無限可積分系

9月13日(日)　第IV会場

9:30〜12:00

				(分)	頁
1	大久保勇輔 粟田英資 藤野弘基	(名大多元数理) (名大多元数理) (名大多元数理)	Ding–Iohara 代数のレベル 2 表現の結晶化	(15)	1
2	松本拓也	(名大高等研究院・名大多元数理)	中心拡大された超リー代数 $\mathfrak{sl}(2\|2)$ に付随する量子アファイン代数について	(15)	3
3	髙﨑金久 中津了勇	(近畿大理工) (摂南大理工)	Closed vertex 上の位相的弦理論の開弦振幅	(15)	5
4	国場敦夫 丸山翔也 尾角正人	(東大総合文化) (東大総合文化) (阪市大理)	多状態 TASEP と四面体方程式	(15)	7
5	中西知樹	(名大多元数理)	Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees	(15)	9
6	池田岳 松村朝雄	(岡山理大理) (岡山理大理)	シンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類に対する Pfaffian 和公式	(15)	11
7	池田岳 松村朝雄 成瀬弘 T. Hudson	(岡山理大理) (岡山理大理) (山梨大教育) (浦項工大)	シンプレクティック・ベクトル束の K 理論的退化跡	(15)	13

14:15〜15:15　特別講演

	桑原敏郎	(Higher School of Economics)	シンプレクティック多様体上のジェット束の変形量子化と頂点代数	15

9月14日(月)　第IV会場

9:30〜12:00

8	佐々木良勝	(広島大理)	Weierstrass' elliptic function solution to the autonomous limit of the string equation	(10)	29
9	長尾秀人	(明石工高専)	パデ近似の q 差分パンルヴェ方程式への応用	(15)	31
10	増田哲	(青学大理工)	$D_7^{(1)}$ 型 q-笹野系の有理解の構成	(15)	33
11	伊藤雅彦 野海正俊	(東京電機大未来) (神戸大理)	Sears–Slater の変換公式の一般化と BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数	(15)	35
12	辻本諭	(京大情報)	Exceptional Bannai–Ito polynomials	(15)	37
13	上野喜三雄	(早大理工)	2 重対数関数とモノドロミー保存変形	(15)	39
14	井上玲 T. Lam P. Pylyavskyy	(千葉大理) (Univ. of Michigan) (Univ. of Minnesota)	Toric network and generalized discrete Toda lattice	(15)	41

13:00〜14:00　特別講演

Ding-Iohara代数のレベル２表現の結晶化

大久保勇輔　(名大・多元数理)
粟田英資　(名大・多元数理)
藤野弘基　(名大・多元数理)

Macdonald 多項式は変形Virasoro代数やDing-Iohara代数との相性がよく, 近年ではAGT予想を解析する重要な道具となっている．またMacdonald多項式はJack多項式やHall-Littlewood 多項式を一般化した多項式であるが, Hall-Littlewood 多項式への退化と同じ退化極限を変形Virasoro代数などに施したものを, ここではその結晶化と呼ぶことにする．(変形パラメータ q の $q \to 0$ 極限を見ていることから量子群の結晶基底に準えて.) この結晶化された場合では物事は簡単化され, パラメータが一般の場合では困難であった計算が容易になることが多い．その一つの例として本講演ではDing-Iohara代数のレベル２表現の結晶化について説明し, ある演算子の４点相関関数が計算できることについて説明する.

まず t をパラメータとし, 交換関係 $[b_n^{(i)}, b_m^{(j)}] = n\frac{1}{1-t^{|n|}}\delta_{i,j}\,\delta_{n+m,0}$, $[b_n^{(i)}, U_j] = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ i, j = 1\,\mathrm{or}\,2)$ を満たすHeisenberg代数を用いて, 次のような頂点作用素を導入する：

$$\tilde{\Lambda}^1(z) := \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(1)}\right\}\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}z^{-n}b_n^{(1)}\right\}U_1,$$

$$\tilde{\Lambda}^2(z) := \exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(1)}\right\}\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}z^n b_{-n}^{(2)}\right\}\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}z^{-n}b_n^{(2)}\right\}U_2.$$

さらにこの２つの作用素を用いて, $n \in \mathbb{Z}$ に対して生成元

$$\tilde{X}_n^{(1)} := \oint\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z}\left\{\theta[n\geq 0]\tilde{\Lambda}^1(z) + \theta[n\leq 0]\tilde{\Lambda}^2(z)\right\}z^n,$$

$$\tilde{X}_n^{(2)} := \oint\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} : \tilde{\Lambda}^1(z)\tilde{\Lambda}^2(z) : z^n$$

を定義する．ここに :　: はHeisenberg代数 $b_n^{(i)}$ に関する正規順序化の記号であり, $\theta[P]$ は P が真ならば１を, 偽ならば０を出力する関数である．するとこれは [2] におけるレベル２表現の作用素 $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}$ の結晶化に対応している．この生成元 $\tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)}$ から生成される結合代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を調べる．この $\tilde{\mathcal{A}}$ の表現を考えるために, 最高ウエイトベクトル $|\vec{u}\rangle$ とその双対 $\langle\vec{u}|$ を

$$b_n^{(i)}|\vec{u}\rangle = 0 \quad (n>0), \quad U_i|\vec{u}\rangle = u_i|\vec{u}\rangle,$$

$$\langle\vec{u}|b_n^{(i)} = 0 \quad (n<0), \quad \langle\vec{u}|U_i = u_i\langle\vec{u}|$$

を満たすベクトルとし, $\mathcal{F}_{\vec{u}}$, $\mathcal{F}_{\vec{u}}^*$ をそれぞれ $|\vec{u}\rangle$ と $\langle\vec{u}|$ から生成されるFock空間とその双対とする．この $\mathcal{F}_{\vec{u}}$, $\mathcal{F}_{\vec{u}}^*$ 上の $\tilde{\mathcal{A}}$ の表現を考えたとき, このように結晶化された場合では, 生成元 $\tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)}$ に関するPBW型のベクトルはHall-Littlewood多項式 $Q_\lambda(p_n;t)$ を用いて [1] 以下のように表示することができる．ただし $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ はパーティションである．つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0$ を満たす整数の有限列である.

[1] $Q_\lambda(p_n;t)$ はモノミアル対称多項式 m_λ で展開したときの係数が $Q_\lambda = b_\lambda(t)m_\lambda + \cdots$ と規格化されているもので, 冪和対称多項式 $p_n (n \in \mathbb{N})$ を変数と見たものである．ただし $b_\lambda(t)$ はTheorem 3を参照.

Proposition 1 ([1])**.** Fock空間 $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ と $\mathcal{F}^*_{\vec{u}}$ 上のベクトル $|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle := \tilde{X}^{(2)}_{-\lambda_1}\tilde{X}^{(2)}_{-\lambda_2}\cdots\tilde{X}^{(1)}_{-\mu_1}\tilde{X}^{(1)}_{-\mu_2}\cdots|\vec{u}\rangle$ と $\langle\tilde{X}_{\lambda,\mu}| := \langle\vec{u}|\cdots\tilde{X}^{(1)}_{\mu_2}\tilde{X}^{(1)}_{\mu_1}\cdots\tilde{X}^{(2)}_{\lambda_2}\tilde{X}^{(2)}_{\lambda_1}$ はそれぞれ

$$|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle = (u_1u_2)^{\ell(\lambda)}u_2^{\ell(\mu)}Q_\lambda(b^{(3)}_{-n};t^{-1})Q_\mu(b^{(4)}_{-n};t^{-1})\,|\vec{u}\rangle\,,$$

$$\langle\tilde{X}_{\lambda,\mu}| = u_1^{\ell(\mu)}(u_1u_2)^{\ell(\lambda)}t^{|\lambda|+|\mu|}\langle\vec{u}|Q_\mu(b^{(1)}_n;t^{-1})Q_\lambda(b^{(3)}_n;t^{-1})$$

と表示することができる. ここに

$$b^{(3)}_n := b^{(1)}_n + b^{(2)}_n, \qquad b^{(3)}_{-n} := b^{(2)}_{-n} \qquad (n>0),$$

$$b^{(4)}_n := b^{(2)}_n, \qquad b^{(4)}_{-n} := -b^{(1)}_{-n} + b^{(2)}_{-n} \qquad (n>0)$$

とした.

この表示を用いることにより, $|\tilde{X}_{\lambda,\mu}\rangle$ が $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ 上の基底を成すという主張の証明を得ることができる. また結晶化された場合で基底を成しているという事実から, パラメータ q が一般の場合にも, PBW型のベクトルが基底を成すという予想（[2, Conjecture 3.4] の生成元 $X^{(1)}_n$, $X^{(2)}_n$ を真空ベクトルに作用させる順序を入れ替えた場合）を解決することができる.

またさらに [2] の intertwining operator $\Phi(z)$ の z に適当な規格化を加えて極限 $q\to 0$ を考えると, 次のように定義した作用素 $\tilde{\Phi}(z)$ がその自然な結晶化になっていることが分かる.

Definition 2. 作用素 $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z) : \mathcal{F}_{\vec{u}} \to \mathcal{F}_{\vec{v}}$ を

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}^{(1)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_n - v_1\,v_2\,z\,\tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_{n-1} \quad (n\le 0),\\
&\tilde{X}^{(1)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(1)}_n \quad (n\ge 1),\\
&\tilde{X}^{(2)}_n\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(2)}_n - v_1\,v_2\,z\,\tilde{\Phi}(z)\tilde{X}^{(2)}_{n-1} \quad (\forall n),
\end{aligned}$$

$$\langle\vec{v}|\,\tilde{\Phi}(z)\,|\vec{u}\rangle = 1$$

を満たすものとして定義する.

演算子 $\Phi(z)$ の相関関数（q が一般の場合）は一般化された Macdonald 多項式に対応したベクトルを用いて組み合わせ論的に計算することができる [2, Conjecture 3.13]. 結晶化された場合においても一般化された Hall-Littlewood 多項式を用いて同様に計算することが可能である. しかし, 結晶化された場合においては, 演算子 $\tilde{\Phi}(z)$ の 4 点相関関数は PBW 型の基底で展開することにより, 一切の予想を用いずその公式を得ることができる：

Theorem 3 ([1])**.**

$$\langle\vec{w}|\,\tilde{\Phi}^{\vec{w}}_{\vec{v}}(z_2)\tilde{\Phi}^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z_1)\,|\vec{u}\rangle = \sum_\lambda \left(\frac{u_1u_2z_1}{w_1w_2z_2}\right)^{|\lambda|}\frac{\prod_{k=1}^{\ell(\lambda)}\left(1-t^{k-1}\frac{w_1w_2}{v_1v_2}\right)}{t^{2n(\lambda)}\,b_\lambda(t^{-1})}.$$

ここに $b_\lambda(t) := \prod_{j\ge1}\prod_{k=1}^{m_j}(1-t^k)$, $m_j := \#\{i|\lambda_i = j\}$, $n(\lambda) := \sum_{i\ge1}(i-1)\lambda_i$ とした.

参考文献

[1] H. Awata, H, Fujino, Y. Ohkubo, This paper will appear in arXiv.

[2] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, RIMS kōkyūroku **1765** (2011) 12–32.

中心拡大された超リー代数$\mathfrak{sl}(2|2)$に付随する量子アファイン代数について

松本 拓也　(名古屋大学)*

概　要

超リー代数 $\mathfrak{sl}(2|2)$ は全ての超リー代数の中で唯一, 2次元の普遍中心拡大を持つことが知られている [1]. 今回は, 中心拡大された $\mathfrak{sl}(2|2)$ に付随する量子群とその無限次元への拡張である量子アファイン代数 [2] を紹介したい. この代数は, 超弦理論におけるゲージ/重力対応や q 変形された1次元ハバード模型の対称性として現れ, 物理的に重要な役割を果たしている.

1. 背景と動機

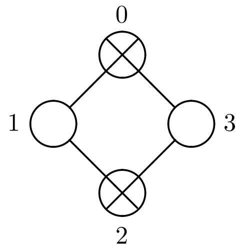
超リー代数 $\mathfrak{sl}(2|2)$ は全ての超リー代数の中で唯一, 2次元の普遍中心拡大を持つ特殊な代数である [1]. それを $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ を書くことにする. $\mathfrak{g}$ は連続パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつ例外型超リー代数 $D(2,1;\alpha)$ の $\alpha \to 0$ 極限としても実現されることが知られている. 近年, この代数は物理的に次の2つの文脈で注目されている. 1つは, 超弦理論に超弦理論におけるゲージ/重力対応の研究である. 特に, ゲージ理論と重力理論双方に共通する対称性をもつ可解模型の代数的対称性として $\mathfrak{g}$ が現れる. 実は, この量子可解模型は1次元ハバード模型と等価であることが知られており, 結果としてこの模型のShastryの散乱行列の対称性にもなっていることが明らかになった. これが2つ目の文脈である. よって, 数学的な立場からこの超リー代数 $\mathfrak{g}$ とそれに付随する(無限次元)量子群, およびその表現論的研究を進めることが重要であると考えられる.

本公演では, 中心拡大された超リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子アファイン代数 [2] を紹介したい. この代数は, 量子変形(q変形)された1次元ハバード模型 [3] の無限次元対称性になっている.

2. 代数の定義

中心拡大された$\mathfrak{sl}(2|2)$に付随する量子アファイン代数を $\widehat{\mathcal{Q}}$ と記すことにする. $\widehat{\mathcal{Q}}$ は, 2つの変形パラメータ $q, g \in \mathbb{C}$ を持ち, 生成元 $\mathrm{K}_j^{\pm 1}, \mathrm{E}_j, \mathrm{F}_j$ $(i, j = 0,1,2,3)$ と中心元 $\mathrm{U}_k^{\pm 1}, \mathrm{V}_k^{\pm 1}$ $(k = 0, 2)$ によって生成される. ここで, $\mathrm{E}_k, \mathrm{F}_k$ $(k = 0, 2)$ はodd生成子であり, その他はevenである. 対称化されたCartan行列 b, 規格化行列 d, および対応するDynkin図として, 次のようなものを考える.;

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$



Dynkin図において, 頂点 0 がaffine化によって新たに付与されたodd rootである.

キーワード：超リー代数, 量子アファイン代数, ハバード模型, AdS/CFT対応

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町名古屋大学高等研究院・多元数理科学研究科
e-mail: takuya.matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は次の (1)-(9) の定義関係式を満たす.; まずgroup-likeな元は,

$$\mathrm{XX}^{-1} = 1\,, \quad \mathrm{XY} = \mathrm{YX} \qquad \text{for} \qquad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \{1, \mathrm{K}_j, \mathrm{U}_k, \mathrm{V}_k\} \tag{1}$$

を満たす. 中心元 V_k と Cartan 生成子の間には次の関係がある.

$$\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_k^{-2}\mathrm{K}_3^{-1} = \mathrm{V}_k^2 \qquad \text{for} \qquad k = 0, 2\,. \tag{2}$$

特徴的なのは, 関係式 (4) で交換子 $[\mathrm{E}_2, \mathrm{F}_0]$ と $[\mathrm{E}_0, \mathrm{F}_2]$ が消えずに残る点である.

$$\mathrm{K}_i\mathrm{E}_j\mathrm{K}_i^{-1} = q^{b_{ij}}\mathrm{E}_j\,, \qquad \mathrm{K}_i\mathrm{F}_j\mathrm{K}_i^{-1} = q^{-b_{ij}}\mathrm{F}_j\,, \tag{3}$$

$$[\mathrm{E}_2, \mathrm{F}_0] = -\tilde{g}\big(\mathrm{K}_0 - \mathrm{U}_2\mathrm{U}_0^{-1}\mathrm{K}_2^{-1}\big)\,, \qquad [\mathrm{E}_0, \mathrm{F}_2] = \tilde{g}\big(\mathrm{K}_2 - \mathrm{U}_0\mathrm{U}_2^{-1}\mathrm{K}_0^{-1}\big)\,, \tag{4}$$

$$[\mathrm{E}_j, \mathrm{F}_j] = d_{jj}\frac{\mathrm{K}_j - \mathrm{K}_j^{-1}}{q - q^{-1}}\,, \qquad [\mathrm{E}_i, \mathrm{F}_j] = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j,\, (i,j) \neq (0,2)\,, (2,0)\,. \tag{5}$$

ここで, $\tilde{g} := g/\sqrt{1 - g^2(q - q^{-1})^2}$ とおいた. Serre 関係式は次のようなものを満たす.

$$[\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_3] = \mathrm{E}_2\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_0\mathrm{E}_0 = [\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_0] = 0 \tag{6}$$

$$\big[\mathrm{E}_j, [\mathrm{E}_j, \mathrm{E}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{E}_j\mathrm{E}_k\mathrm{E}_j = 0 \tag{7}$$

$$\big[[\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_k], [\mathrm{E}_3, \mathrm{E}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{E}_k\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3\mathrm{E}_k = g(1 - \mathrm{V}_k^2\mathrm{U}_k^2) \tag{8}$$

$$\big[[\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_k], [\mathrm{F}_3, \mathrm{F}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{F}_k\mathrm{F}_1\mathrm{F}_3\mathrm{F}_k = g(\mathrm{V}_k^{-2} - \mathrm{U}_k^{-2})\,, \tag{9}$$

ここで, $j = 1, 3$, $k = 0, 2$ である. 関係式 (6), (7) は, 中心拡大のない量子アファイン代数 $\mathrm{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2))$ にみられるものと同一であり, 生成子 E を F に形式的に置き換えたものも同様に成り立つ. 中心拡大の寄与は, 関係式 (8), (9) に現れている. 代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は $g \to 0$ 極限において, $\mathrm{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2))$ に帰着する.

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ はホップ代数の構造を持つ. 特に, 生成子 E_i と F_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ に対する余積は次のように定義される.

$$\Delta(\mathrm{E}_j) = \mathrm{E}_j \otimes 1 + \mathrm{K}_j^{-1}\mathrm{U}_2^{+\delta_{j,2}}\mathrm{U}_0^{+\delta_{j,0}} \otimes \mathrm{E}_j\,, \quad \Delta(\mathrm{F}_j) = \mathrm{F}_j \otimes \mathrm{K}_j + \mathrm{U}_2^{-\delta_{j,2}}\mathrm{U}_0^{-\delta_{j,0}} \otimes \mathrm{F}_j\,.$$

代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ の「導出」 上記のように定義された量子アファイン代数 $\widehat{\mathcal{Q}}$ は, 簡単な物理的考察から「導出」することもできる [2]. まず q 変形されたハバード模型の散乱行列 R_{12} は $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{2|2} \otimes \mathbb{C}^{2|2})$ に値をとり, $\mathrm{E}_2 \in \mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$ の対称性を持っている. ここで散乱行列は「荷電共役変換」の下で不変である一方, 生成子 E_2 の $\mathbb{C}^{2|2}$ 上での基本表現は affine 生成子 E_0 のそれに map される.

$$\Delta^{\mathrm{op}}(\mathrm{E}_2)\, R_{12} = R_{12}\, \Delta(\mathrm{E}_2) \quad \Rightarrow \quad \Delta^{\mathrm{op}}(\mathrm{E}_0)\, R_{12} = R_{12}\, \Delta(\mathrm{E}_0) \tag{10}$$

このようにして構成された affine 生成子 E_0, F_0 とその他の生成子から生成される無限次元代数が $\widehat{\mathcal{Q}}$ である. その構成から, q 変形されたハバード模型の散乱行列 R_{12} は $\widehat{\mathcal{Q}}$ の対称性を持つことになる. 時間が許せば, $q \to 1$ 極限において, ヤンギアン対称性 $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$ が回復されることにも触れたい.

参考文献

[1] Kenji Iohara and Yoshiyuki Koga, *Central extensions of Lie superalgebras*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 1, 110–154, DOI 10.1007/s000140050152. MR1819663 (2002g:17009)

[2] N. Beisert, W. Galleas and T. Matsumoto, “A Quantum Affine Algebra for the Deformed Hubbard Chain,” J. Phys. A **45** (2012) 365206 [arXiv:1102.5700 [math-ph]].

[3] N. Beisert and P. Koroteev, “Quantum Deformations of the One-Dimensional Hubbard Model,” J. Phys. A **41** (2008) 255204 [arXiv:0802.0777 [hep-th]].

closed vertex上の位相的弦理論の開弦振幅

高崎金久　(近畿大学理工学部)
中津了勇　(摂南大学理工学部)

closed vertexは3次元トーリックカラビ・ヤウ多様体が図1のようなウェブ図形とトーリック図形をもつ場合を意味する．その分配函数（閉弦振幅）は代数幾何学的な方法や位相的頂点の方法によって求められている．本講演では，位相的頂点の方法によって開弦振幅の一部も計算できること，それらの1変数母函数がある種の q-差分方程式を満たすこと，の2点を報告する．

1．開弦振幅の計算

図2に示したように，内線にケーラーパラメータ Q_1, Q_2, Q_3 を与えて，下向きの外線に分割 β_1, β_2 を置いた場合の開弦振幅 $Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ を考える．位相的頂点の方法では，ウェブ図形の頂点に

$$C_{\lambda\mu\nu} = q^{\kappa(\mu)/2} s_{{}^{\mathrm{t}}\nu}(q^{-\rho}) \sum_{\eta} s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda/\eta}(q^{-\nu-\rho}) s_{\mu/\eta}(q^{-{}^{\mathrm{t}}\nu-\rho}),$$

$$\kappa(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\mu_i - 2i + 1), \quad q^{-\nu-\rho} = (q^{-\nu_i+i-1/2})_{i=1}^{\infty},$$

という重み（近年用いられている定義に従う）を置き，内線にはケーラーパラメータに関連する重みを与えて，これらの重みの積を内線上の分割について総和する．

図2に対してこの総和を実行するために，ウェブ図形を上部の内線（その上の分割を α とする）で分離し，各部分の振幅への寄与を先に求める．このとき分離した内線の上側の部分は単一の頂点の振幅 $s_\alpha(q^{-\rho})$ であり, 下側の部分はジグザグなウェブ図形の振幅 $Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2}$ になる．求める振幅はこれらを内線の重みとともに α について総和したものとして

$$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2} = \sum_{\alpha} s_\alpha(q^{-\rho})(-Q_3)^{|\alpha|} Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2} \tag{1}$$

と表せる．$Z^{\alpha}_{\beta_1\beta_2}$ はいわゆる「帯上のウェブ図形」の振幅であり，シューア函数と複素自由フェルミオン系によるよく知られた表示がある．それを上の式に代入し，溶解結晶模型で用いた量子トーラス代数のシフト対称性を援用すれば，$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ に対して次の結果を得る．

定理1　$Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2}$ は次のようなフェルミオン表示をもつ：

$$\begin{aligned}
Z^{\mathrm{cv}}_{\beta_1\beta_2} =& q^{\kappa(\beta_2)/2} \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - Q_1Q_2 q^{-\beta_{1,i} - {}^{\mathrm{t}}\beta_{2,j} + i + j - 1})^{-1} \\
& \times \langle {}^{\mathrm{t}}\beta_1 \mid \Gamma_-(q^{-\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})(-Q_1)^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho})(-Q_3)^{L_0} \\
& \times \Gamma_-(q^{\rho})\Gamma_+(q^{-\rho})(-Q_2)^{L_0}\Gamma'_-(q^{-\rho})\Gamma'_+(q^{-\rho}) \mid {}^{\mathrm{t}}\beta_2\rangle.
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで L_0 はフェルミオンのヴィラソロ代数のゼロモードであり，$\Gamma_\pm(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_\pm(q^{-\rho})$ はフェルミオンカレントのモード J_k, $k \in \mathbb{Z}$, を用いて定義される2種類の頂点作用素

$$\Gamma_\pm(q^{-\rho}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k}\right), \quad \Gamma'_\pm(q^{-\rho}) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^{k/2} J_{\pm k}}{1 - q^k}\right)$$

である．$\langle {}^{\mathrm{t}}\beta_1|$ と $|{}^{\mathrm{t}}\beta_2\rangle$ は ${}^{\mathrm{t}}\beta_1$ と ${}^{\mathrm{t}}\beta_2$ に対応する励起状態を表す．

科学研究費 No. 24540223, No. 25400111, No. 15K04912

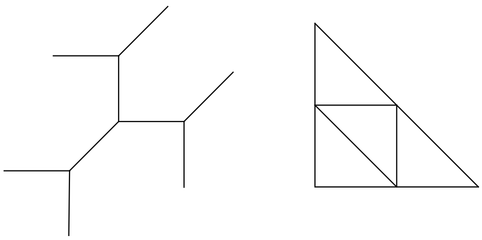


図 1: closed vertex のウェブ図形（左）とトーリック図形（右）

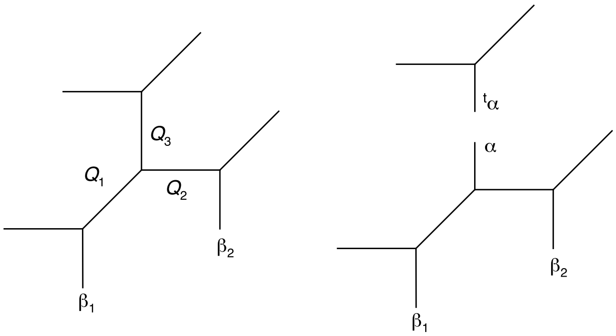


図 2: 開弦振幅の設定（左）とウェブ図形の分離・融合の仕方（右）

2. 開弦振幅の母函数が満たす q-差分方程式

以下では，上の開弦振幅を $\beta_1 = (1^k)$（縦 1 列のヤング図形），$\beta_2 = \emptyset$ に特殊化して $Z^{\mathrm{cv}}_{\emptyset\emptyset}$ で正規化したものの母函数

$$\Psi(x) = \frac{1}{Z^{\mathrm{cv}}_{\emptyset\emptyset}} \sum_{k=0}^{\infty} Z^{\mathrm{cv}}_{(1^k)\emptyset} x^k$$

（KP 階層の波動函数を初期時刻で考えることに相当する）について結果を述べるが，$\beta_1 = (k)$（横 1 行のヤング図形）への特殊化や β_1, β_2 の役割を入れ替えた場合も同様である．

定理 2　$\Psi(x)$ は次の q-差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned}&(1 - Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x} - Q_1Q_2Q_3q^{1/2}x)(1 - Q_1Q_2q^{-1}q^{x\partial_x} - Q_1q^{1/2}x)q^{x\partial_x}\Psi(x)\\&= (1 - Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x} - Q_1Q_3q^{1/2}x)(1 - Q_1Q_2q^{-1}q^{x\partial_x} - q^{1/2}x)\Psi(x).\end{aligned} \tag{3}$$

この結果から**意外なこと**がわかる．この方程式を（項を 1 辺に集めて）$\hat{H}(x, q^{x\partial_x})\Psi(x) = 0$ と表そう．$q \to 1$ の古典極限（これは q-差分方程式の WKB 近似によって正当化される）において非可換多項式 $\hat{H}(x, q^{x\partial_x})$ は可換多項式 $H(x, y)$ になるが，じつはこれらは

$$\hat{H}(x, q^{x\partial_x}) = (1 - Q_1Q_2q^{-2}q^{x\partial_x})\hat{K}(x, q^{x\partial_x}), \quad H(x, y) = (1 - Q_1Q_2y)K(x, y) \tag{4}$$

というように因数分解する．具体的な形は省くが，$K(x, y)$ は x, y の，また，$\hat{K}(x, q^{x\partial_x})$ は $x, q^{x\partial_x}$ の 2 次多項式である．Dijkgraaf らの量子幾何学では，$H(x, y) = 0$ はミラー曲線，$\hat{H}(x, q^{x\partial_x})\Psi(x) = 0$ はその量子化と解釈される．しかしながら，ミラー曲線の方程式のニュートン図形はトーリック図形と同じ形をしている，という folklore（？）によれば，余分の因子 $1 - Q_1Q_2y$ を落とした $K(x, y) = 0$ の方がミラー曲線にふさわしい．この余分の因子（(2) の右辺の無限積に由来する）の存在は結び目の不変量の A-多項式の特徴に似ている．

多状態TASEPと四面体方程式

国場 敦夫 (東大総合文化)
丸山 翔也 (東大総合文化)
尾角 正人 (阪市大理)

1. n-TASEP

サイト数 L の周期的一次元格子を考える．各サイトは $i\in\mathbb{Z}_L$ でラベルされ，状態 $\sigma_i\in\{0,1,\dots,n\}$ をとるものとする．$1,\dots,n$ はそれでラベルされる種の粒子がある状態，0 は無粒子状態を表す．任意の隣り合うサイト $(i,i{+}1)$ で，その状態 (α,β) が $\alpha>\beta$ のとき，一定の遷移確率で (β,α) に入れ替わるダイナミクスに従う確率過程を n-TASEP(totally asymmetric simple exclusion process) という．時刻 t に配置 $(\sigma_1,\dots,\sigma_L)$ をとる (相対) 確率を $P(\sigma_1,\dots,\sigma_L;t)$ とし，

$$|P(t)\rangle=\sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_L)\in\{0,1,\dots,n\}^L}P(\sigma_1,\dots,\sigma_L;t)\,|\sigma_1,\dots,\sigma_L\rangle$$

とおくと，n-TASEP は次のマスター方程式で特徴づけられる．

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle=H|P(t)\rangle,\qquad H=\sum_{i\in\mathbb{Z}_L}h_{i,i+1},\qquad h\,|\sigma,\sigma'\rangle=\begin{cases}|\sigma',\sigma\rangle-|\sigma,\sigma'\rangle & (\sigma>\sigma'),\\ 0 & (\sigma\le\sigma').\end{cases}$$

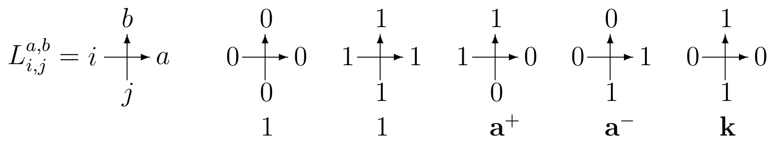
ここで，$h_{i,i+1}$ は $i,i{+}1$ 番目の成分に h，他の成分には 1 で作用する．我々は $H|P(t)\rangle=0$ となる状態（定常状態）の $P(\sigma_1,\dots,\sigma_L)$ に興味がある．

2. L 作用素と組合せ R

フォック空間 $F=\bigoplus_{m\ge0}\mathbb{C}|m\rangle$ 上の $q=0$ 振動子 $\mathbf{a}^+,\mathbf{a}^-,\mathbf{k}$ の作用を次で定める．

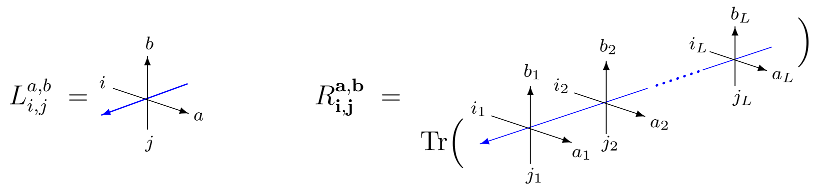
$$\mathbf{a}^+|m\rangle=|m+1\rangle,\quad \mathbf{a}^-|m\rangle=|m-1\rangle,\quad \mathbf{k}|m\rangle=\delta_{m,0}|m\rangle$$

さらに $V=\mathbb{C}\,|0\rangle\oplus\mathbb{C}\,|1\rangle$ とおいて，L 作用素 $L=(L^{a,b}_{i,j})\in\mathrm{End}(V\otimes V\otimes F)$($i,j,a,b$ は V の基底のラベル) を $L(|i,j\rangle\otimes|\chi\rangle)=\sum_{a,b}|a,b\rangle\otimes L^{a,b}_{i,j}|\chi\rangle$ ($|\chi\rangle\in F$) および



で定める（$q=0$ 振動子に値をとる 5 頂点模型）．[5] で得られた結果で $q=0$ とすることにより，次の命題が成り立つ．

Proposition 1. $R^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}=\mathrm{Tr}_F(L^{a_1,b_1}_{i_1,j_1}\cdots L^{a_L,b_L}_{i_L,j_L})$ （$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\dots a_L)$, *etc*）と置くと，

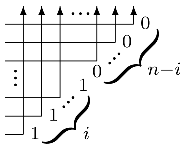


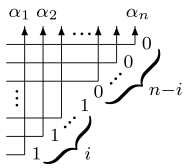
$R = (R^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})$ は各セクター $(|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|) = (|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}|) = (l, m)$ 毎に $U_q(\widehat{sl}_L)$ の反対称テンソル表現のクリスタルのテンソル積 $B^l \otimes B^m$ に付随する組合せ R [6] になっている．（$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_L$, etc）

この R の行列積表示は四面体方程式の簡約から得られる．

3. 主結果

Ferrari と Martin は [2] において，multiline process というアルゴリズムを用いて定常状態をある組合せ論的な対象からの射影で表した．これはクリスタル B^l と組合せ R の NY-rule [6] を用いて言い換えることができる．$X_i, \hat{X}_i \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ $(i = 0, \ldots, n)$ を次のように定める．

$X_i = \sum$ 

$\hat{X}_i = \sum(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ 

和 $\sum$ は与えられた境界条件を満たす 5 頂点模型のすべての状態にわたってとる．α_i は上部の各出力の値 $0, 1$ を表す．X_i は 5 頂点模型の角転送行列と考えることができる．このとき次が成り立つ [3, 4]．

Theorem 2.

$$P(\sigma_1, \ldots, \sigma_L) = \mathrm{Tr}_{F^{\otimes n(n-1)/2}}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$$

は n-TASEP の定常状態である．

Theorem 2 の導出は [2] の結果に基づいたものだが，[1] に倣って直接示すこともできる．$\mathrm{Tr}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$ が定常状態の確率であるためには

$$X_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\alpha X_\beta = \sum_{0 \le \gamma, \delta \le n} h^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta} X_\gamma X_\delta \quad (0 \le \alpha, \beta \le n)$$

$(h|\alpha, \beta\rangle = \sum_{0 \le \gamma, \delta \le n} h^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta} |\gamma, \delta\rangle)$ となる $\hat{X}_i \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ が見つかればよい．

Theorem 3. このような $\hat{X}_i$ は上で定義した $\hat{X}_i$ に *const* X_i を加えることによって実現できる．

参考文献

[1] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, J. Phys. A: Math.Gen. **26** 1493–1517 (1993).

[2] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, Ann. Probab. **35** (2007) 807–832.

[3] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, arXiv:1506.04490.

[4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, in preparation.

[5] A. Kuniba, M. Okado and S. Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, to appear in J. Phys. A: Math. Theor. (arXiv:1503.08536).

[6] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, Selecta Mathematica, New Ser. **3** (1997) 547–599.

Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees

中西　知樹　(名古屋大学)

一般団代数 (generalized cluster algebras) は 2011 年に Chekhov と Shapiro が団代数の一般化として導入したものである [2]. 通常の団代数においては団変数 (x 変数) の変異（交換関係式）の右辺に二項式が現れることが特徴的であるが, これを次数 2 以上の一般の多項式に置き換えたものが一般団代数である. 彼らは一般団代数においても団代数と同様に x 変数の Laurent 性が成り立つことを示し, また有限型一般団代数の分類が有限型団代数の分類に帰着されること示した. さらに一般団代数においても団代数と同様に x 変数や y 変数に対して c ベクトル, g ベクトルおよび F 多項式による分離公式がなりたつことが講演者により示された [7]. 以上は前回の学会講演で報告したことである.

本講演では, これに続いて一般団代数の自然な量子化を与えた論文 [6] について報告する. 団代数の量子化においては Berenstein と Zelevinsky [1] による x 変数を量子化するものと Fock と Goncharov [4] による y 変数を量子化するものの二つの定式化があるが, ここでは後者の一般化を考える. Fock と Goncharov による量子化においては量子二重対数関数 (quantum dilogarithm)

$$\Psi_q(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + q^{2m+1}x\right)^{-1}.$$

が本質的な役割を果たす. この関数が古典的な二重対数関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ の量子化であるという重要な認識は 90 年代前半に可積分系の文脈で Faddeev, Kashaev, Volkov らにより得られたもので [3], その後量子二重対数関数は双曲幾何や量子群などとも関連し活発に研究されていることは周知のことであろう. 一般団代数においては, 量子二重対数関数の各因子の「二項式」を「(次数 d の) 多項式」に拡張した「一般化された」量子二重対数関数

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{d} z_s q^{s(2m+1)} x^s \right)^{-1}, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{d-1}),\ z_0 = z_d = 1$$

を用いて y 変数の量子化が定式化される. すなわち, 雑に言えば量子 y 変数の変異がこの関数の随伴作用によって与えられるのである.

以上が [6] の主たる結果であるが, これより一般化された量子二重対数関数に対して以下に述べる重要な帰結が得られる. 量子団代数においては, 任意の量子団代数の周期に対して量子二重対数関数の間の恒等式を得ることができる [5]. たとえば最も簡単で非自明な周期である A_2 型量子団代数に付随する長さ 5 の周期に対して有名な Faddeev と Kashaev の 5 項関係式 (pentagon identity)

$$\Psi_q(Y_1)\Psi_q(Y_2)\Psi_q(Y_1)^{-1}\Psi_q(q^{-1}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_q(Y_2)^{-1} = 1$$

が得られる. ここで, Y_1, Y_2 は非可換な量子 y 変数で関係式 $Y_1Y_2 = q^2Y_2Y_1$ をみたす. これと同様の方法により, 任意の量子一般団代数の周期に対して一般量子二重対数関数の

間の恒等式を得ることができる. たとえば, 最も簡単で非自明な周期である B_2/C_2 型量子一般団代数に付随する長さ 6 の周期に対して以下のような一般量子二重対数関数の間の恒等式が得られる.

$$\begin{aligned}&\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)\Psi_{q^2}(Y_2)\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)^{-1}\\&\quad\times\Psi_{q^2}(q^{-4}Y_1^2Y_2)^{-1}\Psi_{2,(z),q^2}(q^{-2}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_{q^2}(Y_2)^{-1}=1.\end{aligned}$$

ここで, Y_1, Y_2 は非可換な量子 y 変数で関係式 $Y_1Y_2 = q^4Y_2Y_1$ をみたす.

参考文献

[1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. in Math. **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.

[2] L. Chekhov and M. Shapiro, *Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables*, Int. Math. Res. Notices **2014** (2014), 2746–2772; arXiv:1111.3963 [math–ph].

[3] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A9** (94), 427–434; arXiv:hep–th/9310070.

[4] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286; arXiv:math/0702397 [math.QA].

[5] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, SIGMA **7** (2011), 102, 29 pages; arXiv:1104.4630 [math.QA].

[6] T. Nakanishi, *Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms of higher degrees*, 2014, arXiv:1410.0584 [math.RA].

[7] ———, *Structure of seeds in generalized cluster algebras*, 2014, arXiv:1409.5967 [math.RA].

シンプレクティック・グラスマン多様体の同変Schubert 類に対する Pfaffian 和公式

池田 岳　(岡山理科大学)*1
松村 朝雄　(岡山理科大学)*2

シンプレクティック・グラスマン多様体 $SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ シンプレクティック・ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2n}$ における次元 $n-k$ の等方的部分空間のなすグラスマン多様体を $SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ で表す．この多様体はシンプレクティック群 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の等質空間である．極大トーラス $T\subset Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の作用に関する同変コホモロジー環における Schubert 類に対して Pfaffian の和の形の明示公式が得られた．

1. Double Schubert polynomials

旗多様体の同変 Schubert 類を記述する double Schubert polynomials について述べる．

W_∞ を C_∞ 型のワイル群とする．その生成元として $s_0, s_1, s_2, \ldots$ を選ぶとき W_∞ は

$$s_i^2 = 1\ (i \geq 0),\ s_0s_1s_0s_1 = s_1s_0s_1s_0,\ s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1},\ s_is_j = s_j = s_js_i\ (|i-j| \geq 2)$$

という関係式で定義される．$\ell : W_\infty \to \mathbb{N}$ を長さ関数とする．$\Gamma = \mathbb{Z}[q_1, q_2, \ldots]$ を Schur Q 関数の環とする．ここに $q_r = q_r(x)$ $(r \geq 1)$ は

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x_iu}{1-x_iu} = \sum_{j=0}^{\infty} q_r(x)u^r$$

により定義される $x = (x_1, x_2, \ldots)$ の形式的冪級数である．$\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n)$ を C_n 型の旗多様体とする．x 以外に $z = (z_1, z_2, \ldots)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$ という 2系列の無限変数を用意し，Γ 係数の多項式環 $\mathcal{R}_\infty = \Gamma[z, t]$ を考える．

命題 1 ([2])．全射環準同型 $\pi_n : \mathcal{R}_\infty \longrightarrow H^*_{T_n}(\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n))$ および $\mathcal{R}_\infty$ の $\mathbb{Z}[t]$ 基底 $\mathfrak{C}_w(z, t; x)$ $(w \in W_\infty)$ が存在して

$$\pi_n(\mathfrak{C}_w(z, t; x)) = \begin{cases} [\Omega_w]_{T_n} & (w \in W_n) \\ 0 & (w \notin W_n) \end{cases}$$

が成り立つ．ここに $w \in W_n$ に対して Ω_w を $\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n)$ の *Schubert* 部分多様体とし，$[\Omega_w]_{T_n} \in H^*_{T_n}(\mathcal{F}l^C(\mathbb{C}^n))$ をその基本類とする．

2. シンプレクティック・グラスマン多様体の Schubert 部分多様体

$k \geq 0$ に対して $W_{\infty,k} = \langle s_i\ (i \neq k)\rangle$ とおく．Schubert 部分多様体を添字付けるために

$$W_\infty^{(k)} = \{w \in W_\infty \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \quad (\forall i \neq k)\}$$

本研究は科研費 (課題番号:24540032, 15K04832) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14M15, 05E05
キーワード：K-theory, symplectic Grassmannian
*1 〒700-0005 岡山市北区理大町 1-1　岡山理科大学 理学部応用数学科
e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp
web: http://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/
*2 e-mail: matsumur@xmath.ous.ac.jp

とおく．自然な全単射 $W_\infty^{(k)} \cong W_\infty/W_{\infty,k}$ が存在する．$W_n = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\rangle$ とするとき，$SG^k(\mathbb{C}^{2n})$ の Schubert 部分多様体は $W_\infty^{(k)} \cap W_n$ によって添字付けられる．この集合に対して，二通りの記述を使う．

非負整数の非増加列 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k})$ であって以下をみたすもの全体の集合を $\mathcal{SP}^k(n)$ で表す．(1) $\lambda_i > k$ ならば $\lambda_i > \lambda_{i+1}$（$k$-strict と呼ばれる性質），(2) $\lambda_1 \le n+k$.

命題 2. 自然な全単射 $W_\infty^{(k)} \cap W_n \cong \mathcal{SP}^k(n)$ が存在する．

定義 3 (characteristic index)**.** $w \in\in W_n^k$ に対して，符号付き置換としての表示 $w = (v_1, \dots, v_k, -\zeta_1, \dots, -\zeta_s, u_1, \dots, u_{n-k-s})$ を用いて *characteristic index* $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ を $\chi = (\zeta_1 - 1, \dots, \zeta_s - 1, -u_1, \dots, -u_{n-k-s})$ とする．

$w \in W_\infty^{(k)} \cap W_n$ とするとき $\mathfrak{C}_w(z,t;x)$ は π_n を通して $H^*_{T_n}(SG^k(\mathbb{C}^{2n}))$ の Schubert 類と同一視される．したがって以下の問題を考えればよい．

問題 4. $w \in W_\infty^{(k)}$ に対して $\mathfrak{C}_w(z,t;x)$ を明示的に求めよ．

3. Double theta polynomials と Pfaffian 和公式

定義 5 (Wilson [3] の double theta polynomials)**.** 次で定める関数を考える：

$$\sum_{r=0}^{\infty} \vartheta_r^{(l)}(x,z|t)u^r = \begin{cases} \sum_{r=0}^\infty q_r(x)u^r \prod_{i=1}^k (1+z_iu) \prod_{i=1}^l (1-t_iu) & (l \ge 0) \\ \sum_{r=0}^\infty q_r(x)u^r \prod_{i=1}^k (1+z_iu) \prod_{i=1}^{-l} (1+t_iu)^{-1} & (l < 0) \end{cases}.$$

Wilson はいわゆる special class が ϑ 関数により表示されることを示している．

定理 6 ([1])**.** $w \in W_\infty^{(k)} \cap W_n$ とし，$\lambda \in \mathcal{SP}^{(k)}(n)$, χ をその *characteristic index* とする．$D(\chi) := \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n-k,\ \chi_i + \chi_j < 0\}$ と定めるとき，次が成り立つ：

$$\mathfrak{C}_w(z,t;x) = \sum_{I \subset D(\chi)} \mathrm{Pfaffian}\left[\vartheta^{(\chi_1)}_{\lambda_1 + a_1^I} \cdots \vartheta^{(\chi_{n-k})}_{\lambda_{n-k} + a_{n-k}^I}\right]$$

ここに $a_s^I = \#\{(j \mid (s,j) \in I\} - \#\{i \mid (i,s) \in I\}$ とした．

注：Wilson [3] は raising operator を使って donble Theta polynomials を定義した．それが定理の右辺で与えられる関数と一致することは形式的な計算で示すことができる．Double Theta polynomials がシンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類を与えるということは Wilson が予想していた．上の定理により Wilson の定理は肯定的に解決された．

参考文献

[1] T. Ikeda, T. Matsumura, Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, Math. Z. 2015, **280**, 269–306.

[2] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. Math. 2011, **226**, 840–886.

[3] E. Wilson, Equivariant Giambelli formulae for Grassmannians, Ph.D. Thesis, University of Maryland, College Park (2010).

シンプレクティック・ベクトル束の K 理論的退化跡

Thomas Hudson (POSTECH, Korea)*1
池田 岳 (岡山理科大学)*2
松村 朝雄 (岡山理科大学)*3
成瀬 弘 (山梨大学)*4

概　要

シンプレクティック構造を持つベクトル束の退化を表す部分多様体（退化跡, degeneracy locus）の構造層が K 理論に定める類を記述することを問題にする．同変コホモロジーにおける結果 ([4]) を自然に拡張する Pfaffian 和公式が得られた．証明は射影束の塔の中に退化跡と双有理な多様体を構成し pushforward を計算することによる．この手法は Kazarian [5] によるコホモロジーの場合の計算法を拡張するものである．

1. シンプレクティック・ベクトル束の退化跡

E を非特異多様体 X 上の階数 $2n$ のベクトル束 X とする．E にはシンプレクティック構造，すなわち $\bigwedge^2 E^\vee$ の至るところ消えない切断が与えられているものとする．E の部分束 V に対して $V^\perp$ をシンプレクティック構造に関する補束とする．V が等方的であるとはシンプレクティック構造が V の上で恒等的に零であること，言い換えると $V_x \subset V_x^\perp$ がすべての点 $x \in X$ で成立することである．非負の整数 $k < n$ に対して $\xi : SG^k(E) \to X$ 階数 $(n-k)$ の等方的部分束をパラメトライズする X 上のグラスマン束とする．

E の部分ベクトル束からなる旗

$$0 = F^n \subset F^{n-1} \subset \cdots \subset F^1 \subset F^0 \subset F^{-1} \subset \cdots \subset F^{-n} = E,$$

であって $\mathrm{rank}(F^i) = n - i \ (-n \le i \le n)$ かつ

$$(F^i)^\perp = F^{-i} \quad \text{for} \quad 0 \le i \le n$$

をみたすものを選ぶ．$i \ge 0$ ならば F^i は等方的であって特に F^0 はラグランジアン部分束（極大等方部分束）である．U を $SG^k(E)$ 上の同語反復的部分束とする．$\chi \in \mathbb{Z}^{n-k}$ に対して，退化跡 $\Omega_\chi \subset SG^k(E)$ を

$$\Omega_\chi = \{(x, U_x) \in SG^k(E) \mid \dim(F_x^{\chi_i} \cap U_x) \ge i \ \ \text{for } i = 1, \ldots, n-k\}$$

と定める．本研究の目的は $SG^k(E)$ 上の連接層のなす Grothendieck 群 $K(SG^k(E))$ において Ω_χ の構造層の類 $[\mathcal{O}_{\Omega_\chi}]$ の明示公式を求めることである．

本研究は科研費 (課題番号: 24540032, 25400041, 15K04832) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14M15, 05E05
キーワード：K-theory, symplectic Grassmannian

*1 e-mail: thomasbhudson@gmail.com
*2 e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp
*3 e-mail: matsumur@xmath.ous.ac.jp
*4 e-mail: hnaruse@yamanashi.ac.jp

2. k-strict partitions

実際には退化跡を決めるデータ $\chi \in \mathbb{Z}^{n-k}$ として意味があるのは，以下に定める k-strict partition λ に付随する場合である．

非負整数の非増加列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k})$ であって以下をみたすもの全体の集合を $\mathcal{SP}^k(n)$ で表す．

- $\lambda_i > k$ ならば $\lambda_i > \lambda_{i+1}$（$k$-strict と呼ばれる性質）
- $\lambda_1 \leq n + k$.

定義 1 (characteristic index)**.** $\lambda \in \mathcal{SP}^k(n)$ に対して *characteristic index* $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ を以下のように定める．$1 \leq i \leq n-k$ に対して

$$\chi_i = \lambda_i - i - k + \#\{\, 1 \leq s \leq i-1 \mid \lambda_s + \lambda_i > 2k + i - s\}$$

とする．

ワイル群の言葉で characteristic index をより自然に記述する方法については [4] または [3] を参照していただきたい．

3. Pfaffian 和公式

定理 2 ([1])**.** $\lambda \in \mathcal{SP}^{(k)}(n)$ とし χ をその *characteristic index* とする．$2m$ を λ の 0 でない成分の個数を超えない最小の偶数とする．

$$D(\chi) := \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n-k,\ \chi_i + \chi_j < 0\}$$

と定めるとき，各部分集合 $I \subset D(\chi)$ に対して K 理論的（相対）*Segre* 類（*[2]*）を用いて明示的に書くことのできる $\Lambda^I_{i,j} \in K(SG^k(E))$ が $1 \leq i < j \leq 2m$ に対して定まり，次が成り立つ：

$$[\mathcal{O}_{\Omega_\chi}] = \sum_{I \subset D(\chi)} \text{Pfaffian}\left(\Lambda^I_{i,j}\right)_{1 \leq i < j \leq 2m}.$$

本定理の証明の方法は幾何学的で Kazarian [5] の方法の自然な拡張である．同変コホモロジーの場合の対応する結果が [4] において代数的，組合せ論的方法で得られていた（[3] も参照）．その結果は本定理からしたがう．

参考文献

[1] T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura, H. Naruse, Determinaltal and Pfaffian formulas of K-theoretic Schubert calculus, ArXiv 1228800

[2] T. Hudson, 池田岳，松村朝雄，成瀬弘，K 理論的 Segre 類について，2015 年日本数学会秋季総合分科会（京都産業大学）代数学分科会アブストラクト

[3] 池田岳，松村朝雄，シンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類に対する Pfaffian 和公式，2015 年日本数学会秋季総合分科会（京都産業大学）無限可積分系セッション・アブストラクト

[4] T. Ikeda, T. Matsumura, Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, Math. Z. 2015, **280**, 269–306.

[5] M. Kazarian, On Lagrange and symmetric degeneracy loci, preprint. available at: http://www.newton. cam.ac.uk/preprints2000.html

シンプレクティック多様体上のジェット束の変形量子化と頂点代数

桑原 敏郎 (National Research University,
Higher School of Economics, Russia)

平成 27 年 9 月 13 日

1 概要

古典的な有限次元のリー群（あるいは代数群）は有限次元の多様体上に定義された可微分な群構造であり、そのリー代数はその上の群演算に関して不変なベクトル場のなす代数構造であるので、リー群に付随する適当な多様体を考えた時にその上の微分作用素環がリー代数の普遍包絡環と密接に関係するというのは自然な対応である。典型的なものはベイリンソン-ベルンシュタイン対応と呼ばれる対応で、半単純リー群の旗多様体上の（ねじれ — twisted）微分作用素環がリー代数の普遍包絡環の中心イデアルによる商代数に一致することを半単純リー代数の表現に応用した。旗多様体はアフィン多様体ではないが、その上の微分作用素環はアフィン性を持つという著しい性質を持つため、旗多様体上の微分作用素のなす層を通して $\mathcal{D}$ 加群の理論を表現論に直接応用できてしまうという部分が強力である。

数理物理や可積分系、無限次元代数の表現論に現れる非可換代数は必ずしもリー代数の普遍包絡環になっているわけではないがいくつかの重要な非可換代数に対してはやはり同様に微分作用素環に類似の代数で適当な多様体上の非可換代数の層としてそれらの代数を実現できることがわかった。代表的なものは有限 $\mathcal{W}$ 代数と有理チェレドニック代数（シンプレクティック鏡映代数）であり、それぞれスロドウィー多様体や箙多様体上にそれらの構造層の変形量子化（非可換変形）によって実現される。これらの代数に対してはここ 10 年ほどの間にこのような変形量子化による実現が表現論や代数構造の研究に応用され、著しい結果が見られた。

変形量子化の観点からは旗多様体上の微分作用素環は多様体の余接束というシンプレクティック多様体の変形量子化とみなすことができる。一方で有限 $\mathcal{W}$ 代数や有理チェレドニック多様体の場合は必ずしも余接束と

1

限らないシンプレクティック多様体の変形量子化として実現される。通常シンプレクティック多様体上にその構造層の変形量子化となる非可換代数の層を構成するのは簡単ではないが、これらの代数に対してはシンプレクティック幾何学で基本的な多様体の構成方法であるハミルトン簡約の非可換類似を考えることで具体的にそのような変形量子化を構成することができる。この構成は量子ハミルトン簡約と呼ばれる。

アフィンリー代数や頂点代数はループ群や 2 次元の場の理論に関係して現れる代数構造であるので、それらに対して同様の構成を考えようと試みると無限次元のシンプレクティック多様体が現れるのが自然である。例えばアフィングラスマン多様体やアフィン旗多様体なども一例だが、ここでは有限次元のシンプレクティック多様体上のジェット束と呼ばれる無限次元のベクトル束を考える。ジェット束には元のシンプレクティック多様体のシンプレクティック構造から自然にポアソン頂点代数としての構造が誘導される。このポアソン頂点代数の層としての構造の変形量子化 (非可換変形) を考えることで頂点代数を得ることを考えたい。

2 頂点代数・ポアソン頂点代数

ここで頂点代数の基本的な定義についてまとめておく。特に断りのない場合は常に頂点代数は $\mathbb{C}$ 上の頂点代数を考えることとする。

頂点代数 V とはベクトル空間 V とその上のいくつかの構造の組 $V = (V, Y, T, \mathbf{1})$ である。ただし、Y, T, $\mathbf{1}$ はそれぞれ頂点作用素 $Y(—, z) : V \longrightarrow \operatorname{End} V[[z, z^{-1}]]$, 並進作用素 $T : V \longrightarrow V$ および真空ベクトル $\mathbf{1} \in V$ と呼ばれる写像とベクトルであって、次の性質を満たすものである。

- 任意の $a\ b \in V$ に対して $Y(a, z)b \in V((z))$ である。
- (真空公理) 真空ベクトル $\mathbf{1}$ に対して $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_V$。さらに任意の $A \in V$ に対して $Y(A, z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ である。つまり $Y(A, z)\mathbf{1}$ は $z = 0$ と代入できるが、そのとき $Y(A, z)\mathbf{1}|_{z=0} = A$ を満たす。
- (並進公理) 任意の $A \in V$ に対して T が
$$[T, Y(A, z)] = \partial_z Y(A, z),$$
を満たす。さらに真空ベクトルに対しての作用は $T\mathbf{1} = 0$ である。
- (局所公理) 任意の A, $B \in V$ に対してそれらの頂点作用素 $Y(A, z)$, $Y(B, w)$ が次の意味で互いに局所的である: 十分に大きな $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して
$$(z - w)^N [Y(A, z), Y(B, w)] = 0$$

が成立する。

頂点作用素 $Y(—,z)$ は作用素を係数とする形式級数であるので、z の冪で展開して $Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}$ と書くことも多い。ここで $a\in V$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対して $a_{(n)}\in \mathrm{End}\,V$ である。従って頂点代数 V には、各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して ${}_{(n)}:V\times V\longrightarrow V$ と可算無限個の積が与えられていることになる。これら無限個の積を ${}_{(n)}$ 積と呼ぶことにする。これらの ${}_{(n)}$ 積はボルチャーズ恒等式と呼ばれる非常に複雑な式を満たすことが上の公理から自動的に従う。ボルチャーズ恒等式の具体的な形などについては [FBZ] などを参照のこと。

本稿ではさらに $\hbar$-進頂点代数 ($\hbar$-adic vertex algebras) と呼ばれる頂点代数の変種を扱うことになる。不定元 $\hbar$ に対して $\hbar$-進頂点代数 V とはやはり $\mathbb{C}[[\hbar]]$-加群 V 上の次のような構造の組 $V=(V,Y,T,\mathbf{1})$ のことである: 加群 V は $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上平坦であって $\hbar$-進位相に関して完全なものとし、Y,T などは $\mathbb{C}[[\hbar]]$ に関して線形であるとする。$\hbar$-進頂点代数は上の頂点代数の公理のうち 2 番目 3 番目の条件を満たすが最初と最後の条件に関しては、任意の $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\hbar^N$ を法とする同値として条件を満たす。従って任意の N に対して $(V/\hbar^N V,Y,T,\mathbf{1})$ は頂点代数であるが、$(V,Y,T,\mathbf{1})$ そのものは一般には $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上の頂点代数にならない。

このような $\hbar$-進頂点代数 $V=(V,Y,T,\mathbf{1})$ に対して $(V/\hbar V,Y,T,\mathbf{1})$ が可換な頂点代数 (つまり任意の $a\in V$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{(n)}\equiv 0 \bmod \hbar$) とする。この時 $\hbar^{-1}a_{(n)}$ ($a\in V$, $n\geq\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$) は $V/\hbar V$ 上の作用素として ${}_{(-1)}$ 積に関する導分作用素であって、ボルチャーズ恒等式を切り詰めた形の恒等式を満たす。このような代数構造は頂点代数の世界におけるポアソン代数の類似であると考えることができ、ポアソン頂点代数と呼ばれる。このように $\mathcal{O}$ がポアソン頂点代数であるときに、$\hbar$-進頂点代数 V が $V/\hbar V$ が可換頂点代数であって、ポアソン頂点代数として $\mathcal{O}$ と同型である場合に $\hbar$-進頂点代数 V が $\mathcal{O}$ の変形量子化である、ということにする。

さらに $\hbar$-進頂点代数 V に対して $\mathbb{C}((\hbar))$ をテンソル積した代数 $V\otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]}\mathbb{C}((\hbar))$ も本稿では $\hbar$-進頂点代数と呼ぶことにする。([AKM] ではこれは "algebra of Asymptotic Chiral Differential Operators" などと呼んでいたが定義から $\hbar$-進頂点代数は $\mathbb{C}[[\hbar]]$ に関するねじれ部分を持たず、表現論を考えるときも $\mathbb{C}[[\hbar]]$ ねじれ部分を持たない圏で考えるので本質的にはどちらを考えるかに大きな違いはない。) またポアソン頂点代数 $\mathcal{O}$ に対して V が $\mathcal{O}$ の変形量子化であるような $\hbar$-進頂点代数であるならば $V\otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]}\mathbb{C}((\hbar))$ も $\mathcal{O}$ の変形量子化であると言うことにする。

以下では特に区別する必要がない場合には $\hbar$-進頂点代数を単に頂点代数とだけ書くことがある。

3 ジェット束上のポアソン頂点代数構造

有限型スキーム X に対して、その上の無限小弧 (∞-ジェット) のなす集合に適切なトポロジーを入れることで ∞-ジェットスキーム $J_\infty X$ を構成することができる。このスキームは可換環 A に対して $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A, J_\infty X) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A[[t]], X)$ を満たすスキームとして定義され、もとの X が閉点を 1 点しか持たない場合を除けば一般に非有限型スキーム、つまり無限次元の多様体である。非常に基本的な例として $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x^i \mid i = 1, \ldots, d] = \mathbb{C}^d$ とアフィン空間を取ると $J_\infty X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x^i_{(-n)} \mid {}^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$ という無限次元アフィン空間になる。ジェットスキーム $J_\infty X$ から X には各無限小弧の端点をとるという写像 $\pi_\infty : J_\infty X \longrightarrow X$ が自然に定義される。その写像による $J_\infty X$ の構造層の押し出し $(\pi_\infty)_* \mathcal{O}_{J_\infty X}$ を考えると、これは X 上の無限次元ベクトル束とみなすことができる。記号を濫用してこれも $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ と書いて X 上のジェット束と呼ぶ。

多様体 X がシンプレクティック多様体である場合、その構造層 $\mathcal{O}_X$ はポアソン代数の構造を持つ。つまりポアソン積 $\{—,—\} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ が存在してリー代数の公理を満たし、さらに任意の $a \in \mathcal{O}_X$ に対して $\{a, —\}$ はライプニッツ則を満たす。例えば $\mathcal{O} = \mathbb{C}[x^1, \ldots, x^d, y^1, \ldots, y^d]$ に対して、$\{a, b\} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial b}{\partial y_i}$ と定義すると、これは $\mathbb{C}^{2d} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}$ 上の標準的なシンプレクティック構造に付随するポアソン積になって $\mathcal{O}$ はポアソン代数である。

シンプレクティック多様体 X に対しては、その上のジェット束 $O_{J_\infty X}$ にはポアソン頂点代数としての代数構造が誘導される。無限小弧の端点をとる写像 π_∞ によって X の構造層 $\mathcal{O}_X$ はジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の部分代数と思える。構造層の切断 $a,\, b \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{J_\infty X}$ に対しては $a_{(n)} b = \delta_{n0}\{a, b\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と定義すると、それ以外の切断に対する $_{(n)}$ 積はポアソン頂点代数の公理から一意に定まる。このようにして $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ には標準的なポアソン頂点代数の構造が与えられる。([A])

4 頂点代数の超局所化

第 1 節で書いたとおり目標となるのはシンプレクティック多様体 X 上のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の変形量子化となる X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を考えることである。そこで最初に X が複素多様体 $\underline{X}$ の余接束 $T^*\underline{X}$ であるような場合、特にシンプレクティックベクトル空間 $X = T^*\mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{2d}$ の場合に標準的なポアソン頂点代数構造がどのように $T^*\mathbb{C}^d$ 上に局所化されるかを考えることにする。

まず $T^*\mathbb{C}^d$ 上のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}$ のポアソン頂点代数構造について見てみる。大域切断を考えると $T^*\mathbb{C}^d$ の標準的な座標 $\{x^i, y^i\}_{i=1,\ldots,d}$ に対して

$\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}\bigl[x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \;\big|\; {}^{i=1,\dots,d,}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\bigr]\mathbf{1}$ である。頂点代数の慣習に従って単に $x^i_{(-1)}\mathbf{1} = x^i$, $y^i_{(-1)}\mathbf{1} = y^i$ と書き、これらは $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d} \subset \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}$ の元と同一視する。するとこの上のポアソン頂点代数構造は $y^i_{(0)}x^j = \{y^i, x^j\} = \delta_{ij}$ から誘導されるので、具体的には $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ という交換関係を満たすものである。ポアソン頂点代数の定義から、任意の $a \in \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{(n)}$ は $_{(-1)}$ 積に関する導分作用素であるので、$_{(-1)}$ 積に関する積閉集合 $S \subset \mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ によって局所化された代数 $V[S^{-1}]$ 上には $a_{(n)}$ の作用が自然に拡張されることが従う ([AKM, Lemma 2.1.2.1])。

大域切断のなすポアソン頂点代数 $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ の変形量子化がいわゆる $\beta\gamma$ 系で与えられるのは明らかである。具体的には次の $\hbar$-進頂点代数を考える: $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 加群としては

$$\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}[[\hbar]]\bigl[\, x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \;\big|\; {}^{i=1,\dots,d,}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\,\bigr]\mathbf{1}$$

で与えられる。また頂点代数としての $_{(n)}$ 積は交換関係 $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \hbar\delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ から自然に定まるものとする。定義から、これは通常の $\{x^i, \partial^i\}_{i=1,\dots,d}$ を生成元とする $\beta\gamma$ 系に対して $x^i \mapsto x^i$, $\partial^i \mapsto \hbar y^i$ と代入して得られる代数構造と同じであるので、自然な $\hbar$-進頂点代数としての $\beta\gamma$ 系の類似である ([FBZ, Section 11.3]) 。また構成から明らかに $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d)/\hbar\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}(T^*\mathbb{C}^d)$ はポアソン頂点代数として $\mathcal{O}_{J_\infty T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ と同型である。

さらに $\beta\gamma$ 系 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ における $_{(n)}$ 積 $a_{(n)}b$ はいわゆるウィック公式 (Wick formula) が成立しているので、これは $a, b \in \mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d}(T^*\mathbb{C}^d)$ に関して双微分作用素になっている。従って a, b が $x^i_{(-m)}$, $y^i_{(-m)}$ を変数とする有理式の場合にもその双微分作用素を適用することによって $_{(n)}$ 積 $a_{(n)}b$ を定義することができる。この定義は完全にアルゴリズム的であって、実際に数式処理プログラムなどでウィック公式を双微分作用素の形に書き直すことで有理式を含んだ形の $_{(n)}$ 積を計算させることが可能である。このような $_{(n)}$ 積の拡張によって $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^d,\hbar}$ は $X = T^*\mathbb{C}^d$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層として構成でき、構成から自動的にポアソン頂点代数の層 $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d}$ の変形量子化を与える。([AKM, Section 2.2])

同様にシンプレクティック多様体 X が複素多様体 $\underline{X}$ の余接束 $X = T^*\underline{X}$ であり、さらに $\underline{X}$ 上に [GMS] で導入されたカイラル微分作用素の層が存在するならば、その $X = T^*\underline{X}$ 上への (超) 局所化 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\underline{X},\hbar}$ が $\hbar$-進頂点代数の層として構成できて、$\mathcal{O}_{J_\infty T^*\underline{X}}$ の変形量子化を与える。

5 ハミルトン簡約

ハミルトン簡約はシンプレクティック多様体とその上のリー群の作用から新しいシンプレクティック多様体を構成する方法である。本稿では中島箙多様体のような応用上重要なシンプレクティック多様体を念頭に次のようなハミルトン簡約を考える。

有限次元複素ベクトル空間 V を取り、リー群 G が線形表現として作用しているものとする。さらに G はいくつかの一般線形群の直積であるとする。リー群 G の作用は余接束 T^*V 上に自然に拡張されるが、同時に座標環 $\mathbb{C}[V]$ に誘導される G の表現はリー環 $\mathfrak{g} = LieG$ の表現写像 $\mu_D : \mathfrak{g} \longrightarrow Vect(V)$ を誘導する。ここで、$Vect(V)$ は V 上のベクトル場のなすリー環であるとする。この写像 μ_D の像は微分作用素であるので、μ_D は可換環の間の準同型 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ を誘導し、従ってその双対となる代数多様体の間の射 $\mu : T^*V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ が定義される。この射 μ をモーメント写像と言う。このような設定から T^*V のリー群 G の作用によるハミルトン簡約 $X_0 = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$ を考えることができ、自動的に $\mathbb{C}[T^*V]$ のポアソン構造は $\mathbb{C}[X_0] = \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$ のポアソン構造を誘導する。従って、X_0 はポアソン代数多様体である。ただし G の作用は自由でないので、T^*V はなめらかなシンプレクティック多様体であるが、X_0 は特異点を持つ。

そこで幾何学的不変式論を応用して X_0 の特異点解消を与えるシンプレクティック多様体を次のように構成する。リー群 G の表現に関する半安定点をとることによって T^*V のザリスキ開な部分集合 $\mathfrak{X}$ を取ることができ、$\mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}$ 上に G が自由に作用する。従って、$X = \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}/G$ はなめらかな多様体であって、構成から自動的にシンプレクティック多様体になる。

ハミルトン簡約 X の構造層もまた G の $\mathcal{O}_{T^*V}$ への作用を使って具体的に構成できる。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ の構造層は $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{O}_{T^*V}|_{\mathfrak{X}}$ であり、その上には同変 G 作用が存在する。上に挙げた準同型 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ を用いて、この同変 G 作用が誘導するリー環 $\mathfrak{g}$ の作用は $\{\mu^*(A), —\}$ $(A \in \mathfrak{g})$ と書くことができる。さらに X の構造層は次のように実現される:

$$\mathcal{O}_X = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\, \mu^*(\mathfrak{g})))^G.$$

ただしここで $p : \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X} \longrightarrow X$ は射影写像である。さらに上の式で μ^* の像を適当にひねることで X 上の任意の直線束 (可逆層) も同様に構成できることが幾何学的不変式論から容易に結論される。リー群 G の乗法的指標群 $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ は微分によってベクトル空間 $(\mathfrak{g}^*)^G$ の格子と同一視される。パラメタ $\lambda^* \in (\mathfrak{g}^*)^G$ が $\lambda^* \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ であるとき、

$$\mathcal{O}_X(\lambda^*) = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\, (\mu^* - \lambda^*)(\mathfrak{g})))^G$$

は X 上の直線束を定義する。さらに $\lambda^* \in (\mathfrak{g}^*)^G$ を不定元とみなして

$$\mathcal{O}_X^{tw} = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\lambda^*]/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\lambda^*]\ (\mu^* - \lambda^*)(\mathfrak{g})))^G$$

とすると、$\mathcal{O}_X^{tw}$ は X 上のベクトル束である。

6 $\frac{\infty}{2}$-簡約によるハミルトン簡約 X 上の頂点代数

前節でハミルトン簡約によってベクトル空間 V 上のリー群 G の線形表現からシンプレクティック多様体 X を構成したが、それと類似の方法によって X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を構成することができる。

ベクトル空間 V の余接束 T^*V 上には第 4 節の方法で $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ が構成される。構造層 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 上の同変 G 作用が準同型写像 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ とポアソン積によって記述されハミルトン簡約が構成されたように、X 上の $\hbar$-進頂点代数の構成には μ^* の $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ 上への持ち上げをどう構成するかがキーポイントとなる。そのような持ち上げをカイラルモーメント写像と呼ぶことにする。

本節では $G = (\mathbb{C}^*)^d$ は有限次元のトーラスとする。必要ならばベクトル空間 V の基底を取り替えることで座標環 $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^N]$ の基底 x^1, ..., x^N は G の作用に関するウェイトベクトルであって整数行列 $(\mu_{ij})_{\substack{i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,N}}$ によって x^j のウェイトが $(\mu_{1j}, \dots, \mu_{dj})$ で与えられていると仮定できる。双対基底をとると $\mathbb{C}[T^*V] = \mathbb{C}[x^1, \dots, x^N, y^1, \dots, y^N]$ であって、y^j はやはりウェイトベクトルでそのウェイトは $(-\mu_{1j}, \dots, -\mu_{dj})$ で与えられる。リー環 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^d$ の基底を $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}A^i$ と置くと準同型写像 $\mu^* : \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*V]$ は具体的には $\mu^*(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j y^j$ の形で書ける。

ジェット束の性質からリー群 G の T^*V への作用は自動的に無限次元リー群 $J_\infty G$ の $J_\infty T^*V$ 上の作用に持ち上がる。さらにその作用は頂点代数の準同型 $J_\infty \mu^* : V_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{O}_{J_\infty T^*V}$ を用いて記述することができる。ここで $V_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[A^i_{(-n)}|^{i=1,\dots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$ は可換な頂点代数であり、$J_\infty\mu^*$ は具体的に $(J_\infty\mu^*)(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j$ で与えられる。$J_\infty\mu^*$ はポアソン頂点代数としての準同型になる。カイラルモーメント写像 μ^{ch} は、この準同型 $J_\infty\mu^*$ の、$\mathcal{O}_{J_\infty T^*V}$ の量子化である $\hbar$-進頂点代数 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ への持ち上げになっていなければならない。素朴に考えると $\mu^{ch}(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j \in \mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}(T^*V)$ のような定義が考えられるが、量子化された場合には各項の間の $_{(1)}$ 積が $(x^j_{(-1)}y^j)_{(1)}(x^j_{(-1)}y^j) = -\hbar^2 \neq 0$ であるので、この定義は μ^{ch} が $V_0(\mathfrak{g})$ からの頂点代数の準同型にならず失敗する。そこで次のようなトリックを用いる。まず $\lambda^{1,*}$, ..., $\lambda^{d,*}$ という生成元を持つ $\hbar$-進ハイゼ

ンベルグ頂点代数 $V(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\lambda^{i,*})$ を導入する。この頂点代数はベクトル空間としては

$$V(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\lambda^{i,*}) = \mathbb{C}((\hbar))[\lambda^{i,*}_{(-n)} \mid {}^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}]$$

であり、それら間の $_{(n)}$ 積は $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\lambda^{p,*}_{(n)}\lambda^{q,*} = \delta_{n1}\hbar^2 \sum_{j=1}^N \mu_{pj}\mu_{qj}$ で与えられる頂点代数である ([FBZ, Section 5.4.1])。反安定部分集合 $\mathfrak{X}$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層を単純に $\mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}$ の制限によって $\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{T^*V,\hbar}|_{\mathfrak{X}}$ と定義する。さらに $\mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes V(\bigoplus_i \lambda^{i,*})$ を頂点代数のテンソル積とし、カイラルモーメント写像は

$$\mu^{ch} : V_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}(\mathfrak{X}), \qquad \mu^{ch}(A^i) = \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x^j_{(-1)} y^j - \lambda^{i,*}$$

と定義すると、これは頂点代数の準同型になる。

このカイラルモーメント写像 μ^{ch} を用いて $\hbar$-進頂点代数 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ から X 上の $\hbar$-進頂点代数の層を構成する。まずフェルミオン作用素 $\psi^{i,*}$, ψ^i $(i = 1, \ldots, d)$ を生成元とするクリフォード頂点 (超) 代数 (フェルミオン自由場頂点代数) を

$$Cl^\bullet = Cl^\bullet(\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}\psi^{i,*} \oplus \mathbb{C}\psi^i) = \bigwedge(\psi^{i,*}_{(-n)}|^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}) \otimes \bigwedge(\psi^{i}_{(-n)}|^{i=1,\ldots,d}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}})$$

とする。ここで右辺の $\bigwedge(a_i|i \in I)$ は a_i $(i \in I)$ が生成する外積代数である。この頂点 (超) 代数の $_{(n)}$ 積は生成元の間の反交換関係 $[\psi^i_{(m)}, \psi^{j,*}_{(n)}]_+ = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}$, $[\psi^i_{(m)}, \psi^j_{(n)}]_+ = [\psi^{i,*}_{(m)}, \psi^{j,*}_{(n)}]_+ = 0$ によって定まる。([FBZ, Section 5.3.1]) また $Cl^\bullet$ は $\deg \psi^{i,*}_{(-n)} = 1$, $\deg \psi^i_{(-n)} = -1$ により $\mathbb{Z}$ 上次数付けされた次数付き頂点代数となる。テンソル積頂点代数 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet} = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes Cl^\bullet$ もまたこの次数付けによって次数付き頂点 (超) 代数の構造を持つ。また $Q \in C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{X}) = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}(\mathfrak{X}) \otimes Cl^\bullet$ を $Q = \sum_{i=1}^d \hbar^{-1}\mu^{ch}(A^i) \otimes \psi^{i,*}$ と定義すると Q は次数 1 の元である。カイラルモーメント写像 μ^{ch} は可換頂点代数 $V_0(\mathfrak{g})$ からの頂点代数の準同型であるので任意の i, j および $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A^i)_{(n)}\mu^{ch}(A^j) = 0$ を満たす。この事実から頂点代数 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の作用素 $Q_{(0)}$ は $(Q_{(0)})^2 = 0$ を満たすことが従う。作用素 $Q_{(0)}$ は $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上の次数 $+1$ の作用素であるので、$(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ はコチェイン複体を構成する。この複体に付随する 0 次コホモロジー

$$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar} = H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

は X 上の $\hbar$-進頂点代数の層をなす。このようなコホモロジーによる構成を $\frac{\infty}{2}$-簡約 (semi-infinite reduction) という。

このように構成された X 上の $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X の構造層のジェット束 $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ の量子化ではないが、次の意味で X の普遍直線束 $\mathcal{O}^{tw}_X$ のジェット束の量子化とみなすことができる。

Proposition 6.1 リー群 G はトーラスでモーメント写像 $\mu : T^*V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ 上平坦であると仮定する。このとき上の構成によって得られる $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X 上の $\hbar$-進頂点代数の層であり、$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}/\hbar\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ はポアソン頂点代数の層として普遍直線束 $\mathcal{O}^{tw}_X$ のジェット束 $H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}/\hbar C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)} \bmod \hbar)$ に同型である。

またこの系として、$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ の C_2-ポアソン代数が $\mathcal{O}^{tw}_X$ に一致することも自動的に従う。

さらにここで構成した $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ は X 上の層であるため、適当な開集合 $U \simeq T^*\mathbb{C}^m \subset X$ における局所切断 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U)$ を考えることができるが、これは構成から $\beta\gamma$ 系とハイゼンベルグ頂点代数のテンソル積になる。従って、大域切断を局所座標で書き直すことにより、原理的には大域切断のなす頂点代数 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(X)$ の自由場表示が定義から自動的に得られることになる。実際に後で見るように $X = T^*\mathbb{P}^1$ の場合にはこの自由場表示は脇本加群と一致しているため、このような局所座標による表示は脇本加群の類似とみなせる。

上にあげた構成では G をトーラスであると仮定したが、G がいくつかの一般線形群の直積である場合にも同様の構成を考えることができる。定義に際してキーとなるのは量子化に際して非自明な $_{(1)}$ 積がでるのを避けるために、$\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に新しい作用素を加えてカイラルモーメント写像をレベル 0 の頂点代数の準同型と定義することである。ただし結果として現れる頂点代数の意味付けについて不明な部分が多いので、本稿では G がトーラスの場合に限定した。

7　基本的な例

非常に基本的な場合として簡単に計算できる $X = T^*\mathbb{P}^1$ の場合の構成を実際に計算してみることにしよう。

まず $X = T^*\mathbb{P}^1$ そのもののハミルトン簡約による構成だが、ここでは次のようなハミルトン簡約を考える。まず $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}x^1 \oplus \mathbb{C}x^2$ を 2 次元ベクトル空間とし、V 上の $G = \mathbb{C}^*$ の作用を $t.(x^1, x^2) = (tx^1, t^{-1}x^2)$ $(t \in \mathbb{C}^*)$ とする。(x^1, x^2) の双対座標を (y^1, y^2) とすると $(x^i, y^i)_{i=1,2}$ が T^*V の座標で、$t \in \mathbb{C}^*$ の作用は $t.(x^1, x^2, y^1, y^2) = (tx^1, t^{-1}x^2, t^{-1}y^1, ty^2)$ となる。第 5 節 で説明したようにモーメント写像 μ は G の V 上の作用から誘導される $\mathfrak{g} = LieG = \mathbb{C}A$ の表現 $\mu_D : \mathfrak{g} = \mathbb{C}A \longrightarrow D(V)$ で定ま

るが、双対写像 μ^* は具体的には $\mu^*(A) = x^1y^1 - x^2y^2$ と書ける。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ は (安定性条件のパラメタによって) 2 つの異なる候補があるが、ここでは $\mathfrak{X} = \{x^2 \neq 0 \text{ or } y^1 \neq 0\} \subset T^*V$ と取る。従ってハミルトン簡約 X は

$$X = \mu^{-1}(0) \cap \mathfrak{X}/G = \{(x^1, x^2, y^1, y^2) \mid x^1y^1 = x^2y^2, (x^2 \neq 0 \text{ or } y^1 \neq 0)\}/\mathbb{C}^*$$

と定義され、これは明らかに $T^*\mathbb{P}^1$ の斉次座標による実現に一致している。さらに部分集合 $\tilde{U}_1 = \{y^1 \neq 0\}$, $\tilde{U}_2 = \{x^2 \neq 0\} \subset \mathfrak{X}$ を取り、$U_i = \mu^{-1}(0) \cap \tilde{U}_i/G$ と定義する。すると $U_i \simeq \mathbb{C}^2$ であって局所座標 $(U_1; w = x^2/y^1, \partial_w = -y^1y^2)$, $(U_2; z = y^1/x^2, \partial_z = x^1x^2)$ は $X = T^*\mathbb{P}^1$ の標準的な非斉次座標を与えている。構成層の実現は

$$\mathcal{O}_X = (p_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(x^1y^1 - x^2y^2)))^{\mathbb{C}^*}$$

と書ける。

いよいよ $X = T^*\mathbb{P}^1$ 上に $\hbar$-進頂点代数の層を構成する。まず $T^*V = T^*\mathbb{C}^2$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層を与える $\hbar$-進 $\beta\gamma$ 系 $\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}$ はベクトル空間としては

$$\mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}(T^*\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}((\hbar))\big[x^i_{(-n)}, y^i_{(-n)} \;\big|\; {\textstyle{i=1,2 \atop n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}}\big]\mathbf{1}$$

である。これは交換関係 $[y^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = \delta_{m+n,-1}\delta_{ij}\hbar$, $[x^i_{(m)}, x^j_{(n)}] = [y^i_{(m)}, y^j_{(n)}] = 0$ で定義される $\hbar$-進頂点代数の構造を持つ。半安定部分集合 $\mathfrak{X}$ 上の層を $\mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} = \mathcal{D}^{ch}_{T^*\mathbb{C}^2,\hbar}|_{\mathfrak{X}}$ とする。リー群 $G = \mathbb{C}^*$ の作用に付随する $\frac{\infty}{2}$-簡約を構成するため、カイラルモーメント写像 μ^{ch} を次のように定義する:

$$\mu^{ch}: V_0(\mathbb{C}A) \longrightarrow \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{ch}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes V_{2\hbar^2}(\mathbb{C}((\hbar))\lambda^*),$$
$$\mu^{ch}(A) = x^1_{(-1)}y^1 - x^2_{(-1)}y^2 - \lambda^*.$$

ここで、$V_0(\mathbb{C}A) = \mathbb{C}[A_{(-n)}|n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}]$ は可換頂点代数であり、$V_{2\hbar^2}(\mathbb{C}\lambda^*) = \mathbb{C}((\hbar))[\lambda^*_{(-n)}|n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}]$ は ${}_{(n)}$-積が $\lambda^*_{(n)}\lambda^* = 2\hbar^2\delta_{n1}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で定まる $\hbar$-進ハイゼンベルグ頂点代数である。実際に計算すれば $(x^i_{(-1)}y^i)_{(n)}(x^j_{(-1)}y^j) = -\hbar^2\delta_{n1}\delta_{ij}$ なので、μ^{ch} は頂点代数の準同型である。

このカイラルモーメント写像 μ^{ch} により定義される $\frac{\infty}{2}$-簡約が具体的には次のように構成される。頂点代数

$$Cl^\bullet = Cl^\bullet(\mathbb{C}\psi^* \oplus \mathbb{C}\psi) = \bigwedge(\psi^*_{(-n)}, \psi_{(-n)} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})\mathbf{1}$$

は反交換関係 $[\psi^*_{(m)}, \psi_{(n)}]_+ = \delta_{m+n,-1}$, $[\psi^*_{(m)}, \psi^*_{(n)}]_+ = [\psi_{(m)}, \psi_{(n)}]_+ = 0$ から定まるフェルミオン作用素 $\psi^*_{(n)}$, $\psi_{(n)}$ で生成される頂点代数 (クリ

フォード頂点代数) である。この頂点代数は $\deg \psi^*_{(n)} = 1$, $\deg \psi_{(n)} = -1$ で $\mathbb{Z}$ 上次数付きの頂点代数となる。従って、頂点代数のテンソル積 $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet} = \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar} \otimes_{\mathbb{C}} Cl^\bullet$ もまた $\mathbb{Z}$ 上次数付きの頂点代数の構造を持つ。もちろんここで任意の $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に対して $a \otimes \mathbf{1} \in C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ は次数 0 の元とする。この頂点代数の次数 1 の元 $Q \in C^{\frac{\infty}{2}+1}$ を $Q = \hbar^{-1}\mu^{ch}(A) \otimes \psi^*$ と定義する。すると

$$\hbar Q_{(0)} = \cdots + \mu^{ch}(A)_{(1)} \otimes \psi^*_{(-2)} + \mu^{ch}(A)_{(0)} \otimes \psi^*_{(-1)} + \mu^{ch}(A)_{(-1)} \otimes \psi^*_{(0)} + \ldots \tag{1}$$

という無限和であるが、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A)_{(n)}\mu^{ch}(A) = 0$ と $\psi^*_{(n)}\psi^* = 0$ を使えば、$(Q_{(0)})^2 = 0$ が $C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ 上で成立する。従って $(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$ がコチェイン複体になり、その 0 次コホモロジーとして X 上の $\hbar$-進頂点代数の層

$$\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar} = H^0(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)})$$

が得られる。

実際にここで得られた $\hbar$-進頂点代数の層 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ がどのような元を含むか調べてみることにしよう。まず $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ に対して $a \otimes \mathbf{1} \in \mathbb{C}^{\frac{\infty}{2}+\bullet}$ がコサイクルになるためには (1) より任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mu^{ch}(A)_{(n)}a = 0$ であることが必要十分である。ここでより詳しく見ると、

$$\mu^{ch}(A)_{(0)} = x^1_{(-1)}y1_{(0)} + y^1_{(-1)}x^1_{(0)} - x^2_{(-1)}y^2_{(0)} - y^2_{(-1)}x^2_{(0)} + \ldots$$

であるので、$\mu^{ch}(A)_{(0)}a = 0$ は a が G-作用に関して不変であることと同値である。一方で $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ は

$$\begin{aligned}\mu^{ch}(A)_{(1)} = (x^1_{(-1)}y1_{(1)} + y^1_{(-1)}x^1_{(1)} - x^2_{(-1)}y^2_{(1)} - y^2_{(-1)}x^2_{(1)}) \\ + (x^1_{(0)}y^1_{(0)} - x^2_{(0)}y^2_{(0)} - \lambda^*_{(1)}) + \ldots\end{aligned}$$

という作用素であるので、$a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ は G-不変であるだけではコサイクル条件を満たさない。また上の $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ で最初の項 $(x^1_{(-1)}y^1_{(1)} + \cdots$ は $\hbar$ の次数を 1 上げ、2 番目の項 $(x^1_{(0)}y^1_{(0)} + \cdots$ は $\hbar$ の次数を 2 上げるためポアソン頂点代数のコチェイン複体 $(C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}/\hbar C^{\frac{\infty}{2}+\bullet}, Q_{(0)} \bmod \hbar)$ には 2 番目の項は現れないことになる。つまり $\mu^{ch}(A)_{(1)}$ の 2 番目の項こそがこのようなトーラス作用に関する頂点代数の $\frac{\infty}{2}$-簡約において固有の振る舞いを記述する項である。実際に $a \in \mathcal{D}^{ch,tw}_{\mathfrak{X},\hbar}$ として $a = x^1_{(-1)}x^2$, $y^1_{(-1)}y^2$ および $x^i_{(-1)}y^i$ $(i = 1, 2)$ という大域切断を取れば、これらはすべて G-不変であり従って $\mu^{ch}(A)_{(0)}a = 0$ である。また、$\mu^{ch}(A)_{(1)}a = 0 \pmod{\hbar^2}$ もこれらのすべての a に対して成立するが、一方で $\mu^{ch}(A)_{(1)}(x^i_{(-1)}y^i) = \pm\hbar^2 \neq 0$

であり、従って $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(X)$ は $x^i_{(-1)}y^i\otimes\mathbf{1}$ の形の大域切断を持たない。しかし、$a=2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*$ や $2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*$ とすれば $\mu^{ch}(A)_{(1)}a=0$ であって、$a\otimes\mathbf{1}$ がコサイクルであることが確認できる。さらに $(2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)-(2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*)=2\mu^{ch}(A)$ より $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}$ の中でこれら 2 つのコサイクルが同じ大域切断を定義する。ここで得られた大域切断は次のようにアフィン頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ を生成している。実際 $e=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$, $f=-y^1_{(-1)}y^2\otimes\mathbf{1}$, $h=(2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)\otimes\mathbf{1}=(2x^2_{(-1)}y^2+\lambda^*)\otimes\mathbf{1}$ とおくと、$\beta\gamma$ 系やハイゼンベルグ頂点代数に関する基本的な計算からアフィン頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ の定義関係式が確認できる。

局所座標による表示が脇本加群を与える証左として、局所切断 $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ を計算してみよう。局所座標 $z=y^1_{(-1)}(x^2)^{-1}\otimes\mathbf{1}$, $\partial_z=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$ は共に $Q_{(0)}z=Q_{(0)}\partial_z=0$ を満たしていて $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ の元を与えることが容易に確認できる。また $\lambda^*\otimes\mathbf{1}$ は $\mu^{ch}(A)_{(1)}\lambda^*\neq 0$ であるためコサイクルではないが、$\lambda^*_{U_2}=(\lambda^*-2\hbar x^2_{(-2)}(x^2)^{-1})\otimes\mathbf{1}$ は $\mathcal{D}^{ch,tw}_{X,\hbar}(U_2)$ の元を与える。上で具体的に構成した大域切断 $e=x^1_{(-1)}x^2\otimes\mathbf{1}$, $h=(2x^1_{(-1)}y^2-\lambda^*)\otimes\mathbf{1}$, $f=-y^1_{(-1)}y^2$ を U_2 上の局所座標 $(z,\partial_z,\lambda^*_{U_2})$ を用いて書き直すことにより、次のように自由場表示を得る:

$$
\begin{aligned}
e&=x^1_{(-1)}x^2=\partial_z,\\
h&=2x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*=2z_{(-1)}\partial_z-\lambda^*_{U_2},\\
f&=-y^1_{(-1)}y^2=-(x^2_{(-1)}y^2)_{(-1)}(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})+\hbar y^1_{(-1)}x^2_{(-2)}(x^2)^{-2}\\
&=-(x^1_{(-1)}y^1-\lambda^*)_{(-1)}(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})+\hbar(y^1_{(-1)}(x^2)^{-1})_{(-1)}(x^2_{(-2)}(x^2)^{-1})\\
&=-(\partial_z)_{(-1)}z_{(-1)}z+z_{(-1)}\lambda^*_{U_2}-\hbar z_{(-2)}\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

これはレベル -1 のアフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の脇本加群に一致している。

他のハミルトン簡約に関しても上と同様に具体的に計算が遂行できる場合が少なくない。例えば、$V=\mathbb{C}^3$ 上の適当な 2 次元トーラス $G=(\mathbb{C}^*)^2$ の作用を考えることでレベル $k=2$ の Bershadsky-Polyakov 代数 $\mathcal{W}^{(2)}_3$ を構成することができる。予想としては A 型サブレギュラー冪零軌道に付随する $\mathcal{W}$ 代数が同様の構成から得られる。

またこの構成で直接得られたのはレベル -1 のアフィン $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 頂点代数 $V_{-1}(\mathfrak{sl}_2)$ であるが、[C] がカイラル微分作用素 (CDO) に対して Courant algebroid を用いて構成したのと同様に層の貼り合わせの準同型とハイゼンベルグ頂点代数の $_{(n)}$ 積 $\lambda^*_{(n)}\lambda^*$ を同時に変形することによって、任意のレベル k のアフィン頂点代数 $V_k(\mathfrak{sl}_2)$ を $T^*\mathbb{P}^1$ 上の $\hbar$-進頂点代数の層として実現できる。

参考文献

[A] T. Arakawa: A remark on the C_2-finiteness condition for vertex algebras, Math. Z. **270** (2012), no. 1-2, 559-575.

[AKM] T. Arakawa, T. Kuwabara and F. Malikov, Localization of Affine W-algebras, Comm. Math. Phys. **335** (2015), no. 1, 143-182.

[C] D. Chebotarov, Classification of transitive vertex algebroids, Ph. D thesis, University Of Southern California, `arXiv:1010.3385 [math.QA]`.

[FBZ] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs **88**, American Mathematical Society, Providence, RI (2004)

[GMS] V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids, Invent. Math. **155** (2004), no. 3, 605-680.