いて一般団代数の自然な量子化を与えた論文 [6] について報告する. 団代数の量子化においては Berenstein と Zelevinsky [1] による x 変数を量子化するものと Fock と Goncharov [4] による y 変数を量子化するものの二つの定式化があるが, ここでは後者の一般化を考える. Fock と Goncharov による量子化においては量子二重対数関数 (quantum dilogarithm)

$$\Psi_q(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + q^{2m+1}x\right)^{-1}.$$

が本質的な役割を果たす. この関数が古典的な二重対数関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ の量子化であるという重要な認識は 90 年代前半に可積分系の文脈で Faddeev, Kashaev, Volkov らにより得られたもので [3], その後量子二重対数関数は双曲幾何や量子群などとも関連し活発に研究されていることは周知のことであろう. 一般団代数においては, 量子二重対数関数の各因子の「二項式」を「(次数 d の) 多項式」に拡張した「一般化された」量子二重対数関数

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{d} z_s q^{s(2m+1)} x^s \right)^{-1}, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{d-1}),\ z_0 = z_d = 1$$

を用いて y 変数の量子化が定式化される. すなわち, 雑に言えば量子 y 変数の変異がこの関数の随伴作用によって与えられるのである.

以上が [6] の主たる結果であるが, これより一般化された量子二重対数関数に対して以下に述べる重要な帰結が得られる. 量子団代数においては, 任意の量子団代数の周期に対して量子二重対数関数の間の恒等式を得ることができる [5]. たとえば最も簡単で非自明な周期である A_2 型量子団代数に付随する長さ 5 の周期に対して有名な Faddeev と Kashaev の 5 項関係式 (pentagon identity)

$$\Psi_q(Y_1)\Psi_q(Y_2)\Psi_q(Y_1)^{-1}\Psi_q(q^{-1}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_q(Y_2)^{-1} = 1$$

が得られる. ここで, Y_1, Y_2 は非可換な量子 y 変数で関係式 $Y_1Y_2 = q^2Y_2Y_1$ をみたす. これと同様の方法により, 任意の量子一般団代数の周期に対して一般量子二重対数関数の

間の恒等式を得ることができる. たとえば, 最も簡単で非自明な周期である B_2/C_2 型量子一般団代数に付随する長さ 6 の周期に対して以下のような一般量子二重対数関数の間の恒等式が得られる.

$$\begin{aligned}&\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)\Psi_{q^2}(Y_2)\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)^{-1}\\&\quad\times\Psi_{q^2}(q^{-4}Y_1^2Y_2)^{-1}\Psi_{2,(z),q^2}(q^{-2}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_{q^2}(Y_2)^{-1}=1.\end{aligned}$$

ここで, Y_1, Y_2 は非可換な量子 y 変数で関係式 $Y_1Y_2=q^4Y_2Y_1$ をみたす.

参考文献

[1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. in Math. **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.

[2] L. Chekhov and M. Shapiro, *Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables*, Int. Math. Res. Notices **2014** (2014), 2746–2772; arXiv:1111.3963 [math–ph].

[3] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A9** (94), 427–434; arXiv:hep–th/9310070.

[4] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286; arXiv:math/0702397 [math.QA].

[5] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, SIGMA **7** (2011), 102, 29 pages; arXiv:1104.4630 [math.QA].

[6] T. Nakanishi, *Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees*, 2014, arXiv:1410.0584 [math.RA].

[7] ———, *Structure of seeds in generalized cluster algebras*, 2014, arXiv:1409.5967 [math.RA].

シンプレクティック・グラスマン多様体の同変Schubert 類に対する Pfaffian 和公式

池田 岳　(岡山理科大学)[*1]
松村 朝雄　(岡山理科大学)[*2]

シンプレクティック・グラスマン多様体 $SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ シンプレクティック・ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2n}$ における次元 $n-k$ の等方的部分空間のなすグラスマン多様体を $SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ で表す．この多様体はシンプレクティック群 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の等質空間である．極大トーラス $T \subset Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の作用に関する同変コホモロジー環における Schubert 類に対して Pfaffian の和の形の明示公式が得られた.

1. Double Schubert polynomials

旗多様体の同変 Schubert 類を記述するdouble Schubert polynomials について述べる．

W_∞ を C_∞ 型のワイル群とする．その生成元として $s_0, s_1, s_2, \ldots$ を選ぶとき W_∞ は

$$s_i^2 = 1\ (i \geq 0),\ s_0s_1s_0s_1 = s_1s_0s_1s_0,\ s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1},\ s_is_j = s_j = s_js_i\ (|i-j| \geq 2)$$

という関係式で定義される．$\ell : W_\infty \to \mathbb{N}$ を長さ関数とする．$\Gamma = \mathbb{Z}[q_1, q_2, \ldots]$ をSchur Q 関数の環とする．ここに $q_r = q_r(x)$ $(r \geq 1)$ は

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x_iu}{1-x_iu} = \sum_{j=0}^{\infty} q_r(x)u^r$$

により定義される $x = (x_1, x_2, \ldots)$ の形式的冪級数である．$\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n)$ を C_n 型の旗多様体とする．x 以外に $z = (z_1, z_2, \ldots)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$ という2系列の無限変数を用意し，Γ 係数の多項式環 $\mathcal{R}_\infty = \Gamma[z, t]$ を考える．

命題 1 ([2])．全射環準同型 $\pi_n : \mathcal{R}_\infty \longrightarrow H^*_{T_n}(\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n))$ および $\mathcal{R}_\infty$ の $\mathbb{Z}[t]$ 基底 $\mathfrak{C}_w(z,t;x)$ $(w \in W_\infty)$ が存在して

$$\pi_n(\mathfrak{C}_w(z,t;x)) = \begin{cases} [\Omega_w]_{T_n} & (w \in W_n) \\ 0 & (w \notin W_n) \end{cases}$$

が成り立つ．ここに $w \in W_n$ に対して Ω_w を $\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n)$ の *Schubert* 部分多様体とし，$[\Omega_w]_{T_n} \in H^*_{T_n}(\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n))$ をその基本類とする．

2. シンプレクティック・グラスマン多様体の Schubert 部分多様体

$k \geq 0$ に対して $W_{\infty,k} = \langle s_i\ (i \neq k)\rangle$ とおく．Schubert 部分多様体を添字付けるために

$$W_\infty^{(k)} = \{w \in W_\infty \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \quad (\forall i \neq k)\}$$

本研究は科研費 (課題番号:24540032, 15K04832) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14M15, 05E05
キーワード：K-theory, symplectic Grassmannian
[*1] 〒700-0005 岡山市北区理大町 1-1　岡山理科大学 理学部応用数学科
e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp
web: http://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/
[*2] e-mail: matsumur@xmath.ous.ac.jp

とおく．自然な全単射 $W_\infty^{(k)} \cong W_\infty / W_{\infty,k}$ が存在する．$W_n = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ とするとき，$SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ の Schubert 部分多様体は $W_\infty^{(k)} \cap W_n$ によって添字付けられる．この集合に対して，二通りの記述を使う．

非負整数の非増加列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k})$ であって以下をみたすもの全体の集合を $\mathcal{SP}^k(n)$ で表す．(1) $\lambda_i > k$ ならば $\lambda_i > \lambda_{i+1}$（$k$-strict と呼ばれる性質），(2) $\lambda_1 \leq n+k$.

命題 2. 自然な全単射 $W_\infty^{(k)} \cap W_n \cong \mathcal{SP}^k(n)$ が存在する．

定義 3 (characteristic index)**.** $w \in\in W_n^k$ に対して，符号付き置換としての表示 $w = (v_1, \ldots, v_k, -\zeta_1, \ldots, -\zeta_s, u_1, \ldots, u_{n-k-s})$ を用いて *characteristic index* $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ を $\chi = (\zeta_1 - 1, \ldots, \zeta_s - 1, -u_1, \ldots, -u_{n-k-s})$ とする．

$w \in W_\infty^{(k)} \cap W_n$ とするとき $\mathfrak{C}_w(z,t;x)$ は π_n を通して $H^*_{T_n}(SG^k(\mathbb{C}^{2n}))$ の Schubert 類と同一視される．したがって以下の問題を考えればよい．

問題 4. $w \in W_\infty^{(k)}$ に対して $\mathfrak{C}_w(z,t;x)$ を明示的に求めよ．

3. Double theta polynomials と Pfaffian 和公式

定義 5 (Wilson [3] の double theta polynomials)**.** 次で定める関数を考える：

$$\sum_{r=0}^{\infty} \vartheta_r^{(l)}(x,z|t)u^r = \begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} q_r(x)u^r \prod_{i=1}^{k}(1+z_i u) \prod_{i=1}^{l}(1-t_i u) & (l \geq 0) \\ \sum_{r=0}^{\infty} q_r(x)u^r \prod_{i=1}^{k}(1+z_i u) \prod_{i=1}^{-l}(1+t_i u)^{-1} & (l < 0) \end{cases}.$$

Wilson はいわゆる special class が ϑ 関数により表示されることを示している．

定理 6 ([1])**.** $w \in W_\infty^{(k)} \cap W_n$ とし，$\lambda \in \mathcal{SP}^{(k)}(n)$, χ をその *characteristic index* とする．$D(\chi) := \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n-k,\ \chi_i + \chi_j < 0\}$ と定めるとき，次が成り立つ：

$$\mathfrak{C}_w(z,t;x) = \sum_{I \subset D(\chi)} \mathrm{Pfaffian} \left[\vartheta^{(\chi_1)}_{\lambda_1 + a_1^I} \cdots \vartheta^{(\chi_{n-k})}_{\lambda_{n-k} + a_{n-k}^I} \right]$$

ここに $a_s^I = \#\{(j \mid (s,j) \in I\} - \#\{i \mid (i,s) \in I\}$ とした．

注：Wilson [3] は raising operator を使って donble Theta polynomials を定義した．それが定理の右辺で与えられる関数と一致することは形式的な計算で示すことができる．Double Theta polynomials がシンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類を与えるということは Wilson が予想していた．上の定理により Wilson の定理は肯定的に解決された．

参考文献

[1] T. Ikeda, T. Matsumura, Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, Math. Z. 2015, **280**, 269–306.

[2] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. Math. 2011, **226**, 840–886.

[3] E. Wilson, Equivariant Giambelli formulae for Grassmannians, Ph.D. Thesis, University of Maryland, College Park (2010).

シンプレクティック・ベクトル束の K 理論的退化跡

Thomas Hudson (POSTECH, Korea)*1
池田 岳 (岡山理科大学)*2
松村 朝雄 (岡山理科大学)*3
成瀬 弘 (山梨大学)*4

概　要

シンプレクティック構造を持つベクトル束の退化を表す部分多様体（退化跡, degeneracy locus）の構造層が K 理論に定める類を記述することを問題にする．同変コホモロジーにおける結果 ([4]) を自然に拡張する Pfaffian 和公式が得られた．証明は射影束の塔の中に退化跡と双有理な多様体を構成し pushforward を計算することによる．この手法は Kazarian [5] によるコホモロジーの場合の計算法を拡張するものである．

1. シンプレクティック・ベクトル束の退化跡

E を非特異多様体 X 上の階数 $2n$ のベクトル束 X とする．E にはシンプレクティック構造，すなわち $\bigwedge^2 E^\vee$ の至るところ消えない切断が与えられているものとする．E の部分束 V に対して $V^\perp$ をシンプレクティック構造に関する補束とする．V が等方的であるとはシンプレクティック構造が V の上で恒等的に零であること，言い換えると $V_x \subset V_x^\perp$ がすべての点 $x \in X$ で成立することである．非負の整数 $k < n$ に対して $\xi : SG^k(E) \to X$ 階数 $(n-k)$ の等方的部分束をパラメトライズする X 上のグラスマン束とする．

E の部分ベクトル束からなる旗

$$0 = F^n \subset F^{n-1} \subset \cdots \subset F^1 \subset F^0 \subset F^{-1} \subset \cdots \subset F^{-n} = E,$$

であって $\mathrm{rank}(F^i) = n - i$ $(-n \le i \le n)$ かつ

$$(F^i)^\perp = F^{-i} \quad \text{for} \quad 0 \le i \le n$$

をみたすものを選ぶ．$i \ge 0$ ならば F^i は等方的であって特に F^0 はラグランジアン部分束（極大等方部分束）である．U を $SG^k(E)$ 上の同語反復的部分束とする．$\chi \in \mathbb{Z}^{n-k}$ に対して，退化跡 $\Omega_\chi \subset SG^k(E)$ を

$$\Omega_\chi = \{(x, U_x) \in SG^k(E) \mid \dim(F_x^{\chi_i} \cap U_x) \ge i \ \text{ for } i = 1, \ldots, n-k\}$$

と定める．本研究の目的は $SG^k(E)$ 上の連接層のなす Grothendieck 群 $K(SG^k(E))$ において Ω_χ の構造層の類 $[\mathcal{O}_{\Omega_\chi}]$ の明示公式を求めることである．

本研究は科研費 (課題番号: 24540032, 25400041, 15K04832) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14M15, 05E05
キーワード：K-theory, symplectic Grassmannian

*1 e-mail: thomasbhudson@gmail.com
*2 e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp
*3 e-mail: matsumur@xmath.ous.ac.jp
*4 e-mail: hnaruse@yamanashi.ac.jp

2. k-strict partitions

実際には退化跡を決めるデータ $\chi \in \mathbb{Z}^{n-k}$ として意味があるのは，以下に定める k-strict partition λ に付随する場合である．

非負整数の非増加列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k})$ であって以下をみたすもの全体の集合を $\mathcal{SP}^k(n)$ で表す．

- $\lambda_i > k$ ならば $\lambda_i > \lambda_{i+1}$（$k$-strict と呼ばれる性質）
- $\lambda_1 \leq n + k$.

定義 1 (characteristic index)**.** $\lambda \in \mathcal{SP}^k(n)$ に対して *characteristic index* $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ を以下のように定める．$1 \leq i \leq n-k$ に対して

$$\chi_i = \lambda_i - i - k + \#\{\, 1 \leq s \leq i-1 \mid \lambda_s + \lambda_i > 2k + i - s\}$$

とする．

ワイル群の言葉で characteristic index をより自然に記述する方法については [4] または [3] を参照していただきたい．

3. Pfaffian 和公式

定理 2 ([1])**.** $\lambda \in \mathcal{SP}^{(k)}(n)$ とし χ をその *characteristic index* とする．$2m$ を λ の 0 でない成分の個数を超えない最小の偶数とする．

$$D(\chi) := \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n-k,\ \chi_i + \chi_j < 0\}$$

と定めるとき，各部分集合 $I \subset D(\chi)$ に対して K 理論的（相対）*Segre* 類（*[2]*）を用いて明示的に書くことのできる $\Lambda^I_{i,j} \in K(SG^k(E))$ が $1 \leq i < j \leq 2m$ に対して定まり，次が成り立つ：

$$[\mathcal{O}_{\Omega_\chi}] = \sum_{I \subset D(\chi)} \mathrm{Pfaffian}\left(\Lambda^I_{i,j}\right)_{1 \leq i < j \leq 2m}.$$

本定理の証明の方法は幾何学的で Kazarian [5] の方法の自然な拡張である．同変コホモロジーの場合の対応する結果が [4] において代数的，組合せ論的方法で得られていた（[3] も参照）．その結果は本定理からしたがう．

参考文献

[1] T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura, H. Naruse, Determinaltal and Pfaffian formulas of K-theoretic Schubert calculus, ArXiv 1228800

[2] T. Hudson, 池田岳，松村朝雄，成瀬弘，K 理論的 Segre 類について，2015 年日本数学会秋季総合分科会（京都産業大学）代数学分科会アブストラクト

[3] 池田岳，松村朝雄，シンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類に対する Pfaffian 和公式，2015 年日本数学会秋季総合分科会（京都産業大学）無限可積分系セッション・アブストラクト

[4] T. Ikeda, T. Matsumura, Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, Math. Z. 2015, **280**, 269–306.

[5] M. Kazarian, On Lagrange and symmetric degeneracy loci, preprint. available at: http://www.newton. cam.ac.uk/preprints2000.html

シンプレクティック多様体上のジェット束の変形量子化と頂点代数

桑原 敏郎 (National Research University,
Higher School of Economics, Russia)

平成 27 年 9 月 13 日

1 概要

古典的な有限次元のリー群（あるいは代数群）は有限次元の多様体上に定義された可微分な群構造であり、そのリー代数はその上の群演算に関して不変なベクトル場のなす代数構造であるので、リー群に付随する適当な多様体を考えた時にその上の微分作用素環がリー代数の普遍包絡環と密接に関係するというのは自然な対応である。典型的なものはベイリンソン-ベルンシュタイン対応と呼ばれる対応で、半単純リー群の旗多様体上の（ねじれ — twisted）微分作用素環がリー代数の普遍包絡環の中心イデアルによる商代数に一致することを半単純リー代数の表現に応用した。旗多様体はアフィン多様体ではないが、その上の微分作用素環はアフィン性を持つという著しい性質を持つため、旗多様体上の微分作用素のなす層を通して $\mathcal{D}$ 加群の理論を表現論に直接応用できてしまうという部分が強力である。

数理物理や可積分系、無限次元代数の表現論に現れる非可換代数は必ずしもリー代数の普遍包絡環になっているわけではないがいくつかの重要な非可換代数に対してはやはり同様に微分作用素環に類似の代数で適当な多様体上の非可換代数の層としてそれらの代数を実現できることがわかった。代表的なものは有限 $\mathcal{W}$ 代数と有理チェレドニック代数（シンプレクティック鏡映代数）であり、それぞれスロドウィー多様体や箙多様体上にそれらの構造層の変形量子化（非可換変形）によって実現される。これらの代数に対してはここ 10 年ほどの間にこのような変形量子化による実現が表現論や代数構造の研究に応用され、著しい結果が見られた。

変形量子化の観点からは旗多様体上の微分作用素環は多様体の余接束というシンプレクティック多様体の変形量子化とみなすことができる。一方で有限 $\mathcal{W}$ 代数や有理チェレドニック多様体の場合は必ずしも余接束と

限らないシンプレクティック多様体の変形量子化として実現される。通常シンプレクティック多様体上にその構造層の変形量子化となる非可換代数の層を構成するのは簡単ではないが、これらの代数に対してはシンプレクティック幾何学で基本的な多様体の構成方法であるハミルトン簡約の非可換類似を考えることで具体的にそのような変形量子化を構成することができる。この構成は量子ハミルトン簡約と呼ばれる。

アフィンリー代数や頂点代数はループ群や 2 次元の場の理論に関係して現れる代数構造であるので、それらに対して同様の構成を考えようと試みると無限次元のシンプレクティック多様体が現れるのが自然である。例えばアフィングラスマン多様体やアフィン旗多様体なども一例だが、ここでは有限次元のシンプレクティック多様体上のジェット束と呼ばれる無限次元のベクトル束を考える。ジェット束には元のシンプレクティック多様体のシンプレクティック構造から自然にポアソン頂点代数としての構造が誘導される。このポアソン頂点代数の層としての構造の変形量子化 (非可換変形) を考えることで頂点代数を得ることを考えたい。

2　頂点代数・ポアソン頂点代数

ここで頂点代数の基本的な定義についてまとめておく。特に断りのない場合は常に頂点代数は $\mathbb{C}$ 上の頂点代数を考えることとする。

頂点代数 V とはベクトル空間 V とその上のいくつかの構造の組 $V = (V, Y, T, \mathbf{1})$ である。ただし、Y, T, $\mathbf{1}$ はそれぞれ頂点作用素 $Y(—, z) : V \longrightarrow \operatorname{End} V[[z, z^{-1}]]$, 並進作用素 $T : V \longrightarrow V$ および真空ベクトル $\mathbf{1} \in V$ と呼ばれる写像とベクトルであって、次の性質を満たすものである。

- 任意の $a\ b \in V$ に対して $Y(a, z)b \in V((z))$ である。
- (真空公理) 真空ベクトル $\mathbf{1}$ に対して $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_V$。さらに任意の $A \in V$ に対して $Y(A, z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ である。つまり $Y(A, z)\mathbf{1}$ は $z = 0$ と代入できるが、そのとき $Y(A, z)\mathbf{1}|_{z=0} = A$ を満たす。
- (並進公理) 任意の $A \in V$ に対して T が
$$[T, Y(A, z)] = \partial_z Y(A, z),$$
を満たす。さらに真空ベクトルに対しての作用は $T\mathbf{1} = 0$ である。
- (局所公理) 任意の A, $B \in V$ に対してそれらの頂点作用素 $Y(A, z)$, $Y(B, w)$ が次の意味で互いに局所的である: 十分に大きな $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して
$$(z - w)^N [Y(A, z), Y(B, w)] = 0$$

が成立する。

頂点作用素 $Y(—,z)$ は作用素を係数とする形式級数であるので、z の冪で展開して $Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}$ と書くことも多い。ここで $a\in V$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対して $a_{(n)}\in \mathrm{End}\,V$ である。従って頂点代数 V には、各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して ${}_{(n)}: V\times V \longrightarrow V$ と可算無限個の積が与えられていることになる。これら無限個の積を ${}_{(n)}$ 積と呼ぶことにする。これらの ${}_{(n)}$ 積はボルチャーズ恒等式と呼ばれる非常に複雑な式を満たすことが上の公理から自動的に従う。ボルチャーズ恒等式の具体的な形などについては [FBZ] などを参照のこと。

本稿ではさらに $\hbar$-進頂点代数 ($\hbar$-adic vertex algebras) と呼ばれる頂点代数の変種を扱うことになる。不定元 $\hbar$ に対して $\hbar$-進頂点代数 V とはやはり $\mathbb{C}[[\hbar]]$-加群 V 上の次のような構造の組 $V=(V,Y,T,\mathbf{1})$ のことである: 加群 V は $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上平坦であって $\hbar$-進位相に関して完全なものとし、Y,T などは $\mathbb{C}[[\hbar]]$ に関して線形であるとする。$\hbar$-進頂点代数は上の頂点代数の公理のうち 2 番目 3 番目の条件を満たすが最初と最後の条件に関しては、任意の $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\hbar^N$ を法とする同値として条件を満たす。従って任意の N に対して $(V/\hbar^N V,Y,T,\mathbf{1})$ は頂点代数であるが、$(V,Y,T,\mathbf{1})$ そのものは一般には $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上の頂点代数にならない。

このような $\hbar$-進頂点代数 $V=(V,Y,T,\mathbf{1})$ に対して $(V/\hbar V,Y,T,\mathbf{1})$ が可換な頂点代数 (つまり任意の $a\in V$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{(n)}\equiv 0 \bmod \hbar$) とする。この時 $\hbar^{-1}a_{(n)}$ ($a\in V$, $n\geq\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$) は $V/\hbar V$ 上の作用素として ${}_{(-1)}$ 積に関する導分作用素であって、ボルチャーズ恒等式を切り詰めた形の恒等式を満たす。このような代数構造は頂点代数の世界におけるポアソン代数の類似であると考えることができ、ポアソン頂点代数と呼ばれる。このように $\mathcal{O}$ がポアソン頂点代数であるときに、$\hbar$-進頂点代数 V が $V/\hbar V$ が可換頂点代数であって、ポアソン頂点代数として $\mathcal{O}$ と同型である場合に $\hbar$-進頂点代数 V が $\mathcal{O}$ の変形量子化である、ということにする。

さらに $\hbar$-進頂点代数 V に対して $\mathbb{C}((\hbar))$ をテンソル積した代数 $V\otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]}\mathbb{C}((\hbar))$ も本稿では $\hbar$-進頂点代数と呼ぶことにする。([AKM] ではこれは "algebra of Asymptotic Chiral Differential Operators" などと呼んでいたが定義から $\hbar$-進頂点代数は $\mathbb{C}[[\hbar]]$ に関するねじれ部分を持たず、表現論を考えるときも $\mathbb{C}[[\hbar]]$ ねじれ部分を持たない圏で考えるので本質的にはどちらを考えるかに大きな違いはない。) またポアソン頂点代数 $\mathcal{O}$ に対して V が $\mathcal{O}$ の変形量子化であるような $\hbar$-進頂点代数であるならば $V\otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]}\mathbb{C}((\hbar))$ も $\mathcal{O}$ の変形量子化であると言うことにする。

以下では特に区別する必要がない場合には $\hbar$-進頂点代数を単に頂点代数とだけ書くことがある。

3　ジェット束上のポアソン頂点代数構造

有限型スキーム X に対して、その上の無限小弧 (∞-ジェット) のなす集合に適切なトポロジーを入れることで ∞-ジェットスキーム $J_\infty X$ を構成することができる。このスキームは可換環 A に対して $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A, J_\infty X) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A[[t]], X)$ を満たすスキームとして定義され、もとの X が閉点を 1 点しか持たない場合を除けば一般に非有限型スキーム、つまり無限次元の多様体である。非常に基本的な例として $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x^i \mid i = 1, \ldots, d] = \mathbb{C}^d$ とアフィン空間を取ると $J_\infty X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x^i_{(-n)} \mid {}^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$ という無限次元アフィン空間になる。ジェットスキーム $J_\infty X$ から X には各無限小弧の端点をとるという写像 $\pi_\infty : J_\infty X \longrightarrow X$ が自然に定義される。その写像による $J_\infty X$ の構造層の押し出し $(\pi_\infty)_* \mathcal{O}_{J_\infty X}$ を考えると、これは X 上の無限次元ベクトル束とみなすことができる。記号を濫用してこれも $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ と書いて X 上のジェット束と呼ぶ。

多様体 X がシンプレクティック多様体である場合、その構造層 $\mathcal{O}_X$ はポアソン代数の構造を持つ。つまりポアソン積 $\{—,—\} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ が存在してリー代数の公理を満たし、さらに任意の $a \in \mathcal{O}_X$ に対して $\{a, —\}$ はライプニッツ則を満たす。例えば $\mathcal{O} = \mathbb{C}[x^1, \ldots, x^d, y^1, \ldots, y^d]$ に対して、$\{a, b\} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial b}{\partial y_i}$ と定義すると、これは $\mathbb{C}^{2d} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ 上の標準的なシンプレクティック構造に付随するポアソン積になって $\mathcal{O}$ はポアソン代数である。

シンプレクティック多様体 X に対しては、その上のジェット束 $O_{J_\infty X}$ にはポアソン頂点代数としての代数構造が誘導される。無限小弧の端点をとる写像 π_∞ によって X の構造層 $\mathcal{O}_X$ はジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の部分代数と思える。構造層の切断 $a,\, b \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{J_\infty X}$ に対しては $a_{(n)} b = \delta_{n0}\{a, b\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と定義すると、それ以外の切断に対する $_{(n)}$ 積はポアソン頂点代数の公理から一意に定まる。このようにして $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ には標準的なポアソン頂点代数の構造が与えられる。([A])

4　頂点代数の超局所化

第 1 節で書いたとおり目標となるのはシンプレクティック多様体 X 上のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の変形量子化となる X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を考えることである。そこで最初に X が複素多様体 $\underline{X}$ の余接束 $T^*\underline{X}$ であるような場合、特にシンプレクティックベクトル空間 $X = T^*\mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{2d}$ の場合に標準的なポアソン頂点代数構造がどのように $T^*\mathbb{C}^d$ 上に局所化されるかを考えることにする。

まず $T^*\mathbb{C}^d$ 上のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}$ のポアソン頂点代数構造について見てみる。大域切断を考えると $T^*\mathbb{C}^d$ の標準的な座標 $\{x^i, y^i\}_{i=1,\ldots,d}$ に対して

$\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}\big[x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \;\big|\; {}^{i=1,\dots,d,}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\big]\mathbf{1}$ である。頂点代数の慣習に従って単に $x^i_{(-1)}\mathbf{1} = x^i$, $y^i_{(-1)}\mathbf{1} = y^i$ と書き、これらは $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d} \subset \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}$ の元と同一視する。するとこの上のポアソン頂点代数構造は $y^i_{(0)}x^j = \{y^i, x^j\} = \delta_{ij}$ から誘導されるので、具体的には $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ という交換関係を満たすものである。ポアソン頂点代数の定義から、任意の $a \in \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{(n)}$ は $_{(-1)}$ 積に関する導分作用素であるので、$_{(-1)}$ 積に関する積閉集合 $S \subset \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ によって局所化された代数 $V[S^{-1}]$ 上には $a_{(n)}$ の作用が自然に拡張されることが従う ([AKM, Lemma 2.1.2.1])。

大域切断のなすポアソン頂点代数 $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ の変形量子化がいわゆる $\beta\gamma$ 系で与えられるのは明らかである。具体的には次の $\hbar$-進頂点代数を考える: $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 加群としては

$$\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}[[\hbar]]\big[\, x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \;\big|\; {}^{i=1,\dots,d,}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\,\big]\mathbf{1}$$

で与えられる。また頂点代数としての $_{(n)}$ 積は交換関係 $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \hbar\delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ から自然に定まるものとする。定義から、これは通常の $\{x^i, \partial^i\}_{i=1,\dots,d}$ を生成元とする $\beta\gamma$ 系に対して $x^i \mapsto x^i$, $\partial^i \mapsto \hbar y^i$ と代入して得られる代数構造と同じであるので、自然な $\hbar$-進頂点代数としての $\beta\gamma$ 系の類似である ([FBZ, Section 11.3]) 。また構成から明らかに $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d)/\hbar\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d)$ はポアソン頂点代数として $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ と同型である。

さらに $\beta\gamma$ 系 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ における $_{(n)}$ 積 $a_{(n)}b$ はいわゆるウィック公式 (Wick formula) が成立しているので、これは $a, b \in \mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ に関して双微分作用素になっている。従って a, b が $x^i_{(-m)}$, $y^i_{(-m)}$ を変数とする有理式の場合にもその双微分作用素を適用することによって $_{(n)}$ 積 $a_{(n)}b$ を定義することができる。この定義は完全にアルゴリズム的であって、実際に数式処理プログラムなどでウィック公式を双微分作用素の形に書き直すことで有理式を含んだ形の $_{(n)}$ 積を計算させることが可能である。このような $_{(n)}$ 積の拡張によって $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}$ は $X = T^*\mathbb{C}^d$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層として構成でき、構成から自動的にポアソン頂点代数の層 $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d}$ の変形量子化を与える。([AKM, Section 2.2])

同様にシンプレクティック多様体 X が複素多様体 $\underline{X}$ の余接束 $X = T^*\underline{X}$ であり、さらに $\underline{X}$ 上に [GMS] で導入されたカイラル微分作用素の層が存在するならば、その $X = T^*\underline{X}$ 上への (超) 局所化 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\underline{X},\hbar}$ が $\hbar$-進頂点代数の層として構成できて、$\mathcal{O}_{J_\infty T^*\underline{X}}$ の変形量子化を与える。

5　ハミルトン簡約

ハミルトン簡約はシンプレクティック多様体とその上のリー群の作用から新しいシンプレクティック多様体を構成する方法である。本稿では中島箙多様体のような応用上重要なシンプレクティック多様体を念頭に次のようなハミルトン簡約を考える。

有限次元複素ベクトル空間 V を取り、リー群 G が線形表現として作用しているものとする。さらに G はいくつかの一般線形群の直積であるとする。リー群 G の作用は余接束 T^*V 上に自然に拡張されるが、同時に座標環 $\mathbb{C}[V]$ に誘導される G の表現はリー環 $\mathfrak{g} = LieG$ の表現写像 $\mu_D : \mathfrak{g} \longrightarrow Vect(V)$ を誘導する。ここで、$Vect(V)$ は V 上のベクトル場のなすリー環であるとする。この写像 μ_D の像は微分作用素であるので、μ_D は可換環の間の準同型 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ を誘導し、従ってその双対となる代数多様体の間の射 $\mu : T^*V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ が定義される。この射 μ をモーメント写像と言う。このような設定から T^*V のリー群 G の作用によるハミルトン簡約 $X_0 = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$ を考えることができ、自動的に $\mathbb{C}[T^*V]$ のポアソン構造は $\mathbb{C}[X_0] = \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$ のポアソン構造を誘導する。従って、X_0 はポアソン代数多様体である。ただし G の作用は自由でないので、T^*V はなめらかなシンプレクティック多様体であるが、X_0 は特異点を持つ。

そこで幾何学的不変式論を応用して X_0 の特異点解消を与えるシンプレクティック多様体を次のように構成する。リー群 G の表現に関する半安定点をとることによって T^*V のザリスキ開な部分集合 $\mathfrak{X}$ を取ることができ、$\mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}$ 上に G が自由に作用する。従って、$X = \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}/G$ はなめらかな多様体であって、構成から自動的にシンプレクティック多様体になる。

ハミルトン簡約 X の構造層もまた G の $\mathcal{O}_{T^*V}$ への作用を使って具体的に構成できる。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ の構造層は $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{T^*V}|_{\mathfrak{X}}$ であり、その上には同変 G 作用が存在する。上に挙げた準同型 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ を用いて、この同変 G 作用が誘導するリー環 $\mathfrak{g}$ の作用は $\{\mu^*(A), —\}$ $(A \in \mathfrak{g})$ と書くことができる。さらに X の構造層は次のように実現される:

$$\mathcal{O}_X = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\, \mu^*(\mathfrak{g})))^G.$$

ただしここで $p : \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X} \longrightarrow X$ は射影写像である。さらに上の式で μ^* の像を適当にひねることで X 上の任意の直線束 (可逆層) も同様に構成できることが幾何学的不変式論から容易に結論される。リー群 G の乗法的指標群 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ は微分によってベクトル空間 $(\mathfrak{g}^*)^G$ の格子と同一視される。パラメタ $\lambda^* \in (\mathfrak{g}^*)^G$ が $\lambda^* \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ であるとき、

$$\mathcal{O}_X(\lambda^*) = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\, (\mu^* - \lambda^*)(\mathfrak{g})))^G$$

は X 上の直線束を定義する。さらに $\lambda^* \in (\mathfrak{g}^*)^G$ を不定元とみなして

$$\mathcal{O}_X^{tw} = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\lambda^*]/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\lambda^*]\ (\mu^* - \lambda^*)(\mathfrak{g})))^G$$

とすると、$\mathcal{O}_X^{tw}$ は X 上のベクトル束である。

6 $\frac{\infty}{2}$-簡約によるハミルトン簡約 X 上の頂点代数

前節でハミルトン簡約によってベクトル空間 V 上のリー群 G の線形表現からシンプレクティック多様体 X を構成したが、それと類似の方法によって X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を構成することができる。

ベクトル空間 V の余接束 T^*V 上には第 4 節の方法で $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ が構成される。構造層 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 上の同変 G 作用が準同型写像 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ とポアソン積によって記述されハミルトン簡約が構成されたように、X 上の $\hbar$-進頂点代数の構成には μ^* の $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ 上への持ち上げをどう構成するかがキーポイントとなる。そのような持ち上げをカイラルモーメント写像と呼ぶことにする。

本節では $G = (\mathbb{C}^*)^d$ は有限次元のトーラスとする。必要ならばベクトル空間 V の基底を取り替えることで座標環 $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x^1, \ldots, x^N]$ の基底 $x^1, \ldots, x^N$ は G の作用に関するウェイトベクトルであって整数行列 $(\mu_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,d\\ j=1,\ldots,N}}$ によって x^j のウェイトが $(\mu_{1j}, \ldots, \mu_{dj})$ で与えられていると仮定できる。双対基底をとると $\mathbb{C}[T^*V] = \mathbb{C}[x^1, \ldots, x^N, y^1, \ldots, y^N]$ であって、y^j はやはりウェイトベクトルでそのウェイトは $(-\mu_{1j}, \ldots, -\mu_{dj})$ で与えられる。リー環 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^d$ の基底を $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}A^i$ と置くと準同型写像 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ は具体的には $\mu^*(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j y^j$ の形で書ける。

ジェット束の性質からリー群 G の T^*V への作用は自動的に無限次元リー群 $J_\infty G$ の $J_\infty T^*V$ 上の作用に持ち上がる。さらにその作用は頂点代数の準同型 $J_\infty\mu^* : V_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{O}_{J_\infty T^*V}$ を用いて記述することができる。ここで $V_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[A^i_{(-n)}|^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$ は可換な頂点代数であり、$J_\infty\mu^*$ は具体的に $(J_\infty\mu^*)(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j$ で与えられる。$J_\infty\mu^*$ はポアソン頂点代数としての準同型になる。カイラルモーメント写像 μ^{ch} は、この準同型 $J_\infty\mu^*$ の、$\mathcal{O}_{J_\infty T^*V}$ の量子化である $\hbar$-進頂点代数 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ への持ち上げになっていなければならない。素朴に考えると $\mu^{ch}(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j \in \mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}(T^*V)$ のような定義が考えられるが、量子化された場合には各項の間の ${}_{(1)}$ 積が $(x^j_{(-1)} y^j)_{(1)}(x^j_{(-1)} y^j) = -\hbar^2 \neq 0$ であるので、この定義は μ^{ch} が $V_0(\mathfrak{g})$ からの頂点代数の準同型にならず失敗する。そこで次のようなトリックを用いる。まず $\lambda^{1,*}, \ldots, \lambda^{d,*}$ という生成元を持つ $\hbar$-進ハイゼ

ンベルグ頂点代数 $V(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\lambda^{i,*})$ を導入する。この頂点代数はベクトル空間としては

$$V(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\lambda^{i,*}) = \mathbb{C}((\hbar))[\lambda^{i,*}_{(-n)} \mid {}^{i=1,\dots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$$

であり、それら間の $_{(n)}$ 積は $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\lambda^{p,*}_{(n)}\lambda^{q,*} = \delta_{n1}\hbar^2 \sum_{j=1}^N \mu_{pj}\mu_{qj}$ で与えられる頂点代数である ([FBZ, Section 5.4.1])。反安定部分集合 $\mathfrak{X}$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層を単純に $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ の制限によって $\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}|_{\mathfrak{X}}$ と定義する。さらに $\mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes V(\bigoplus_i \lambda^{i,*})$ を頂点代数のテンソル積とし、カイラルモーメント写像は

$$\mu^{ch} : V_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}(\mathfrak{X}), \qquad \mu^{ch}(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j - \lambda^{i,*}$$

と定義すると、これは頂点代数の準同型になる。

このカイラルモーメント写像 μ^{ch} を用いて $\hbar$-進頂点代数 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ から X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を構成する。まずフェルミオン作用素 $\psi^{i,*}$, ψ^i $(i = 1, \dots, d)$ を生成元とするクリフォード頂点 (超) 代数 (フェルミオン自由場頂点代数) を

$$Cl^{\bullet} = Cl^{\bullet}(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\psi^{i,*} \oplus \mathbb{C}\psi^i) = \bigwedge(\psi^{i,*}_{(-n)}|^{i=1,\dots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}) \otimes \bigwedge(\psi^{i}_{(-n)}|^{i=1,\dots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}})$$

とする。ここで右辺の $\bigwedge(a_i|i \in I)$ は a_i $(i \in I)$ が生成する外積代数である。この頂点 (超) 代数の $_{(n)}$ 積は生成元の間の反交換関係 $[\psi^i_{(m)}, \psi^{j,*}_{(n)}]_+ = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[\psi^i_{(m)}, \psi^j_{(n)}]_+ = [\psi^{i,*}_{(m)}, \psi^{j,*}_{(n)}]_+ = 0$ によって定まる。([FBZ, Section 5.3.1]) また $Cl^{\bullet}$ は $\deg \psi^{i,*}_{(-n)} = 1$, $\deg \psi^i_{(-n)} = -1$ により $\mathbb{Z}$ 上次数付けされた次数付き頂点代数となる。テンソル積頂点代数 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet} = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes Cl^{\bullet}$ もまたこの次数付けによって次数付き頂点 (超) 代数の構造を持つ。また $Q \in C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{X}) = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}(\mathfrak{X}) \otimes Cl^{\bullet}$ を $Q = \sum_{i=1}^d \hbar^{-1}\mu^{ch}(A^i) \otimes \psi^{i,*}$ と定義すると Q は次数 1 の元である。カイラルモーメント写像 μ^{ch} は可換頂点代数 $V_0(\mathfrak{g})$ からの頂点代数の準同型であるので任意の i, j および $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A^i)_{(n)}\mu^{ch}(A^j) = 0$ を満たす。この事実から頂点代数 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の作用素 $Q_{(0)}$ は $(Q_{(0)})^2 = 0$ を満たすことが従う。作用素 $Q_{(0)}$ は $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の次数 $+1$ の作用素であるので、$(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ はコチェイン複体を構成する。この複体に付随する 0 次コホモロジー

$$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar} = H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

は X 上の $\hbar$-進頂点代数の層をなす。このようなコホモロジーによる構成を $\frac{\infty}{2}$-簡約 (semi-infinite reduction) という。

このように構成された X 上の $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X の構造層のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の量子化ではないが、次の意味で X の普遍直線束 $\mathcal{O}^{tw}_X$ のジェット束の量子化とみなすことができる。

Proposition 6.1 リー群 G はトーラスでモーメント写像 $\mu : T^*V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ 上平坦であると仮定する。このとき上の構成によって得られる $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X 上の $\hbar$-進頂点代数の層であり、$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}/\hbar\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ はポアソン頂点代数の層として普遍直線束 $\mathcal{O}^{tw}_X$ のジェット束 $H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}/\hbar C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)} \bmod \hbar)$ に同型である。

またこの系として、$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ の C_2-ポアソン代数が $\mathcal{O}^{tw}_X$ に一致することも自動的に従う。

さらにここで構成した $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X 上の層であるため、適当な開集合 $U \simeq T^*\mathbb{C}^m \subset X$ における局所切断 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U)$ を考えることができるが、これは構成から $\beta\gamma$ 系とハイゼンベルグ頂点代数のテンソル積になる。従って、大域切断を局所座標で書き直すことにより、原理的には大域切断のなす頂点代数 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(X)$ の自由場表示が定義から自動的に得られることになる。実際に後で見るように $X = T^*\mathbb{P}^1$ の場合にはこの自由場表示は脇本加群と一致しているため、このような局所座標による表示は脇本加群の類似とみなせる。

上にあげた構成では G をトーラスであると仮定したが、G がいくつかの一般線形群の直積である場合にも同様の構成を考えることができる。定義に際してキーとなるのは量子化に際して非自明な $_{(1)}$ 積がでるのを避けるために、$\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に新しい作用素を加えてカイラルモーメント写像をレベル 0 の頂点代数の準同型と定義することである。ただし結果として現れる頂点代数の意味付けについて不明な部分が多いので、本稿では G がトーラスの場合に限定した。

7 基本的な例

非常に基本的な場合として簡単に計算できる $X = T^*\mathbb{P}^1$ の場合の構成を実際に計算してみることにしよう。

まず $X = T^*\mathbb{P}^1$ そのもののハミルトン簡約による構成だが、ここでは次のようなハミルトン簡約を考える。まず $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}x^1 \oplus \mathbb{C}x^2$ を 2 次元ベクトル空間とし、V 上の $G = \mathbb{C}^*$ の作用を $t.(x^1, x^2) = (tx^1, t^{-1}x^2)$ $(t \in \mathbb{C}^*)$ とする。(x^1, x^2) の双対座標を (y^1, y^2) とすると $(x^i, y^i)_{i=1,2}$ が T^*V の座標で、$t \in \mathbb{C}^*$ の作用は $t.(x^1, x^2, y^1, y^2) = (tx^1, t^{-1}x^2, t^{-1}y^1, ty^2)$ となる。第 5 節 で説明したようにモーメント写像 μ は G の V 上の作用から誘導される $\mathfrak{g} = LieG = \mathbb{C}A$ の表現 $\mu_D : \mathfrak{g} = \mathbb{C}A \longrightarrow D(V)$ で定ま

るが、双対写像 μ^* は具体的には $\mu^*(A) = x^1y^1 - x^2y^2$ と書ける。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ は (安定性条件のパラメタによって) 2 つの異なる候補があるが、ここでは $\mathfrak{X} = \{x^2 \neq 0 \text{ or } y^1 \neq 0\} \subset T^*V$ と取る。従ってハミルトン簡約 X は

$$X = \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}/G = \{(x^1, x^2, y^1, y^2) \mid x^1y^1 = x^2y^2, (x^2 \neq 0 \text{ or } y^1 \neq 0)\}/\mathbb{C}^*$$

と定義され、これは明らかに $T^*\mathbb{P}^1$ の斉次座標による実現に一致している。さらに部分集合 $\tilde{U}_1 = \{y^1 \neq 0\}$, $\tilde{U}_2 = \{x^2 \neq 0\} \subset \mathfrak{X}$ を取り、$U_i = \mu^{-1}(0) \cap \tilde{U}_i/G$ と定義する。すると $U_i \simeq \mathbb{C}^2$ であって局所座標 $(U_1; w = x^2/y^1, \partial_w = -y^1y^2)$, $(U_2; z = y^1/x^2, \partial_z = x^1x^2)$ は $X = T^*\mathbb{P}^1$ の標準的な非斉次座標を与えている。構成層の実現は

$$\mathcal{O}_X = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(x^1y^1 - x^2y^2)))^{\mathbb{C}^*}$$

と書ける。

いよいよ $X = T^*\mathbb{P}^1$ 上に $\hbar$-進頂点代数の層を構成する。まず $T^*V = T^*\mathbb{C}^2$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層を与える $\hbar$-進 $\beta\gamma$ 系 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}$ はベクトル空間としては

$$\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}(T^*\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}((\hbar))\big[x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \ \big| \ {\textstyle{i=1,2 \atop n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}}\big]\mathbf{1}$$

である。これは交換関係 $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}\hbar$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ で定義される $\hbar$-進頂点代数の構造を持つ。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ 上の層を $\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}|_{\mathfrak{X}}$ とする。リー群 $G = \mathbb{C}^*$ の作用に付随する $\frac{\infty}{2}$-簡約を構成するため、カイラルモーメント写像 μ^{ch} を次のように定義する:

$$\mu^{ch} : V_0(\mathbb{C}A) \longrightarrow \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes V_{2\hbar^2}(\mathbb{C}((\hbar))\lambda^*),$$
$$\mu^{ch}(A) = x^1_{(-1)}y^1 - x^2_{(-1)}y^2 - \lambda^*.$$

ここで、$V_0(\mathbb{C}A) = \mathbb{C}[A_{(-n)}|n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}]$ は可換頂点代数であり、$V_{2\hbar^2}(\mathbb{C}\lambda^*) = \mathbb{C}((\hbar))[\lambda^*_{(-n)}|n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}]$ は $_{(n)}$-積が $\lambda^*_{(n)}\lambda^* = 2\hbar^2\delta_{n1}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で定まる $\hbar$-進ハイゼンベルグ頂点代数である。実際に計算すれば $(x^i_{(-1)}y^i)_{(n)}(x^j_{(-1)}y^j) = -\hbar^2\delta_{n1}\delta_{ij}$ なので、μ^{ch} は頂点代数の準同型である。

このカイラルモーメント写像 μ^{ch} により定義される $\frac{\infty}{2}$-簡約が具体的には次のように構成される。頂点代数

$$Cl^\bullet = Cl^\bullet(\mathbb{C}\psi^* \oplus \mathbb{C}\psi) = \bigwedge(\psi^*_{(-n)}, \psi_{(-n)} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})\mathbf{1}$$

は反交換関係 $[\psi^*_{(m)}, \psi_{(n)}]_+ = \delta_{m+n,-1}$, $[\psi^*_{(m)}, \psi^*_{(n)}]_+ = [\psi_{(m)}, \psi_{(n)}]_+ = 0$ から定まるフェルミオン作用素 $\psi^*_{(n)}$, $\psi_{(n)}$ で生成される頂点代数 (クリ

フォード頂点代数) である。この頂点代数は $\deg\psi^*_{(n)} = 1$, $\deg\psi_{(n)} = -1$ で $\mathbb{Z}$ 上次数付きの頂点代数となる。従って、頂点代数のテンソル積 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet} = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes_{\mathbb{C}} Cl^\bullet$ もまた $\mathbb{Z}$ 上次数付きの頂点代数の構造を持つ。もちろんここで任意の $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に対して $a \otimes \mathbf{1} \in C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ は次数 0 の元とする。この頂点代数の次数 1 の元 $Q \in C^{\frac{\infty}{2}+1}$ を $Q = \hbar^{-1}\mu^{ch}(A) \otimes \psi^*$ と定義する。すると

$$\hbar Q_{(0)} = \cdots + \mu^{ch}(A)_{(1)} \otimes \psi^*_{(-2)} + \mu^{ch}(A)_{(0)} \otimes \psi^*_{(-1)} + \mu^{ch}(A)_{(-1)} \otimes \psi^*_{(0)} + \ldots \tag{1}$$

という無限和であるが、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A)_{(n)}\mu^{ch}(A) = 0$ と $\psi^*_{(n)}\psi^* = 0$ を使えば、$(Q_{(0)})^2 = 0$ が $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上で成立する。従って $(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ がコチェイン複体になり、その 0 次コホモロジーとして X 上の $\hbar$-進頂点代数の層

$$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar} = H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

が得られる。

実際にここで得られた $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ がどのような元を含むか調べてみることにしよう。まず $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に対して $a \otimes \mathbf{1} \in \mathbb{C}^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ がコサイクルになるためには (1) より任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A)_{(n)}a = 0$ であることが必要十分である。ここでより詳しく見ると、

$$\mu^{ch}(A)_{(0)} = x^1_{(-1)}y1_{(0)} + y^1_{(-1)}x^1_{(0)} - x^2_{(-1)}y^2_{(0)} - y^2_{(-1)}x^2_{(0)} + \ldots$$

であるので、$\mu^{ch}(A)_{(0)}a = 0$ は a が G-作用に関して不変であることと同値である。一方で $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ は

$$\begin{aligned}\mu^{ch}(A)_{(1)} = (x^1_{(-1)}y1_{(1)} + y^1_{(-1)}x^1_{(1)} - x^2_{(-1)}y^2_{(1)} - y^2_{(-1)}x^2_{(1)}) \\ + (x^1_{(0)}y^1_{(0)} - x^2_{(0)}y^2_{(0)} - \lambda^*_{(1)}) + \ldots\end{aligned}$$

という作用素であるので、$a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ は G-不変であるだけではコサイクル条件を満たさない。また上の $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ で最初の項 $(x^1_{(-1)}y^1_{(1)} + \cdots$ は $\hbar$ の次数を 1 上げ、2 番目の項 $(x^1_{(0)}y^1_{(0)} + \cdots$ は $\hbar$ の次数を 2 上げるためポアソン頂点代数のコチェイン複体 $(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}/\hbar C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)} \bmod \hbar)$ には 2 番目の項は現れないことになる。つまり $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ の 2 番目の項こそがこのようなトーラス作用に関する頂点代数の $\frac{\infty}{2}$-簡約において固有の振る舞いを記述する項である。実際に $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ として $a = x^1_{(-1)}x^2$, $y^1_{(-1)}y^2$ および $x^i_{(-1)}y^i$ $(i = 1, 2)$ という大域切断を取れば、これらはすべて G-不変であり従って $\mu^{ch}(A)_{(0)}a = 0$ である。また、$\mu^{ch}(A)_{(1)}a = 0 \pmod{\hbar^2}$ もこれらのすべての a に対して成立するが、一方で $\mu^{ch}(A)_{(1)}(x^i_{(-1)}y^i) = \pm\hbar^2 \neq 0$

であり、従って $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(X)$ は $x^i_{(-1)}y^i\otimes\mathbf{1}$ の形の大域切断を持たない。しかし、$a=2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*$ や $2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*$ とすれば $\mu^{ch}(A)_{(1)}a=0$ であって、$a\otimes\mathbf{1}$ がコサイクルであることが確認できる。さらに $(2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)-(2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*)=2\mu^{ch}(A)$ より $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ の中でこれら 2 つのコサイクルが同じ大域切断を定義する。ここで得られた大域切断は次のようにアフィン頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ を生成している。実際 $e=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$, $f=-y^1_{(-1)}y^2\otimes\mathbf{1}$, $h=(2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)\otimes\mathbf{1}=(2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*)\otimes\mathbf{1}$ とおくと、$\beta\gamma$ 系やハイゼンベルグ頂点代数に関する基本的な計算からアフィン頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ の定義関係式が確認できる。

局所座標による表示が脇本加群を与える証左として、局所切断 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ を計算してみよう。局所座標 $z=y^1_{(-1)}(x^2)^{-1}\otimes\mathbf{1}$, $\partial_z=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$ は共に $Q_{(0)}z=Q_{(0)}\partial_z=0$ を満たしていて $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ の元を与えることが容易に確認できる。また $\lambda^*\otimes\mathbf{1}$ は $\mu^{ch}(A)_{(1)}\lambda^*\neq 0$ であるためコサイクルではないが、$\lambda^*_{U_2}=(\lambda^*-2\hbar x^2_{(-2)}(x^2)^{-1})\otimes\mathbf{1}$ は $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ の元を与える。上で具体的に構成した大域切断 $e=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$, $h=(2x^1_{(-1)}y^2-\lambda^*)\otimes\mathbf{1}$, $f=-y^1_{(-1)}y^2$ を U_2 上の局所座標 $(z,\partial_z,\lambda^*_{U_2})$ を用いて書き直すことにより、次のように自由場表示を得る:

$$
\begin{aligned}
e&=x^1_{(-1)}x^2=\partial_z,\\
h&=2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*=2z_{(-1)}\partial_z-\lambda^*_{U_2},\\
f&=-y^1_{(-1)}y^2=-(x^2_{(-1)}y^2)_{(-1)}(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})+\hbar y^1_{(-1)}x^2_{(-2)}(x^2)^{-2}\\
&=-(x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)_{(-1)}(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})+\hbar(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})_{(-1)}(x^2_{(-2)}(x^2)^{-1})\\
&=-(\partial_z)_{(-1)}z_{(-1)}z+z_{(-1)}\lambda^*_{U_2}-\hbar z_{(-2)}\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

これはレベル -1 のアフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の脇本加群に一致している。

他のハミルトン簡約に関しても上と同様に具体的に計算が遂行できる場合が少なくない。例えば、$V=\mathbb{C}^3$ 上の適当な 2 次元トーラス $G=(\mathbb{C}^*)^2$ の作用を考えることでレベル $k=2$ の Bershadsky-Polyakov 代数 $\mathcal{W}^{(2)}_3$ を構成することができる。予想としては A 型サブレギュラー冪零軌道に付随する $\mathcal{W}$ 代数が同様の構成から得られる。

またこの構成で直接得られたのはレベル -1 のアフィン $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ であるが、[C] がカイラル微分作用素 (CDO) に対して Courant algebroid を用いて構成したのと同様に層の貼り合わせの準同型とハイゼンベルグ頂点代数の $_{(n)}$ 積 $\lambda^*_{(n)}\lambda^*$ を同時に変形することによって、任意のレベル k のアフィン頂点代数 $V_k(\mathfrak{sl}_2)$ を $T^*\mathbb{P}^1$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層として実現できる。

参考文献

[A] T. Arakawa: A remark on the C_2-finiteness condition for vertex algebras, Math. Z. **270** (2012), no. 1-2, 559-575.

[AKM] T. Arakawa, T. Kuwabara and F. Malikov, Localization of Affine W-algebras, Comm. Math. Phys. **335** (2015), no. 1, 143-182.

[C] D. Chebotarov, Classification of transitive vertex algebroids, Ph. D thesis, University Of Southern California, `arXiv:1010.3385 [math.QA]`.

[FBZ] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs **88**, American Mathematical Society, Providence, RI (2004)

[GMS] V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids, Invent. Math. **155** (2004), no. 3, 605-680.

Weierstrass' Elliptic Function Solution to the Autonomous Limit of the String Equation

Yoshikatsu SASAKI (Hiroshima University)*

Abstract

In this talk, we study the string equation of type (2,2n+1), which is derived from 2D gravity theory or the string theory. We consider the equation as a $2n$-th order analogue of the first Painlevé equation, take the autonomous limit, and find its solutions concretely expressed by the Weierstrass' elliptic function $\wp(z)$.

1. Introduction

1.1. The string equation

Put $D = d/dz$. Consider the commutator equation of ordinary differential operators

$$[Q, P] = 1, \quad Q := D^q + \sum_{k=2}^{q} w_k D^{q-k}, \ P := D^p + \sum_{k=2}^{p} v_k D^{p-k}. \qquad (S_{(q,p)})$$

We call it the string equation (or Douglas equation) of type (q, p), which appears in the string theory or the theory of quantum gravity in 2-dimensions [3, 4, 7, 10, 11, 1, 9, 13].

In the followings, we set $q = 2$, $p = 2n + 1$. In the case where $q = 2, p = 3$, the string equation is written as an ODE satisfied by the potential w of Sturm-Liouville operator $Q = D^2 + w$, and then, by a fractional linear transformation, it is reduced to the first Painlevé equation $u'' = 6u^2 + z$. See [6, 5, 2].

1.2. The First Painlevé Hierarchy

Let D or $'$ stand for the differentiation with respect to z, and D^{-1} stand for the inverse operator of D. Consider the serial equations

$$d_{n+1}[w]/4 + z = 0 \qquad ({}_{2n}P_{\mathrm{I}})$$

for $n \in \mathbb{N}$, where $d_{n+1}[w]$ is an expression of a given meromorphic function w defined by $d_0[w] = 1$ and $Dd_{n+1}[w] = DG_w d_n[w]$ with $G_w := D^2 - 4D^{-1}(2wD + w')$. The equations are derived from the singular maniford equation for the KdV hierarchy, and we call them *the first Painlevé hierarchy* [14, 8, 5].

As proved in [13], the string equation of type $(2, 2n+1)$ is equivalent to $({}_{2n}P_{\mathrm{I}})$. So, in this talk, we also call ${}_{2n}P_{\mathrm{I}}$ the string equation of type $(2, 2n + 1)$.

Note that S. Shimomura [12] proved that each $d_n[w]$ is a differential polynomial of $2n$-th order, i.e. each ${}_{2n}P_{\mathrm{I}}$ is an ordinary differential equation of $2n$-th order; and that, at each pole $z = z_0$, each meromorphic solution to ${}_{2n}P_{\mathrm{I}}$ has the form $w(z) = \frac{k(k+1)/2}{(z-z_0)^2} + O(1)$ for some positive integer $k = k(z_0) \in \{1, ..., n\}$.

2000 Mathematics Subject Classification: 74K05, 34M55, 33E05.
Keywords: String equation, Painlevé hierarchy, Elliptic functions.
*e-mail: sasakiyo@hiroshima-u.ac.jp

1.3. The Autonomous Limit

The first Painlevé equation has the autonomous limit [2]. Replacing (w, z) by $(\epsilon^{-2}w, \epsilon z$, and taking limit $\epsilon \to 0$, we obtain $w'' = 6w^2 + b$ which is satisfied by the Weierstrass' elliptic function, i.e. $\wp(z) := z^{-2} + \sum_{m,n}{}'\{(z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\}$, where $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ for some $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ satisfying $\omega_3/\omega_1 \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}|\mathrm{Im}\ z > 0\}$. Here $\sum'_{m,n}$ means the sum for $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ except for $(0, 0)$. It is well-known that $\wp(z)$ is doubly periodic meromorphic function with two periods $2\omega_1, 2\omega_3$. $\wp(z)$ satisfies the differential equation $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ and then $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - g_2/2$, where $60g_2 := \sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-4}$, $140g_3 := \sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-6}$.

2. Results

A result similar to the above and one in [YS: *Adv. Pure Math.* **4** (2014), 494–497.] is valid for $n \in \mathbb{N}$. That is

Theorem 1. *The autonomous limit of the string equation of type* $(2, 2n + 1)$ *is given by*

$$d_n[w]/4 + b = 0,\ b \in \mathbb{C}. \qquad ({}_{2n}ALP_{\mathrm{I}})$$

For this equation equivalent to a Hamiltonian system with degree of freedom 2, we give a first integral.

Theorem 2. *The auxiliary differential polynomial* $c_n[w]$ *defined in [YS: Proc. Japan Acad.* **91** *(2015), 7–8.] by* $c_n[w]$ *by* $Dc_n[w] = wDd_n[w]$ *is a first integral of* $({}_{2n}ALP_{\mathrm{I}})$*.*

The following theorem is an extension of the result for $n = 2$ in [YS: *Adv. Pure Math.* **4** (2014), 494–497; *ibid.*, 680–681.]

Theorem 3. *For each integer* k *satisfying* $1 \le k \le n$*,*

$$w(z) = \frac{k(k+1)}{2}\wp(z)$$

is a solution to $({}_{2n}ALP_{\mathrm{I}})$ *with suitable parameters.*

References

[1] M. Adler and P. van Moerbeke, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 25–26.

[2] R. Conte and M. Mussette, *The Painlevé handbook*, Springer, Dordrecht, 2008.

[3] M. R. Douglas, *Phis. Lett. B*, **238**(1990), 176–180.

[4] M. Fukuma, H. Kawai and R. Nakayama, *Comm. Math. Phys.*, **143**(1991), 371–403.

[5] V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.

[6] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, New York, 1956.

[7] V. Kac and A. Schwarz, *Phys. Lett. B*, **257**(1991), 329–334.

[8] N. A. Kudryashov, *Phys. Lett. A*, **224** (1997), 353–360.

[9] P. van Moerbeke, *Lectures on integrable systems*, World Sci. Publishing, Singapore; River Edge, NJ, 1994, pp.163–267.

[10] G. Moore, *Comm. Math. Phys.*, **133**(1990), 261–304; *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **102**(1990), 255–285.

[11] A. Schwarz, *Mod. Phys. Lett. A*, **29**(1991), 2713–2725.

[12] S. Shimomura, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **40**(2004), 471–485.

[13] K. Takasaki, *SIGMA*, **3**(2007), 42–116.

[14] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 13–24.

パデ近似の q 差分パンルヴェ方程式への応用

長尾秀人（明石高専一般科目）

パデ近似と呼ばれる有理関数による近似を応用して，q 差分パンルヴェ方程式 $E_6^{(1)}$ 型から $(A_2 + A_1)^{(1)}$ 型までに対する，時間発展方程式，ラックス形式および超幾何型特殊解を構成した．本講演では，その結果について報告する．

1 パデ法

パデ法とは，適当な特殊多項式の母関数 $Y(x)$ を与え, パデ近似 (補間) の問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (mod \ \ x^{m+n+1}) \tag{1.1}$$

を設定して，$\{P_m(x), Y(x)Q_n(x)\}$ を解に持つ 2 種類の 3 項間差分 (微分) 方程式

$$\begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \overline{y}(x) \\ u(x) & u(qx) & \overline{u}(x) \\ v(x) & v(qx) & \overline{v}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y(x) & \overline{y}(x) & \overline{y}(x/q) \\ u(x) & \overline{u}(x) & \overline{u}(x/q) \\ v(x) & \overline{v}(x) & \overline{v}(x/q) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2}$$

(ここで, $u(x) = P_m(x), \quad v(x) = Y(x)Q_n(x)$ とし，時間発展 $\overline{\bigcirc} = T(\bigcirc)$ とする．) を構成して, パンルヴェ方程式, ラックス形式, 特殊解の 3 つを同時に求める方法である．パデ法は, Yamada によるパデ近似の方法として，パンルヴェ方程式 VI，V，IV 型に適用された [4]. 離散パンルヴェ方程式に対するパデ法の先行結果として，

	e-$E_8^{(1)}$	q-$E_8^{(1)}$	q-$E_7^{(1)}$	q-$E_6^{(1)}$	q-$D_5^{(1)}$	q-$A_4^{(1)}$	q-$(A_2 + A_1)^{(1)}$
	[3]	[6]	[2]	[1][2]	[1] [2]	[2]	[2]
grid	elliptic	q-quadric	q	q	differential, q	q	q

(1.3)

が知られている．ここで，q-$D_5^{(1)}$ 型は q 差分と微分の両方の grid が適用されている点は興味深い．さらに， 本講演では，q-$E_6^{(1)}$ 型から q-$(A_2+A_1)^{(1)}$ まで両方の grid が適用ができることを報告する．

2 q-$E_6^{(1)}$ の場合

- 母関数 $Y(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1-a_1xq^i)(1-a_2xq^i)(1-a_3xq^i)}{(1-b_1xq^i)(1-b_2xq^i)(1-b_3xq^i)}$ $\left(拘束条件 \frac{a_1a_2a_3q^m}{b_1b_2b_3q^n} = 1\right)$ を与え, 時間発展方向 (微分の差分版)$T : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし，パデ近似の問題を設定する．

- $y(x)=\{P_m(x), Y(x)Q_n(x)\}$ を解に持つ 2 種類の線形差分方程式 (1.2) を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&L_2(x): C_0(1-xf)\overline{y}(x)-(1-a_2x)(1-a_3x)y(qx)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1-b_1x)(1-x/g)y(x)=0,\\
&L_3(x): C_1(1-x\overline{f}/q)y(x)+\frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1-a_1x)(1-x/qg)\overline{y}(x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -q^{m+n+1}(1-b_2x/q)(1-b_3x/q)\overline{y}(x/q)=0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

が構成される．ここで，C_0, C_1, f, g は x に依存しない変数である．

- (2.1) の両立条件を考えると，2 変数 f, g の連立型 1 階非線形差分方程式 (1 変数 2 階非線形差分方程式)

$$
\begin{aligned}
(fg-1)(f\underline{g}-1)&=\frac{b_1^2}{a_2^2a_3^2q^{m-n}}\frac{(f-a_2)(f-a_3)(f-b_2)(f-b_3)}{(f-a_1)(f-b_1)},\\
(fg-1)(\overline{f}g-1)&=qa_1b_1\frac{(g-1/a_2)(g-1/a_3)(g-1/b_2)(g-1/b_3)}{(g-b_1/a_2a_3q^m)(g-b_1q^{n+1}/a_2a_3)}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

が得られる．これは q-$E_6^{(1)}$ 型パンルヴェ方程式である．

- (2.1), (2.2) から $y(x/q), y(x), y(qx)$ の 3 項間差分方程式 $L_1(x)$ が得られ，ラックス形式 $L_1(x), L_2(x)$ が構成される．

- $Y(x)$ は q-ヤコビ多項式の母関数であり，パデ近似の問題 (1.1) を満たす $P_m(x), Q_n(x)$ の具体形は，ヤコビ-トゥールーディ公式によるシューア関数つまり τ 関数により得られる．最終的に，(2.2) の特殊解 f, g は，q-ヤコビ多項式を要素とする行列式として構成される．

参考文献

[1] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q-Painlevé Equation of Type $E_6^{(1)}$ by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.

[2] Nagao H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations*, Lett. Math. Phys., Volume **105**, Issue 4 (2015), 503–521.

[3] Noumi M., Tsujimoto S., Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.

[4] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.

[5] Yamada Y., *Lax formalism for q-Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type $E_n^{(1)}$*, IMRN 2011, **17** (2011), 3823–3838.

[6] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B47** (2014), 087–095.

$D_7^{(1)}$ 型 q-笹野系の有理解の構成

増田 哲　(青山学院大学 理工学部)*

高階 Painlevé 型微分方程式に関する研究は，近年著しく進展しており，特に 4 階の方程式については分類や退化図式が明らかにされている [5, 2]．それらの q-類似については，梶原 - 野海 - 山田系 [3] をはじめとして，無限次元可積分系からの簡約や Weyl 群対称性あるいはクラスター代数などの観点から具体例が構成されている [6, 4, 1]．本講演では，$D_7^{(1)}$ 型 q-笹野系 [4] に注目し，その有理解の構成について述べる．

詳細は省くが，$D_7^{(1)}$ 型 q-笹野系のある種の有理解を考えると，それに付随して,「多項式」族 $U_{l,m}=U_{l,m}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_5;p)\,(l,m\in\mathbb{Z})$ が現れる．これらは，漸化式

$$
\begin{aligned}
&-\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_-\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_-\langle\varepsilon_3/\varepsilon_4\rangle_-U_{l+1,m}^{[0,0,0,0,0]}U_{l-1,m}^{[0,0,0,0,-2]}\\
&=\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_-p^{-l}\varepsilon_5^{-1}\\
&\quad\times\Big[\left(\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_2/\varepsilon_3^2\rangle_+\right)\left(\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4^2\rangle_+\right)U_{l,m}^{[-1,-1,1,-1,-1]}U_{l,m}^{[1,1,-1,1,-1]}\\
&\qquad-\left(\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2\rangle_+\right)\left(\langle\varepsilon_1/\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_2/\varepsilon_4^2\rangle_+\right)U_{l,m}^{[1,1,1,-1,-1]}U_{l,m}^{[-1,-1,-1,1,-1]}\Big]\\
&-\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_-p^{l}\varepsilon_5\\
&\quad\times\Big[\left(\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_3^2/\varepsilon_2\rangle_+\right)\left(\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_2\varepsilon_4^2/\varepsilon_1\rangle_+\right)U_{l,m}^{[1,-1,1,-1,-1]}U_{l,m}^{[-1,1,-1,1,-1]}\\
&\qquad-\left(\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_2\varepsilon_3^2/\varepsilon_1\rangle_+\right)\left(\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle_++\langle\varepsilon_1\varepsilon_4^2/\varepsilon_2\rangle_+\right)U_{l,m}^{[-1,1,1,-1,-1]}U_{l,m}^{[1,-1,-1,1,-1]}\Big]
\end{aligned}
$$

（m 方向についても同様の漸化式が成り立つ）および初期条件 $U_{-1,-1}=U_{-1,0}=U_{0,-1}=U_{0,0}=1$ で生成される．ここで，$\langle x\rangle_\pm=x\pm x^{-1}$ および $U_{l,m}^{[i_1,i_2,\ldots,i_5]}=U_{l,m}(p^{i_1/2}\varepsilon_1,p^{i_2/2}\varepsilon_2,\ldots,p^{i_5/2}\varepsilon_5;p)$ と記した．

観察　上の漸化式からは直ちに明らかでないが，具体例をいくつか計算すると，$U_{l,m}\in\mathbb{Z}[\varepsilon_1^{\pm1},\varepsilon_2^{\pm1},\ldots,\varepsilon_5^{\pm1},p^{\pm1}]$ で，かつ係数はすべて正である．また，$f(\varepsilon;p)=\sum_k n_kp^{d^{(k)}}\varepsilon_1^{d_1^{(k)}}\varepsilon_2^{d_2^{(k)}}\cdots\varepsilon_5^{d_5^{(k)}}\in\mathbb{Z}[\varepsilon_1^{\pm1},\varepsilon_2^{\pm1},\ldots,\varepsilon_5^{\pm1},p^{\pm1}]$ に対し，次数を $\deg f(\varepsilon;p):=\max_k\{d_1^{(k)},d_2^{(k)},\ldots,d_5^{(k)}\}$ と定めると，$\deg U_{l,m}=\binom{l+1}{2}+\binom{m+1}{2}$ であり，$U_{l,m}(1,1,1,1,1;1)=2^{4\times\deg U_{l,m}}$ であることも観察される．

命題　「多項式」$U_{l,m}=U_{l,m}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_5;p)$ は，アフィン Weyl 群 $W(D_5^{(1)})=\langle w_0,w_1,\ldots,w_5\rangle$ の作用で不変である．ここで，$W(D_5^{(1)})$ の $\varepsilon_i\,(i=1,2,\ldots,5)$ への

キーワード：高階 q-Painlevé 系，アフィン Weyl 群，特殊多項式

*e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

作用は，

$$
\begin{aligned}
&w_0 \,:\, \varepsilon_1 \mapsto \frac{1}{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 \mapsto \frac{1}{\varepsilon_1},\\
&w_i \,:\, \varepsilon_i \mapsto \varepsilon_{i+1}, \quad \varepsilon_{i+1} \mapsto \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 4),\\
&w_5 \,:\, \varepsilon_4 \mapsto \frac{1}{\varepsilon_5}, \quad \varepsilon_5 \mapsto \frac{1}{\varepsilon_4}
\end{aligned}
$$

で与えられる（pへの作用は自明）．

この「多項式」族$U_{l,m} = U_{l,m}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5; p)$ $(l, m \in \mathbb{Z})$の明示公式を構成することがひとつの目標であるが，（講演申込の時点で）まだできていない．具体例は以下の通り．

$$
\begin{aligned}
U_{1,0}(\varepsilon; p) &= \sum_{\epsilon_i = \pm 1,\, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5 = +1} \varepsilon_1^{\epsilon_1}\varepsilon_2^{\epsilon_2}\varepsilon_3^{\epsilon_3}\varepsilon_4^{\epsilon_4}\varepsilon_5^{\epsilon_5} =: (1, 1, 1, 1, 1),\\
U_{0,1}(\varepsilon; p) &= \sum_{\epsilon_i = \pm 1,\, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5 = -1} \varepsilon_1^{\epsilon_1}\varepsilon_2^{\epsilon_2}\varepsilon_3^{\epsilon_3}\varepsilon_4^{\epsilon_4}\varepsilon_5^{\epsilon_5} = (1, 1, 1, 1, -1),\\
U_{2,0}(\varepsilon; p) &= (p^{-4} + p^4)\big[(3, 1, 1, 1, 1) + 4(1, 1, 1, 1, -1)\big]\\
&\quad + (p^{-2} + p^2)\big[(3, 3, 3, 1, 1) + 2(3, 3, 1, 1, -1)\\
&\qquad\qquad + 6(3, 1, 1, 1, 1) + 16(1, 1, 1, 1, -1)\big]\\
&\quad + \big[(3, 3, 3, 3, 3) + (3, 3, 3, 1, 1) + 2(3, 3, 1, 1, -1)\\
&\qquad\qquad + 7(3, 1, 1, 1, 1) + 20(1, 1, 1, 1, -1)\big],\\
U_{1,1}(\varepsilon; p) &= (p^{-1} + p)^4 + (p^{-1} + p)^2(2, 2, 0, 0, 0) + (2, 2, 2, 2, 0).
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] A. N. W. Hone and R. Inoue, Discrete Painlevé equations from Y-systems, J. Phys. A 47 (2014) 474007, 26 pp.

[2] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations, preprint.

[3] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy, Lett. Math. Phys. **62** (2002) 259–268.

[4] T. Masuda, A q-analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type D, to appear in Funkcial. Ekvac.

[5] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, preprint.

[6] T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfel'd-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, preprint.

Sears–Slater の変換公式の一般化と BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数

伊藤 雅彦　(東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊　(神戸大学・理)

底 $q \in \mathbb{C}^*$ $(|q| < 1)$ に関して記号 $(u)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i u)$ を用いる．$(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\varphi = \varphi(z) = \varphi(z_1,\ldots,z_n)$ に対して, $\langle \varphi, z\rangle$ を次のように定義する.

$$\langle \varphi, z\rangle = \int_0^{z\infty} \varphi(w)\Phi(w)\Delta(w)\frac{d_q w_1}{w_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q w_n}{w_n} = (1-q)^n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(zq^\nu)\Phi(zq^\nu)\Delta(zq^\nu).$$

ただし $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して $zq^\nu = (z_1 q^{\nu_1},\ldots,z_n q^{\nu_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n$ とする．ここで

$$\Phi(z) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{m=1}^{2s+2} z_i^{\frac{1}{2}-\alpha_m}\frac{(qa_m^{-1}z_i)_\infty}{(a_m z_i)_\infty}\prod_{1\le j<k\le n} z_j^{1-2\tau}\frac{(qt^{-1}z_j/z_k)_\infty(qt^{-1}z_jz_k)_\infty}{(tz_j/z_k)_\infty(tz_jz_k)_\infty},$$

$$\Delta(z) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1-z_i^2}{z_i}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{(1-z_j/z_k)(1-z_jz_k)}{z_j}$$

とする．ただし $q^{\alpha_m} = a_m$, $q^\tau = t$ である．和 $\langle\varphi, z\rangle$ が収束するとき, $\langle\varphi, z\rangle$ を **BC_n 型 Jackson 積分**と呼ぶ. $\theta(u) = (u)_\infty(qu^{-1})_\infty$ とするとき,

$$\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle = \frac{\langle\varphi, z\rangle}{\Theta(z)},\quad \Theta(z) = \prod_{i=1}^{n}\frac{z_i^s\theta(z_i^2)}{\prod_{m=1}^{2s+2} z_i^{\alpha_m}\theta(a_m z_i)}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{\theta(z_j/z_k)\theta(z_jz_k)}{z_j^{2\tau}\theta(tz_j/z_k)\theta(tz_jz_k)}$$

とおき, $\langle\!\langle \varphi, z\rangle\!\rangle$ を BC_n 型 Jackson 積分の**正則化**と呼ぶ.

$$Z = Z_{s,n} = \{\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s) \in \mathbb{N}^s\,;\, \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s = n\}$$

とおくとき $|Z_{s,n}| = \binom{n+s-1}{n}$ である．$x = (x_1,x_2,\ldots,x_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ と $\mu \in Z_{s,n}$ に対して

$$x_\mu = (\underbrace{x_1, x_1t,\ldots,x_1t^{\mu_1-1}}_{\mu_1}, \underbrace{x_2,x_2t,\ldots,x_2t^{\mu_2-1}}_{\mu_2},\ldots,\underbrace{x_s,x_st,\ldots,x_st^{\mu_s-1}}_{\mu_s}) \in (\mathbb{C}^*)^n \qquad (1)$$

とする．Jackson 積分表示の差分 de Rham 理論により, $\langle\!\langle\varphi, z\rangle\!\rangle$ はランク $\binom{n+s-1}{n}$ の q-差分方程式を満たし, その方程式は z によらないことがわかっている [1]. $\langle\!\langle\varphi, x_\mu\rangle\!\rangle$ $(\mu\in Z_{s,n})$ は解空間の基底をなし, $\langle\!\langle\varphi, z\rangle\!\rangle$ をその一次結合で書くことを接続公式と呼ぶ.

定理 (接続公式). $\varphi(z)$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則函数で, C_n 型 Weyl 群の作用で不変ならば,

$$\langle\!\langle\varphi, z\rangle\!\rangle = \sum_{\lambda\in Z_{s,n}}\langle\!\langle\varphi, x_\lambda\rangle\!\rangle E_\lambda(x;z) \qquad (2)$$

が成立．ここで, 接続係数 $E_\lambda(x;z)$ は具体的に次のように与えられる.

$$E_\lambda(x;z) = \sum_{\substack{K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s\\=\{1,2,\ldots,n\}}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{k\in K_i}\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{\theta(x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}}z_k)\theta(x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}}z_k^{-1})}{\theta(x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}}x_it^{\lambda_i^{(k-1)}})\theta(x_jt^{\lambda_j^{(k-1)}}x_i^{-1}t^{-\lambda_i^{(k-1)}})}. \qquad (3)$$

ただし $\lambda_i^{(k)} = |K_i\cap\{1,2,\ldots,k\}|$ で, 和は $|K_i| = \lambda_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$ を満たすような添字集合の分割 $K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s = \{1,2,\ldots,n\}$ の全体に亘る.

接続公式 (2) は Sears–Slater の very-well-poised ${}_{2r}\psi_{2r}$ 変換公式の一般化になっている．また (3) で表される函数 $E_\lambda(x;z)$ を **BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数**と呼ぶことにする.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである。

例 ($n=1$ の場合). $Z_{s,1}=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_s\}$ である．ただし $\epsilon_i=(0,\ldots,0,\overset{i}{\breve{1}},0,\ldots,0)$. このとき $E_{\epsilon_i}(x;z)=\displaystyle\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{\theta(x_jz)\theta(x_j/z)}{\theta(x_ix_j)\theta(x_j/x_i)}$ となり，特に $\varphi\equiv 1$ のとき接続公式 (2) は Sears–Slater の very-well-poised ${}_{2r}\psi_{2r}$ 超幾何級数の変換公式と一致する [5].

例 ($s=2$ の場合). $Z_{2,n}=\{(r,n-r)\,;\,r=0,1,\ldots,n\}$ である．このとき，

$$
\begin{aligned}
E_{(r,n-r)}(x_1,x_2;z) \;=\; & \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_r\le n\\ 1\le j_1<\cdots<j_{n-r}\le n}}\prod_{k=1}^{r}\frac{\theta(x_2t^{i_k-k}z_{i_k})\theta(x_2t^{i_k-k}z_{i_k}^{-1})}{\theta(x_2t^{i_k-k}x_1t^{k-1})\theta(x_2t^{i_k-k}x_1^{-1}t^{-(k-1)})}\\
&\times\prod_{l=1}^{n-r}\frac{\theta(x_1t^{j_l-l}z_{j_l})\theta(x_1t^{j_l-l}z_{j_l}^{-1})}{\theta(x_1t^{j_l-l}x_2t^{l-1})\theta(x_1t^{j_l-l}x_2^{-1}t^{-(l-1)})}.
\end{aligned}
$$

ここで，和は添字集合の分割 $\{i_1,\ldots,i_r\}\cup\{j_1,\ldots,j_{n-1}\}=\{1,\ldots,n\}$ の全体を亘る．文献 [2,3] において，BC_n 型楕円 Selberg 積分が楕円ガンマ函数の積で表示できる事実の別証明を与えたが，その際，函数 $E_{(r,n-r)}(x_1,x_2;z)$ $(r=0,1,\ldots,n)$ は中心的な役割を果たした．

$(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則函数 $f(z)$ で，C_n 型 Weyl 群の作用で不変，かつ q シフトに対して擬周期性 $T_{q,z_i}f(z)=f(z)/(qz_i^2)^m$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たすもの全体を $H_{m,n}$ と書くと，$H_{m,n}$ は $\binom{m+n}{n}$ 次元の $\mathbb{C}$ 線型空間であって，(3) の $E_\lambda(x;z)$ $(\lambda\in Z_{s,n})$ は $H_{s-1,n}$ の基底となる．また $E_\lambda(x;z)$ は次の補間函数の性質で特徴付けが可能である．すなわち，

$$E_\lambda(x;x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}\quad(\lambda,\mu\in Z_{s,n})$$

が成立する．ただし $x_\mu\in(\mathbb{C}^*)^n$ は (1) で定義された点とする．

さらに，[1] の結果と $E_\lambda(x;z)$ の性質を使うことにより次の定理が導かれる．

定理. $B=B_{s,n}=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\,;\,s-1\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0\}$ とする．C_n 型の指標 $\chi_\lambda(z)=\det(z_i^{\lambda_j+n-j+1}-z_i^{-\lambda_j-(n-j+1)})_{1\le i,j\le n}/\Delta(z)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\det\Big(\langle\!\langle\chi_\lambda,x_\mu\rangle\!\rangle\Big)_{\substack{\lambda\in B\\ \mu\in Z}}\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left[\left((1-q)\frac{(q)_\infty(qt^{-(n-k+1)})_\infty}{(qt^{-1})_\infty}\right)^s\frac{\prod_{1\le i<j\le 2s+2}(qt^{-(n-k)}a_i^{-1}a_j^{-1})_\infty}{(qt^{-(n+k-2)}a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{2s+2}^{-1})_\infty}\right]^{\binom{s+k-2}{k-1}}\\
&\qquad\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{r=0}^{n-k}\prod_{1\le i<j\le s}\frac{\theta(t^{2r-(n-k)}x_ix_j^{-1})\theta(t^{n-k}x_ix_j)}{t^rx_i}\right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.
\end{aligned}
$$

講演では BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数の構成法，および接続公式や上記定理の証明について触れる予定である．詳細は文献 [4] を参照のこと．

参考文献

[1] K. Aomoto and M. Ito: A determinant formula for a holonomic q-difference system associated with Jackson integrals of type BC_n, Adv. Math. 221 (2009), 1069–1114.

[2] M. Ito and M. Noumi: Derivation of a BC_n elliptic summation formula via the fundamental invariants, arXiv:1504.07108.

[3] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the BC_n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, arXiv:1504.07317.

[4] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, preprint.

[5] M. Ito and Y. Sanada: On the Sears–Slater basic hypergeometric transformations, Ramanujan J. 17 (2008), 245–257.

Exceptional Bannai-Ito polynomials

辻本　諭　(京都大学大学院情報学研究科)*

概　要
古典直交多項式として知られる Bannai-Ito 多項式の例外型拡張を与える.

1. Bannai-Ito 多項式

Bannai-Ito 多項式 [1, 2] は，シフト演算子 $e^{\partial x}$ と鏡映変換演算子 R

$$R[f(x)] = f(-x), \qquad e^{\partial x}[f(x)] = f(x+1)$$

を用いて表される $\mathcal{H} = \alpha(x)(R-1) + \beta(x)(e^{\partial x}R - 1)$ の固有値問題

$$\mathcal{H}\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

の多項式固有関数によって与えられる．ここで，$\alpha(x)$ および $\beta(x)$ は ρ_1, ρ_2, r_1, r_2 を定数とする x の有理関数

$$\alpha(x) = -(x-\rho_1)(x-\rho_2)/(2x), \qquad \beta(x) = (x-r_1)(x-r_2)/(2x+1)$$

である．また，$\gamma(x) = \gamma(-x) = \gamma(-x-1)$ を満足する $\gamma(x)$ を用いて

$$\mathcal{H} = \alpha(x)\,(R-1) + \left(e^{\partial x}R + 1\right)\beta(x) + \gamma(x)$$

と表せることを注意しておく．$\mathcal{H}$ の多項式固有関数の中で，x の最高次係数を 1 に規格化した n 次多項式を $B_n(x) := B_n(x; \rho_1, \rho_2, r_1, r_2)$ で表し，n 次の Bannai-Ito 多項式と呼ぶ．この Bannai-Ito 多項式は，Askey-Wilson 多項式 (q-Racah 多項式) の適当な $q \to -1$ の極限によって導出することもでき，Bannai-Ito 格子 $x_s = 1/4 + (-1)^s(x_0 - 1/4 - s/2)$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, N$) 上の有限直交多項式の性質をもつ.

2. 例外型 Bannai-Ito 多項式

前節で導入した多項式列 $\{B_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ の例外型拡張 [3, 4, 5] について考察する．はじめに，$\mathcal{H}$ の固有関数 $\phi(x)$ を seed 関数とする一般化 Darboux 変換について考える．ここで，$\mathcal{H}$ は 1 階の差分演算子であり，通常の Darboux 変換をそのまま適用することが困難なことに注意する．一般化 Darboux 変換 $\mathcal{F}_\phi$ は，関係式

$$\mathcal{F}_\phi \circ \mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi \circ \mathcal{F}_\phi$$

から導出することができ，$\chi(x) = (1-R)[\phi(x)]$，$\tilde{\chi}(x) = (1 + e^{\partial x}R)[\beta(x)\phi(x)]$ を用いて

$$\mathcal{F}_\phi = \frac{1}{\chi(x)}(R-1) + \frac{1}{\tilde{\chi}(x)}\left(e^{\partial x}R + 1\right)\beta(x),$$

本研究は科研費 (課題番号:25400110) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 33C45, 33C47, 42C05
キーワード：exceptional orthogonal polynomials, Bannai-Ito polynomials
* 〒 606-8051 京都府京都市左京区吉田本町　京都大学 大学院情報学研究科
e-mail: tujimoto@i.kyoto-u.ac.jp

と表される．ここで，

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{\tilde{\chi}(-x)}{\chi(x)}(R-1) + \left(e^{\partial x}R + 1\right)\frac{\alpha(x)\beta(x)\chi(x)}{\tilde{\chi}(x)} + (\gamma(x) - \alpha(x) - \alpha(-x))$$

である．このとき，$\mathcal{H}$ の固有関数 $\psi(x)$ から得られる $\psi^{(1)}(x) = \mathcal{F}_\phi[\psi(x)]$ が

$$\mathcal{H}_\phi[\psi^{(1)}(x)] = \lambda\,\psi^{(1)}(x)$$

を満足することを示すことができる．

次に，$\mathcal{H}$ の準多項式固有関数列 $\{\xi(x)q_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ について考える．ここで，$q_n(x)$ は x の n 次多項式であり，$\xi(-x)/\xi(x)$ および $\xi(-x-1)/\xi(x)$ が有理関数となることを要請する．このとき，以下の 8 種類の $\xi(x)$ が得られる．

$$\xi_{\mathrm{I}}(x) = 1,\ \xi_{\mathrm{II}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)},\ \xi_{\mathrm{III}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)},$$
$$\xi_{\mathrm{IV}}(x) = \Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x),\ \xi_{\mathrm{V}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)}$$
$$\xi_{\mathrm{VI}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)},\ \xi_{\mathrm{VII}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)}{\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)},\ \xi_{\mathrm{VIII}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)}.$$

これにより，準多項式固有関数 $\phi_{\rho,j} = \xi_\rho q_{\rho,j}$, $\rho \in \{\mathrm{I}, \ldots, \mathrm{VIII}\}$, $j \in \mathbb{N}$ が定まる．

準多項式列 $\{\phi_{\rho,j}\}$ の中から一般化 Darboux 変換の seed 関数を選ぶことにより，例外型 Bannai-Ito 多項式 $B_n^{(\rho,j)}(x)$ が導出される．

$$B_n^{(\rho,j)}(x) \quad = \quad \mathcal{F}_{\phi_{\rho,j}}[B_n(x)] = \frac{r(x)}{\chi(x)\tilde{\chi}(x)}\begin{vmatrix} \Delta_R[\phi_{\rho,j}(x)] & \Delta_R[B_n(x)] \\ \mathcal{A}[\beta\phi_{\rho,j}(x)] & \mathcal{A}[\beta B_n(x)] \end{vmatrix}$$

ここで，$\Delta_R = 1 - R$，$\mathcal{A} = 1 + e^{\partial x}R$，$r(x) = \chi(x)\tilde{\chi}(x)\alpha_\rho(x)/\xi_\rho$.

参考文献

[1] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I.* The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, (1984).

[2] S. Tsujimoto, L. Vinet, A. Zhedanov, *Dunkl shift operators and Bannai-Ito polynomials*, Advances in Mathematics Vol. 229, no. 4 (2012), 2123–2158.

[3] Gómez-Ullate, D., Kamran, N. and Milson, R., *Anextendedclassoforthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), 352.

[4] Sasaki, R., Tsujimoto, S. and Zhedanov, A., *Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations*, J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010), 315204.

[5] Odake, S. and Sasaki, R., *Multi-indexed Wilson and Askey-Wilson polynomials*, J. Phys. A 46 (2013), 045204 (22pp).

2重対数関数とモノドロミー保存変形

上野 喜三雄　(早稲田大学 理工学術院)*

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,5}$ の KZ 方程式を，その上の立方体座標 (z,w) で表示したものを 2 変数 KZ 方程式と呼び，これを 2KZ と表記する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X_0}{z} + \dfrac{Y_0}{1-z} + \dfrac{wZ_0}{1-zw}\right) L, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = \left(\dfrac{X_0'}{w} + \dfrac{Y_0'}{1-w} + \dfrac{zZ_0}{1-zw}\right) L. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，係数行列は定数行列であり，可積分条件　$[X_0, X_0'] = [X_0, Y_0'] = [Y_0, X_0'] = 0,\quad [Y_0, Y_0' + Z_0] = [Y_0 + Y_0', Z_0] = [X_0 - X_0' - Y_0, Z_0] = 0$　をみたさねばならない．この方程式系を一般化して，z を主変数，w をパラメータとみなして，モノドロミー保存変形

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X(w)}{z} + \dfrac{Y(w)}{1-z} + \dfrac{wZ(w)}{1-zw}\right) L, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = \left(\dfrac{X_0'}{w} + \dfrac{Y_0'}{1-w} + \dfrac{zZ(w)}{1-zw}\right) L \end{cases} \tag{2}$$

を考える．X_0', Y_0' は定数行列，$X(w), Y(w), Z(w)$ は w の関数を成分とする行列とする．この方程式系を 2MPD と表記する．この系の可積分条件を変形方程式と呼ぶ．それはつぎの非線型方程式系である．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial w} \ = \left[\dfrac{X_0'}{w} + \dfrac{Y_0'}{1-w}, X\right], \quad \dfrac{\partial Y}{\partial w} = \left[\dfrac{X_0'}{w} + \dfrac{Y_0'+Z}{1-w}, Y\right], \\ \\ \dfrac{\partial Z}{\partial w} \ = \left[\dfrac{X_0' - X + Y}{w} + \dfrac{Y_0' + Y}{1-w}, Z\right]. \end{cases} \tag{3}$$

この方程式系の原点 $w=0$ で正則な解

$$X(w) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j w^j, \quad Y(w) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j w^j, \quad Z(w) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j w^j \tag{4}$$

を考えよう．

命題 1 (1)　定数行列 X_0', Y_0' と，初期行列 X_0, Y_0, Z_0 が条件

$$[X_0, X_0'] = [Y_0, X_0'] = [X_0 - X_0' - Y_0, Z_0] = 0 \tag{5}$$

　をみたし，すべての正整数　j に対して，

$$j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\,(X_0), \quad j\mathrm{Id} + \mathrm{ad}\,(X_0 - X_0' - Y_0) \tag{6}$$

本研究は科研費 (課題番号:25400054) の助成を受けたものである.

*e-mail: `uenoki@waseda.jp`

が可逆であるとすると，初期値を X_0, Y_0, Z_0 とする変形方程式 (3) の $w=0$ で正則な解 $X(w), Y(w), Z(w)$ が一意的に存在する．

(2) 条件 (5)，(6) の他に，

$$[X_0, Y_0'] = [Y_0, Y_0' + Z_0] = [Y_0 + Y_0', Z_0] = 0 \tag{7}$$

をみたす正則な解は定数解に限る．したがって，この場合の 2MPD(2) は 2KZ(1) を与える．

つぎに変形方程式 (3) の正則解で 2 重対数関数 $\mathrm{Li}_2(w)$ を含むものを二つ例示する．E_{ij} で 3 次の行列単位（(i,j) 成分が 1 で他の成分は 0 である行列）を表す．

命題 2 (1) $X_0' = E_{31}, Y_0' = E_{23}$ とする．

$$X(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log(1-w)\,\mathrm{Li}_2(w) & -\log(1-w) & -\log^2(1-w) \\ \mathrm{Li}_2(w) & 1 & \log(1-w) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$Y(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log^2(1-w)+1 & 0 & 0 \\ \log(1-w) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$Z(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log(1-w)\,\mathrm{Li}_2(w) + \log^2(1-w) + 1 & \log(1-w) & \log^2(1-w) \\ \mathrm{Li}_2(w) - \log(1-w) & -1 & -\log(1-w) \end{pmatrix} \tag{10}$$

は変形方程式 (3) の解である．

(2) $X_0' = E_{31}, Y_0' = E_{12}$ とする．

$$X(w) = E_{32}, \tag{11}$$

$$Y(w) = \begin{pmatrix} -\log(1-w) & -\log^2(1-w) & 0 \\ 1 & \log(1-w) & 0 \\ \mathrm{Li}_2(w) + \log(1-w) & \log(1-w)\,\mathrm{Li}_2(w) + \log^2(1-w) & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$Z(w) = \begin{pmatrix} -\log(1-w) & -\log^2(1-w) & 0 \\ 1 & \log(1-w) & 0 \\ \mathrm{Li}_2(w) - \log(1-w) & \log(1-w)\,\mathrm{Li}_2(w) - \log^2(1-w) - 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

は変形方程式 (3) の解である．

Toric network and generalized discrete Toda lattice

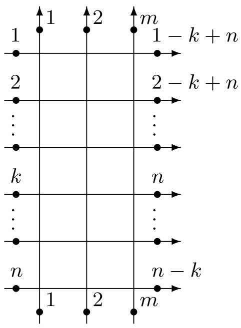
井上 玲 (千葉大理)
Thomas Lam (University of Michigan)
Pavlo Pylyavskyy (University of Minnesota)

本講演では, トーラス上のネットワークに作用するアフィンワイル群を用いて可換な双有理写像を定義し, スペクトル曲線とヤコビ多様体を用いてその初期値問題を考察する.

トーラス上のネットワークとアフィンワイル群.

(n,m,k) を正整数の 3 つ組, $N = \gcd(n,k)$ とする. 縦横それぞれ m 本, n 本の線を縦端はそのまま周期的につなぎ, 横端は k 本分ずらしてつなぐと, 縦方向, 横方向それぞれ m 本, N 本の単純閉曲線から成るトーラス上の配線が得られる. 縦 i 番目, 横 j 番目の線の交点に従属変数 $q_{i,j} \in \mathbb{C}$ を配置し, 力学系の相空間 $\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}^{mn}$ の座標を $(q_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ とおく. 線のつなぎ方から $q_{i,j}$ の境界条件は $q_{i,j+n} = q_{i,j}$, $q_{i+m,j} = q_{i,j-k}$ となる.

例. $(n,m,k) = (6,3,4)$



一般に, s 次元複素ベクトルの組 $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s$ への作用 R を以下で定める:

$$R \curvearrowright \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s;\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) := (a_i, b_i)_{1\le i\le s} \mapsto (b_i \frac{P_i}{P_{i-1}}, a_i \frac{P_{i-1}}{P_i})_{1\le i\le s},$$

$$P_i := P_i(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{j=0}^{s-1} \prod_{l=1}^{j} b_{l+i} \prod_{l=j+2}^{s} a_{l+i} \qquad (i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}).$$

この作用はもともと A_{s-1} 型幾何クリスタルの intertwiner として定義されたものである. n 次元, mn' 次元ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}_i := (q_{i,j})_{1\le j\le n} \in \mathbb{C}^n$ $(i = 1,\dots,m)$, $\tilde{\mathbf{q}}_j := (q_{i,j})_{1\le i\le mn'} \in \mathbb{C}^{mn'}$ $(j = 1,\dots,N)$ と定義する. ただし $n' = n/N$ である. これらを用いて, $\mathcal{M}$ 上に 2 つのアフィンワイル群 $W = \langle \pi, s_1,\dots,s_{m-1}\rangle$, $\widetilde{W} = \langle \tilde{\pi}, \tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_{N-1}\rangle$ の作用を定める (Cf. [KNY]):

$$s_i(\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_m) = (\cdots, R(\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_{i+1}),\cdots),\ \pi(\mathbf{q}_i) = (\mathbf{q}_{i+1}),$$

$$\tilde{s}_i(\tilde{\mathbf{q}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{q}}_N) = (\cdots, R(\tilde{\mathbf{q}}_i,\tilde{\mathbf{q}}_{i+1}),\cdots),\ \tilde{\pi}(\tilde{\mathbf{q}}_j) = (\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}).$$

2 つの群 W と $\widetilde{W}$ の作用は可換である. それぞれの可換部分群は以下の e_u, $\tilde{e}_u$ で生成され,

$$e_u := (s_u \cdots s_{m-1})(s_{u-1} \cdots s_{m-2}) \cdots (s_1 \cdots s_{m-u})\pi^u \quad u = 1, \dots, m,$$
$$\tilde{e}_u := (\tilde{s}_u \cdots \tilde{s}_{N-1})(\tilde{s}_{u-1} \cdots \tilde{s}_{N-2}) \cdots (\tilde{s}_1 \cdots \tilde{s}_{N-u})\tilde{\pi}^u \quad u = 1, \dots, N,$$

$\mathcal{M}$ 上の可換な双有理写像を定める. n 周期離散戸田格子は $(n, m, k) = (n, 2, n-1)$ の場合に相当し, このとき自明でない写像は一つ e_1 しかない. また, $(n, m, 0)$ の場合は [KNY] で考察されている.

<u>主結果.</u>

双有理写像 e_u, $\tilde{e}_u$ は Lax 形式をもち, スペクトル写像 $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}[x, y]$ が定義できる. $f \in \mathrm{Im}\,\psi$ について, $f = 0$ の定めるアフィン代数曲線が原点以外で滑らかなとき, そのコンパクト化を原点で正規化したものを C_f, 種数を g と書く. C_f は 1 つの無限遠点 P と, 原点の上に N 点 O_j $(j = 1, \dots, N)$ をもつ. その他に m 点 A_i $(i = 1, \dots, m) \in C_f$ を固定する. [vMM], [Iw], [LP] を応用および拡張することによって以下が得られた.

定理. [ILP] (i) 次の埋め込みがある:

$$\phi : \psi^{-1}(f) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^g(C_f) \times (\mathbb{C}^*)^M \times R_O \times R_A =: \mathcal{J}.$$

ここで $M := \gcd(n, m+k)$, R_O と R_A はそれぞれ $\{O_j\}$, $\{A_i\}$ の全ての順序付けから成る有限集合である.
(ii) $\phi(q) = ([D], c = (c_1, \dots, c_M), O = (O_1, \dots, O_N), A = (A_1, \dots, A_m)) \in \mathcal{J}$ のとき, 可換な双有理写像は以下のような $\mathcal{J}$ 上の作用を誘導する:

$$\phi(e_u(q)) = ([D - uP + A_1 + \cdots + A_u], \tau^{-u}(c), O, A),$$
$$\phi(\tilde{e}_u(q)) = ([D + uP - O_1 - \cdots - O_u], \tau^u(c), O, A).$$

ただし $\tau(c) = (c_M, c_1, \dots, c_{M-1})$.
(iii) $N = 1$ のとき, Riemann テータ関数を使って ϕ^{-1} を構成できる. (一般の N の場合は予想.)

References

[ILP] R. Inoue, T. Lam and P. Pylyavskyy, Toric networks, geometric R-matrices and generalized discrete Toda lattices, arXiv:1504.03448.

[Iw] S. Iwao, Linearisation of the (M, K)-reduced non-autonomous discrete periodic KP equation, arXiv:0912.3333.

[KNY] K. Kajiwara, M. Noumi, and Y. Yamada, Discrete Dynamical Systems with $W(A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1})$ Symmetry, Lett. Math. Phys. 60, no. 3, 211–219 (2002).

[LP] T. Lam and P. Pylyavskyy, Crystals and total positivity on orientable surfaces, Selecta Math. (N.S.) **19**, no. 1, 173–235 (2013).

[vMM] P. van Moerbeke and D. Mumford, The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math. **143** (1-2) 94–154 (1979).

Kostant-Toda 階層, Totally nonnegative matrix と 特異曲線

岩尾　慎介　(青山学院大学理工学部)*1
西山　享　(青山学院大学理工学部)
小川　竜　(東海大学理学部)

1. 初めに

本研究では, 古典可積分系の相空間の全非負値分 (Totally nonnegative part) と, 可積分系に付随する代数曲線上の正構造との関係を調べる. 特に本講演では, 有限サイズの Kotant-Toda 階層 [1, 2] について論ずる.

2. 有限サイズの Kostant-Toda 階層と特異曲線

行列で定義された常微分方程式系

$$\frac{d}{dt_n}L = [L, (L^n)_-], \quad L = L(t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}) \tag{1}$$

(ただし, L は N 次複素行列で,

$$L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 1 & & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 1 & & & & \\ \vdots & a_{3,2} & a_{3,3} & 1 & & & \\ a_{M+1,1} & \vdots & a_{4,3} & \ddots & \ddots & & \\ & a_{M+2,2} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & a_{M+3,3} & \vdots & \ddots & a_{N-1,N-1} & 1 \\ & & & \ddots & \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix}, \quad 1 \le M < N.$$

P_- は行列 P の狭義下三角部分) を Kostant-Toda 階層という.

(1) の初期値 $L_0 = L(0, \ldots, 0)$ を一つ固定し, $\mathcal{O} := \mathbb{C}[\lambda]/\det(L_0 - \lambda \cdot Id)$ とおく. $\mathcal{O}$ が時間不変であることはすぐに証明できる. このとき, 以下が成り立つ:

定理 1. 固定された初期値 L_0 に対して, $\mathcal{T}$ を, L_0 を含むような, Kostant-Toda 階層の等スペクトル集合とする. この時, ある連続単射写像

$$\Phi_{L_0} : \mathcal{T} \to S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M}$$

が存在し, Kostant-Toda 階層の運動は $S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M}$ の上で線形化される. ここで, $\mathcal{O}^{\oplus M}$ の元は縦ベクトルだと思っており, $S^- \subset GL_M(\mathbb{C})$ は広義下三角行列のなす部分群である. □

本研究は科研費 (課題番号:25610008) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 15B48, 37K10
キーワード：Totally positivity, Singular curves
*1 〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1
e-mail: iwao@gem.aoyama.ac.jp

多項式 $y^2 - \det(L_0 - x \cdot Id)^2 \in \mathbb{C}[x, y]$ の定める特異曲線を $C \simeq \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 =: X_- \cup X_+$ とする．$K(X_\pm)$ を $X_\pm$ の有理関数体とする．集合 $K(X_-) \times (K(X_+)^{\oplus M}/S^-)$ を $\Lambda(C)$ と置く．ここで, $K(X_+)^{\oplus M}$ の元は横ベクトルだと思っている．

このとき, 対応

$$\Theta : \Lambda(C) \times (S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M}) \to \mathcal{O};$$
$$(g, [f_1, \ldots, f_M]) \times {}^t[F_1, \ldots, F_M] \mapsto -g + f_1F_1 + \cdots + f_MF_M$$

は well-defined である．実は, 写像 Θ による 0 の逆像 $\Theta^{-1}(0)$ は, 特異代数曲線のアーベルヤコビ写像のグラフを一般化したものとみなせる．(実際 $M = 1$ のときは, 特異曲線のアーベルヤコビ写像のグラフそのものである)．Kostant-Toda 階層の初期値問題の解は, 特異曲線に付随した一般化テータ関数（を $M > 1$ の場合にも一般化したもの）で書くことができる．

3. 全正値性・全非負値性

行列 L が全正/全非負値 (totally positive/ totally nonnegative) であるとは, その小行列式がすべて正/非負であることを言う．初期値 L_0 を totally nonnegative にとる．$\mathcal{T}_+$ を, L_0 を含む等スペクトル集合の要素のうち totally nonnegative なものを集めてできる集合とする．Totally positive/nonnegative matrix の一般論より, L_0 の固有値はすべて単純な正の実固有値となることが知られている．また, Totally nonnegative matrix 全体の集合は, あるルールによって, 有限個の非負パラメータで完全にパラメータ付けされることが知られている [3].

L_0 の固有値を $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ と書こう．

定理 2. $L \in \mathcal{T}$ とする．$M = 1$ の時,

$$L \in \mathcal{T}_+ \iff F(\lambda_1), F(\lambda_3), F(\lambda_5), \cdots < 0, \quad F(\lambda_2), F(\lambda_4), F(\lambda_6), \cdots > 0. \qquad \square$$

予想 1. 一般の M に対して,

$$L \in \mathcal{T}_+ \iff \Phi(L) \in S^- \setminus \mathcal{O}^{\otimes M} \text{ は, } S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M} \text{ の「totally positive part」に属する．}$$

予想 2. $L \in \mathcal{T}_+$ とする．中国剰余定理により $\Phi(L)$ を $S^- \setminus \mathbb{C}^{M \times N}$ の元とみなし, その M 次小行列式を, 前述の非負パラメータの関数として表示したとき,

$$\pm(\text{subtruction-free な多項式})$$

の形をしている．

参考文献

[1] N.Ercolani, H.Flaschka and S.Singer "The geometry of the full Kostant- Toda lattice" *Progress in Mathematics* 115, 181-226, (1993)

[2] Y.Kodama and L.Williams "The full Kostant-Toda hierarchy on the positive flag variety" *Comm.Math.Pys.* 1–37 (2014)

[3] A.Pinkus "Totally Positive Matrices" Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press (2010)

Painlevé系 の τ 函数の正準量子化について

黒木 玄　(Gen Kuroki)

2015年7月31日 (金) 20:07 Version 1.0

この文書の最新版は次の場所からダウンロードできる.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150731QuantizationOfPainleveTau.pdf

Painlevé 系の量子化に関する関連の文書を以下の場所からダウンロードできる.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/

目　次

1. Painlevé系の量子化 ($q\mathrm{P_{IV}}$を例に用いた解説)

まず, Painlevé系の量子化について説明しよう [1].

多くの議論が対称化可能一般Cartan行列に付随する一般的な場合に拡張可能だが, 表現論の言葉に不慣れな読者のために, q 差分版の Painlevé IV 型方程式の対称形式 $q\mathrm{P_{IV}}$ を例に説明して行く. この場合にはほとんどの結果を工夫のない直接的な計算で確認できる.

[1] 実は2次元量子共形場理論の holomorphic part に関する理論 (conformal blocks に関する理論) は量子 Painlev'e 系の理論そのものだとみなせるのだが, この論説では扱わない. たとえば, 共形場理論が生まれた論文 [1] で扱われている Virasoro 代数のみを対称性に持つ共形場理論で退化場 $\varphi_{12}(z)$, $\varphi_{21}(z)$ を考えた場合はちょうど単独 2 階の線形常微分作用素のモノドロミー保存変形の理論 (Garnier 系) の量子化になっている. この場合に限らず, 一般に Virasoro 代数は点付きコンパクト Riemann 面の変形を記述している. その点の位置がちょうど特異点の場所に対応している.

目標は量子化された Painlevé 系を表現論の言葉でうまく定式化し, 量子 Painlevé 系の基礎になる代数構造の由来をKac-Moody代数や量子群の言葉を用いて説明することである. $q\mathrm{P_{IV}}$の場合には表現論に関係する部分が 3×3 行列を用いた巧妙な計算に置き換わることになる. 量子群の L-operators による記述に慣れている読者であればこの場合を見ればより一般の場合にどのようにすればよいかも理解できるはずである.

「q差分化」と「量子化」の区別については第 3.1 節を, 古典極限については第 3.2 節に簡単な解説を書いておいた. 以下では「量子化」を「正準量子化」の意味で用いる.

1.1. q-Painlevé IV 方程式の対称形式 $q\mathrm{P_{IV}}$

q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式 $q\mathrm{P_{IV}}$ に関する詳しい記述については文献 [8], [18] を参照せよ. さらに $q\mathrm{P_{IV}}$ の $A_2^{(1)}$ 型のアフィンWeyl群対称性の量子化とその一般化については文献 [6] を見よ. (量子化に関する文献を見れば古典極限によって Poisson 構造の情報も得られる.) この節の内容はそれらの文献からの引き写しである.

まず, $A_2^{(1)}$ 型の一般Cartan行列 (GCM) $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$ と反対称行列 $[b_{ij}]_{i,j=0}^2$ を次のように定める [2]:

$$[a_{ij}]_{i,j=0}^2=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix},\quad [b_{ij}]_{i,j=0}^2=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

さらに, $\mathbb{C}(q)$ 上 a_i, F_i $(i=0,1,2)$ から生成される有理函数環を考え, そこに Poisson 構造を次のように入れる:

$$\{F_i,F_j\}=b_{ij}F_iF_j,\quad \{a_i,a_j\}=\{a_i,F_j\}=0.$$

周期性 $a_{i+3}=a_i$, $F_{i+3}=F_i$ によってインデックスを整数全体に拡張しておく. F_i を**従属変数**と呼び, a_i を**パラメーター変数**と呼ぶことにする [3].

q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式 $q\mathrm{P_{IV}}$ とは次のように定義される離散時間発展 $T_{q\mathrm{P_{IV}}}$ のことである ([8], [18]):

$$T_{q\mathrm{P_{IV}}}(F_i)=a_ia_{i+1}F_{i+1}\frac{1+a_{i-1}F_{i-1}+a_{i-1}a_iF_{i-1}F_i}{1+a_iF_i+a_ia_{i+1}F_iF_{i+1}},\quad T_{q\mathrm{P_{IV}}}(a_i)=a_i.$$

この離散時間発展はPoisson構造を保つ.

$A_2^{(1)}$ 型の拡大アフィンWeyl群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})=\langle s_0,s_1,s_2,\pi\rangle$ が次の関係式で定義される:

$$s_i^2=1,\quad s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1},\quad \pi s_i=s_{i+1}\pi.$$

ただしインデックスを周期性 $s_{i+3}=s_i$ によって整数全体に拡張しておいた.

拡大アフィンWeyl群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用を次のように定める:

$$s_i(a_j)=a_i^{-a_{ij}}a_j,\quad s_i(F_j)=F_j\left(\frac{a_i+F_i}{1+a_iF_i}\right)^{b_{ij}},\quad \pi(a_i)=a_{i+1},\quad \pi(F_i)=F_{i+1}.$$

[2] 反対称行列 $[b_{ij}]$ はクラスター代数の記述に用いられる反対称行列と同じものである.

[3] 古典の場合にはパラメーター変数は数に特殊化されることが多い. しかし, 量子化された場合には量子化された τ 変数と量子化されたパラメーター変数が非可換なので, τ 変数を除外せずにパラメーター変数を数に特殊化することができなくなる.

この作用はPoisson構造を保ち, 離散時間発展 $T_{q\mathrm{P_{IV}}}$ と可換であり, q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) になっている.

実は以上の構造の背景には量子群が隠れている. 以下の節ではそのことを説明したい.

結論を先走って言うと, q 差分版の Painlevé 方程式の従属変数 F_i は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の化身になっている[4].

ただし, F_i が量子展開環のした三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の像に直接なっているのではなく, φ_i の余積を $\Delta(\varphi_i) = \varphi_{i1} + \varphi_{i2}$, $\varphi_{i1} = \varphi_i \otimes k_i$, $\varphi_{i2} = 1 \otimes \varphi_i$ と書くとき, $a_i F_i$ が $\varphi_{i1}\varphi_{i2}^{-1}$ の像になっているという若干複雑な事情になっている. そして s_i の作用は $\Delta(\varphi_i)$ の像 f_i のべき f_i^γ の作用を用いて構成される. 詳しくは [15] を参照して欲しい[5].

1.2. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性

この節の内容は文献 [9], [10], [20] の構成を $(m,n) = (3,2)$ の場合に特殊化したものになっている. 互いに素な任意の (m,n) の場合の量子化については [13], [14] を見よ.

準周期性 $t_{i+3} = r^{-1}t_i$, $x_{i+3} = r^{-1}x_i$, $y_{i+3} = r^{-1}y_i$ を満たす[6]変数 t_i, x_i, y_i を用意し, $t_i^2 = x_i y_i$ が成立していると仮定し, Poisson 構造を次のように定める[7]: $\mu = 1, 2$ について,

$$
\begin{aligned}
&\{x_i, y_i\} = 0, \\
&\{x_i, x_{i+\mu}\} = (-1)^{\mu-1} x_i x_{i+\mu}, \quad \{x_i, y_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} x_i y_{i+\mu}, \\
&\{y_i, y_{i+\mu}\} = (-1)^{\mu-1} y_i y_{i+\mu}, \quad \{y_i, x_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} y_i x_{i+\mu}, \\
&\{t_i, \xi_j\} = 0 \qquad (\xi = x, y, t).
\end{aligned}
$$

最後の行の関係式を忘れて, 変数 t_i を Poisson 中心元 $x_i y_i$ の平方根として導入してもよい. このとき, F_i と a_i を

$$
a_i = \frac{t_i}{t_{i+1}}, \quad F_i = \frac{x_{i+1}x_i}{t_{i+1}t_i}.
$$

と定める. これらは周期性 $a_{i+3} = a_i$, $F_{i+3} = F_i$ を満たしており, 前節のPoisson構造の定義式を満たしている. この関係があるので x_i, y_i たちをも**従属変数**と呼び, t_i たちをも**パラメーター変数**と呼ぶことにする.

$A_1^{(1)}$ 型の拡大アフィンWeyl群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ が次の関係式で定義される:

$$
r_i^2 = 1, \quad \varpi r_i = r_{i+1}\varpi.
$$

ただしインデックスを周期性 $r_{i+2} = r_i$ によって整数全体に拡張しておいた.

---

[4] φ は q-Serre 関係式を満たしている.

[5] 変数 γ によるべき f_i^γ の構成の仕方については第 3.3 節に解説を書いておいた.

[6] このとき直後に定義される a_i たちは $a_0 a_1 a_2 = r$ をみたしている. だから文献 [8] における q はここでの r に対応している. 記号 q は量子群の変形パラメーターのために取っておくことにする.

[7] この関係式は 3 を 3 以上の任意の奇数 m に一般化しても $\mu = 1, 2, \dots, m-1$ について有効である. ここで扱っている $q\mathrm{P_{IV}}$ のケースは $(n,m) = (3,2)$ の場合に対応しており, 互いに素な任意の (m,n) の場合に一般化される. そのとき変数 x_i, y_i は mn 個の変数 x_{ik} に拡張されるが, x_{ik} たちの Poisson 括弧も $\{x_{ik}, x_{jl}\} = \varepsilon_{ijkl} x_{ik} x_{jl}$, $\varepsilon_{ijkl} = 0, \pm 1$ の形になるが, ε_{ijkl} がどのように $0, \pm 1$ になっているかは複雑である. 詳しくは量子化された場合を扱っている [13], [14] を見よ. $n \geqq 3$ の場合の Poisson 構造は量子化されて初めて明らかになった.

拡大アフィンWeyl群の直積 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の x_i, y_i, t_i への作用を以下のように定めることができる[8]:

$$
\begin{aligned}
& s_i(x_i) = x_i - (y_i x_i - y_{i+1}x_{i+1})(y_i + x_{i+1})^{-1} = (x_i + y_{i+1})x_{i+1}(y_i + x_{i+1})^{-1}, \\
& s_i(x_{i+1}) = x_{i+1} + (x_i + y_{i+1})^{-1}(y_i x_i - y_{i+1}x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1}x_i(y_i + x_{i+1}), \\
& s_i(y_i) = y_i - (x_i y_i - x_{i+1}y_{i+1})(x_i + y_{i+1})^{-1} = (y_i + x_{i+1})y_{i+1}(x_i + y_{i+1})^{-1}, \\
& s_i(y_{i+1}) = y_{i+1} + (y_i + x_{i+1})^{-1}(x_i y_i - x_{i+1}y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1}y_i(x_i + y_{i+1}), \\
& s_i(x_{i+2}) = x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2}, \\
& s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2}, \\
& \pi(x_i) = x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Q_i := y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i, \\
& r_1(x_i) = x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \\
& r_1(y_i) = y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \\
& r_1(t_i) = t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.
\end{aligned}
$$

この作用は Poisson 構造と F_i, a_i で生成される部分体を保ち, s_i, π の F_i, a_i への作用は前節に定義したものと一致している.

$U_1 = r_1\varpi$ とおく. このとき U_1 は以下を満たしている:

$$
U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \qquad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \qquad U_1(t_i) = t_i.
$$

これらの公式と

$$
x_{i+1}x_i = t_it_{i+1}F_i, \quad y_{i+2}x_i = t_it_{i+2}F_{i+1}^{-1}F_i, \quad y_{i+2}y_{i+1} = t_{i+1}t_{i+2}F_{i+1}^{-1}
$$

から, U_1 の F_i, a_i への作用は前節で定義した q 差分版の Painlevé IV 方程式の離散時間発展 $T_{q\mathrm{P_{IV}}}$ に一致することも確かめられる[9].

したがって, この節の内容を量子化可能ならば, q 差分版 Painlevé IV 方程式を量子化できる. そのためにはこの節で登場した変数 t_i, x_i, y_i と拡大Weyl群の作用を量子群の言葉で理解することが必要になる.

1.3. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用のLax表示

量子化を始める前に $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用のLax表示について説明しておこう.

変数 z, w を用意して, 行列 $\Lambda_3(z)$, $\Lambda_2(w)$, $X(z)$, $Y(z)$, $V_i(w)$ を次のように定める:

$$
\Lambda_3(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
X(z) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad Y(z) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ z & 0 & y_3 \end{bmatrix}, \quad V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}.
$$

[8] この意味がわからない天下りの式を直接扱うのは得策ではない. 次節で解説するLax表示によるWeyl群作用の記述の方を使った方がよい.

[9] U_1 の F_i, a_i への作用は r の値によらない.

$X(z)$, $Y(z)$, $V_i(z)$ を **local** L**-operators** と呼ぶ. さらに行列 G_i, G'_i $(i=1,2)$, R_i $(i \in \mathbb{Z})$ を次のように定める:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G'_i = \varpi(G_i), \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで

$$g_i = \frac{x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}}{x_i + y_{i+1}}, \quad \rho_i = r \frac{x_{i+2} x_{i+1} x_i - y_{i+3} y_{i+2} y_{i+1}}{Q_i}.$$

ϖ は x_i と y_i を交換する操作であった.

このとき, 前節で構成した拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i たちへの作用の定義を以下のように書き直せる:

$$\begin{aligned} &s_i(X(z)) = G_i X(z) G_i'^{-1}, && s_i(Y(z)) = G'_i Y(z) G_i^{-1}, \\ &\pi(X(z)) = \Lambda_3(z) X(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, && \pi(Y(z)) = \Lambda_3(z) Y(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, \\ &r_1(V_i(w)) = R_{i+1}^{-1} V_i(w) R_i, && \varpi(V_i(w)) = \Lambda_2(w) V_i(w) \Lambda_2(w)^{-1}. \end{aligned}$$

これを拡大アフィン Weyl 群の作用の **Lax 表示**と呼ぶ. さらに, 以下の条件で上記の拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i への作用を特徴付けることもできる:

$$\begin{aligned} &r_1(X(z)Y(rz)) = X(z)Y(rz), \\ &r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) = y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \\ &\varpi(X(z)) = Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) = V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w), \\ &s_i(x_i y_i) = x_{i+1}y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1}y_{i+1}) = x_i y_i, \\ &\pi(V_i(w)) = V_{i+1}(w). \end{aligned}$$

これらの事実は公式 $Q_{i+1}x_i - y_{i+3}Q_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}$ などを使えば確認できる[10]. そして, それらの事実を使うことによって実際に拡大アフィン Weyl 群の作用が定まっていることも確認できる[11].

Weyl 群作用の Lax 表示を初見の人のために計算のポイントがどこにあるかを解説しておく. 計算のポイントは 2×2 行列に関して

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g' & 0 \end{bmatrix}$$

および $g' = -g$ をみたす g が a, b, c から $g = (a-c)/b$ と一意に定まることである[12]. s_i の作用の Lax 表示を記述する行列 G_i は行列 $X(z)Y(rz)$ にこの計算を適用することによって得られる.

[10] この $(m,n) = (3,2)$ の場合に計算を地道にまとめておけば一般の場合にどんな感じになっているかの感触がつかめる. うまく行く計算の仕組みを見付けるのは大変だが, ある特別な場合にうまく行くことを確認できれば, それを一般化するのは易しいことが多い.

[11] 拡大アフィン Weyl 群作用については, 前節の天下り的な意味がよく分からない定義を出発点にするのではなく, この節の Lax 表示を用いた定義の方を出発点に採用した方がよい.

[12] $g' = -g$ を仮定しない幾何クリスタルへの一般化もある. その一般化はさらに非可換な場合に一般化される. 非可換な場合への一般化の例は第 1.4 節の最後の方および第 1.5 節にある.

1.4. 量子展開環の Chevalley 生成元の像のべき f_i^γ の作用

q 差分版 Painlevé IV 方程式とその対称性の量子化を始めよう. まず, 基礎になる非可換環を量子群の方法を用いて構成しよう.

$\mathcal{B}$ は生成元 $a_{ik}^{\pm 1}$, $b_{ik}^{\pm 1}$ $(i=1,2,3,\ k=1,2)$ と以下の関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数であるとする:

$$
\begin{aligned}
&a_{ik}a_{ik}^{-1} = a_{ik}^{-1}a_{ik} = 1, \quad b_{ik}b_{ik}^{-1} = b_{ik}^{-1}b_{ik} = 1 \qquad (\xi = a_{ik}, b_{ik}),\\
&a_{ik}b_{ik} = q^{-1}b_{ik}a_{ik}, \quad a_{ik}b_{i+1,k} = qb_{i+1,k}a_{ik}, \quad a_{ik}b_{i+2,k} = b_{i+2,k}a_{ik},\\
&a_{ik}a_{jk} = a_{jk}a_{ik}, \quad b_{ik}b_{jk} = b_{jk}b_{ik}, \quad \xi_{i1}\eta_{j2} = \eta_{j2}\xi_{i1} \qquad (\xi, \eta = a, b).
\end{aligned}
$$

ただし $a_{i+3,k} = a_{ik}$, $b_{i+3,k} = b_{ik}$ によってインデックス i を整数全体に拡張しておいた.

$A_2^{(1)}$ 型の量子 R 行列 $R(z)$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
R(z) = (q - q^{-1}z)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + (1-z)\sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj}\\
+ (q - q^{-1})\sum_{i<j}(E_{ij}\otimes E_{ji} + zE_{ji}\otimes E_{ij}).
\end{aligned}
$$

ここで i, j は $1, 2, 3$ を動き, E_{ij} は (i,j) 成分のみが 1 で他の成分が 0 であるような 3×3 行列 (行列単位) であるとする. さらに行列 $L_k(z)$ を次のように定める:

$$
L_k(z) = \begin{bmatrix} a_{1k} & b_{1k} & 0 \\ 0 & a_{2k} & b_{2k} \\ zb_{3k} & 0 & a_{3k} \end{bmatrix}.
$$

この $L_k(z)$ たちを **local L-operators** と呼ぶ. このとき代数 $\mathcal{B}$ の定義関係式は次の "$RLL = LLR$" 関係式に書き直される:

$$
\begin{aligned}
&R(z/w)L_k(z)^1L_k(w)^2 = L_k(z)^2L_k(z)^1R(z/w) \quad (k=1,2),\\
&L_1(z)^1L_2(w)^2 = L_2(w)^2L_1(z)^1.
\end{aligned}
$$

ただし $L_1(z)^1 = L_1(z)\otimes 1$, $L_2(w)^2 = 1\otimes L_2(w)$ と定めた.

以上の構成は量子群の世界では標準的でよく知られている.

量子展開環 $U_q(\widehat{\mathrm{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ は生成元 $\kappa_i^{\pm 1}$, φ_i $(i=1,2,3)$ と次の関係式で定義される代数である:

$$
\begin{aligned}
&\kappa_i\kappa_i^{-1} = \kappa_i^{-1}\kappa_i = 1, \quad \kappa_i\kappa_j = \kappa_j\kappa_i,\\
&\kappa_i\varphi_i\kappa_i^{-1} = q^{-1}\varphi_i, \quad \kappa_{i+1}\varphi_i\kappa_{i+1}^{-1} = q\varphi_i, \quad \kappa_{i+2}\varphi_i\kappa_{i+2}^{-1} = \varphi_i,\\
&\varphi_i^2\varphi_{i\pm 1} - (q+q^{-1})\varphi_i\varphi_{i\pm 1}\varphi + \varphi_{i\pm 1}\varphi^2 = 0.
\end{aligned}
$$

ただしインデックスを 3 周期的に整数全体に拡張しておいた. 最後の関係式を q-Serre 関係式と呼び, φ_i たちを量子展開環の下三角部分の **Chevalley 生成元**と呼ぶことにする. $\kappa_i^{\pm 1}$ たちから生成される部分代数は **Cartan 部分代数**と呼ばれる.

各 k ごとに次によって代数準同型 $U_q(\mathfrak{b}_-)\to\mathcal{B}$ を定めることができる:

$$
\kappa_i^{\pm 1} \mapsto a_{ik}^{\pm 1}, \qquad \varphi_i \mapsto a_{ik}^{-1}b_{ik}.
$$

ゆえに $a_{ik}^{\pm1}$ と b_{ik} で生成される $\mathcal{B}$ の部分代数は $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数のテンソル積 $U_q(\mathfrak{b}_-)\otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$ の

$$\kappa_i^{\pm1}\otimes 1\mapsto a_{i1}^{\pm1},\quad \varphi_i\otimes 1\mapsto a_{i1}^{-1}b_{i1},\quad 1\otimes\kappa_i^{\pm1}\mapsto a_{i2}^{\pm1},\quad 1\otimes\varphi_i\otimes 1\mapsto a_{i2}^{-1}b_{i2}.$$

で定まる代数準同型写像の像になっている.

よく知られているように, local L-operaors の積 $L(z):=L_1(z)L_2(z)$ は量子展開環の余積に対応している. $U_q(\mathfrak{b}_-)$ の余積が

$$\Delta(\kappa_i^{\pm1})=\kappa_i^{\pm1}\otimes\kappa_i^{\pm1},\qquad \Delta(\varphi_i)=\varphi_i\otimes\kappa_i^{-1}\kappa_{i+1}+1\otimes\varphi_i$$

で定義される. 行列 $L(z):=L_1(z)L_2(z)$ の (i,i) 成分は $\Delta(\kappa_i)$ の像に一致し, $(i,i+1)$ 成分を左から (i,i) 成分で割ってできる元

$$f_i:=a_{i1}^{-1}b_{i1}a_{i2}^{-1}a_{i+1,2}+a_{i2}^{-1}b_{i2}$$

は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積 $\Delta(\varphi_i)$ の像に一致する.

行列 $L(z)=L_1(z)L_2(z)$ の対角部分を

$$L_0=\operatorname{diag}(\tilde a_1,\tilde a_2,\tilde a_3),\qquad \tilde a_i=a_{i1}a_{i2}\quad (i=1,2,3)$$

と書き, 行列 $\widetilde{L}(z):=L_1(z)L_2(z)L_0$ を次のように書くことにする[13]:

$$\widetilde{L}(z)=L_1(z)L_2(z)L_0=\begin{bmatrix}\tilde a_1^2 & b_1 & c_1\\ zc_2 & \tilde a_2^2 & b_2\\ zb_3 & zc_3 & \tilde a_3^2\end{bmatrix},\quad \begin{cases}b_i=(a_{i1}b_{i2}+b_{i1}a_{i+1,2})a_{i+1,1}a_{i+1,2},\\ c_i=b_{i1}b_{i+1,2}a_{i+2,1}a_{i+2,2}.\end{cases}$$

さらに $\tilde a_i$, b_i, c_i のインデックスを 3 周期的に整数全体に拡張しておく.

量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積 $\Delta(\varphi_i)$ の像 f_i は次のように表わされるのであった:

$$f_i=\tilde a_i^{-1}b_i\tilde a_{i+1}^{-1}=f_{i1}+f_{i2},\quad f_{i1}=a_{i1}^{-1}b_{i1}a_{i2}^{-1}a_{i+1,2},\quad f_{i2}=a_{i2}^{-1}b_{i2}$$

f_i たちは φ_i の余積たちの像なので特に q-Serre 関係式を満たしている. ゆえに変数 γ による f_i のべき f_i^γ を含む代数を構成することができ (第 3.3 節), 次の公式が成立することを示せる (第 3.4 節, [15], [16]): $a_{ij}=a_{ji}=-1$ のとき

$$\begin{aligned}&f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma}=q^{\pm\gamma}f_j+[\gamma]_q(f_if_j-q^{\pm1}f_jf_i)f_i^{-1}=[1-\gamma]_qf_j+[\gamma]_qf_if_jf_i^{-1},\\ &f_i^\beta f_j^{\beta+\gamma}f_i^\gamma=f_j^\gamma f_i^{\beta+\gamma}f_j^\beta.\end{aligned}$$

ここで $[\gamma]_q=(q^\gamma-q^{-\gamma})/(q-q^{-1})$. 後者の関係式は **Verma 関係式**と呼ばれている.

$\tilde a_i^{\pm1}$, b_i, c_i で生成される $\mathcal{B}$ の部分代数は $\tilde a_i^{\pm1}$, f_i, c_i で生成される部分代数に一致しており, それらは以下の関係式を満たしていることを直接の計算で確認できる:

$$f_if_{i+1}-qf_{i+1}f_i=(1-q^2)\tilde a_i^{-1}c_i\tilde a_{i+1}^{-1},$$

[13] 量子展開環の余積に対応する標準的な L-operator $L(z)=L_1(z)L_2(z)$ ではなく, 対角部分 L_0 を二重にした $\widetilde{L}(z)=L(z)L_0$ を主に使うことになることに注意せよ.

$$f_i c_j = c_j f_i, \quad \tilde{a}_i \tilde{a}_j = \tilde{a}_j \tilde{a}_i,$$
$$c_i c_{i-2} = q c_{i-2} c_i, \quad c_i c_{i+2} = q^{-1} c_{i+2} c_i,$$
$$\tilde{a}_i f_i = q^{-1} f_i \tilde{a}_i, \quad \tilde{a}_{i+1} f_i = q f_i \tilde{a}_{i+1}, \quad \tilde{a}_{i+2} f_i = f_i \tilde{a}_{i+2},$$
$$\tilde{a}_i c_i = q^{-1} c_i \tilde{a}_i, \quad \tilde{a}_{i+1} c_i = c_i \tilde{a}_{i+1}, \quad \tilde{a}_{i+2} c_i = q c_i \tilde{a}_{i+2}.$$

これらの関係式を使えば必要な公式はすべて計算できる. 特に重要なのは, c_i たちが f_j たちと可換になり, c_i たちの積が q べき因子の違いを除けば可換になることである. この事実は後で変数 f_i を変数変換するときに使われる.

$\widetilde{L}(z)$ の成分で f_i と非可換なのは $\tilde{a}_i^2$, $\tilde{a}_{i+1}^2$, b_{i-1}, b_{i+1} の 4 つだけであり,

$$\begin{aligned}
f_i^\gamma b_{i+1} f_i^{-\gamma} &= b_{i+1} + (q^{-2\gamma} - 1)\tilde{a}_i^2 b_i^{-1} c_i, \\
f_i^\gamma b_{i-1} f_i^{-\gamma} &= b_{i-1} + (q^{2\gamma} - 1) c_{i-1} b_i^{-1} \tilde{a}_i^2, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_i f_i^{-\gamma} &= q^\gamma \tilde{a}_i, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_{i+1} f_i^{-\gamma} &= q^{-\gamma} \tilde{a}_{i+1}
\end{aligned}$$

が成立していることも確認できる.

変換 $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)(x) = f_i^\gamma x f_i^{-\gamma}$ の Lax 表示を得るために次のようにおく:

$$\mathcal{G}_{i,c} = y_i((c^2 - 1)\tilde{a}_{i+1}^2 b_i^{-1}), \quad \mathcal{G}'_{i,c} = y_i((c^{-2} - 1) b_i^{-1} \tilde{a}_i^2).$$

ただし,

$$y_1(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z^{-1}a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき, f_i^γ の作用に関する上の公式より次が成立している:

$$f_i^\gamma \widetilde{L}(z) f_i^{-\gamma} = \mathcal{G}_{i,c} \widetilde{L}(z) \mathcal{G}'_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

これを $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)$ の **Lax 表示**と呼ぶ[14].

1.5. 不変部分代数への制限

代数 $\mathcal{B}$ の中心可逆元 r を

$$r = c_1 c_3 c_2$$

と定め[15], 対角行列 $\widetilde{C}$ と $t_i \in \mathcal{B}$ を次のように定める[16]:

$$\widetilde{C} = \mathrm{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) := \mathrm{diag}(1, c_1 c_3, c_1), \quad t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}.$$

[14] このタイプの公式を得るためには $L_1(z)L_2(z)$ そのものではなく, その対角部分 L_0 を二重化した $\widetilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0$ を使わなければいけない.

[15] より一般に local L-operators の行列としてのサイズ 3 を 3 以上の奇数 m に置き換えた場合には r を $r = c_1 c_3 \cdots c_m c_2 c_4 \cdots c_{m-1}$ と定める.

[16] 行列のサイズが 3 以上の奇数 m の場合には, $\widetilde{C} = \mathrm{diag}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m)$ を次のように定める:

$$\widetilde{C} := \mathrm{diag}(1, c_{\mathrm{odd}}, c_1, c_{\mathrm{odd}} c_2, c_1 c_3, c_{\mathrm{odd}} c_2 c_4, c_1 c_3 c_5, \ldots, c_{\mathrm{odd}} c_2 c_4 \cdots c_{m-3}, c_1 c_3 \cdots c_m).$$

ここで $c_{\mathrm{odd}} = c_1 c_3 \cdots c_m$.

この t_i と $\tilde{a}_i = a_{i1}a_{i2}$ は q べき因子の違いを除いて一致する. $\tilde{c}_i$ のインデックスは整数全体に拡張**しない**ことにする.

このとき, 行列 $\widehat{L}(z) := \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1}$ は次の形になる:

$$\widehat{L}(z) = \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^2 & \hat{b}_1 & 1 \\ rz & t_2^2 & \hat{b}_2 \\ zr\hat{b}_3 & z & t_3^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{cases} \hat{b}_1 = \tilde{c}_1 b_1 \tilde{c}_2^{-1}, \\ \hat{b}_2 = \tilde{c}_2 b_2 \tilde{c}_3^{-1}, \\ \hat{b}_3 = r^{-1}\tilde{c}_3 b_3 \tilde{c}_1^{-1}. \end{cases}$$

前節までは 3 周期的にインデックスを整数全体に拡張していたが, この節では次の**準周期性**によって t_i, $\hat{b}_i$ のインデックスを整数全体に拡張しておく:

$$t_{i+3} = r^{-1}t_i, \quad \hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i.$$

このとき, t_i たちは, 互いに可換なだけではなく, $\hat{b}_j$ たちとも可換になる [17]. そこで t_i たちを**量子化されたパラメーター変数**と呼ぶことにする. $\widehat{L}(z)$ の成分で f_i と非可換なのは t_i^2, t_{i+1}^2, $\hat{b}_{i+1}$, $\hat{b}_{i-1}$ の 4 つだけである.

$\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)$ の $\widehat{L}(z)$ の作用の Lax 表示を得るために次のようにおく:

$$G_{i,c} = \widetilde{C}\mathcal{G}_{i,c}\widetilde{C}^{-1}, \quad G''_{i,c} = \widetilde{C}\mathcal{G}'_{i,c}\widetilde{C}^{-1}.$$

後で $G'_{i,c}$ を別に定義するのでこのような記号法になっている. このとき,

$$\begin{aligned} &G_{i,c} = y_i((c^2-1)t_{i+1}^2\hat{b}_i^{-1}), \quad G''_{i,c} = y_i((c^{-2}-1)\hat{b}_i^{-1}t_i^2) \quad (i=1,2), \\ &G_{3,c} = y_3(r^{-1}(c^2-1)t_1^2\hat{b}_3^{-1}), \quad G''_{3,c} = y_3(r^{-1}(c^{-2}-1)\hat{b}_3^{-1}t_3^2). \end{aligned}$$

前節の結果より, 次の公式が成立している:

$$f_i^\gamma \widehat{L}(z) f_i^{-\gamma} = G_{i,c}\widehat{L}(z)G''_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

この公式より $\widehat{L}(z)$ が文献 [2] で導入された unipotent crystal (幾何クリスタルの一種) の量子化とみなせることがわかる.

量子化されたパラメーター変数 a_i を次のように定めておく [18]:

$$a_i = t_i t_{i+1}^{-1}.$$

このとき, 量子化される前の幾何クリスタルの場合 ([2], [3]) と同様の方法で、この量子化された場合にも, 拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi\rangle$ の作用を t_i, $\hat{b}_i$ たちから $\mathbb{C}(q,r)$ 上生成される斜体上に次のように定めることができる:

$$s_i(\widehat{L}(z)) = G_{i,a_i}\widehat{L}(z)G_{i,a_i}^{-1}, \quad \pi(\widehat{L}(z)) = \Lambda_3(z)\widehat{L}(rz)\Lambda_3(r^2z)^{-1}.$$

---

[17] この事実がとても重要である. $\tilde{a}_i^{\pm1}$, $b_i^{\pm1}$, $c_i^{\pm1}$ で生成される代数には, 可逆な複素対角行列全体のなす群が行列 $\widetilde{L}(z)$ の相似変換の形で作用している. その作用で不変な元全体のなす部分代数は $t_i^{\pm1}$, $\hat{b}_i^{\pm1}$, $r^{\pm1}$ で生成される. すなわち行列 $\widehat{L}(z)$ を考えることは可逆な対角行列による相似変換で不変な部分代数を考えることに対応している. $\widehat{L}(z)$ のすべての成分が t_i と可換になるのはこの不変性の帰結である.

[18] パラメーター変数 a_i は単純コルートに対応している.

$G_{i,a_i} = {G''_{i,a_i}}^{-1} = y_i((t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1})$ $(i=1,2)$ が成立していることに注意せよ[19]. この作用を具体的に書き下すと次のようになる:

$$
\begin{aligned}
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{i+2}) = t_{i+2}, \\
&s_i(\hat{b}_i) = \hat{b}_i, \quad s_i(\hat{b}_{i+1}) = \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \quad s_i(\hat{b}_{i-1}) = \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\
&\pi(t_j) = t_{j+1}, \quad \pi(\hat{b}_j) = \hat{b}_{j+1}.
\end{aligned}
$$

準周期性 $t_{i+3} = r^{-1}t_i$, $\hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i$ に注意せよ.

以下の結果は第 2.5 節において τ 函数への Weyl 群作用の Sato-Wilson 表示について説明するために使われる.

従属変数 $\hat{f}_i$ を次のように定める[20]:

$$\hat{f}_i = -(q - q^{-1})^{-1}\tilde{c}_i f_i \tilde{c}_{i+1}^{-1}.$$

このとき $\hat{b}_i = -(q - q^{-1})t_i\hat{f}_i t_{i+1}$ が成立している.

$\tilde{c}_i$ たちは f_j たちと可換なので

$$\hat{f}_i^{\gamma} f_j \hat{f}_i^{-\gamma} = f_i^{\gamma} f_j f_i^{-\gamma}$$

を満たしている. さらに $\tilde{c}_i$ たちは互いに q べき因子の違いを除いて可換である. ゆえに $\hat{f}_i^{\beta}\hat{f}_j^{\beta+\gamma}\hat{f}_i^{\gamma}$ と $\hat{f}_j^{\gamma}\hat{f}_i^{\beta+\gamma}\hat{f}_j^{\beta}$ も q べき因子の違いを除いて等しい. このことから, 上で構成した Weyl 群作用を f_i^{γ} ではなく, $\hat{f}_i^{\gamma}$ を用いて構成できそうである. しかし, $\hat{f}_i$ たちは f_i たちと違って t_i たちと可換である. ゆえに t_i たちへの Weyl 群作用は $\hat{f}_i^{\gamma}$ 以外の手段を用いて構成しなければいけない. そこで $\mathbb{C}(q,r)$ 上 t_i, $\hat{f}_i$ で生成される斜体 $\mathcal{K}$ の代数自己同型 $\tilde{s}_i$ を次のように定めておく:

$$\tilde{s}_i(t_i) = t_{i+1}, \quad \tilde{s}_i(t_{i+1}) = t_i, \quad \tilde{s}_i(t_{i+2}) = t_{i+2}, \quad \tilde{s}_i(\hat{f}_j) = \hat{f}_j.$$

このとき $\mathcal{K}$ への Weyl 群作用を

$$s_i(x) = \mathrm{Ad}(\hat{f}_i^{\gamma})(\tilde{s}_i(x)) = \hat{f}_i^{\gamma}\tilde{s}_i(x)\hat{f}_i^{-\gamma}, \quad c = q^{-\gamma} = a_i = t_i t_i^{-1}$$

によって定めることでき, この作用は上で構成した Weyl 群作用と一致している:

$$s_i(\widehat{L}(z)) = G_i\widehat{L}(z)G_i^{-1}, \quad G_i := G_{i,a_i} = y_i(g_i), \quad g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^{\vee}]_q}{\hat{f}_i}.$$

この結果は第 2.5 節で基本的な役目を果たす[21].

---

[19] $s_i = \pi^{i-1}s_1\pi^{-(i-1)}$ なので s_1 と π の作用が定まっていれば $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用を得るためには十分である. そこで以下の説明では $s_0 = s_3$ の作用に関する説明を暗黙のうちに省略することがある.

[20] これは $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ のみに通用する公式. $\hat{f}_3$ についてはここだけで仮に $\tilde{c}_4 = r$ とおけば同じ公式で適切な定義が得られる.

[21] 斜体の元 a, b が互いに可換なとき, $ab^{-1} = b^{-1}a$ を a/b や $\frac{a}{b}$ と書くことにする.

1.6. 変数 x_i, y_i の量子化

対角行列 $\widetilde{C}'$ を次のように定める:

$$\widetilde{C}' = \mathrm{diag}(\tilde{c}_3 b_{31}, \tilde{c}_1 b_{11}, \tilde{c}_2 b_{21}).$$

このとき行列 $X(z) := \widetilde{C} L_1(z) \widetilde{C}'^{-1}$, $Y(rz) := \widetilde{C}' L_2(z) L_0 \widetilde{C}^{-1}$ は次の形をしている[22]:

$$X(z) = \widetilde{C} L_1(z) \widetilde{C}'^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

$$Y(rz) = \widetilde{C}' L_2(z) L_0 \widetilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ rz & 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

この式によって量子化された従属変数 x_i, y_i を定義する．それらのインデックスを準周期性 $x_{i+3} = r^{-1} x_i$, $y_{i+3} = r^{-1} y_i$ によって整数全体に拡張しておく．

このとき, $\hat{a}_i = t_i^2 = x_i y_i$ および以下の関係式が成立している: $\mu = 1, 2$ について,

$$\begin{aligned}
&x_i y_i = y_i x_i = t_i^2, \\
&x_i x_{i+\mu} = q^{(-1)^{\mu-1} 2} x_{i+\mu} x_i, \qquad x_i y_{i+\mu} = q^{-(-1)^{\mu-1} 2} y_{i+\mu} x_i, \\
&y_i y_{i+\mu} = q^{(-1)^{\mu-1} 2} y_{i+\mu} y_i, \qquad y_i x_{i+\mu} = q^{-(-1)^{\mu-1} 2} x_{i+\mu} y_i, \\
&t_i \xi_j = \xi_j t_i \quad (\xi = x, y, t).
\end{aligned}$$

この関係式の古典極限は古典版の変数 x_i, y_i, t_i の Poisson 構造を再現する[23]．このことより, この節の行列 $X(z)$, $Y(rz)$ は古典版の q 差分化された Painlevé IV 方程式の記述で用いた行列 $X(z)$, $Y(rz)$ の量子化になっていることがわかる．

x_i, y_i たちは以下の条件から一意に決定される:

$$X(z) Y(rz) = \widetilde{C} \widetilde{L}(z) \widetilde{C}^{-1} = \widehat{L}(z), \quad r = c_1 c_3 c_2, \quad x_3 x_2 x_1 = b_{31}^{-1} a_{31} b_{21}^{-1} a_{21} b_{11}^{-1} a_{11}.$$

r と $x_3 x_2 x_1$ に関する条件の右辺は代数 $\mathcal{B}$ の可逆な中心元であることにも注意せよ．対角行列 $\widetilde{C}$ の成分は $\widetilde{L}(z) = L_1(z) L_2(z) L_0$ の成分 c_i たちで書けていたので, $x_3 x_2 x_1$ に関する条件と $\widetilde{L}(z)$ の成分から x_i, y_i たちは一意に決まる．さらに L_0 は $L(z) = L_1(z) L_2(z)$ の対角部分だったので, $x_3 x_2 x_1$ に関する条件と $L(z)$ の成分から x_i, y_i, t_i たちは一意に決まる．($\widetilde{C} = \mathrm{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$, $L_0 = \mathrm{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ であり, t_i は $t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}$ と定義されたのであった.)

代数 $\mathcal{B}$ は $a_{ik}^{\pm 1}$, $b_{ik}^{\pm 1}$ から生成される代数なのであった．$\mathcal{B}$ には群 $(\mathbb{C}^\times)^3 \times (\mathbb{C}^\times)^3$ の元 (g, g') を次のように作用させることができる:

$$L_1(z) \mapsto g L_1(z) g'^{-1}, \quad L_2(z) \mapsto g' L_2(z) g^{-1}.$$

ただし $(\mathbb{C}^\times)^3$ の元 g, g' と可逆な対角行列を同一視した．この群作用を local L-operators $L_1(z)$, $L_2(z)$ の **gauge 変換**と呼ぶことにする．この guage 変換で不変な $\mathcal{B}$ の元全体のなす部分代数を $\mathcal{B}^{\mathrm{gauge}}$ と書くことにする．$\mathcal{B}^{\mathrm{gauge}}$ は x_i, y_i, t_i, r とその逆元たちで生成される．

[22] 実際にはその形になるように $\widetilde{C}'$ を定めた．適切な $\widetilde{C}$ がすでに与えられているとき, $\widetilde{C}'$ はその条件で一意に定まる．

[23] $\hbar = q^2 - 1$ とおいて $\hbar \to 0$ の古典極限を考える．

1.7. $\widetilde{W}(A_2^{(1)})\times\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化

前節の定義より, 次が成立していることがすぐにわかる $(i=1,2)$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}(z)=\widetilde{C}L_1(z)L_2(z)L_0\widetilde{C}^{-1}=X(z)Y(rz),\\
&G_{i,c}=y_i(g_i(c)),\quad g_i(c):=\frac{(c^2-1)t_{i+1}^2}{x_i+y_{i+1}},\\
&G''_{i,c}=y_i(g''_i(c)),\quad g''_i(c):=\frac{(c^{-2}-1)t_i^2}{x_i+y_{i+1}}.
\end{aligned}$$

さらに行列 $G'_{i,c}$ を次のように定める:

$$G'_{i,c}=y_i(g'_i(c)),\quad g'_i(c):=\frac{(c^2-1)t_{i+1}^2}{c^2t_{i+1}^2x_i^{-1}+x_{i+1}}=-\frac{(c^{-2}-1)t_i^2}{c^{-2}t_i^2y_{i+1}^{-1}+y_i}.$$

このとき, $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)$ の $X(z)$, $Y(rz)$ への作用は次のように書ける:

$$f_i^\gamma X(z)f_i^{-\gamma}=G_{i,c}X(z){G'_{i,c}}^{-1},\quad f_i^\gamma Y(rz)f_i^{-\gamma}=G'_{i,c}Y(rz)G''_{i,c},\quad c=q^{-\gamma}.$$

ゆえに, x_i, y_i によって $\mathbb{C}(r,q)$ 上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})=\langle s_0,s_1,s_2,\pi\rangle$ の作用を次によって定めることができる:

$$\begin{aligned}
&s_i(X(z))=G_{i,a_i}X(z){G'_{i,a_i}}^{-1},\quad s_i(Y(z))=G'_{i,a_i}Y(rz)G''_{i,a_i},\\
&\pi(X(z))=\Lambda(z)X(z)\Lambda(rz)^{-1},\quad \pi(Y(rz))=\Lambda(rz)Y(rz)\Lambda(r^2z)^{-1}.
\end{aligned}$$

以下の公式より, 以上の結果は古典版の q 差分化された Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) の部分の量子化を与えていることがわかる:

$$\begin{aligned}
&G_{i,a_i}=y_i(g_i),\quad g_i=\frac{x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1}}{x_i+y_{i+1}},\\
&G'_{i,a_i}=y_i(g'_i),\quad g'_i=\frac{y_ix_i-y_{i+1}x_{i+1}}{y_i+x_{i+1}},\\
&G''_{i,a_i}=G_{i,a_i}^{-1}
\end{aligned}$$

この作用はパラメーター変数 t_i たちにも自然に拡張される.

以上で構成された $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$\begin{aligned}
&s_i(x_i)=x_i-(y_ix_i-y_{i+1}x_{i+1})(y_i+x_{i+1})^{-1}=(x_i+y_{i+1})x_{i+1}(y_i+x_{i+1})^{-1},\\
&s_i(x_{i+1})=x_{i+1}+(x_i+y_{i+1})^{-1}(y_ix_i-y_{i+1}x_{i+1})=(x_i+y_{i+1})^{-1}x_i(y_i+x_{i+1}),\\
&s_i(y_i)=y_i-(x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1})(x_i+y_{i+1})^{-1}=(y_i+x_{i+1})y_{i+1}(x_i+y_{i+1})^{-1},\\
&s_i(y_{i+1})=y_{i+1}+(y_i+x_{i+1})^{-1}(x_iy_i-x_{i+1}y_{i+1})=(y_i+x_{i+1})^{-1}y_i(x_i+y_{i+1}),\\
&s_i(x_{i+2})=x_{i+2},\quad s_i(y_{i+2})=y_{i+2},\\
&s_i(t_i)=t_{i+1},\quad s_i(t_{i+1})=t_i,\quad s_i(t_{j+2})=t_{j+2},\\
&\pi(x_i)=x_{i+1},\quad \pi(y_i)=y_{i+1},\quad \pi(t_i)=t_{i+1}.
\end{aligned}$$

これらの公式は q が一ヶ所も出て来ないように書かれているので古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

残りの $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の部分の作用の量子化も同様に構成される. d_i, d'_i を次のように定めるとすべての x_i, y_i, t_i と可換である:

$$d_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \quad d'_i = y_{i+2}y_{i+1}y_i.$$

量子化された $V_i(w)$, R_i, ρ_i, Q_i を古典の場合の公式をそのまま用いて

$$\begin{aligned} &V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_i = r\frac{d_i - d'_{i+1}}{Q_i}, \\ &Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i. \end{aligned}$$

と定める. このとき x_i, y_i によって $\mathbb{C}(r,q)$ 上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の作用を (古典の場合と同様の) 次の式によって定めることができる:

$$r_1(V_i(z)) = R_{i+1}^{-1}V_i(z)R_i, \qquad \varpi(V_i(z)) = \Lambda_2(w)V_i(w)\Lambda_2(w)^{-1}.$$

この作用はパラメーター変数 t_i にも自然に拡張される.

以上で構成された $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$\begin{aligned} &r_1(x_i) = x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \\ &r_1(y_i) = y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \\ &r_1(t_i) = t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i. \end{aligned}$$

これらの公式も古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

さらに, 以下の条件で以上で定義した 2 つの拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i への作用を特徴付けることもできる:

$$\begin{aligned} &r_1(X(z)Y(rz)) = X(z)Y(rz), \\ &r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) = y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \\ &\varpi(X(z)) = Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) = V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w), \\ &s_i(x_iy_i) = x_{i+1}y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1}y_{i+1}) = x_iy_i, \\ &\pi(V_i(w)) = V_{i+1}(w). \end{aligned}$$

このことから 2 つの拡大アフィン Weyl 群の作用が可換になることもわかる. したがって, 以上によって, $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化が構成できたことになる.

1.8. $q\mathrm{P}_{\mathbf{IV}}$ の量子化

古典の場合の q 差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展は $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用における $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の側の $U_1 = r_1\varpi$ の作用に一致しているのであった.

量子化された $U_1 = r_1\varpi$ の作用の仕方は次の通り:

$$U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \qquad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \qquad U_1(t_i) = t_i.$$

Q_i は $Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i$ と定義されたのであった.

量子化されたパラメーター変数 a_i は古典の場合と同様に $a_i = t_i t_{i+1}^{-1}$ と定義されたのであった ($t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$). 量子化された従属変数 F_i も古典の場合と同様に次のように定義しよう:

$$F_i = t_i^{-1} t_{i+1}^{-1} x_{i+1} x_i.$$

このとき, $F_{i+3} = F_i$, $a_{i+3} = a_i$ が成立しており, それらは以下の関係式を満たしている:

$$F_i F_j = q^{2b_{ij}} F_j F_i, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad a_i F_j = F_j a_i.$$

たとえば $F_i F_{i+1} = q^2 F_{i+1} F_i$. この関係式の古典極限は古典の場合の Poisson 構造を再現する.

F_i の定義と $t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$ と $x_i x_{i+1} = q^2 x_{i+1} x_i$ などより,

$$x_{i+1} x_i = t_i t_{i+1} F_i, \quad y_{i+2} x_i = t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1}, \quad y_{i+2} y_{i+1} = q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
Q_i &= q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+1} F_i \\
&= (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}) q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} \\
Q_{i+1} &= (1 + q^2 a_{i+1} F_{i+1} + q^2 a_{i+1} a_{i-1} F_{i+1} F_{i-1}) q^{-2} r^{-1} t_{i+2} t_i F_{i-1}^{-1} \\
Q_{i+2} &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) q^{-2} r^{-2} t_i t_{i+1} F_i^{-1}.
\end{aligned}$$

これより, 特に

$$\begin{aligned}
&U_1(F_i) = r^2 Q_{i+2} F_i Q_i^{-1} \\
&= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) a_i a_{i+1} F_{i+1} (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1})^{-1}
\end{aligned}$$

これが q 差分版 Painlevé IV 方程式の**量子化された離散時間発展**である.

1.9. まとめ

以上によって q 差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展とその $A_2^{(1)}$ 対称性が量子化された. 量子化の過程で, q 差分版 Painlevé IV 方程式の対称形式の独立変数 F_i, x_i, y_i たちとパラメーター変数 a_i, t_i たちが量子群のどこにどのように住んでいるかもわかった.

量子化された従属変数 F_i とパラメーター変数 a_i の積 $a_i F_i = y_{i+1}^{-1} x_i$ は q のべき因子を除いて $\varphi_i \otimes \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$ の像 f_{i1} と $1 \otimes \varphi_i$ の像 f_{i2} の比 $f_{i2}^{-1} f_{i1}$ に等しい. すなわち $a_i F_i$ は q のべき因子を除いて量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の余積の 2 つの項の比の像に等しい.

量子化されたパラメーター変数 t_i, a_i のそれぞれは q べき因子の違いを除いて量子展開環の Cartan 部分代数の元 κ_i, $\kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$ の余積の像に等しい.

要するに q 差分化された Painlevé IV 方程式の対称形式の従属変数は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元から来ており, パラメーター変数は量子展開環の Cartan 部分代数の生成元から来ている.

q 差分化された Painlevé IV 方程式の量子化の対称性 s_i の作用は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積の像 f_i のべき f_i^γ の作用から来ている. ただし, γ とパラメーター変数の関係を $a_i = t_i / t_{i+1} = q^{-\gamma}$ としなければいけない.

x_i, y_i, t_i 変数は local L-operators $L_1(z)$, $L_2(z)$ の可逆な対角行列による guage 変換で不変な元であり, それらの逆元と $r^{\pm 1}$ から guage 変換で不変な $\mathcal{B}$ の元全体のなす部分代数 $\mathcal{B}^{\mathrm{gauge}}$ が生成される.

2. τ 函数の量子化

前節では q 差分版 Painlevé IV 方程式を例に Painlevé 系の量子化を量子群を使って遂行する方法について説明した．しかし，そこで量子化されたのは従属変数 F_i, x_i, y_i たちとパラメーター変数 a_i, t_i たちだけであり，τ 函数は一切登場しなかった．

この節では τ 函数の量子化を扱うことにする．より正確に言えば表現論と相性の良い量子化された τ 変数を導入し，その基本性質を調べる．

この文書で「量子化」は「Poisson 括弧を非可換環の交換子で置き換えることおよびその一般化」を意味しているのであった (第 3.1 節)．Painlevé 系の解に付随する τ 函数を考えてしまうと，その意味での量子化を遂行できない．量子化できるのは Poisson 構造が定められた変数たちの方である．だから，この文書のタイトルは「τ 函数の量子化」ではなく「τ 変数の量子化」とするべきだったかもしれない．

Painlevé 系の従属変数とパラメーター変数は Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体の座標変数であると考えられる．ゆえにそこに新たに τ 変数を付け加えるということは，Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体を拡張することを意味している．

τ 変数の量子化のためには τ 変数と従属変数やパラメーター変数のあいだの Poisson 括弧が適切に定義されていなければいけない．しかし，非常に残念なことに古典 Painlevé 系の論文で τ と他の変数のあいだに Poisson 括弧を導入しているものを見付けることができなかった．だから，Poisson 括弧の情報無しに適切な量子 τ 変数の定義を見付けなければいけない．

現時点でわかっていることは以下の通りである．

2.1. 量子 τ 変数の導入

q 差分版 Painlevé IV 方程式の量子化において出発点になる基礎となる代数は量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ だった．以下ではこの場合を例に量子化された τ 変数を導入しよう．ただし，可能な限り，任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合への一般化の仕方が分かるように説明したい．

$\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$ とおき，量子展開環などは $\mathbb{F}$ 上の代数として定義されていると考えることにする．以下で主に使うのは $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数全体ではなく，下三角部分 $U_q(\mathfrak{n}_-) = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ の方である．

まず，$\mathcal{A}$ は $U_q(\mathfrak{n}_-)$ のある剰余環を部分環として含む Ore 整域であると仮定し，$Q(\mathcal{A})$ はその分数斜体であるとする:

$$Q(\mathcal{A}) = \{\, ab^{-1} \mid a, b \in \mathcal{A},\ b \neq 0 \,\} = \{\, b^{-1}a \mid a, b \in \mathcal{A},\ b \neq 0 \,\}.$$

たとえば第 1.4 節の $\mathcal{B}$ はそのような $\mathcal{A}$ の例になっている．一般にアフィン型もしくは有限型の量子展開環の部分環の剰余環で整域になっているものはすべて Ore 整域になっている [24]．

次に，記号 $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$ で張られる自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $Q^\vee$ を考える [25]．$Q^\vee$ をコルート格子

[24] 我々が扱っている Weyl 群作用は双有理作用なので，変数に作用した結果が変数の多項式ではなく，変数の有理函数になってしまう．だから，その量子化を扱うためには非可換環における分数の構成が必要になる．非可換における分数の構成は特に Ore 整域において非常にうまく行くことが知られている．Ore 整域に関する解説を [11], [12] に書いておいた．非可換分数の理論に不慣れな読者はそれらを参照して欲しい．

[25] $\delta^\vee$ はアフィン Lie 環の中心元 “c” に対応している．

と呼ぶことにする. 準周期性[26]

$$\varepsilon_{i+3}^\vee = \varepsilon_i^\vee - \delta^\vee$$

によってインデックスを整数全体に拡張しておく. $Q^\vee$ の群環の基底を q^γ $(\gamma \in Q^\vee)$ と書き, $Q^\vee$ の群環を $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ と書くことにする. ($\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ はLaurent多項式環である.)

$\varepsilon_i^\vee, \delta^\vee$ そのものおよび $q^{\varepsilon_i^\vee}, q^{\delta^\vee}$ を**パラメーター変数**と呼ぶことにする.

以下, $\mathcal{K}$ は $\mathcal{A}$ の分数斜体 $Q(\mathcal{A})$ の部分斜体であると仮定する.

$\mathcal{K}$ と $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ のテンソル積代数を $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}] = \mathcal{K} \otimes \mathbb{F}[q^Q v]$ と表わす. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ は $\mathcal{K}$ にパラメーター変数を添加して得られる代数である. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ の中でパラメーター変数 q^γ $(\gamma \in Q^\vee)$ はすべての元と可換である. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ もOre整域になるので, その分数斜体を $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ と表わす.

単純コルートに対応するパラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ を次のように定める:

$$\alpha_i^\vee = \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee.$$

たとえば, $\theta^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee = \varepsilon_1^\vee - \varepsilon_3^\vee$ とおくと $\alpha_0^\vee = \delta^\vee - \theta^\vee$ であり, 周期性 $\alpha_{i+3}^\vee = \alpha_i^\vee$ が成立している.

コルート格子 $Q^\vee$ の双対格子を P と書き, **ウェイト格子**と呼び, $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$ の双対基底を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Lambda_0$ と書く:

$$\langle \varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \varepsilon_i^\vee, \Lambda_0 \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \varepsilon_j \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \Lambda_0 \rangle = 1.$$

$\varepsilon_i, \alpha_i, \Lambda_i \in X$ $(i \in \mathbb{Z})$ を次の条件によって定める:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{i+3} = \varepsilon_i, \quad \Lambda_i = \Lambda_{i-1} + \varepsilon_i, \\ &\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

このとき, 次が成立している:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij} \quad (i,j = 0,1,2), \\ &\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i,j = 0,1,2), \qquad \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_{j+3} \rangle = \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle \quad (i,j \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

ここで $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$ は $A_2^{(1)}$ 型の一般Cartan行列である. そこで α_i を**単純ルート**と呼び, Λ_i を**基本ウェイト**と呼び, P の元を**整ウェイト**と呼ぶことにする.

任意の $\mu \in P$ に対して, パラメーター変数に作用する差分作用素 τ^μ を次のように定める:

$$\tau^\mu(\gamma) = \gamma + \langle \gamma, \mu \rangle \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

この作用は q^γ のタイプのパラメーター変数に自然に拡張される:

$$\tau^\mu(q^\gamma) = q^{\langle \gamma, \mu \rangle} q^\gamma \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

そこで次の関係式によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に τ^μ $(\mu \in P)$ を添加してできる $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に作用する q 差分作用素環 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ が定義される:

$$\tau^\lambda a = a\tau^\lambda, \quad \tau^\lambda q^\gamma = q^{\langle \gamma, \lambda \rangle} q^\gamma \tau^\lambda, \quad \tau^\lambda \tau^\mu = \tau^{\lambda+\mu} \quad (a \in \mathcal{K},\ \gamma \in Q^\vee,\ \lambda, \mu \in P).$$

[26] この準周期性はパラメーター変数の準周期性 $t_{i+3} = r^{-1} t_i$ に対応している. $\delta^\vee$ はアフィンLie環の中心元 “c” に対応していたので, 準周期性は “レベル” の情報を持っていると考えることもできる.

実はこの差分作用素の意味で導入された記号 τ^λ たちが我々が必要としている**量子化された τ 変数**である．量子 τ 変数はパラメーター変数を動かす差分作用素なので, 量子化された場合にパラメーター変数たちは τ 変数たちと非可換になる．

特に基本的なのは基本ウェイトに対応する差分作用素 τ^{Λ_i} たちである．そこでそれらを τ_i と書き, **基本 τ 変数**と呼ぶことにする:

$$\tau_i := \tau^{\Lambda_i} \qquad (\text{基本 } \tau \text{ 変数}).$$

基本 τ 変数 τ_i とは, 単純コルートに対応するパラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ の正準共役演算子 $\partial/\partial\alpha_i^\vee$ の指数函数 $\exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ のことだと考えることもできる．これが "τ_i" の正体である!

2.2. 量子 τ 変数への Weyl 群作用

コルート格子 $Q^\vee$ とウェイト格子 P には次によって Weyl 群作用が定まる:

$$s_i(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee, \quad s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i \quad (\gamma \in Q^\vee,\ \lambda \in P).$$

たとえば, $i = 0, 1, 2$ について,

$$s_i(\Lambda_i) = \Lambda_i - \alpha_i = \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - \Lambda_i, \quad s_i(\Lambda_j) = \Lambda_j \quad (i \neq j).$$

この作用を $\mathcal{K}$ の元を固定するように $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ に拡張したものを $\tilde{s}_i$ と書く．すなわち, 以下の条件によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ の代数自己同型 $\tilde{s}_i$ を定める:

$$\tilde{s}_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad \tilde{s}_i(\tau^\lambda) = \tau^{s_i(\lambda)}, \quad \tilde{s}_i(a) = a \quad (\gamma \in Q^\vee,\ \lambda \in P,\ a \in \mathcal{K}).$$

後で Painlevé 系の対称性としての $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ への作用を s_i と書くことになる．それとは区別するために $\tilde{s}_i$ という記号を使った．

代数 $\mathcal{A}$ における量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の像を f_i と書くことにする．そして, 簡単のため, すべての i について $f_i \neq 0$ であると仮定する [27]．

さらに, $Q(\mathcal{A})$ の部分斜体 $\mathcal{K}$ は

$$f_i^\gamma \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) f_i^{-\gamma} \subset \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) \quad (\gamma \in Q^\vee)$$

を満たしていると仮定する．たとえば, Ore 整域 $\mathcal{A}$ が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の剰余環になっているとき, その分数斜体 $Q(\mathcal{A})$ そのものを $\mathcal{K}$ とするとその条件が満たされている．$\mathcal{A}$ が第 1.4 節の代数 $\mathcal{B}$ のとき, 以下の斜体はその条件を満たしている:

- 第 1.4 節の $\tilde{a}_i$, b_i, c_i たちから生成される部分斜体,
- 第 1.5 節の t_i, $\hat{f}_i$, たちから生成される部分斜体,
- 第 1.6 節の t_i, x_i, y_i たちから生成される部分斜体,
- 第 1.8 節の a_i, F_i たちから生成される部分斜体.

[27] $f_i = 0$ となる場合には Weyl 群作用を構成するときに $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を 1 に置き換えればよい．$f_i^{\alpha_i^\vee}$ を含む Verma 関係式の $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を 1 で置き換えて得られる関係式は自明に成立している．相空間の次元が低い Painlevé 系の対称性を理解するためにはこのアイデアが必須である．

Verma関係式より, $a_{ij}=a_{ji}=-1$ ならば

$$f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_j^\vee} = f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_i^\vee}$$

が成立している(第 3.4 節). 作用素として $\tilde{s}_i f^\gamma = f^{s_i(\gamma)}\tilde{s}_i$ $(f\in\mathcal{A},\ \gamma\in Q^\vee)$ が成立することを使うと,

$$f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i = f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j$$

が成立することがわかる. このことから, 斜体 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に

$$s_i(x) = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})(\tilde{s}_i(x)) = f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x\in\mathcal{K}(q^{Q^\vee}))$$

によってWeyl群の代数自己同型作用を定められることがわかる.

ここで, すべての f_i が $\mathcal{K}$ に含まれていると仮定する.

このとき $s_i=\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ の作用は q 差分作用素環 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ に拡張される. 公式 $\tau^\lambda f_i^\gamma = f_i^{\gamma+\langle\gamma,\lambda\rangle}\tau^\lambda$ $(\gamma\in Q^\vee)$ などを使うと, 次が成立していることがわかる:

$$s_i(\tau^\lambda) = f_i^{\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle}\tau^{s_i(\lambda)},$$

特に基本 τ 変数への作用は以下のようになる:

$$s_i(\tau_i) = f_i\tau^{\Lambda_i-\alpha_i} = f_i\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \qquad s_i(\tau_j)=\tau_j \quad (i,j=0,1,2;\ i\neq j).$$

たとえば, 整域 $\mathcal{A}$ が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の剰余環で $\mathcal{K}=Q(\mathcal{A})$ のとき, 以下の公式が成立していることがわかる:

$$\begin{aligned}
&s_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad s_i(\tau^\lambda) = f_i^{\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle}\tau^{s_i(\lambda)},\\
&s_i(f_j) = \begin{cases} f_j & (i=j \text{ or } a_{ij}=0),\\ q^{\pm\alpha_i^\vee}f_j + [\alpha_i^\vee]_q(f_if_j - q^{\pm1}f_jf_i)f_i^{-1} & (a_{ij}=a_{ji}=-1).\end{cases}
\end{aligned}$$

これらの公式(およびその対称化可能一般Cartan行列の場合への一般化)は文献 [19] で構成されたWeyl群双有理作用の量子化かつ q 差分化になっている.

2.3. Weyl群作用のLax-Sato-Wilson表示 (1)

この節では $\mathcal{A}$ は第 1.4 節の $\mathcal{B}$ であるとし, $\mathcal{K}$ は

$$f_i := (q^{-1}-q)^{-1}\tilde{a}_i^{-1}b_i\tilde{a}_{i+1}^{-1}, \quad d_i := (q^{-1}-q)^{-1}\tilde{a}_i^{-1}c_i\tilde{a}_{i+2}^{-1}$$

から生成される分数斜体 $Q(\mathcal{B})$ の部分斜体であると仮定する. このとき, f_i, d_i たちは

$$\begin{aligned}
&f_if_{i+1} - qf_{i+1}f_i = qd_i,\\
&f_id_{i-1} = qd_{i-1}f_i, \quad f_id_i = q^{-1}d_if_i, \quad f_id_{i+1} = d_{i+1}f_i,\\
&d_id_{i+2} = qd_{i+2}d_i, \quad d_id_{i-2} = q^{-1}d_{i-2}d_i
\end{aligned}$$

を満たしている[28]. インデックスの 3 周期性に注意せよ. さらに前節の記号のもとで $t_i=q^{-\varepsilon_i^\vee}$, $r=q^{-\delta^\vee}$ とおき, $t=(t_1,t_2,t_3)$ とおく. このとき準周期性 $t_{i+3}=r^{-1}t_i$ が成立している. z を rz に移す差分作用素 $r^{z\partial/\partial z}$ を $T_{z,r}$ と書く:

$$T_{z,r}f(z) = r^{z\partial/\partial z}f(z) = f(rz).$$

[28] $m=4$ の場合には例外的に d_i どうしは可換になる. $m\geqq 4$ の場合には $f_id_{i-2}=q^{-1}d_{i-2}f_i$, $f_id_{i+1}=qd_{i+1}f_i$ となり, $m=3$ の場合には例外的に f_i と $d_{i-2}=d_{i+1}$ が可換になる.

行列 $D(t)$, $\widetilde{M}(z)$ と行列値差分作用素 $M(z)$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
D(t) &= \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3), \\
\widetilde{M}(z) &= L_0^{-1}\widetilde{L}(z)L_0^{-1} = L_0^{-1}L_1(z)L_2(z) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & (q^{-1}-q)f_1 & (q^{-1}-q))d_1 \\ z(q^{-1}-q)d_2 & 1 & (q^{-1}-q)f_2 \\ z(q^{-1}-q)f_3 & z(q^{-1}-q)d_3 & 1 \end{bmatrix}, \\
M(z) &= D(t)\widetilde{M}(rz)D(t)T_{z,r}^2 \\
&= \begin{bmatrix} t_1^2 & (q^{-1}-q)t_1f_1t_2 & (q^{-1}-q)t_1d_1t_3 \\ z(q^{-1}-q)t_2d_2t_4 & t_2^2 & (q^{-1}-q)t_2d_2t_3 \\ z(q^{-1}-q)t_3f_3t_4 & z(q^{-1}-q)t_3d_3t_5 & t_3^2 \end{bmatrix} T_{z,r}^2.
\end{aligned}
$$

行列値差分作用素 $M(z)$ を $D(t)^2T_{z,r}^2$ に “対角化” しよう. $\mathcal{K}[[z]]$ の元を成分に持つ 3×3 行列 $U(z) = [u_{ij}(z)]$ で, $U(0)$ が対角線が 1 の上三角行列になり,

$$
M(z) = U(z)D(t)^2T_{z,r}^2U(z)^{-1}
$$

を満たすものが唯一存在する. $g_i \in \mathcal{K}$ と行列 G_i を次のように定める:

$$
g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{(q^{-1}-q)t_if_it_{i+1}} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{f_i}, \qquad G_i = y_i(g_i).
$$

このとき, $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$ でかつ, 前節の方法で定めた Weyl 群作用について,

$$
\begin{aligned}
s_i(M(z)) &= G_iM(z)G_i^{-1}, \\
\pi(M(z)) &= (\Lambda_3(z)T_{z,r})M(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1}
\end{aligned}
$$

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax 表示**と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i^\vee}$ とおき, 対角行列 D_Z と行列 $Z(z)$ を

$$
D_Z = \mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z)D_Z
$$

と定める. 行列 S_i^g, S_i を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
S_1^g &= \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix}, \\
S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee+1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee-1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee+1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee-1]_q & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

このとき以下が成立している:

$$
\begin{aligned}
M(z) &= Z(z)D((qt)T_{z,r})^2Z(z)^{-1} = Z(z)D(qt)^2Z(r^2z)^{-1}T_{z,r}^2, \\
s_i(U(z)) &= G_iU(z)S_i^g,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i,\\
&s_i(D(t)T_{z,r}) = S_i^{-1} D(t) T_{z,r} S_i\\
&s_i(Z(z)) = G_i Z(z) S_i.
\end{aligned}
$$

π の作用はどれも次の形になっている:

$$
\pi(A(z)) = (\Lambda_3(z)T_{z,r})A(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \qquad (A(z) = U(z), D_Z, D(t)T_{z,r}, Z(z)).
$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson** 表示と呼ぶ.

2.4. 基本 τ 変数への Weyl 群作用の結果の正則性

前々節の構成が対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合にまで一般化され, 次の定理が成立している.

定理 2.1 ([16]). 基本 τ 変数への Weyl 群作用の結果は f_i, $q^{\pm\alpha_i^\vee}$ たちについて多項式になる. □

整ウェイト $\mu \in X$ が任意の i について $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \geqq 0$ を満たしているとき, μ を**ドミナント整ウェイト**と呼ぶ. ドミナント整ウェイト全体の集合を P_+ と書く. Weyl 群を W と書く.

ドミナント整ウェイト μ と Weyl 群の元 w によって $w(\mu)$ と表わされる整ウェイト全体の集合を WP_+ と書く. $\nu \in WP_+$ を $\nu = w(\mu)$, $w \in W$, $\mu \in P_+$ と書くとき $w(\tau^\mu)$ は ν だけから決まり, w と μ の取り方によらない. そこで $\nu = w(\mu) \in WP_+$ に対して, $\tau(\nu) = w(\tau^\mu)$ とおく.

実際に証明できているのは次の結果である: $\mathcal{A}$ が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の像に一致し, $\mathcal{K} = Q(\mathcal{A})$ のとき, すべての f_i が 0 でないならば, 任意の $\nu \in WP_+$ に対して

$$
\tau(\nu) = w(\tau^\mu) \in \mathcal{A}[q^{Q^\vee}]\tau^\nu \qquad (\nu = w(\mu),\ w \in W,\ \mu \in P_+).
$$

証明には表現論における BGG 圏 $\mathcal{O}$ に関する理論を使う ([16]). 証明の概略を以下で説明しよう.

以下, $\mu, \lambda \in P_+$ であるとする.

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ は Weyl 群の元 w の簡約表示であるとする. このとき

$$
\begin{aligned}
&\tilde{w} = \tilde{s}_{i_N} \cdots \tilde{s}_{i_2} \tilde{s}_{i_1}, \quad \gamma_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee),\\
&X = f_{i_1}^{\gamma_1} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N}, \quad Y = f_{i_1}^{\gamma_1 + \langle \gamma_1, \mu \rangle} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N + \langle \gamma_N, \mu \rangle}
\end{aligned}
$$

とおくと, $\tau(w(\mu)) = w(\tau^\mu)$ は次のように表わされる:

$$
w(\tau^\mu) = \tilde{w}\left(X^{-1}Y\right)\tau^{w(\mu)}.
$$

ゆえに Y が X で左から割り切れること $Y \in X\mathcal{A}[q^{Q^\vee}]$ を示せばよい. そのためには, $X^{-1}Y \in \mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ なので, $\alpha_i^\vee$ たちに非負の整数を代入した場合に割り切れることを示せば十分である. そしてそのためには $\mathcal{A} = U_q(\mathfrak{n}_-)$, $f_i = \varphi_i$ の場合に割り切れることを示せば十分なので以下ではそのように仮定する.

ρ は $\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$ をみたすウェイトであるとし, Weyl 群の元 w とウェイト λ に対して, w の λ への shifted action を

$$
w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho
$$

と定める．このとき

$$\lambda_k = (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}) \circ \lambda, \quad f_w^\lambda = f_{i_N}^{\langle \alpha_{i_N}^\vee, \lambda_N \rangle + 1} \cdots f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda_1 \rangle + 1}$$

とおくと, X, Y の積の順序を逆転し, 各 $\alpha_i^\vee$ に非負の整数 $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ を代入した結果はそれぞれ f_w^λ, $f_w^{\lambda+\mu}$ になる．ゆえに $f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$ を示せばよい．

$f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$ の証明が次の可換図式の存在に帰着することを示そう:

$$\begin{array}{ccc} M(\lambda) \otimes L(\mu) & \longleftarrow & M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(\lambda + \mu) & \longleftarrow & M(w \circ (\lambda + \mu)). \end{array}$$

この可換図式の内容について説明しよう．$M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ はそれぞれ最高ウエイト λ の Verma 加群とその既約商加群であるとし, それぞれの最高ウェイトベクトルを v_λ, u_λ と書くことにする．このとき $f_w^\lambda v_\lambda$ は $M(\lambda)$ におけるウエイト $w \circ \lambda$ の特異ベクトル (定数倍を除いて唯一) になる．ゆえに $v_{w \circ \lambda}$ を $f_w^\lambda v_\lambda$ に移す $M(w \circ \lambda)$ から $M(\lambda)$ への準同型写像が得られる．上の図式の横向きの矢線はこの種の準同型とこの種の準同型から誘導された準同型写像である．左側の上向きの矢線は $v_{\lambda+\mu}$ を $v_\lambda \otimes u_\mu$ に移す準同型写像である．上の図式を可換にするような右側の上向きの矢線 (準同型写像) が存在すると仮定する．

上の可換図式における $v_{w \circ (\lambda+\mu)} \in M(w \circ (\lambda + \mu))$ の $M(\lambda) \otimes L(\mu)$ における像を考える．$M(\lambda + \mu)$ を経由して得られる像は $\Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu)$ である (ここで Δ は余積を表わす)．上の可換図式より, それは $M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu)$ の $M(\lambda) \otimes L(\mu)$ における像 $(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu)$ に含まれる:

$$(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu) \ni \Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu) = (a f_w^{\lambda+\mu} v_\lambda) \otimes u_\mu + (\text{lower terms}).$$

ここで a は 0 でない定数であり, “(lower terms)” の部分は $M(\lambda)$ のベクトルとウエイトが μ より小さな $L(\mu)$ のウエイトベクトルのテンソル積の和である．これより $U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda \ni f_w^{\lambda+\mu}$ となることがわかる．

上の可換図式は Kac-Moody 代数の場合には [4] の結果より存在することが知られている (translation functor の理論より, [7] Section 2 も参照)．ゆえに量子展開環の場合にも [5] の結果より存在することがわかる ($U(\mathfrak{g})$ の BGG 圏 $\mathcal{O}$ と $U_q(\mathfrak{g})$ の BGG 圏 $\mathcal{O}$ の braided tensor category として圏同値より)．

要するに $\mu \in P_+$ に対する $w(\tau^\mu)$ が f_i について多項式になるという結果は任意の $\lambda \in P_+$ に対して $M(\lambda + \mu)$ のウエイト $w \circ (\lambda + \mu)$ の特異ベクトルが $M(\lambda)$ のウエイト $w \circ \lambda$ の特異ベクトルで割り切れるという結果から導かれる．

2.5. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (2)

この節では $\mathcal{A}$ は第 1.4 節の代数 $\mathcal{B}$ であるとし, $\mathcal{K}$ は第 1.5 節の t_i, $\hat{f}_i$ たちで生成される斜体であるとし, 前節までとは少し異なる Weyl 群作用を $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ 上に定める．

$U_q(\mathfrak{n}_-)$ の Chevalley 生成元の取り方には定数倍の不定性があり, 公式 $s_i(\tau_i) = f_i \tau_i$ より, Weyl 群の τ 変数への作用の仕方は Chevalley 生成元を定数倍すれば変わる．τ 変数への Weyl 群作用にはもっと大きな不定性がある．

前節の議論から f_i たちが Verma 関係式を満たしていれば, $s_i = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ の形で Weyl 群作用を定めるには十分である. さらに q べき因子の違いを除いて A と B が等しいことを $A \sim B$ と書くことにすると, Verma 関係式そのものがぴったり成立している必要はなく, f_i たちが $f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_j^\vee} \sim f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee}$ $(a_{ij} = a_{ji} = -1)$ のタイプの弱い Verma 関係式を満たしていれば, $s_i = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることができる. f_i たちが Verma 関係式を満たしており, $u_i \in Q(\mathcal{A})$ たちの積は q べき因子の違いを除いて可換であり, $f_i u_j = u_j f_i$ が成立しているとき, $u_i f_i$ たちは弱い Verma 関係式を満たしている. だから $s_i = \mathrm{Ad}((u_i f_i)^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることもできる. このとき $s_i(\tau_i) = u_i f_i \tau_i$ となる.

この構成を第 1.5 節の $\hat{f}_i$ たちに適用しよう. $\mathcal{A}$ は第 1.4 節の $\mathcal{B}$ であり, $\mathcal{K}$ は第 1.5 節の t_i, $\hat{f}_i$ たちで生成される斜体であるとする. $\hat{f}_i$ は f_i に f_i たちと可換な $c_j^{\pm 1}$ たちの積をかけたものになっており, c_j たちの積は q べき因子の違いを除いて可換である. さらに $\hat{f}_i$ たちと t_j たちは可換であり, $t_{i+3} = r^{-1} t_i$, $q^{\varepsilon_{i+3}^\vee} = q^{-\delta^\vee} q^{\varepsilon_i^\vee}$ が成立しているので, $r = q^{\delta^\vee}$, $t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$ と同一視することにする. このとき第 1.5 節の $\tilde{s}_i$ と前節の $\tilde{s}_i$ は一致する. この同一視によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ の代わりに $\mathcal{K}$ そのものを扱えばよいことになった. π の $\mathcal{K}$ への作用は第 1.5 節と同様に定めておく.

q 差分作用素環 $\mathcal{K}[\tau^P]$ に $s_i = \mathrm{Ad}(\hat{f}_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることができる. このとき, 以下の公式が成立している [29]:

$$
\begin{aligned}
& s_i(\tau_i) = \hat{f}_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i = 0,1,2,\ i \neq j), \\
& s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{i+2}) = t_{i+2}, \\
& s_i(\hat{b}_i) = \hat{b}_i, \quad s_i(\hat{b}_{i+1}) = \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \quad s_i(\hat{b}_{i-1}) = \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\
& \pi(t_j) = t_{j+1}, \quad \pi(\hat{b}_j) = \hat{b}_{j+1}.
\end{aligned}
$$

新しい公式は最初の行だけである, 残りの公式はすでに第 1.5 節で得られている. 第 1.5 節では s_i の t_i と $\hat{b}_i$ たちへの作用を行列 $\widehat{L}(z)$ を用いて記述する公式 (Lax 表示) が得られている. 以下では s_i の τ 変数たちへの作用の行列表示 (Sato-Wilson 表示) について説明する.

以下の構成は第 2.3 節と完全に同様である. $t = (t_1, t_2, t_3)$ とおき,

$$D(t) = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3)$$

と定め, z を rz に移す差分作用素を $T_{z,r}$ と書き, 行列値差分作用素 $\widehat{M}(z)$ を

$$\widehat{M}(z) = \widehat{L}(z) T_{z,r}^2$$

と定める. この行列値差分作用素 $\widehat{M}(z)$ を $(D(t)T_{z,r})^2$ に “対角化” しよう. $\mathcal{K}[[z]]$ の元を成分に持つ 3×3 行列 $U(z) = [u_{ij}(z)]$ で $U(0)$ が対角成分がすべて 1 の上三角行列になり,

$$\widehat{M}(z) = U(z)(D(t)T_{z,r})^2 U(z)^{-1}, \quad \text{すなわち } \widehat{L}(z) = U(z)D(t)^2 U(r^2 z)^{-1}$$

を満たすものが一意に存在する. この一意性を使うと $\widehat{L}(z)$ への Weyl 群作用の公式から $U(z)$ への Weyl 群作用の公式を得ることができる. 結果を以下で説明しよう.

[29] $\hat{b}_i = -(q - q^{-1}) t_i \hat{f}_i t_{i+1}$ を使えばそれらの公式から $s_i(\hat{f}_i)$ を計算することができる.

$g_i \in \mathcal{K}$ と行列 G_i を次のように定める $(i=1,2)$:

$$g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}, \quad G_i = y_i(g_i).$$

このとき, $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$ となり,

$$\begin{aligned} s_i(\widehat{M}(z)) &= G_i \widehat{M}(z) G_i^{-1}, \\ \pi(\widehat{M}(z)) &= (\Lambda_3(z)T_{z,r})\widehat{M}(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \end{aligned}$$

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax 表示**と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i^\vee}$ とおき, 対角行列 D_Z と行列 $Z(z)$ を

$$D_Z = \mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z)D_Z$$

と定める. 行列 S_i^g, S_i を次のように定める:

$$S_1^g = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき以下が成立している:

$$\widehat{M}(z) = Z(z)D((qt)T_{z,r})^2 Z(z)^{-1} = Z(z)D(qt)^2 Z(r^2 z)^{-1} T_{z,r}^2,$$

$$\begin{aligned} s_i(U(z)) &= G_i U(z) S_i^g, \\ s_i(D_Z) &= (S_i^g)^{-1} D_Z S_i, \\ s_i(D(t)T_{z,r}) &= S_i^{-1} D(t) T_{z,r} S_i \\ s_i(Z(z)) &= G_i Z(z) S_i. \end{aligned}$$

π の作用はどれも次の形になっている:

$$\pi(X(z)) = (\Lambda_3(z)T_{z,r})X(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \qquad (X(z) = U(z), D_Z, D(t)T_{z,r}, Z(z)).$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson 表示**と呼ぶ.

2.6. まとめ

量子化された τ 函数 (より正確に言えば τ 変数) は単純コルートに対応するパラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ の正準共役 $\partial/\partial\alpha_i^\vee$ の指数函数 $\tau_i = exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ のことである.

量子化された Weyl 群作用は $s_i = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ の形式で構成されたのでそれをそのまま τ_i たちに作用させれば, Weyl 群作用が量子化された τ 変数まで拡張される.

その作用のもとで $\mu \in P_+$ に対する $w(\tau^\mu)$ は従属変数 f_i たちとパラメーター変数 $q^{\pm\alpha_i^\vee}$ たちについて多項式になる.

τ 変数への Weyl 群作用は Sato-Wilson 表示を持つ.

3. 付録: 「量子化」と「変数べき f^γ の構成法」について

この付録では(正準)量子化と古典極限についておよび非可換環における変数 γ によるべき f^γ の構成法について解説する.

3.1. q 差分化と量子化の区別

「q 差分化」と「量子化」という用語を厳密に区別して用いたい.

微分 $df(x)/dx$ を用いた事柄をパラメーター q で変形して, q 差分

$$T_{x,q}f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

を用いた事柄に拡張することおよびその適切な一般化を q **差分化**と呼ぶことにする. 逆に $q \to 1$ で $T_{q,x} \to d/dx$ の極限を取る操作を **微分極限**と呼ぶことにする. そして, 微分を用いて記述される数学的対象を**微分版**と呼び, q 差分を用いて記述される数学的対象を q **差分版**と呼ぶことにする.

Poisson 括弧 $\{p, x\} = 1$ を持つ代数に関する事柄を交換関係

$$[p, x] = px - xp = 1$$

を満たす非可換環に関する事柄に拡張することおよびその適切な一般化を**正準量子化**と呼ぶことにする. 以下では簡単のため正準量子化を単に**量子化**と呼ぶことにする.

たとえば, 座標 x を持つ直線の余接束上の函数環の自然な量子化は x と d/dx で生成される微分作用素環である.

たとえば, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ から生成される対称代数 $S(\mathfrak{g})$ (これは $\mathfrak{g}^*$ 上の函数環とみなされる) の量子化である. さらに $\mathfrak{g}$ が Kac-Moody 代数ならば, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の代数としての q 差分化であるとみなせる. 代数として $U_q(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の量子化とはみなさない. $U(\mathfrak{g})$ は不変微分作用素環とみなせるので微分版の数学的対象とみなされ, それとの対比で $U_q(\mathfrak{g})$ は代数として q 差分版の数学的対象とみなされる. 代数として量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は対称代数 $S(\mathfrak{g})$ の量子化かつ q 差分化になっている.

一方, $U_q(\mathfrak{g})$ の余積は非余可換であり, $q \to 1$ の極限で余可換な $U(\mathfrak{g})$ の余積が再現されるので, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は余代数として普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の量子化だとみなせる.

量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は代数として普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の q 差分化になっており, 余代数としては普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の量子化になっている. 代数としての q 差分化と余代数としての量子化のためのパラメーターの両方が同じ q になっているので混乱しないように注意が必要である.

3.2. 古典極限と Poisson 構造

パラメーター $\hbar$ を含む可換とは限らない環 $A_\hbar$ に対して, $\hbar \to 0$ の極限で得られる環 (すなわち $\hbar$ で生成されるイデアルで $A_\hbar$ を割ってできる剰余環 $A_\hbar/\hbar A_\hbar$) を A_0 と書き, $a \in A_\hbar$ の A_0 での像を $\bar{a}$ と書くことにする.

A_0 は可換環になると仮定する. このとき $A_\hbar$ は A_0 の量子化であるという. 仮定より, 任意の $a, b \in A_\hbar$ の交換子 $[a, b] = ab - ba$ は $\hbar$ で割り切れる. 任意の $a, b \in A_\hbar$ に対して, $\hbar^{-1}[a, b] \in A_\hbar$ の A_0 での像は a, b の像だけから決まることがわかり, 可換環 A_0 に Poisson 構造を $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{\hbar^{-1}[a, b]}$ によって定めることができる. このように構成された Poisson 代数 A_0 を $A_\hbar$ の**古典極限**と呼ぶことにする.

たとえば, $p=d/dx$ と x から $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成されるパラメーター $\hbar$ 付きの微分作用素環 $\mathbb{C}[\hbar, x, d/dx]$ を考え, $p=\hbar d/dx$ と x から $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成される部分代数を $A_\hbar$ と書くことにする. このとき $A_0 = A_\hbar/\hbar A_\hbar$ は $\bar{p}$ と $\bar{x}$ で生成される可換な多項式環になり, $\hbar^{-1}[p,x]=1$ なので, $A_0=\mathbb{C}[\bar{p},\bar{x}]$ には $\{\bar{p},\bar{x}\}=1$ で自然に Poisson 構造が定まる. これが上の意味での古典極限の典型例である.

$\mathbb{C}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の古典極限は以下のように構成される. まず, $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[\hbar]$ による係数拡大 $U(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[\hbar]$ を考える. そして, $\hbar A$ $(A\in\mathfrak{g})$ たちから $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成されるその部分代数を $A_\hbar$ とする. このとき $A_0=A_\hbar/\hbar A_\hbar$ は可換環になり, $\hbar\mathfrak{g}$ から $\mathbb{C}$ 上生成される対称代数 $S(\hbar\mathfrak{g})\cong S(\mathfrak{g})$ に同型になる. これを $U(\mathfrak{g})$ の古典極限と呼ぶ. さらに, $A,B\in\mathfrak{g}$ に対して $[A,B]=C$ が成立しているとき, $\hbar^{-1}[\hbar A,\hbar B]=\hbar C$ となるので, $\hbar A$, $\hbar B$, $\hbar C$ の A_0 での像をそれぞれ a, b, c と書くと A_0 において $\{a,b\}=c$ が成立している. 要するに Lie 環における Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ をそのまま Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$ に置き換えるだけで古典極限における Poisson 構造が得られる.

生成元 x, y と基本関係式 $xy=qyx$ で定義される $\mathbb{C}[q]$ 上の代数 A_q を考える. (古典極限は $q\to1$ で得られる. $\hbar=q-1$ とおいて考えよ.) このとき $[x,y]=xy-yx=(q-1)yx$ が成立しているので, $A_{q=1}=A_q/(q-1)A_q$ は可換環になり, $A_{q=1}$ に自然に入る Poisson 構造は $\{\bar{x},\bar{y}\}=\bar{x}\bar{y}$ を満たしている. このことから $\{a,b\}=ab$ 型の Poisson 構造の量子化は $xy=qyx$ 型の交換関係で定義される代数を用いて構成可能なことがわかる. この例は q 差分化された場合の量子化の構成において最も基本的である.

古典極限の形だけがわかっていても, 可能な量子化は無数にある. 我々が欲しいのは古典極限のレベルで成立している多くの結果が保たれるような良い量子化である. q 差分化されていない微分版の場合には, 手頃な手間で可能な直線的な手計算のみで良い量子化を構成可能なことが多いが, q 差分化された場合はそうではない. 背景に隠れている代数構造を明らかにしないと良い量子化を作ることは難しい.

しかも実際には古典極限における Poisson 構造の定義式が明らかになっていない場合が多数ある. そのような場合には量子化はさらに困難になる[30].

3.3. 非可換環の元の変数によるべきを導入する方法

非可換環の元 f の変数 γ によるべき f^γ を純代数的に構成する方法を解説しておく. さらに次の節で量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元のべきが満たす関係式の証明も簡単に解説しておく.

A は可換とは限らない環であるとする.

X は空でない集合であるとする. このとき, べき集合 A^X には自然に環構造が入る. 以下では, この状況の下で, A と単射準同型写像 $A\to A^X$, $a\mapsto(a)_{x\in X}$ による像を同一視することにする. これによって A は A^X の部分環とみなされる.

変数 γ による A の可逆元 f のべき f^γ は環 $A^{\mathbb{Z}}$ の元として $f^\gamma=(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ と定義される. 任意の $k\in\mathbb{Z}$ について f^k が満たしている関係式を f^γ も満たしている. $A^{\mathbb{Z}}$ に埋め込まれた A と f^γ から生成された $A^{\mathbb{Z}}$ の部分環を考えれば, A に f の変数 γ によるべき f^γ を付け加えた環が得られる.

より一般に, 変数の組 $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_N)$ の整係数多項式 $p(\gamma)$ に対して, $f^{p(\gamma)}$ は $A^{\mathbb{Z}^N}$ の元として $f^{p(\gamma)}=\left(f^{p(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}^N}$ と定義される. このように定義された f のべきは変数 γ_i に任意の整数の組を代入したときに成立しているすべての関係式をみたしている. た

[30] 古典 Painlevé 系の研究者の方々にお願い. Poisson 構造も論文に書いて下さい. お願い致します.

とえば

$$f^\gamma f^{-\gamma} = f^{-\gamma} f^\gamma = 1, \quad f^\lambda f^\mu = f^{\lambda+\mu}$$

が成立している. さらに, もしも A の可逆元 f, g と中心可逆元 c が

$$fg = cgf$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^\gamma = c^{\beta\gamma} g^\gamma f^\beta$$

が成立している.

他にも, たとえば, もしも A の可逆元 f, g が

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

も成立している.

このように単純な処方箋で, 自然な関係式を満たしている変数 γ によるべき f^γ を非可換環に自由に付け加えることができる.

3.4. Chevalley 生成元のべきが満たす関係式

いつものように q 二項係数を次のように定めておく:

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [k]_q,$$
$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

$\mathbb{C}(q)$ 上の代数 $\mathcal{A}$ の可逆元 f, g はを任意に取り, 非負の整数 k に対する $\mathrm{ad}_q(f)^k(g) \in \mathcal{A}$ を次のように定める:

$$\mathrm{ad}_q(f)(g) = fg - q^{-1} gf, \quad \mathrm{ad}_q(f)^{k+1}(g) = f\,\mathrm{ad}_q(f)^k(g) - q^{2k-1}\,\mathrm{ad}_q(f)^k(g) f.$$

このとき, すべての整数 l について次が成立することを帰納法で示せる [31]:

$$f^l g f^{-l} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k-1)(l-k)} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}_q \mathrm{ad}_q(f)^k(g) f^{-k}.$$

$k > l$ のとき q 二項係数は 0 になるので右辺は実際には有限和である.

ここで, 次の q-Serre 関係式が成立していると仮定する:

$$\mathrm{ad}_q(f)^2(g) = f^2 g - (q + q^{-1}) fgf + gf^2 = 0.$$

[31] l が正の場合には両辺に右から f^l をかけて得られる公式を帰納法で証明し, l が負の場合には両辺に左から f_i^{-l} をかけて得られる公式を証明する.

このとき, 上の公式より次が成立する:

$$f^l g f^{-l} = q^{-l} g + [l]_q (fg - q^{-1} gf) f^{-1}.$$

ゆえに前節の構成によって変数によるべき f^γ は次を満たしている:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = q^{-\gamma} g + [\gamma]_q (fg - q^{-1} gf) f^{-1}.$$

この右辺は次のように変形できる:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = [1-\gamma]_q g + [\gamma]_q fgf^{-1} = q^\gamma g + [\gamma]_q (fg - qgf) f^{-1}.$$

さらに, 次の q-Serre 関係式も成立していると仮定する:

$$g^2 f - (q + q^{-1}) gfg + fg^2 = 0.$$

このとき量子展開環の表現論によって任意の非負の整数 k, l に対して

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k$$

が成立することが知られている[32]. これを **Verma 関係式**と呼ぶ[33]. k, l が両方非負の整数の場合の Verma 関係式から, k, l のどちらか片方もしくは両方が負の整数の場合にも同じ公式が成立することが導かれる[34].

ゆえに, 前節の構成によって, 整数べきを変数べきで置き換えた次の公式が成立している:

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

これも Verma 関係式と呼ぶ.

参考文献

[1] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., and Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. Nuclear Phys. B 241 (1984), no. 2, 333-380.

[2] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 188–236. arXiv:math/9912105

[3] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases. Quantum groups, 13—-88, Contemp. Math., 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. arXiv:math/0601391

[4] Deodhar, Vinay V., Gabber, Ofer, and Kac, Victor. Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras. Adv. in Math. 45 (1982), no. 1, 92–116.

[5] Etingof, Pavel and Kazhdan, David. Quantization of Lie bialgebras. VI. Quantization of generalized Kac-Moody algebras. Transform. Groups 13 (2008), no. 3–4, 527–539. arXiv:math/0004042

[32] Verma 加群のあいだの準同型がどれだけ存在するかに関する結果の一部である. q-Serre 関係式を用いた直接の計算によって証明することもそう難しくない.
[33] より一般の Verma 関係式とその証明については教科書 [17] の Proposition 39.3.7 を参照せよ.
[34] たとえば k が負で $k+l$ が非負の場合の Verma 関係式は, 両辺に左から f^{-k} をかけて右から g^{-k} をかけると, 非負の整数べきのみを含む Verma 関係式の形になる.

[6] Hasegawa, Koji. Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 275-288, Adv. Stud. Pure Math., 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. arXiv:math/0703036

[7] Kac, Victor G. and Wakimoto, Minoru. Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no. 14, 4956–4960.

[8] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. A study on the fourth q-Painlevé equation. J. Phys. A 34 (2001), no. 41, 8563-8581. arXiv:nlin/0012063

[9] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1}(1) \times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry. Lett. Math. Phys. 60 (2002), no. 3, 211-219. arXiv:nlin/0106029

[10] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy. Lett. Math. Phys. 62 (2002), no. 3, 259-268. arXiv:nlin/0112045

[11] 黒木玄. 非可換環の局所化の演習問題. 演習問題集 10 pages, 2007 年. http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20070216_localization.pdf

[12] 黒木玄. Ore 集合の作り方. ノート 15 pages, 2010 年作成. http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20101116OreSets.pdf

[13] 黒木玄. 量子 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ 双有理作用. ノート 15 pages, 2010 年作成. http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_WxW.pdf

[14] 黒木玄. 互いに素な m, n に対する拡大アフィン Weyl 群の直積 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用の量子化. 講演スライド, 2013 年作成. http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20130322WxW.pdf

[15] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, 289-325, Adv. Stud. Pure Math., 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. arXiv:0808.2604

[16] Kuroki, Gen. Regularity of quantum tau-functions generated by quantum birational Weyl group actions. arXiv:1206.3419

[17] Lusztig, George. Introduction to quantum groups. Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhauser Classics. Birkhauser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp.

[18] Noumi, Masatoshi. Affine Weyl group approach to Painlevé equations. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 497-509, Higher Ed. Press, Beijing, 2002. arXiv:math-ph/0304042

[19] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. arXiv:math.QA/0012028

[20] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions. *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 371-442, Adv. Stud. Pure Math., 40, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2004. arXiv:math-ph/0203030