

無 限 可 積 分 系

9月13日(日) 第IV会場

9:30~12:00

	(分)	頁
1 <u>大久保勇輔</u> (名大多元数理) Ding-Iohara 代数のレベル 2 表現の結晶化	(15)	1
粟田英資 (名大多元数理)		
藤野弘基 (名大多元数理)		
2 <u>松本拓也</u> 中心拡大された超リー代数 $\mathfrak{sl}(2 2)$ に付随する量子アファイン代数		
(名大高等研究院・名大多元数理) について	(15)	3
3 <u>高崎金久</u> (近畿大理工) Closed vertex 上の位相的弦理論の開弦振幅	(15)	5
中津了勇 (摂南大理工)		
4 <u>国場敦夫</u> (東大総合文化) 多状態 TASEP と四面体方程式	(15)	7
丸山翔也 (東大総合文化)		
尾角正人 (阪市大理)		
5 <u>中西知樹</u> (名大多元数理) Quantum generalized cluster algebras and quantum dilogarithms		
of higher degrees	(15)	9
6 <u>池田岳</u> (岡山理大理) シンプレクティック・グラスマン多様体の同変 Schubert 類に対す		
松村朝雄 (岡山理大理) る Pfaffian 和公式	(15)	11
7 <u>池田岳</u> (岡山理大理) シンプレクティック・ベクトル束の K 理論的退化跡	(15)	13
松村朝雄 (岡山理大理)		
成瀬弘 (山梨大教育)		
T. Hudson (浦項工大)		

14:15~15:15 特別講演

<u>桑原敏郎</u> (Higher School of Economics)	シンプレクティック多様体上のジェット束の変形量子化と頂点代数 ...	15
--	------------------------------------	----

9月14日(月) 第IV会場

9:30~12:00

8 <u>佐々木良勝</u> (広島大理)	Weierstrass' elliptic function solution to the autonomous limit of the string equation	(10) 29
9 <u>長尾秀人</u> (明石工高専)	パデ近似の q 差分パルヴェ方程式への応用	(15) 31
10 <u>増田哲</u> (青学大理工)	$D_7^{(1)}$ 型 q -笹野系の有理解の構成	(15) 33
11 <u>伊藤雅彦</u> (東京電機大未来)	Sears-Slater の変換公式の一般化と BC_n 型楕円 Lagrange 補間函	
野海正俊 (神戸大理)	数	(15) 35
12 <u>辻本諭</u> (京大情報)	Exceptional Bannai-Ito polynomials	(15) 37
13 <u>上野喜三雄</u> (早大理工)	2重対数関数とモノドロミー保存変形	(15) 39
14 <u>井上玲</u> (千葉大理)	Toric network and generalized discrete Toda lattice	(15) 41
T. Lam (Univ. of Michigan)		
P. Pylyavskyy (Univ. of Minnesota)		

- 15 岩尾 慎介 (青学大理工) Kostant–Toda 階層, Totally nonnegative matrix と特異曲線 … (15) 43
 西山 享 (青学大理工)
 小川 竜 (東海大理)

13:00~14:00 特別講演

- 黒木 玄 (東北大理工) パンルヴェ系の τ 関数の正準量子化について …………… 45

Weierstrass' Elliptic Function Solution to the Autonomous Limit of the String Equation

Yoshikatsu SASAKI (Hiroshima University)*

Abstract

In this talk, we study the string equation of type $(2, 2n+1)$, which is derived from 2D gravity theory or the string theory. We consider the equation as a $2n$ -th order analogue of the first Painlevé equation, take the autonomous limit, and find its solutions concretely expressed by the Weierstrass' elliptic function $\wp(z)$.

1. Introduction

1.1. The string equation

Put $D = d/dz$. Consider the commutator equation of ordinary differential operators

$$[Q, P] = 1, \quad Q := D^q + \sum_{k=2}^q w_k D^{q-k}, \quad P := D^p + \sum_{k=2}^p v_k D^{p-k}. \quad (S_{(q,p)})$$

We call it the string equation (or Douglas equation) of type (q, p) , which appears in the string theory or the theory of quantum gravity in 2-dimensions [3, 4, 7, 10, 11, 1, 9, 13].

In the followings, we set $q = 2$, $p = 2n + 1$. In the case where $q = 2, p = 3$, the string equation is written as an ODE satisfied by the potential w of Sturm-Liouville operator $Q = D^2 + w$, and then, by a fractional linear transformation, it is reduced to the first Painlevé equation $u'' = 6u^2 + z$. See [6, 5, 2].

1.2. The First Painlevé Hierarchy

Let D or $'$ stand for the differentiation with respect to z , and D^{-1} stand for the inverse operator of D . Consider the serial equations

$$d_{n+1}[w]/4 + z = 0 \quad ({}_{2n}P_1)$$

for $n \in \mathbb{N}$, where $d_{n+1}[w]$ is an expression of a given meromorphic function w defined by $d_0[w] = 1$ and $Dd_{n+1}[w] = DG_w d_n[w]$ with $G_w := D^2 - 4D^{-1}(2wD + w')$. The equations are derived from the singular manifold equation for the KdV hierarchy, and we call them *the first Painlevé hierarchy* [14, 8, 5].

As proved in [13], the string equation of type $(2, 2n+1)$ is equivalent to $({}_{2n}P_1)$. So, in this talk, we also call ${}_{2n}P_1$ the string equation of type $(2, 2n+1)$.

Note that S. Shimomura [12] proved that each $d_n[w]$ is a differential polynomial of $2n$ -th order, i.e. each ${}_{2n}P_1$ is an ordinary differential equation of $2n$ -th order; and that, at each pole $z = z_0$, each meromorphic solution to ${}_{2n}P_1$ has the form $w(z) = \frac{k(k+1)/2}{(z-z_0)^2} + O(1)$ for some positive integer $k = k(z_0) \in \{1, \dots, n\}$.

2000 Mathematics Subject Classification: 74K05, 34M55, 33E05.

Keywords: String equation, Painlevé hierarchy, Elliptic functions.

* e-mail: sasakiyo@hiroshima-u.ac.jp

1.3. The Autonomous Limit

The first Painlevé equation has the autonomous limit [2]. Replacing (w, z) by $(\epsilon^{-2}w, \epsilon z)$, and taking limit $\epsilon \rightarrow 0$, we obtain $w'' = 6w^2 + b$ which is satisfied by the Weierstrass' elliptic function, i.e. $\wp(z) := z^{-2} + \sum_{m,n}' \{(z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\}$, where $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ for some $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfying $\omega_3/\omega_1 \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \text{Im } z > 0\}$. Here $\sum_{m,n}'$ means the sum for $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ except for $(0, 0)$. It is well-known that $\wp(z)$ is doubly periodic meromorphic function with two periods $2\omega_1, 2\omega_3$. $\wp(z)$ satisfies the differential equation $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ and then $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - g_2/2$, where $60g_2 := \sum_{m,n}' \Omega_{m,n}^{-4}$, $140g_3 := \sum_{m,n}' \Omega_{m,n}^{-6}$.

2. Results

A result similar to the above and one in [YS: *Adv. Pure Math.* **4** (2014), 494–497.] is valid for $n \in \mathbb{N}$. That is

Theorem 1. *The autonomous limit of the string equation of type $(2, 2n + 1)$ is given by*

$$d_n[w]/4 + b = 0, \quad b \in \mathbb{C}. \quad ({}_{2n}ALP_1)$$

For this equation equivalent to a Hamiltonian system with degree of freedom 2, we give a first integral.

Theorem 2. *The auxiliary differential polynomial $c_n[w]$ defined in [YS: *Proc. Japan Acad.* **91** (2015), 7–8.] by $c_n[w]$ by $Dc_n[w] = wDd_n[w]$ is a first integral of $({}_{2n}ALP_1)$.*

The following theorem is an extension of the result for $n = 2$ in [YS: *Adv. Pure Math.* **4** (2014), 494–497; *ibid.*, 680–681.]

Theorem 3. *For each integer k satisfying $1 \leq k \leq n$,*

$$w(z) = \frac{k(k+1)}{2} \wp(z)$$

is a solution to $({}_{2n}ALP_1)$ with suitable parameters.

References

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 25–26.
- [2] R. Conte and M. Mussette, *The Painlevé handbook*, Springer, Dordrecht, 2008.
- [3] M. R. Douglas, *Phys. Lett. B*, **238**(1990), 176–180.
- [4] M. Fukuma, H. Kawai and R. Nakayama, *Comm. Math. Phys.*, **143**(1991), 371–403.
- [5] V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- [6] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, New York, 1956.
- [7] V. Kac and A. Schwarz, *Phys. Lett. B*, **257**(1991), 329–334.
- [8] N. A. Kudryashov, *Phys. Lett. A*, **224** (1997), 353–360.
- [9] P. van Moerbeke, *Lectures on integrable systems*, World Sci. Publishing, Singapore; River Edge, NJ, 1994, pp.163–267.
- [10] G. Moore, *Comm. Math. Phys.*, **133**(1990), 261–304; *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **102**(1990), 255–285.
- [11] A. Schwarz, *Mod. Phys. Lett. A*, **29**(1991), 2713–2725.
- [12] S. Shimomura, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **40**(2004), 471–485.
- [13] K. Takasaki, *SIGMA*, **3**(2007), 42–116.
- [14] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, **25** (1984), 13–24.

パデ近似の q 差分パンルヴェ方程式への応用

長尾秀人 (明石高専一般科目)

パデ近似と呼ばれる有理関数による近似を応用して, q 差分パンルヴェ方程式 $E_6^{(1)}$ 型から $(A_2 + A_1)^{(1)}$ 型までに対する, 時間発展方程式, ラックス形式および超幾何型特殊解を構成した. 本講演では, その結果について報告する.

1 パデ法

パデ法とは, 適当な特殊多項式の母関数 $Y(x)$ を与え, パデ近似 (補間) の問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \pmod{x^{m+n+1}} \quad (1.1)$$

を設定して, $\{P_m(x), Y(x)Q_n(x)\}$ を解に持つ 2 種類の 3 項間差分 (微分) 方程式

$$\begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \bar{y}(x) \\ u(x) & u(qx) & \bar{u}(x) \\ v(x) & v(qx) & \bar{v}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y(x) & \bar{y}(x) & \bar{y}(x/q) \\ u(x) & \bar{u}(x) & \bar{u}(x/q) \\ v(x) & \bar{v}(x) & \bar{v}(x/q) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2)$$

(ここで, $u(x) = P_m(x)$, $v(x) = Y(x)Q_n(x)$ とし, 時間発展 $\bar{\circ} = T(\circ)$ とする.) を構成して, パンルヴェ方程式, ラックス形式, 特殊解の 3 つを同時に求める方法である. パデ法は, Yamada によるパデ近似の方法として, パンルヴェ方程式 VI, V, IV 型に適用された [4]. 離散パンルヴェ方程式に対するパデ法の先行結果として,

	$e-E_8^{(1)}$	$q-E_8^{(1)}$	$q-E_7^{(1)}$	$q-E_6^{(1)}$	$q-D_5^{(1)}$	$q-A_4^{(1)}$	$q-(A_2 + A_1)^{(1)}$
	[3]	[6]	[2]	[1][2]	[1] [2]	[2]	[2]
grid	elliptic	q -quadric	q	q	differential, q	q	q

(1.3)

が知られている. ここで, $q-D_5^{(1)}$ 型は q 差分と微分の両方の grid が適用されている点は興味深い. さらに, 本講演では, $q-E_6^{(1)}$ 型から $q-(A_2 + A_1)^{(1)}$ まで両方の grid が適用ができることを報告する.

2 $q-E_6^{(1)}$ の場合

- 母関数 $Y(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - a_1 x q^i)(1 - a_2 x q^i)(1 - a_3 x q^i)}{(1 - b_1 x q^i)(1 - b_2 x q^i)(1 - b_3 x q^i)}$ (拘束条件 $\frac{a_1 a_2 a_3 q^m}{b_1 b_2 b_3 q^n} = 1$) を与え, 時間発展方向 (微分の差分版) $T : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし, パデ近似の問題を設定する.

- $y(x) = \{P_m(x), Y(x)Q_n(x)\}$ を解に持つ 2 種類の線形差分方程式 (1.2) を計算すると,

$$\begin{aligned}
L_2(x) : C_0(1 - xf)\bar{y}(x) - (1 - a_2x)(1 - a_3x)y(qx) \\
+ \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - b_1x)(1 - x/g)y(x) = 0, \\
L_3(x) : C_1(1 - x\bar{f}/q)y(x) + \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - a_1x)(1 - x/qg)\bar{y}(x) \\
- q^{m+n+1}(1 - b_2x/q)(1 - b_3x/q)\bar{y}(x/q) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

が構成される. ここで, C_0, C_1, f, g は x に依存しない変数である.

- (2.1) の両立条件を考えると, 2 変数 f, g の連立型 1 階非線形差分方程式 (1 変数 2 階非線形差分方程式)

$$\begin{aligned}
(fg - 1)(\underline{fg} - 1) &= \frac{b_1^2}{a_2^2 a_3^2 q^{m-n}} \frac{(f - a_2)(f - a_3)(f - b_2)(f - b_3)}{(f - a_1)(f - b_1)}, \\
(fg - 1)(\bar{fg} - 1) &= qa_1 b_1 \frac{(g - 1/a_2)(g - 1/a_3)(g - 1/b_2)(g - 1/b_3)}{(g - b_1/a_2 a_3 q^m)(g - b_1 q^{n+1}/a_2 a_3)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

が得られる. これは q - $E_6^{(1)}$ 型パウルヴェ方程式である.

- (2.1), (2.2) から $y(x/q), y(x), y(qx)$ の 3 項間差分方程式 $L_1(x)$ が得られ, ラックス形式 $L_1(x), L_2(x)$ が構成される.
- $Y(x)$ は q -ヤコビ多項式の母関数であり, パデ近似の問題 (1.1) を満たす $P_m(x), Q_n(x)$ の具体形は, ヤコビ-トゥールーディ公式によるシューア関数つまり τ 関数により得られる. 最終的に, (2.2) の特殊解 f, g は, q -ヤコビ多項式を要素とする行列式として構成される.

参考文献

- [1] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q -Painlevé Equation of Type $E_6^{(1)}$ by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.
- [2] Nagao H., *The Padé interpolation method applied to q -Painlevé equations*, Lett. Math. Phys., Volume **105**, Issue 4 (2015), 503–521.
- [3] Noumi M., Tsujimoto S., Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.
- [4] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.
- [5] Yamada Y., *Lax formalism for q -Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type $E_n^{(1)}$* , IMRN 2011, **17** (2011), 3823–3838.
- [6] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B47** (2014), 087–095.

$D_7^{(1)}$ 型 q -笹野系の有理解の構成

増田 哲 (青山学院大学 理工学部)*

高階 Painlevé 型微分方程式に関する研究は、近年著しく進展しており、特に 4 階の方程式については分類や退化図式が明らかにされている [5, 2]. それらの q -類似については、梶原 - 野海 - 山田系 [3] をはじめとして、無限次元可積分系からの簡約や Weyl 群対称性あるいはクラスター代数などの観点から具体例が構成されている [6, 4, 1]. 本講演では、 $D_7^{(1)}$ 型 q -笹野系 [4] に注目し、その有理解の構成について述べる.

詳細は省くが、 $D_7^{(1)}$ 型 q -笹野系のある種の有理解を考えると、それに付随して、「多項式」族 $U_{l,m} = U_{l,m}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5; p)$ ($l, m \in \mathbb{Z}$) が現れる. これらは、漸化式

$$\begin{aligned} & -\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_- \langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_- \langle \varepsilon_3 / \varepsilon_4 \rangle_- U_{l+1,m}^{[0,0,0,0,0]} U_{l-1,m}^{[0,0,0,0,-2]} \\ & = \langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_- p^{-l} \varepsilon_5^{-1} \\ & \quad \times \left[\left(\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_3^2 \rangle_+ \right) \left(\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4^2 \rangle_+ \right) U_{l,m}^{[-1,-1,1,-1,-1]} U_{l,m}^{[1,1,-1,1,-1]} \right. \\ & \quad \left. - \left(\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3^2 \rangle_+ \right) \left(\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_4^2 \rangle_+ \right) U_{l,m}^{[1,1,1,-1,-1]} U_{l,m}^{[-1,-1,-1,1,-1]} \right] \\ & - \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_- p^l \varepsilon_5 \\ & \quad \times \left[\left(\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_3^2 / \varepsilon_2 \rangle_+ \right) \left(\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_2 \varepsilon_4^2 / \varepsilon_1 \rangle_+ \right) U_{l,m}^{[1,-1,1,-1,-1]} U_{l,m}^{[-1,1,-1,1,-1]} \right. \\ & \quad \left. - \left(\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_2 \varepsilon_3^2 / \varepsilon_1 \rangle_+ \right) \left(\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle_+ + \langle \varepsilon_1 \varepsilon_4^2 / \varepsilon_2 \rangle_+ \right) U_{l,m}^{[-1,1,1,-1,-1]} U_{l,m}^{[1,-1,-1,1,-1]} \right] \end{aligned}$$

(m 方向についても同様の漸化式が成り立つ) および初期条件 $U_{-1,-1} = U_{-1,0} = U_{0,-1} = U_{0,0} = 1$ で生成される. ここで、 $\langle x \rangle_{\pm} = x \pm x^{-1}$ および $U_{l,m}^{[i_1, i_2, \dots, i_5]} = U_{l,m}(p^{i_1/2} \varepsilon_1, p^{i_2/2} \varepsilon_2, \dots, p^{i_5/2} \varepsilon_5; p)$ と記した.

観察 上の漸化式からは直ちに明らかでないが、具体例をいくつか計算すると、 $U_{l,m} \in \mathbb{Z}[\varepsilon_1^{\pm 1}, \varepsilon_2^{\pm 1}, \dots, \varepsilon_5^{\pm 1}, p^{\pm 1}]$ で、かつ係数はすべて正である. また、 $f(\varepsilon; p) = \sum_k n_k p^{d^{(k)}} \varepsilon_1^{d_1^{(k)}} \varepsilon_2^{d_2^{(k)}} \cdots \varepsilon_5^{d_5^{(k)}} \in \mathbb{Z}[\varepsilon_1^{\pm 1}, \varepsilon_2^{\pm 1}, \dots, \varepsilon_5^{\pm 1}, p^{\pm 1}]$ に対し、次数を $\deg f(\varepsilon; p) := \max_k \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_5^{(k)}\}$ と定めると、 $\deg U_{l,m} = \binom{l+1}{2} + \binom{m+1}{2}$ であり、 $U_{l,m}(1, 1, 1, 1, 1; 1) = 2^{4 \times \deg U_{l,m}}$ であることも観察される.

命題 「多項式」 $U_{l,m} = U_{l,m}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5; p)$ は、アフィン Weyl 群 $W(D_5^{(1)}) = \langle w_0, w_1, \dots, w_5 \rangle$ の作用で不変である. ここで、 $W(D_5^{(1)})$ の ε_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) への

キーワード：高階 q -Painlevé 系, アフィン Weyl 群, 特殊多項式

* e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

作用は,

$$\begin{aligned} w_0 : \varepsilon_1 &\mapsto \frac{1}{\varepsilon_2}, & \varepsilon_2 &\mapsto \frac{1}{\varepsilon_1}, \\ w_i : \varepsilon_i &\mapsto \varepsilon_{i+1}, & \varepsilon_{i+1} &\mapsto \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, 4), \\ w_5 : \varepsilon_4 &\mapsto \frac{1}{\varepsilon_5}, & \varepsilon_5 &\mapsto \frac{1}{\varepsilon_4} \end{aligned}$$

で与えられる (p への作用は自明)。

この「多項式」族 $U_{l,m} = U_{l,m}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5; p)$ ($l, m \in \mathbb{Z}$) の明示公式を構成することがひとつの目標であるが, (講演申込の時点で) まだできていない。具体例は以下の通り。

$$\begin{aligned} U_{1,0}(\varepsilon; p) &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 = +1} \varepsilon_1^{\varepsilon_1} \varepsilon_2^{\varepsilon_2} \varepsilon_3^{\varepsilon_3} \varepsilon_4^{\varepsilon_4} \varepsilon_5^{\varepsilon_5} =: (1, 1, 1, 1, 1), \\ U_{0,1}(\varepsilon; p) &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 = -1} \varepsilon_1^{\varepsilon_1} \varepsilon_2^{\varepsilon_2} \varepsilon_3^{\varepsilon_3} \varepsilon_4^{\varepsilon_4} \varepsilon_5^{\varepsilon_5} = (1, 1, 1, 1, -1), \\ U_{2,0}(\varepsilon; p) &= (p^{-4} + p^4) [(3, 1, 1, 1, 1) + 4(1, 1, 1, 1, -1)] \\ &\quad + (p^{-2} + p^2) [(3, 3, 3, 1, 1) + 2(3, 3, 1, 1, -1) \\ &\quad \quad \quad + 6(3, 1, 1, 1, 1) + 16(1, 1, 1, 1, -1)] \\ &\quad + [(3, 3, 3, 3, 3) + (3, 3, 3, 1, 1) + 2(3, 3, 1, 1, -1) \\ &\quad \quad \quad + 7(3, 1, 1, 1, 1) + 20(1, 1, 1, 1, -1)], \\ U_{1,1}(\varepsilon; p) &= (p^{-1} + p)^4 + (p^{-1} + p)^2 (2, 2, 0, 0, 0) + (2, 2, 2, 2, 0). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] A. N. W. Hone and R. Inoue, Discrete Painlevé equations from Y-systems, J. Phys. A 47 (2014) 474007, 26 pp.
- [2] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations, preprint.
- [3] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy, Lett. Math. Phys. **62** (2002) 259–268.
- [4] T. Masuda, A q -analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type D , to appear in Funkcial. Ekvac.
- [5] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, preprint.
- [6] T. Suzuki, A q -analogue of the Drinfel'd-Sokolov hierarchy of type A and q -Painlevé system, preprint.

Sears–Slater の変換公式の一般化と BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部)

野海 正俊 (神戸大学・理)

底 $q \in \mathbb{C}^*$ ($|q| < 1$) に関して記号 $(u)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i u)$ を用いる. $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\varphi = \varphi(z) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$ に対して, $\langle \varphi, z \rangle$ を次のように定義する.

$$\langle \varphi, z \rangle = \int_0^{z_\infty} \varphi(w) \Phi(w) \Delta(w) \frac{d_q w_1}{w_1} \wedge \dots \wedge \frac{d_q w_n}{w_n} = (1-q)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varphi(z q^\nu) \Phi(z q^\nu) \Delta(z q^\nu).$$

ただし $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して $z q^\nu = (z_1 q^{\nu_1}, \dots, z_n q^{\nu_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n$ とする. ここで

$$\Phi(z) = \prod_{i=1}^n \prod_{m=1}^{2s+2} z_i^{\frac{1}{2} - \alpha_m} \frac{(q a_m^{-1} z_i)_\infty}{(a_m z_i)_\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq n} z_j^{1-2\tau} \frac{(q t^{-1} z_j / z_k)_\infty (q t^{-1} z_j z_k)_\infty}{(t z_j / z_k)_\infty (t z_j z_k)_\infty},$$

$$\Delta(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - z_i^2}{z_i} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(1 - z_j / z_k)(1 - z_j z_k)}{z_j}$$

とする. ただし $q^{\alpha_m} = a_m$, $q^\tau = t$ である. 和 $\langle \varphi, z \rangle$ が収束するとき, $\langle \varphi, z \rangle$ を **BC_n 型 Jackson 積分** と呼ぶ. $\theta(u) = (u)_\infty (q u^{-1})_\infty$ とするとき,

$$\langle \langle \varphi, z \rangle \rangle = \frac{\langle \varphi, z \rangle}{\Theta(z)}, \quad \Theta(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i^s \theta(z_i^2)}{\prod_{m=1}^{2s+2} z_i^{\alpha_m} \theta(a_m z_i)} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\theta(z_j / z_k) \theta(z_j z_k)}{z_j^{2\tau} \theta(t z_j / z_k) \theta(t z_j z_k)}$$

とおき, $\langle \langle \varphi, z \rangle \rangle$ を BC_n 型 Jackson 積分の **正則化** と呼ぶ.

$$Z = Z_{s,n} = \{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) \in \mathbb{N}^s; \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = n \}$$

とおくとき $|Z_{s,n}| = \binom{n+s-1}{n}$ である. $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ と $\mu \in Z_{s,n}$ に対して

$$x_\mu = \underbrace{(x_1, x_1 t, \dots, x_1 t^{\mu_1 - 1})}_{\mu_1} \underbrace{(x_2, x_2 t, \dots, x_2 t^{\mu_2 - 1}, \dots, x_s, x_s t, \dots, x_s t^{\mu_s - 1})}_{\mu_s} \in (\mathbb{C}^*)^n \quad (1)$$

とする. Jackson 積分表示の差分 de Rham 理論により, $\langle \langle \varphi, z \rangle \rangle$ はランク $\binom{n+s-1}{n}$ の q -差分方程式を満たし, その方程式は z によらないことがわかっている [1]. $\langle \langle \varphi, x_\mu \rangle \rangle$ ($\mu \in Z_{s,n}$) は解空間の基底をなし, $\langle \langle \varphi, z \rangle \rangle$ をその一次結合で書くことを **接続公式** と呼ぶ.

定理 (接続公式). $\varphi(z)$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則函数で, C_n 型 Weyl 群の作用で不変ならば,

$$\langle \langle \varphi, z \rangle \rangle = \sum_{\lambda \in Z_{s,n}} \langle \langle \varphi, x_\lambda \rangle \rangle E_\lambda(x; z) \quad (2)$$

が成立. ここで, 接続係数 $E_\lambda(x; z)$ は具体的に次のように与えられる.

$$E_\lambda(x; z) = \sum_{\substack{K_1 \sqcup \dots \sqcup K_s \\ = \{1, 2, \dots, n\}}} \prod_{i=1}^s \prod_{k \in K_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} \frac{\theta(x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}} z_k) \theta(x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}} z_k^{-1})}{\theta(x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}} x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}}) \theta(x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}} x_i^{-1} t^{-\lambda_i^{(k-1)}})}. \quad (3)$$

ただし $\lambda_i^{(k)} = |K_i \cap \{1, 2, \dots, k\}|$ で, 和は $|K_i| = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) を満たすような添字集合の分割 $K_1 \sqcup \dots \sqcup K_s = \{1, 2, \dots, n\}$ の全体に亘る.

接続公式 (2) は Sears–Slater の very-well-poised ${}_2r\psi_{2r}$ 変換公式の一般化になっている. また (3) で表される函数 $E_\lambda(x; z)$ を **BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数** と呼ぶことにする.

本研究は科研費 [課題番号: (C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである.

例 ($n = 1$ の場合). $Z_{s,1} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s\}$ である. ただし $\epsilon_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

このとき $E_{\epsilon_i}(x; z) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} \frac{\theta(x_j z) \theta(x_j / z)}{\theta(x_i x_j) \theta(x_j / x_i)}$ となり, 特に $\varphi \equiv 1$ のとき接続公式 (2) は

Sears–Slater の very-well-poised ${}_2r\psi_{2r}$ 超幾何級数の変換公式と一致する [5].

例 ($s = 2$ の場合). $Z_{2,n} = \{(r, n-r); r = 0, 1, \dots, n\}$ である. このとき,

$$E_{(r,n-r)}(x_1, x_2; z) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-r} \leq n}} \prod_{k=1}^r \frac{\theta(x_2 t^{i_k - k} z_{i_k}) \theta(x_2 t^{i_k - k} z_{i_k}^{-1})}{\theta(x_2 t^{i_k - k} x_1 t^{k-1}) \theta(x_2 t^{i_k - k} x_1^{-1} t^{-(k-1)})} \\ \times \prod_{l=1}^{n-r} \frac{\theta(x_1 t^{j_l - l} z_{j_l}) \theta(x_1 t^{j_l - l} z_{j_l}^{-1})}{\theta(x_1 t^{j_l - l} x_2 t^{l-1}) \theta(x_1 t^{j_l - l} x_2^{-1} t^{-(l-1)})}.$$

ここで, 和は添字集合の分割 $\{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-r}\} = \{1, \dots, n\}$ の全体を亘る. 文献 [2,3] において, BC_n 型楕円 Selberg 積分が楕円ガンマ関数の積で表示できる事実の別証明を与えたが, その際, 函数 $E_{(r,n-r)}(x_1, x_2; z)$ ($r = 0, 1, \dots, n$) は中心的な役割を果たした.

$(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則函数 $f(z)$ で, C_n 型 Weyl 群の作用で不変, かつ q シフトに対して擬周期性 $T_{q,z_i} f(z) = f(z)/(qz_i^2)^m$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすもの全体を $H_{m,n}$ と書くと, $H_{m,n}$ は $\binom{m+n}{n}$ 次元の \mathbb{C} 線型空間であって, (3) の $E_\lambda(x; z)$ ($\lambda \in Z_{s,n}$) は $H_{s-1,n}$ の基底となる. また $E_\lambda(x; z)$ は次の補間函数の性質で特徴付けが可能である. すなわち,

$$E_\lambda(x; x_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu \in Z_{s,n})$$

が成立する. ただし $x_\mu \in (\mathbb{C}^*)^n$ は (1) で定義された点とする.

さらに, [1] の結果と $E_\lambda(x; z)$ の性質を使うことにより次の定理が導かれる.

定理. $B = B_{s,n} = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n; s-1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$ とする. C_n 型の指標 $\chi_\lambda(z) = \det(z_i^{\lambda_j + n - j + 1} - z_i^{-\lambda_j - (n - j + 1)})_{1 \leq i, j \leq n} / \Delta(z)$ に対して,

$$\det \left(\langle \chi_\lambda, x_\mu \rangle \right)_{\substack{\lambda \in B \\ \mu \in Z}} \\ = \prod_{k=1}^n \left[\left((1-q) \frac{(q)_\infty (qt^{-(n-k+1)})_\infty}{(qt^{-1})_\infty} \right)^s \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2s+2} (qt^{-(n-k)} a_i^{-1} a_j^{-1})_\infty}{(qt^{-(n+k-2)} a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2s+2}^{-1})_\infty} \right]^{\binom{s+k-2}{k-1}} \\ \times \prod_{k=1}^n \left[\prod_{r=0}^{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq s} \frac{\theta(t^{2r-(n-k)} x_i x_j^{-1}) \theta(t^{n-k} x_i x_j)}{t^r x_i} \right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.$$

講演では BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数の構成法, および接続公式や上記定理の証明について触れる予定である. 詳細は文献 [4] を参照のこと.

参考文献

- [1] K. Amoto and M. Ito: A determinant formula for a holonomic q -difference system associated with Jackson integrals of type BC_n , Adv. Math. 221 (2009), 1069–1114.
- [2] M. Ito and M. Noumi: Derivation of a BC_n elliptic summation formula via the fundamental invariants, arXiv:1504.07108.
- [3] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the BC_n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, arXiv:1504.07317.
- [4] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n , preprint.
- [5] M. Ito and Y. Sanada: On the Sears–Slater basic hypergeometric transformations, Ramanujan J. 17 (2008), 245–257.

Exceptional Bannai-Ito polynomials

辻本 諭 (京都大学大学院情報学研究所)*

概 要

古典直交多項式として知られる Bannai-Ito 多項式の例外型拡張を与える.

1. Bannai-Ito 多項式

Bannai-Ito 多項式 [1, 2] は, シフト演算子 $e^{\partial x}$ と鏡映変換演算子 R

$$R[f(x)] = f(-x), \quad e^{\partial x}[f(x)] = f(x+1)$$

を用いて表される $\mathcal{H} = \alpha(x)(R-1) + \beta(x)(e^{\partial x}R-1)$ の固有値問題

$$\mathcal{H}\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

の多項式固有関数によって与えられる. ここで, $\alpha(x)$ および $\beta(x)$ は ρ_1, ρ_2, r_1, r_2 を定数とする x の有理関数

$$\alpha(x) = -(x-\rho_1)(x-\rho_2)/(2x), \quad \beta(x) = (x-r_1)(x-r_2)/(2x+1)$$

である. また, $\gamma(x) = \gamma(-x) = \gamma(-x-1)$ を満足する $\gamma(x)$ を用いて

$$\mathcal{H} = \alpha(x)(R-1) + (e^{\partial x}R+1)\beta(x) + \gamma(x)$$

と表せることを注意しておく. \mathcal{H} の多項式固有関数の中で, x の最高次係数を 1 に規格化した n 次多項式を $B_n(x) := B_n(x; \rho_1, \rho_2, r_1, r_2)$ で表し, n 次の Bannai-Ito 多項式と呼ぶ. この Bannai-Ito 多項式は, Askey-Wilson 多項式 (q -Racah 多項式) の適当な $q \rightarrow -1$ の極限によって導出することもでき, Bannai-Ito 格子 $x_s = 1/4 + (-1)^s(x_0 - 1/4 - s/2)$ ($s = 0, 1, 2, \dots, N$) 上の有限直交多項式の性質をもつ.

2. 例外型 Bannai-Ito 多項式

前節で導入した多項式列 $\{B_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ の例外型拡張 [3, 4, 5] について考察する. はじめに, \mathcal{H} の固有関数 $\phi(x)$ を seed 関数とする一般化 Darboux 変換について考える. ここで, \mathcal{H} は 1 階の差分演算子であり, 通常の Darboux 変換をそのまま適用することが困難なことに注意する. 一般化 Darboux 変換 \mathcal{F}_ϕ は, 関係式

$$\mathcal{F}_\phi \circ \mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi \circ \mathcal{F}_\phi$$

から導出することができ, $\chi(x) = (1-R)[\phi(x)]$, $\tilde{\chi}(x) = (1+e^{\partial x}R)[\beta(x)\phi(x)]$ を用いて

$$\mathcal{F}_\phi = \frac{1}{\chi(x)}(R-1) + \frac{1}{\tilde{\chi}(x)}(e^{\partial x}R+1)\beta(x),$$

本研究は科研費(課題番号:25400110)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 33C45, 33C47, 42C05

キーワード: exceptional orthogonal polynomials, Bannai-Ito polynomials

* 〒606-8051 京都府京都市左京区吉田本町 京都大学 大学院情報学研究所

e-mail: tujimoto@i.kyoto-u.ac.jp

と表される。ここで、

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{\tilde{\chi}(-x)}{\chi(x)}(R-1) + \left(e^{\partial_x} R + 1\right) \frac{\alpha(x)\beta(x)\chi(x)}{\tilde{\chi}(x)} + (\gamma(x) - \alpha(x) - \alpha(-x))$$

である。このとき、 \mathcal{H} の固有関数 $\psi(x)$ から得られる $\psi^{(1)}(x) = \mathcal{F}_\phi[\psi(x)]$ が

$$\mathcal{H}_\phi[\psi^{(1)}(x)] = \lambda \psi^{(1)}(x)$$

を満足することを示すことができる。

次に、 \mathcal{H} の準多項式固有関数列 $\{\xi(x)q_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ について考える。ここで、 $q_n(x)$ は x の n 次多項式であり、 $\xi(-x)/\xi(x)$ および $\xi(-x-1)/\xi(x)$ が有理関数となることを要請する。このとき、以下の8種類の $\xi(x)$ が得られる。

$$\begin{aligned} \xi_{\text{I}}(x) &= 1, \quad \xi_{\text{II}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)}, \quad \xi_{\text{III}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)}, \\ \xi_{\text{IV}}(x) &= \Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x), \quad \xi_{\text{V}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)}, \\ \xi_{\text{VI}}(x) &= \frac{\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)}, \quad \xi_{\text{VII}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_1+x)\Gamma(1+r_1-x)}{\Gamma(\rho_2+x)\Gamma(\rho_2-x)}, \quad \xi_{\text{VIII}}(x) = \frac{\Gamma(1+r_2+x)\Gamma(1+r_2-x)}{\Gamma(\rho_1+x)\Gamma(\rho_1-x)}. \end{aligned}$$

これにより、準多項式固有関数 $\phi_{\rho,j} = \xi_\rho q_{\rho,j}$, $\rho \in \{\text{I}, \dots, \text{VIII}\}$, $j \in \mathbb{N}$ が定まる。

準多項式列 $\{\phi_{\rho,j}\}$ の中から一般化Darboux変換のseed関数を選ぶことにより、例外型Bannai-Ito多項式 $B_n^{(\rho,j)}(x)$ が導出される。

$$B_n^{(\rho,j)}(x) = \mathcal{F}_{\phi_{\rho,j}}[B_n(x)] = \frac{r(x)}{\chi(x)\tilde{\chi}(x)} \left| \begin{array}{cc} \Delta_R[\phi_{\rho,j}(x)] & \Delta_R[B_n(x)] \\ \mathcal{A}[\beta\phi_{\rho,j}(x)] & \mathcal{A}[\beta B_n(x)] \end{array} \right|$$

ここで、 $\Delta_R = 1 - R$, $\mathcal{A} = 1 + e^{\partial_x} R$, $r(x) = \chi(x)\tilde{\chi}(x)\alpha_\rho(x)/\xi_\rho$.

参考文献

- [1] E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, (1984).
- [2] S. Tsujimoto, L. Vinet, A. Zhedanov, *Dunkl shift operators and Bannai-Ito polynomials*, Advances in Mathematics Vol. 229, no. 4 (2012), 2123–2158.
- [3] Gómez-Ullate, D., Kamran, N. and Milson, R., *An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), 352.
- [4] Sasaki, R., Tsujimoto, S. and Zhedanov, A., *Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations*, J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010), 315204.
- [5] Odake, S. and Sasaki, R., *Multi-indexed Wilson and Askey-Wilson polynomials*, J. Phys. A 46 (2013), 045204 (22pp).

2重対数関数とモノドロミー保存変形

上野 喜三雄 (早稲田大学 理工学術院)*

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,5}$ のKZ方程式を, その上の立方体座標 (z, w) で表示したものを2変数KZ方程式と呼び, これを2KZと表記する.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{Y_0}{1-z} + \frac{wZ_0}{1-zw} \right) L, \\ \frac{\partial L}{\partial w} = \left(\frac{X'_0}{w} + \frac{Y'_0}{1-w} + \frac{zZ_0}{1-zw} \right) L. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, 係数行列は定数行列であり, 可積分条件 $[X_0, X'_0] = [X_0, Y'_0] = [Y_0, X'_0] = 0$, $[Y_0, Y'_0 + Z_0] = [Y_0 + Y'_0, Z_0] = [X_0 - X'_0 - Y_0, Z_0] = 0$ をみたさねばならない. この方程式系を一般化して, z を主変数, w をパラメータとみなして, モノドロミー保存変形

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial z} = \left(\frac{X(w)}{z} + \frac{Y(w)}{1-z} + \frac{wZ(w)}{1-zw} \right) L, \\ \frac{\partial L}{\partial w} = \left(\frac{X'_0}{w} + \frac{Y'_0}{1-w} + \frac{zZ(w)}{1-zw} \right) L \end{cases} \quad (2)$$

を考える. X'_0, Y'_0 は定数行列, $X(w), Y(w), Z(w)$ は w の関数を成分とする行列とする. この方程式系を2MPDと表記する. この系の可積分条件を変形方程式と呼ぶ. それはつぎの非線型方程式系である.

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial w} = \left[\frac{X'_0}{w} + \frac{Y'_0}{1-w}, X \right], & \frac{\partial Y}{\partial w} = \left[\frac{X'_0}{w} + \frac{Y'_0 + Z}{1-w}, Y \right], \\ \frac{\partial Z}{\partial w} = \left[\frac{X'_0 - X + Y}{w} + \frac{Y'_0 + Y}{1-w}, Z \right]. \end{cases} \quad (3)$$

この方程式系の原点 $w = 0$ で正則な解

$$X(w) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j w^j, \quad Y(w) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j w^j, \quad Z(w) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j w^j \quad (4)$$

を考えよう.

命題 1 (1) 定数行列 X'_0, Y'_0 と, 初期行列 X_0, Y_0, Z_0 が条件

$$[X_0, X'_0] = [Y_0, X'_0] = [X_0 - X'_0 - Y_0, Z_0] = 0 \quad (5)$$

をみたし, すべての正整数 j に対して,

$$j\text{Id} - \text{ad}(X_0), \quad j\text{Id} + \text{ad}(X_0 - X'_0 - Y_0) \quad (6)$$

本研究は科研費(課題番号:25400054)の助成を受けたものである.

* e-mail: uenoki@waseda.jp

が可逆であるとする、初期値を X_0, Y_0, Z_0 とする変形方程式 (3) の $w = 0$ で正則な解 $X(w), Y(w), Z(w)$ が一意的存在する。

(2) 条件 (5), (6) の他に,

$$[X_0, Y_0'] = [Y_0, Y_0' + Z_0] = [Y_0 + Y_0', Z_0] = 0 \quad (7)$$

をみたす正則な解は定数解に限る。したがって、この場合の 2MPD(2) は 2KZ(1) を与える。

つぎに変形方程式 (3) の正則解で 2 重対数関数 $\text{Li}_2(w)$ を含むものを二つ例示する。 E_{ij} で 3 次の行列単位 ((i, j) 成分が 1 で他の成分は 0 である行列) を表す。

命題 2 (1) $X_0' = E_{31}, Y_0' = E_{23}$ とする。

$$X(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log(1-w)\text{Li}_2(w) & -\log(1-w) & -\log^2(1-w) \\ \text{Li}_2(w) & 1 & \log(1-w) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$Y(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log^2(1-w) + 1 & 0 & 0 \\ \log(1-w) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$Z(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\log(1-w)\text{Li}_2(w) + \log^2(1-w) + 1 & \log(1-w) & \log^2(1-w) \\ \text{Li}_2(w) - \log(1-w) & -1 & -\log(1-w) \end{pmatrix} \quad (10)$$

は変形方程式 (3) の解である。

(2) $X_0' = E_{31}, Y_0' = E_{12}$ とする。

$$X(w) = E_{32}, \quad (11)$$

$$Y(w) = \begin{pmatrix} -\log(1-w) & -\log^2(1-w) & 0 \\ 1 & \log(1-w) & 0 \\ \text{Li}_2(w) + \log(1-w) & \log(1-w)\text{Li}_2(w) + \log^2(1-w) & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$Z(w) = \begin{pmatrix} -\log(1-w) & -\log^2(1-w) & 0 \\ 1 & \log(1-w) & 0 \\ \text{Li}_2(w) - \log(1-w) & \log(1-w)\text{Li}_2(w) - \log^2(1-w) - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

は変形方程式 (3) の解である。

Toric network and generalized discrete Toda lattice

井上 玲 (千葉大理)

Thomas Lam (University of Michigan)

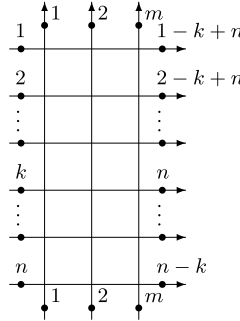
Pavlo Pylyavskyy (University of Minnesota)

本講演では、トーラス上のネットワークに作用するアフィンワイル群を用いて可換な双有理写像を定義し、スペクトル曲線とヤコビ多様体を用いてその初期値問題を考察する。

トーラス上のネットワークとアフィンワイル群.

(n, m, k) を正整数の3つ組, $N = \gcd(n, k)$ とする. 縦横それぞれ m 本, n 本の線を縦端はそのまま周期的につなぎ, 横端は k 本分ずらしてつなぐと, 縦方向, 横方向それぞれ m 本, N 本の単純閉曲線から成るトーラス上の配線が得られる. 縦 i 番目, 横 j 番目の線の交点に従属変数 $q_{i,j} \in \mathbb{C}$ を配置し, 力学系の相空間 $\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}^{mn}$ の座標を $(q_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ とおく. 線のつなぎ方から $q_{i,j}$ の境界条件は $q_{i,j+n} = q_{i,j}$, $q_{i+m,j} = q_{i,j-k}$ となる.

例. $(n, m, k) = (6, 3, 4)$



一般に, s 次元複素ベクトルの組 $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s$ への作用 R を以下で定める:

$$R \sim \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s; (\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (a_i, b_i)_{1 \leq i \leq s} \mapsto (b_i \frac{P_i}{P_{i-1}}, a_i \frac{P_{i-1}}{P_i})_{1 \leq i \leq s},$$

$$P_i := P_i(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=0}^{s-1} \prod_{l=1}^j b_{l+i} \prod_{l=j+2}^s a_{l+i} \quad (i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}).$$

この作用はもともと A_{s-1} 型幾何クリスタルの intertwiner として定義されたものである. n 次元, mn' 次元ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}_i := (q_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ ($i = 1, \dots, m$), $\tilde{\mathbf{q}}_j := (q_{i,j})_{1 \leq i \leq mn'} \in \mathbb{C}^{mn'}$ ($j = 1, \dots, N$) と定義する. ただし $n' = n/N$ である. これらを用いて, \mathcal{M} 上に2つのアフィンワイル群 $W = \langle \pi, s_1, \dots, s_{m-1} \rangle$, $\tilde{W} = \langle \tilde{\pi}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{N-1} \rangle$ の作用を定める (Cf. [KNY]):

$$s_i(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) = (\dots, R(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}), \dots), \quad \pi(\mathbf{q}_i) = (\mathbf{q}_{i+1}),$$

$$\tilde{s}_i(\tilde{\mathbf{q}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_N) = (\dots, R(\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_{i+1}), \dots), \quad \tilde{\pi}(\tilde{\mathbf{q}}_i) = (\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}).$$

2つの群 W と \widetilde{W} の作用は可換である. それぞれの可換部分群は以下の e_u, \tilde{e}_u で生成され,

$$\begin{aligned} e_u &:= (s_u \cdots s_{m-1})(s_{u-1} \cdots s_{m-2}) \cdots (s_1 \cdots s_{m-u}) \pi^u \quad u = 1, \dots, m, \\ \tilde{e}_u &:= (\tilde{s}_u \cdots \tilde{s}_{N-1})(\tilde{s}_{u-1} \cdots \tilde{s}_{N-2}) \cdots (\tilde{s}_1 \cdots \tilde{s}_{N-u}) \tilde{\pi}^u \quad u = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

\mathcal{M} 上の可換な双有理写像を定める. n 周期離散戸田格子は $(n, m, k) = (n, 2, n-1)$ の場合に相当し, このとき自明でない写像は一つ e_1 しかない. また, $(n, m, 0)$ の場合は [KNY] で考察されている.

主結果.

双有理写像 e_u, \tilde{e}_u は Lax 形式をもち, スペクトル写像 $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ が定義できる. $f \in \text{Im } \psi$ について, $f = 0$ の定めるアフィン代数曲線が原点以外で滑らかなとき, そのコンパクト化を原点で正規化したものを C_f , 種数を g と書く. C_f は1つの無限遠点 P と, 原点の上に N 点 O_j ($j = 1, \dots, N$) をもつ. その他に m 点 A_i ($i = 1, \dots, m$) $\in C_f$ を固定する. [vMM], [Iw], [LP] を応用および拡張することによって以下が得られた.

定理. [ILP] (i) 次の埋め込みがある:

$$\phi : \psi^{-1}(f) \hookrightarrow \text{Pic}^g(C_f) \times (\mathbb{C}^*)^M \times R_O \times R_A =: \mathcal{J}.$$

ここで $M := \text{gcd}(n, m+k)$, R_O と R_A はそれぞれ $\{O_j\}, \{A_i\}$ の全ての順序付けから成る有限集合である.

(ii) $\phi(q) = ([D], c = (c_1, \dots, c_M), O = (O_1, \dots, O_N), A = (A_1, \dots, A_m)) \in \mathcal{J}$ のとき, 可換な双有理写像は以下のような \mathcal{J} 上の作用を誘導する:

$$\begin{aligned} \phi(e_u(q)) &= ([D - uP + A_1 + \cdots + A_u], \tau^{-u}(c), O, A), \\ \phi(\tilde{e}_u(q)) &= ([D + uP - O_1 - \cdots - O_u], \tau^u(c), O, A). \end{aligned}$$

ただし $\tau(c) = (c_M, c_1, \dots, c_{M-1})$.

(iii) $N = 1$ のとき, Riemann テータ関数を使って ϕ^{-1} を構成できる. (一般の N の場合は予想.)

REFERENCES

- [ILP] R. Inoue, T. Lam and P. Pylyavskyy, Toric networks, geometric R -matrices and generalized discrete Toda lattices, arXiv:1504.03448.
- [Iw] S. Iwao, Linearisation of the (M, K) -reduced non-autonomous discrete periodic KP equation, arXiv:0912.3333.
- [KNY] K. Kajiwara, M. Noumi, and Y. Yamada, Discrete Dynamical Systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ Symmetry, Lett. Math. Phys. 60, no. 3, 211–219 (2002).
- [LP] T. Lam and P. Pylyavskyy, Crystals and total positivity on orientable surfaces, Selecta Math. (N.S.) 19, no. 1, 173–235 (2013).
- [vMM] P. van Moerbeke and D. Mumford, The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math. 143 (1-2) 94–154 (1979).

多項式 $y^2 - \det(L_0 - x \cdot Id)^2 \in \mathbb{C}[x, y]$ の定める特異曲線を $C \simeq \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 =: X_- \cup X_+$ とする. $K(X_{\pm})$ を X_{\pm} の有理関数体とする. 集合 $K(X_-) \times (K(X_+)^{\oplus M}/S^-)$ を $\Lambda(C)$ と置く. ここで, $K(X_+)^{\oplus M}$ の元は横ベクトルだと思っている.

このとき, 対応

$$\Theta : \Lambda(C) \times (S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M}) \rightarrow \mathcal{O};$$

$$(g, [f_1, \dots, f_M]) \times {}^t[F_1, \dots, F_M] \mapsto -g + f_1 F_1 + \dots + f_M F_M$$

は well-defined である. 実は, 写像 Θ による 0 の逆像 $\Theta^{-1}(0)$ は, 特異代数曲線のアーベルヤコビ写像のグラフを一般化したものとみなせる. (実際 $M = 1$ のときは, 特異曲線のアーベルヤコビ写像のグラフそのものである). Kostant-Toda 階層の初期値問題の解は, 特異曲線に付随した一般化テータ関数 (を $M > 1$ の場合にも一般化したもの) で書くことができる.

3. 全正值性・全非負値性

行列 L が全正/全非負値 (totally positive/ totally nonnegative) であるとは, その小行列式がすべて正/非負であることを言う. 初期値 L_0 を totally nonnegative にとる. \mathcal{T}_+ を, L_0 を含む等スペクトル集合の要素のうち totally nonnegative なものを集めてできる集合とする. Totally positive/nonnegative matrix の一般論より, L_0 の固有値はすべて単純な正の実固有値となることが知られている. また, Totally nonnegative matrix 全体の集合は, あるルールによって, 有限個の非負パラメータで完全にパラメータ付けされることが知られている [3].

L_0 の固有値を $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ と書こう.

定理 2. $L \in \mathcal{T}$ とする. $M = 1$ の時,

$$L \in \mathcal{T}_+ \iff F(\lambda_1), F(\lambda_3), F(\lambda_5), \dots < 0, \quad F(\lambda_2), F(\lambda_4), F(\lambda_6), \dots > 0. \quad \square$$

予想 1. 一般の M に対して,

$$L \in \mathcal{T}_+ \iff \Phi(L) \in S^- \setminus \mathcal{O}^{\otimes M} \text{ は, } S^- \setminus \mathcal{O}^{\oplus M} \text{ の「totally positive part」に属する.}$$

予想 2. $L \in \mathcal{T}_+$ とする. 中国剰余定理により $\Phi(L)$ を $S^- \setminus \mathbb{C}^{M \times N}$ の元とみなし, その M 次小行列式を, 前述の非負パラメータの関数として表示したとき,

$$\pm(\text{substruction-free な多項式})$$

の形をしている.

参考文献

- [1] N.Ercolani, H.Flaschka and S.Singer "The geometry of the full Kostant- Toda lattice" *Progress in Mathematics* 115, 181-226, (1993)
- [2] Y.Kodama and L.Williams "The full Kostant-Toda hierarchy on the positive flag variety" *Comm.Math.Pys.* 1-37 (2014)
- [3] A.Pinkus "Totally Positive Matrices" Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press (2010)

Painlevé 系の τ 関数の正準量子化について

黒木 玄 (Gen Kuroki)

2015 年 7 月 31 日 (金) 20:07 Version 1.0

この文書の最新版は次の場所からダウンロードできる.

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150731QuantizationOfPainleveTau.pdf>

Painlevé 系の量子化に関する関連の文書を以下の場所からダウンロードできる.

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/>

目 次

1. Painlevé 系の量子化 (qP_{IV} を例に用いた解説)	1
1.1. q -Painlevé IV 方程式の対称形式 qP_{IV}	2
1.2. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性	3
1.3. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示	4
1.4. 量子展開環の Chevalley 生成元の像のべき f_i^γ の作用	6
1.5. 不変部分代数への制限	8
1.6. 変数 x_i, y_i の量子化	11
1.7. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化	12
1.8. qP_{IV} の量子化	13
1.9. まとめ	14
2. τ 関数の量子化	15
2.1. 量子 τ 変数の導入	15
2.2. 量子 τ 変数への Weyl 群作用	17
2.3. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (1)	18
2.4. 基本 τ 変数への Weyl 群作用の結果の正則性	20
2.5. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (2)	21
2.6. まとめ	23
3. 付録: 「量子化」と「変数べき f^γ の構成法」について	24
3.1. q 差分化と量子化の区別	24
3.2. 古典極限と Poisson 構造	24
3.3. 非可換環の元の変数によるべきを導入する方法	25
3.4. Chevalley 生成元のべきが満たす関係式	26

1. Painlevé 系の量子化 (qP_{IV} を例に用いた解説)

まず, Painlevé 系の量子化について説明しよう¹.

多くの議論が対称化可能一般 Cartan 行列に付随する一般的な場合に拡張可能だが, 表現論の言葉に不慣れな読者のために, q 差分版の Painlevé IV 型方程式の対称形式 qP_{IV} を例に説明して行く. この場合にはほとんどの結果を工夫のない直接的な計算で確認できる.

¹実は 2 次元量子共形場理論の holomorphic part に関する理論 (conformal blocks に関する理論) は量子 Painlevé 系の理論そのものとみなせるのだが, この論説では扱わない. たとえば, 共形場理論が生まれた論文 [1] で扱われている Virasoro 代数のみを対称性を持つ共形場理論で退化場 $\varphi_{12}(z), \varphi_{21}(z)$ を考えた場合はちょうど単独 2 階の線形常微分作用素のモノドロミー保存変形の理論 (Garnier 系) の量子化になっている. この場合に限らず, 一般に Virasoro 代数は点付きコンパクト Riemann 面の変形を記述している. その点の位置がちょうど特異点の場所に対応している.

目標は量子化された Painlevé 系を表現論の言葉でうまく定式化し、量子 Painlevé 系の基礎になる代数構造の由来を Kac-Moody 代数や量子群の言葉を用いて説明することである。 qP_{IV} の場合には表現論に関係する部分が 3×3 行列を用いた巧妙な計算に置き換わることになる。量子群の L -operators による記述に慣れている読者であればこの場合を見ればより一般の場合にどのようにすればよいかも理解できるはずである。

「 q 差分化」と「量子化」の区別については第 3.1 節を、古典極限については第 3.2 節に簡単な解説を書いていた。以下では「量子化」を「正準量子化」の意味で用いる。

1.1. q -Painlevé IV 方程式の対称形式 qP_{IV}

q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式 qP_{IV} に関する詳しい記述については文献 [8], [18] を参照せよ。さらに qP_{IV} の $A_2^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群対称性の量子化とその一般化については文献 [6] を見よ。(量子化に関する文献を見れば古典極限によって Poisson 構造の情報も得られる。) この節の内容はそれらの文献からの引き写しである。

まず、 $A_2^{(1)}$ 型の一般 Cartan 行列 (GCM) $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$ と反対称行列 $[b_{ij}]_{i,j=0}^2$ を次のように定める²:

$$[a_{ij}]_{i,j=0}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [b_{ij}]_{i,j=0}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

さらに、 $\mathbb{C}(q)$ 上 a_i, F_i ($i = 0, 1, 2$) から生成される有理関数環を考え、そこに Poisson 構造を次のように入れる:

$$\{F_i, F_j\} = b_{ij}F_iF_j, \quad \{a_i, a_j\} = \{a_i, F_j\} = 0.$$

周期性 $a_{i+3} = a_i, F_{i+3} = F_i$ によってインデックスを整数全体に拡張しておく。 F_i を従属変数と呼び、 a_i をパラメーター変数と呼ぶことにする³。

q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式 qP_{IV} とは次のように定義される離散時間発展 $T_{qP_{IV}}$ のことである ([8], [18]):

$$T_{qP_{IV}}(F_i) = a_i a_{i+1} F_{i+1} \frac{1 + a_{i-1} F_{i-1} + a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i}{1 + a_i F_i + a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}}, \quad T_{qP_{IV}}(a_i) = a_i.$$

この離散時間発展は Poisson 構造を保つ。

$A_2^{(1)}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$ が次の関係式で定義される:

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad \pi s_i = s_{i+1} \pi.$$

ただしインデックスを周期性 $s_{i+3} = s_i$ によって整数全体に拡張しておいた。

拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用を次のように定める:

$$s_i(a_j) = a_i^{-a_{ij}} a_j, \quad s_i(F_j) = F_j \left(\frac{a_i + F_i}{1 + a_i F_i} \right)^{b_{ij}}, \quad \pi(a_i) = a_{i+1}, \quad \pi(F_i) = F_{i+1}.$$

² 反対称行列 $[b_{ij}]$ はクラスター代数の記述に用いられる反対称行列と同じものである。

³ 古典の場合にはパラメーター変数は数に特殊化されることが多い。しかし、量子化された場合には量子化された τ 変数と量子化されたパラメーター変数が非可換なので、 τ 変数を除外せずにパラメーター変数を数に特殊化することができなくなる。

この作用は Poisson 構造を保ち、離散時間発展 $T_{q\text{PIV}}$ と可換であり、 q 差分版の Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) になっている。

実は以上の構造の背景には量子群が隠れている。以下の節ではそのことを説明したい。

結論を先走って言うと、 q 差分版の Painlevé 方程式の従属変数 F_i は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の化身になっている⁴。

ただし、 F_i が量子展開環のした三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の像に直接なっているのではなく、 φ_i の余積を $\Delta(\varphi_i) = \varphi_{i1} + \varphi_{i2}$, $\varphi_{i1} = \varphi_i \otimes k_i$, $\varphi_{i2} = 1 \otimes \varphi_i$ と書くとき、 $a_i F_i$ が $\varphi_{i1} \varphi_{i2}^{-1}$ の像になっているという若干複雑な事情になっている。そして s_i の作用は $\Delta(\varphi_i)$ の像 f_i のべき f_i^γ の作用を用いて構成される。詳しくは [15] を参照して欲しい⁵。

1.2. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性

この節の内容は文献 [9], [10], [20] の構成を $(m, n) = (3, 2)$ の場合に特殊化したものになっている。互いに素な任意の (m, n) の場合の量子化については [13], [14] を見よ。

準周期性 $t_{i+3} = r^{-1}t_i$, $x_{i+3} = r^{-1}x_i$, $y_{i+3} = r^{-1}y_i$ を満たす⁶ 変数 t_i, x_i, y_i を用意し、 $t_i^2 = x_i y_i$ が成立していると仮定し、Poisson 構造を次のように定める⁷: $\mu = 1, 2$ について、

$$\begin{aligned} \{x_i, y_i\} &= 0, \\ \{x_i, x_{i+\mu}\} &= (-1)^{\mu-1} x_i x_{i+\mu}, \quad \{x_i, y_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} x_i y_{i+\mu}, \\ \{y_i, y_{i+\mu}\} &= (-1)^{\mu-1} y_i y_{i+\mu}, \quad \{y_i, x_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} y_i x_{i+\mu}, \\ \{t_i, \xi_j\} &= 0 \quad (\xi = x, y, t). \end{aligned}$$

最後の行の関係式を忘れて、変数 t_i を Poisson 中心元 $x_i y_i$ の平方根として導入してもよい。このとき、 F_i と a_i を

$$a_i = \frac{t_i}{t_{i+1}}, \quad F_i = \frac{x_{i+1} x_i}{t_{i+1} t_i}.$$

と定める。これらは周期性 $a_{i+3} = a_i$, $F_{i+3} = F_i$ を満たしており、前節の Poisson 構造の定義式を満たしている。この関係があるので x_i, y_i たちをも従属変数と呼び、 t_i たちをもパラメーター変数と呼ぶことにする。

$A_1^{(1)}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ が次の関係式で定義される:

$$r_i^2 = 1, \quad \varpi r_i = r_{i+1} \varpi.$$

ただしインデックスを周期性 $r_{i+2} = r_i$ によって整数全体に拡張しておいた。

⁴ φ は q -Serre 関係式を満たしている。

⁵ 変数 γ によるべき f_i^γ の構成の仕方については第 3.3 節に解説を書いておいた。

⁶ このとき直後に定義される a_i たちは $a_0 a_1 a_2 = r$ をみたしている。だから文献 [8] における q はここでの r に対応している。記号 q は量子群の変形パラメーターのために取っておくことにする。

⁷ この関係式は 3 を 3 以上の任意の奇数 m に一般化しても $\mu = 1, 2, \dots, m-1$ について有効である。ここで扱っている $q\text{PIV}$ のケースは $(n, m) = (3, 2)$ の場合に対応しており、互いに素な任意の (m, n) の場合に一般化される。そのとき変数 x_i, y_i は mn 個の変数 x_{ik} に拡張されるが、 x_{ik} たちの Poisson 括弧も $\{x_{ik}, x_{jl}\} = \varepsilon_{ijkl} x_{ik} x_{jl}$, $\varepsilon_{ijkl} = 0, \pm 1$ の形になるが、 ε_{ijkl} がどのように $0, \pm 1$ になっているかは複雑である。詳しくは量子化された場合を扱っている [13], [14] を見よ。 $n \geq 3$ の場合の Poisson 構造は量子化されて初めて明らかになった。

拡大アフィン Weyl 群の直積 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の x_i, y_i, t_i への作用を以下のように定めることができる⁸:

$$\begin{aligned}
s_i(x_i) &= x_i - (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1})(y_i + x_{i+1})^{-1} = (x_i + y_{i+1})x_{i+1}(y_i + x_{i+1})^{-1}, \\
s_i(x_{i+1}) &= x_{i+1} + (x_i + y_{i+1})^{-1}(y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1}x_i(y_i + x_{i+1}), \\
s_i(y_i) &= y_i - (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})(x_i + y_{i+1})^{-1} = (y_i + x_{i+1})y_{i+1}(x_i + y_{i+1})^{-1}, \\
s_i(y_{i+1}) &= y_{i+1} + (y_i + x_{i+1})^{-1}(x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1}y_i(x_i + y_{i+1}), \\
s_i(x_{i+2}) &= x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2}, \\
s_i(t_i) &= t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2}, \\
\pi(x_i) &= x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}, \\
Q_i &:= y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i, \\
r_1(x_i) &= x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \\
r_1(y_i) &= y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \\
r_1(t_i) &= t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.
\end{aligned}$$

この作用は Poisson 構造と F_i, a_i で生成される部分体を保ち, s_i, π の F_i, a_i への作用は前節に定義したものと一致している.

$U_1 = r_1\varpi$ とおく. このとき U_1 は以下を満たしている:

$$U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \quad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \quad U_1(t_i) = t_i.$$

これらの公式と

$$x_{i+1}x_i = t_i t_{i+1} F_i, \quad y_{i+2}x_i = t_i t_{i+2} F_{i+1}^{-1} F_i, \quad y_{i+2}y_{i+1} = t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1}$$

から, U_1 の F_i, a_i への作用は前節で定義した q 差分版の Painlevé IV 方程式の離散時間発展 $T_{q\text{PIV}}$ に一致することも確かめられる⁹.

したがって, この節の内容を量子化可能ならば, q 差分版 Painlevé IV 方程式を量子化できる. そのためにはこの節で登場した変数 t_i, x_i, y_i と拡大 Weyl 群の作用を量子群の言葉で理解することが必要になる.

1.3. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示

量子化を始める前に $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示について説明しておこう.

変数 z, w を用意して, 行列 $\Lambda_3(z), \Lambda_2(w), X(z), Y(z), V_i(w)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
\Lambda_3(z) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w & 0 \end{bmatrix}, \\
X(z) &= \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad Y(z) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ z & 0 & y_3 \end{bmatrix}, \quad V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

⁸ この意味がわからない天下りの式を直接扱うのは得策ではない. 次節で解説する Lax 表示による Weyl 群作用の記述の方がよい.

⁹ U_1 の F_i, a_i への作用は r の値によらない.

$X(z), Y(z), V_i(z)$ を **local L -operators** と呼ぶ. さらに行列 G_i, G'_i ($i = 1, 2$), R_i ($i \in \mathbb{Z}$) を次のように定める:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G'_i = \varpi(G_i), \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで

$$g_i = \frac{x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}}{x_i + y_{i+1}}, \quad \rho_i = r \frac{x_{i+2} x_{i+1} x_i - y_{i+3} y_{i+2} y_{i+1}}{Q_i}.$$

ϖ は x_i と y_i を交換する操作であった.

このとき, 前節で構成した拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i たちへの作用の定義を以下のように書き直せる:

$$\begin{aligned} s_i(X(z)) &= G_i X(z) G'_i{}^{-1}, & s_i(Y(z)) &= G'_i Y(z) G_i{}^{-1}, \\ \pi(X(z)) &= \Lambda_3(z) X(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, & \pi(Y(z)) &= \Lambda_3(z) Y(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, \\ r_1(V_i(w)) &= R_{i+1}^{-1} V_i(w) R_i, & \varpi(V_i(w)) &= \Lambda_2(w) V_i(w) \Lambda_2(w)^{-1}. \end{aligned}$$

これを拡大アフィン Weyl 群の作用の **Lax 表示** と呼ぶ. さらに, 以下の条件で上記の拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i への作用を特徴付けることもできる:

$$\begin{aligned} r_1(X(z)Y(rz)) &= X(z)Y(rz), \\ r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) &= y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \\ \varpi(X(z)) &= Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z), \\ s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) &= V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w), \\ s_i(x_i y_i) &= x_{i+1} y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1} y_{i+1}) = x_i y_i, \\ \pi(V_i(w)) &= V_{i+1}(w). \end{aligned}$$

これらの事実は公式 $Q_{i+1}x_i - y_{i+3}Q_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}$ などを使えば確認できる¹⁰. そして, それらの事実を使うことによって実際に拡大アフィン Weyl 群の作用が定まっていることも確認できる¹¹.

Weyl 群作用の Lax 表示を初見の人のために計算のポイントがどこにあるかを解説しておく. 計算のポイントは 2×2 行列に関して

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g' & 0 \end{bmatrix}$$

および $g' = -g$ をみたま g が a, b, c から $g = (a - c)/b$ と一意に定まることである¹². s_i の作用の Lax 表示を記述する行列 G_i は行列 $X(z)Y(rz)$ にこの計算を適用することによって得られる.

¹⁰ この $(m, n) = (3, 2)$ の場合に計算を地道にまとめておけば一般の場合にどんな感じになっているかの感触がつかめる. うまく行く計算の仕組みを見付けるのは大変だが, ある特別な場合にうまく行くことを確認できれば, それを一般化するのは易しいことが多い.

¹¹ 拡大アフィン Weyl 群作用については, 前節の天下りの意味がよく分からない定義を出発点にするのではなく, この節の Lax 表示を用いた定義の方を出発点に採用した方がよい.

¹² $g' = -g$ を仮定しない幾何クリスタルへの一般化もある. その一般化はさらに非可換な場合に一般化される. 非可換な場合への一般化の例は第 1.4 節の最後の方および第 1.5 節にある.

1.4. 量子展開環の Chevalley 生成元の像のべき f_i^η の作用

q 差分版 Painlevé IV 方程式とその対称性の量子化を始めよう. まず, 基礎になる非可換環を量子群の方法を用いて構成しよう.

\mathcal{B} は生成元 $a_{ik}^{\pm 1}, b_{ik}^{\pm 1}$ ($i = 1, 2, 3, k = 1, 2$) と以下の関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数であるとする:

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{ik}^{-1} &= a_{ik}^{-1}a_{ik} = 1, & b_{ik}b_{ik}^{-1} &= b_{ik}^{-1}b_{ik} = 1 & (\xi = a_{ik}, b_{ik}), \\ a_{ik}b_{ik} &= q^{-1}b_{ik}a_{ik}, & a_{ik}b_{i+1,k} &= qb_{i+1,k}a_{ik}, & a_{ik}b_{i+2,k} &= b_{i+2,k}a_{ik}, \\ a_{ik}a_{jk} &= a_{jk}a_{ik}, & b_{ik}b_{jk} &= b_{jk}b_{ik}, & \xi_{i1}\eta_{j2} &= \eta_{j2}\xi_{i1} & (\xi, \eta = a, b). \end{aligned}$$

ただし $a_{i+3,k} = a_{ik}, b_{i+3,k} = b_{ik}$ によってインデックス i を整数全体に拡張しておいた.

$A_2^{(1)}$ 型の量子 R 行列 $R(z)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} R(z) &= (q - q^{-1}z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + (1 - z) \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj} \\ &\quad + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} (E_{ij} \otimes E_{ji} + zE_{ji} \otimes E_{ij}). \end{aligned}$$

ここで i, j は $1, 2, 3$ を動き, E_{ij} は (i, j) 成分のみが 1 で他の成分が 0 であるような 3×3 行列 (行列単位) であるとする. さらに行列 $L_k(z)$ を次のように定める:

$$L_k(z) = \begin{bmatrix} a_{1k} & b_{1k} & 0 \\ 0 & a_{2k} & b_{2k} \\ zb_{3k} & 0 & a_{3k} \end{bmatrix}.$$

この $L_k(z)$ たちを **local L -operators** と呼ぶ. このとき代数 \mathcal{B} の定義関係式は次の “ $RLL = LLR$ ” 関係式に書き直される:

$$\begin{aligned} R(z/w)L_k(z)^1 L_k(w)^2 &= L_k(z)^2 L_k(z)^1 R(z/w) \quad (k = 1, 2), \\ L_1(z)^1 L_2(w)^2 &= L_2(w)^2 L_1(z)^1. \end{aligned}$$

ただし $L_1(z)^1 = L_1(z) \otimes 1, L_2(w)^2 = 1 \otimes L_2(w)$ と定めた.

以上の構成は量子群の世界では標準的でよく知られている.

量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ は生成元 $\kappa_i^{\pm 1}, \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3$) と次の関係式で定義される代数である:

$$\begin{aligned} \kappa_i \kappa_i^{-1} &= \kappa_i^{-1} \kappa_i = 1, & \kappa_i \kappa_j &= \kappa_j \kappa_i, \\ \kappa_i \varphi_i \kappa_i^{-1} &= q^{-1} \varphi_i, & \kappa_{i+1} \varphi_i \kappa_{i+1}^{-1} &= q \varphi_i, & \kappa_{i+2} \varphi_i \kappa_{i+2}^{-1} &= \varphi_i, \\ \varphi_i^2 \varphi_{i\pm 1} - (q + q^{-1}) \varphi_i \varphi_{i\pm 1} \varphi + \varphi_{i\pm 1} \varphi^2 &= 0. \end{aligned}$$

ただしインデックスを 3 周期的に整数全体に拡張しておいた. 最後の関係式を q -Serre 関係式と呼び, φ_i たちを量子展開環の下三角部分の **Chevalley 生成元** と呼ぶことにする. $\kappa_i^{\pm 1}$ たちから生成される部分代数は **Cartan 部分代数** と呼ばれる.

各 k ごとに次によって代数準同型 $U_q(\mathfrak{b}_-) \rightarrow \mathcal{B}$ を定めることができる:

$$\kappa_i^{\pm 1} \mapsto a_{ik}^{\pm 1}, \quad \varphi_i \mapsto a_{ik}^{-1} b_{ik}.$$

ゆえに $a_{ik}^{\pm 1}$ と b_{ik} で生成される \mathcal{B} の部分代数は $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数のテンソル積 $U_q(\mathfrak{b}_-) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$ の

$$\kappa_i^{\pm 1} \otimes 1 \mapsto a_{i1}^{\pm 1}, \quad \varphi_i \otimes 1 \mapsto a_{i1}^{-1} b_{i1}, \quad 1 \otimes \kappa_i^{\pm 1} \mapsto a_{i2}^{\pm 1}, \quad 1 \otimes \varphi_i \otimes 1 \mapsto a_{i2}^{-1} b_{i2}.$$

で定まる代数準同型写像の像になっている.

よく知られているように, local L -operators の積 $L(z) := L_1(z)L_2(z)$ は量子展開環の余積に対応している. $U_q(\mathfrak{b}_-)$ の余積が

$$\Delta(\kappa_i^{\pm 1}) = \kappa_i^{\pm 1} \otimes \kappa_i^{\pm 1}, \quad \Delta(\varphi_i) = \varphi_i \otimes \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1} + 1 \otimes \varphi_i$$

で定義される. 行列 $L(z) := L_1(z)L_2(z)$ の (i, i) 成分は $\Delta(\kappa_i)$ の像に一致し, $(i, i+1)$ 成分を左から (i, i) 成分で割ってできる元

$$f_i := a_{i1}^{-1} b_{i1} a_{i2}^{-1} a_{i+1,2} + a_{i2}^{-1} b_{i2}$$

は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積 $\Delta(\varphi_i)$ の像に一致する.

行列 $L(z) = L_1(z)L_2(z)$ の対角部分を

$$L_0 = \text{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3), \quad \tilde{a}_i = a_{i1} a_{i2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

と書き, 行列 $\tilde{L}(z) := L_1(z)L_2(z)L_0$ を次のように書くことにする¹³:

$$\tilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^2 & b_1 & c_1 \\ zc_2 & \tilde{a}_2^2 & b_2 \\ zb_3 & zc_3 & \tilde{a}_3^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} b_i = (a_{i1} b_{i2} + b_{i1} a_{i+1,2}) a_{i+1,1} a_{i+1,2}, \\ c_i = b_{i1} b_{i+1,2} a_{i+2,1} a_{i+2,2}. \end{cases}$$

さらに \tilde{a}_i, b_i, c_i のインデックスを 3 周期的に整数全体に拡張しておく.

量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積 $\Delta(\varphi_i)$ の像 f_i は次のように表わされるのであった:

$$f_i = \tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1} = f_{i1} + f_{i2}, \quad f_{i1} = a_{i1}^{-1} b_{i1} a_{i2}^{-1} a_{i+1,2}, \quad f_{i2} = a_{i2}^{-1} b_{i2}$$

f_i たちは φ_i の余積たちの像なので特に q -Serre 関係式を満たしている. ゆえに変数 γ による f_i のべき f_i^γ を含む代数を構成することができ (第 3.3 節), 次の公式が成立することを示せる (第 3.4 節, [15], [16]): $a_{ij} = a_{ji} = -1$ のとき

$$\begin{aligned} f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma} &= q^{\pm \gamma} f_j + [\gamma]_q (f_i f_j - q^{\pm 1} f_j f_i) f_i^{-1} = [1 - \gamma]_q f_j + [\gamma]_q f_i f_j f_i^{-1}, \\ f_i^\beta f_j^{\beta+\gamma} f_i^\gamma &= f_j^\gamma f_i^{\beta+\gamma} f_j^\beta. \end{aligned}$$

ここで $[\gamma]_q = (q^\gamma - q^{-\gamma}) / (q - q^{-1})$. 後者の関係式は **Verma 関係式** と呼ばれている.

$\tilde{a}_i^{\pm 1}, b_i, c_i$ で生成される \mathcal{B} の部分代数は $\tilde{a}_i^{\pm 1}, f_i, c_i$ で生成される部分代数に一致しており, それらは以下の関係式を満たしていることを直接の計算で確認できる:

$$f_i f_{i+1} - q f_{i+1} f_i = (1 - q^2) \tilde{a}_i^{-1} c_i \tilde{a}_{i+1}^{-1},$$

¹³ 量子展開環の余積に対応する標準的な L -operator $L(z) = L_1(z)L_2(z)$ ではなく, 対角部分 L_0 を二重にした $\tilde{L}(z) = L(z)L_0$ を主に使うことになることに注意せよ.

$$\begin{aligned}
f_i c_j &= c_j f_i, & \tilde{a}_i \tilde{a}_j &= \tilde{a}_j \tilde{a}_i, \\
c_i c_{i-2} &= q c_{i-2} c_i, & c_i c_{i+2} &= q^{-1} c_{i+2} c_i, \\
\tilde{a}_i f_i &= q^{-1} f_i \tilde{a}_i, & \tilde{a}_{i+1} f_i &= q f_i \tilde{a}_{i+1}, & \tilde{a}_{i+2} f_i &= f_i \tilde{a}_{i+2}, \\
\tilde{a}_i c_i &= q^{-1} c_i \tilde{a}_i, & \tilde{a}_{i+1} c_i &= c_i \tilde{a}_{i+1}, & \tilde{a}_{i+2} c_i &= q c_i \tilde{a}_{i+2}.
\end{aligned}$$

これらの関係式を使えば必要な公式はすべて計算できる。特に重要なのは、 c_i たちが f_j たちと可換になり、 c_i たちの積が q べき因子の違いを除けば可換になることである。この事実は後で変数 f_i を変数変換するときに使われる。

$\tilde{L}(z)$ の成分で f_i と非可換なのは $\tilde{a}_i^2, \tilde{a}_{i+1}^2, b_{i-1}, b_{i+1}$ の4つだけであり、

$$\begin{aligned}
f_i^\gamma b_{i+1} f_i^{-\gamma} &= b_{i+1} + (q^{-2\gamma} - 1) \tilde{a}_i^2 b_i^{-1} c_i, \\
f_i^\gamma b_{i-1} f_i^{-\gamma} &= b_{i-1} + (q^{2\gamma} - 1) c_{i-1} b_i^{-1} \tilde{a}_i^2, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_i f_i^{-\gamma} &= q^\gamma \tilde{a}_i, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_{i+1} f_i^{-\gamma} &= q^{-\gamma} \tilde{a}_{i+1}
\end{aligned}$$

が成立していることも確認できる。

変換 $\text{Ad}(f_i^\gamma)(x) = f_i^\gamma x f_i^{-\gamma}$ の Lax 表示を得るために次のようにおく：

$$\mathcal{G}_{i,c} = y_i((c^2 - 1) \tilde{a}_{i+1}^2 b_i^{-1}), \quad \mathcal{G}'_{i,c} = y_i((c^{-2} - 1) b_i^{-1} \tilde{a}_i^2).$$

ただし、

$$y_1(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z^{-1}a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき、 f_i^γ の作用に関する上の公式より次が成立している：

$$f_i^\gamma \tilde{L}(z) f_i^{-\gamma} = \mathcal{G}_{i,c} \tilde{L}(z) \mathcal{G}'_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

これを $\text{Ad}(f_i^\gamma)$ の Lax 表示と呼ぶ¹⁴。

1.5. 不変部分代数への制限

代数 \mathcal{B} の中心可逆元 r を

$$r = c_1 c_3 c_2$$

と定め¹⁵、対角行列 \tilde{C} と $t_i \in \mathcal{B}$ を次のように定める¹⁶：

$$\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) := \text{diag}(1, c_1 c_3, c_1), \quad t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}.$$

¹⁴ このタイプの公式を得るためには $L_1(z)L_2(z)$ そのものではなく、その対角部分 L_0 を二重化した $\tilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0$ を使わなければならない。

¹⁵ より一般に local L -operators の行列としてのサイズ 3 を 3 以上の奇数 m に置き換えた場合には $r = c_1 c_3 \cdots c_m c_2 c_4 \cdots c_{m-1}$ と定める。

¹⁶ 行列のサイズが 3 以上の奇数 m の場合には、 $\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m)$ を次のように定める：

$$\tilde{C} := \text{diag}(1, c_{\text{odd}}, c_1, c_{\text{odd}} c_2, c_1 c_3, c_{\text{odd}} c_2 c_4, c_1 c_3 c_5, \dots, c_{\text{odd}} c_2 c_4 \cdots c_{m-3}, c_1 c_3 \cdots c_m).$$

ここで $c_{\text{odd}} = c_1 c_3 \cdots c_m$.

この t_i と $\tilde{a}_i = a_{i1}a_{i2}$ は q べき因子の違いを除いて一致する. \tilde{c}_i のインデックスは整数全体に拡張しないことにする.

このとき, 行列 $\widehat{L}(z) := \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1}$ は次の形になる:

$$\widehat{L}(z) = \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^2 & \hat{b}_1 & 1 \\ rz & t_2^2 & \hat{b}_2 \\ zr\hat{b}_3 & z & t_3^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \hat{b}_1 = \tilde{c}_1 b_1 \tilde{c}_2^{-1}, \\ \hat{b}_2 = \tilde{c}_2 b_2 \tilde{c}_3^{-1}, \\ \hat{b}_3 = r^{-1} \tilde{c}_3 b_3 \tilde{c}_1^{-1}. \end{cases}$$

前節までは 3 周期的にインデックスを整数全体に拡張していたが, この節では次の準周期性によって t_i, \hat{b}_i のインデックスを整数全体に拡張しておく:

$$t_{i+3} = r^{-1}t_i, \quad \hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i.$$

このとき, t_i たちは, 互いに可換だけでなく, \hat{b}_j たちとも可換になる¹⁷. そこで t_i たちを量子化されたパラメーター変数と呼ぶことにする. $\widehat{L}(z)$ の成分で f_i と非可換なのは $t_i^2, t_{i+1}^2, \hat{b}_{i+1}, \hat{b}_{i-1}$ の 4 つだけである.

$\text{Ad}(f_i^\gamma)$ の $\widehat{L}(z)$ の作用の Lax 表示を得るために次のようにおく:

$$G_{i,c} = \widetilde{C}g_{i,c}\widetilde{C}^{-1}, \quad G''_{i,c} = \widetilde{C}g'_{i,c}\widetilde{C}^{-1}.$$

後で $G'_{i,c}$ を別に定義するのでこのような記号法になっている. このとき,

$$\begin{aligned} G_{i,c} &= y_i((c^2 - 1)t_{i+1}^2 \hat{b}_i^{-1}), & G''_{i,c} &= y_i((c^{-2} - 1)\hat{b}_i^{-1}t_i^2) \quad (i = 1, 2), \\ G_{3,c} &= y_3(r^{-1}(c^2 - 1)t_1^2 \hat{b}_3^{-1}), & G''_{3,c} &= y_3(r^{-1}(c^{-2} - 1)\hat{b}_3^{-1}t_3^2). \end{aligned}$$

前節の結果より, 次の公式が成立している:

$$f_i^\gamma \widehat{L}(z) f_i^{-\gamma} = G_{i,c} \widehat{L}(z) G''_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

この公式より $\widehat{L}(z)$ が文献 [2] で導入された unipotent crystal (幾何クリスタルの一種) の量子化とみなせることがわかる.

量子化されたパラメーター変数 a_i を次のように定めておく¹⁸:

$$a_i = t_i t_{i+1}^{-1}.$$

このとき, 量子化される前の幾何クリスタルの場合 ([2], [3]) と同様の方法で, この量子化された場合にも, 拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$ の作用を t_i, \hat{b}_i たちから $\mathbb{C}(q, r)$ 上生成される斜体上に次のように定めることができる:

$$s_i(\widehat{L}(z)) = G_{i,a_i} \widehat{L}(z) G_{i,a_i}^{-1}, \quad \pi(\widehat{L}(z)) = \Lambda_3(z) \widehat{L}(rz) \Lambda_3(r^2 z)^{-1}.$$

¹⁷ この事実がとても重要である. $\hat{a}_i^{\pm 1}, \hat{b}_i^{\pm 1}, \hat{c}_i^{\pm 1}$ で生成される代数には, 可逆な複素対角行列全体のなす群が行列 $\widetilde{L}(z)$ の相似変換の形で作用している. その作用で不変な元全体のなす部分代数は $t_i^{\pm 1}, \hat{b}_i^{\pm 1}, r^{\pm 1}$ で生成される. すなわち行列 $\widehat{L}(z)$ を考えることは可逆な対角行列による相似変換で不変な部分代数を考えることに対応している. $\widehat{L}(z)$ のすべての成分が t_i と可換になるのはこの不変性の帰結である.

¹⁸ パラメーター変数 a_i は単純コルートに対応している.

$G_{i,a_i} = G_{i,a_i}''^{-1} = y_i((t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1})$ ($i = 1, 2$) が成立していることに注意せよ¹⁹. この作用を具体的に書き下すと次のようになる:

$$\begin{aligned} s_i(t_i) &= t_{i+1}, & s_i(t_{i+1}) &= t_i, & s_i(t_{i+2}) &= t_{i+2}, \\ s_i(\hat{b}_i) &= \hat{b}_i, & s_i(\hat{b}_{i+1}) &= \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, & s_i(\hat{b}_{i-1}) &= \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\ \pi(t_j) &= t_{j+1}, & \pi(\hat{b}_j) &= \hat{b}_{j+1}. \end{aligned}$$

準周期性 $t_{i+3} = r^{-1}t_i$, $\hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i$ に注意せよ.

以下の結果は第 2.5 節において τ 関数への Weyl 群作用の Sato-Wilson 表示について説明するために使われる.

従属変数 \hat{f}_i を次のように定める²⁰:

$$\hat{f}_i = -(q - q^{-1})^{-1}\tilde{c}_i f_i \tilde{c}_{i+1}^{-1}.$$

このとき $\hat{b}_i = -(q - q^{-1})t_i \hat{f}_i t_{i+1}$ が成立している.

\tilde{c}_i たちは f_j たちと可換なので

$$\hat{f}_i^\gamma f_j \hat{f}_i^{-\gamma} = f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma}$$

を満たしている. さらに \tilde{c}_i たちは互いに q べき因子の違いを除いて可換である. ゆえに $\hat{f}_i^\beta \hat{f}_j^{\beta+\gamma} \hat{f}_i^\gamma$ と $\hat{f}_j^\gamma \hat{f}_i^{\beta+\gamma} \hat{f}_j^\beta$ も q べき因子の違いを除いて等しい. このことから, 上で構成した Weyl 群作用を f_i^γ ではなく, \hat{f}_i^γ を用いて構成できそうである. しかし, \hat{f}_i たちは f_i たちと違って t_i たちと可換である. ゆえに t_i たちへの Weyl 群作用は \hat{f}_i^γ 以外の手段を用いて構成しなければいけない. そこで $\mathbb{C}(q, r)$ 上 t_i, \hat{f}_i で生成される斜体 \mathcal{K} の代数自己同型 \tilde{s}_i を次のように定めておく:

$$\tilde{s}_i(t_i) = t_{i+1}, \quad \tilde{s}_i(t_{i+1}) = t_i, \quad \tilde{s}_i(t_{i+2}) = t_{i+2}, \quad \tilde{s}_i(\hat{f}_j) = \hat{f}_j.$$

このとき \mathcal{K} への Weyl 群作用を

$$s_i(x) = \text{Ad}(\hat{f}_i^\gamma)(\tilde{s}_i(x)) = \hat{f}_i^\gamma \tilde{s}_i(x) \hat{f}_i^{-\gamma}, \quad c = q^{-\gamma} = a_i = t_i t_i^{-1}$$

によって定めることで, この作用は上で構成した Weyl 群作用と一致している:

$$s_i(\hat{L}(z)) = G_i \hat{L}(z) G_i^{-1}, \quad G_i := G_{i,a_i} = y_i(g_i), \quad g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}.$$

この結果は第 2.5 節で基本的な役目を果たす²¹.

¹⁹ $s_i = \pi^{i-1} s_1 \pi^{-(i-1)}$ なので s_1 と π の作用が定まっていれば $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用を得るためには十分である. そこで以下の説明では $s_0 = s_3$ の作用に関する説明を暗黙のうちに省略することがある.

²⁰ これは \hat{f}_1, \hat{f}_2 のみに通用する公式. \hat{f}_3 についてはここだけで仮に $\tilde{c}_4 = r$ とおけば同じ公式で適切な定義が得られる.

²¹ 斜体の元 a, b が互いに可換なとき, $ab^{-1} = b^{-1}a$ を a/b や $\frac{a}{b}$ と書くことにする.

1.6. 変数 x_i, y_i の量子化

対角行列 \tilde{C}' を次のように定める:

$$\tilde{C}' = \text{diag}(\tilde{c}_3 b_{31}, \tilde{c}_1 b_{11}, \tilde{c}_2 b_{21}).$$

このとき行列 $X(z) := \tilde{C}' L_1(z) \tilde{C}'^{-1}$, $Y(rz) := \tilde{C}' L_2(z) L_0 \tilde{C}'^{-1}$ は次の形をしている²²:

$$X(z) = \tilde{C}' L_1(z) \tilde{C}'^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

$$Y(rz) = \tilde{C}' L_2(z) L_0 \tilde{C}'^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ rz & 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

この式によって量子化された従属変数 x_i, y_i を定義する. それらのインデックスを準周期性 $x_{i+3} = r^{-1} x_i$, $y_{i+3} = r^{-1} y_i$ によって整数全体に拡張しておく.

このとき, $\hat{a}_i = t_i^2 = x_i y_i$ および以下の関係式が成立している: $\mu = 1, 2$ について,

$$\begin{aligned} x_i y_i &= y_i x_i = t_i^2, \\ x_i x_{i+\mu} &= q^{(-1)^{\mu-1} 2} x_{i+\mu} x_i, & x_i y_{i+\mu} &= q^{-(-1)^{\mu-1} 2} y_{i+\mu} x_i, \\ y_i y_{i+\mu} &= q^{(-1)^{\mu-1} 2} y_{i+\mu} y_i, & y_i x_{i+\mu} &= q^{-(-1)^{\mu-1} 2} x_{i+\mu} y_i, \\ t_i \xi_j &= \xi_j t_i \quad (\xi = x, y, t). \end{aligned}$$

この関係式の古典極限は古典版の変数 x_i, y_i, t_i の Poisson 構造を再現する²³. このことより, この節の行列 $X(z), Y(rz)$ は古典版の q 差分化された Painlevé IV 方程式の記述で用いた行列 $X(z), Y(rz)$ の量子化になっていることがわかる.

x_i, y_i たちは以下の条件から一意に決定される:

$$X(z)Y(rz) = \tilde{C}' \tilde{L}(z) \tilde{C}'^{-1} = \hat{L}(z), \quad r = c_1 c_3 c_2, \quad x_3 x_2 x_1 = b_{31}^{-1} a_{31} b_{21}^{-1} a_{21} b_{11}^{-1} a_{11}.$$

r と $x_3 x_2 x_1$ に関する条件の右辺は代数 \mathcal{B} の可逆な中心元であることに注意せよ. 対角行列 \tilde{C} の成分は $\tilde{L}(z) = L_1(z) L_2(z) L_0$ の成分 c_i たちで書いていたので, $x_3 x_2 x_1$ に関する条件と $\tilde{L}(z)$ の成分から x_i, y_i たちは一意に決まる. さらに L_0 は $L(z) = L_1(z) L_2(z)$ の対角部分だったので, $x_3 x_2 x_1$ に関する条件と $L(z)$ の成分から x_i, y_i, t_i たちは一意に決まる. ($\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$, $L_0 = \text{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$) であり, t_i は $t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}$ と定義されたのであった.)

代数 \mathcal{B} は $a_{ik}^{\pm 1}, b_{ik}^{\pm 1}$ から生成される代数なのであった. \mathcal{B} には群 $(\mathbb{C}^\times)^3 \times (\mathbb{C}^\times)^3$ の元 (g, g') を次のように作用させることができる:

$$L_1(z) \mapsto g L_1(z) g^{-1}, \quad L_2(z) \mapsto g' L_2(z) g'^{-1}.$$

ただし $(\mathbb{C}^\times)^3$ の元 g, g' と可逆な対角行列を同一視した. この群作用を local L -operators $L_1(z), L_2(z)$ の gauge 変換と呼ぶことにする. この gauge 変換で不変な \mathcal{B} の元全体のなす部分代数を $\mathcal{B}^{\text{gauge}}$ と書くことにする. $\mathcal{B}^{\text{gauge}}$ は x_i, y_i, t_i, r とその逆元たちで生成される.

²² 実際にはその形になるように \tilde{C}' を定めた. 適切な \tilde{C} がすでに与えられているとき, \tilde{C}' はその条件で一意に定まる.

²³ $\hbar = q^2 - 1$ とおいて $\hbar \rightarrow 0$ の古典極限を考える.

1.7. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化

前節の定義より, 次が成立していることがすぐにわかる ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}\widehat{L}(z) &= \widetilde{C}L_1(z)L_2(z)L_0\widetilde{C}^{-1} = X(z)Y(rz), \\ G_{i,c} &= y_i(g_i(c)), \quad g_i(c) := \frac{(c^2 - 1)t_{i+1}^2}{x_i + y_{i+1}}, \\ G''_{i,c} &= y_i(g''_i(c)), \quad g''_i(c) := \frac{(c^{-2} - 1)t_i^2}{x_i + y_{i+1}}.\end{aligned}$$

さらに行列 $G'_{i,c}$ を次のように定める:

$$G'_{i,c} = y_i(g'_i(c)), \quad g'_i(c) := \frac{(c^2 - 1)t_{i+1}^2}{c^2 t_{i+1}^2 x_i^{-1} + x_{i+1}} = -\frac{(c^{-2} - 1)t_i^2}{c^{-2} t_i^2 y_{i+1}^{-1} + y_i}.$$

このとき, $\text{Ad}(f_i^\gamma)$ の $X(z), Y(rz)$ への作用は次のように書ける:

$$f_i^\gamma X(z) f_i^{-\gamma} = G_{i,c} X(z) G'_{i,c}{}^{-1}, \quad f_i^\gamma Y(rz) f_i^{-\gamma} = G'_{i,c} Y(rz) G''_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

ゆえに, x_i, y_i によって $\mathbb{C}(r, q)$ 上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$ の作用を次によって定めることができる:

$$\begin{aligned}s_i(X(z)) &= G_{i,a_i} X(z) G'_{i,a_i}{}^{-1}, \quad s_i(Y(z)) = G'_{i,a_i} Y(rz) G''_{i,a_i}, \\ \pi(X(z)) &= \Lambda(z) X(z) \Lambda(rz)^{-1}, \quad \pi(Y(rz)) = \Lambda(rz) Y(rz) \Lambda(r^2 z)^{-1}.\end{aligned}$$

以下の公式より, 以上の結果は古典版の q 差分化された Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) の部分の量子化を与えていることがわかる:

$$\begin{aligned}G_{i,a_i} &= y_i(g_i), \quad g_i = \frac{x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}}{x_i + y_{i+1}}, \\ G'_{i,a_i} &= y_i(g'_i), \quad g'_i = \frac{y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}}{y_i + x_{i+1}}, \\ G''_{i,a_i} &= G_{i,a_i}^{-1}\end{aligned}$$

この作用はパラメーター変数 t_i たちにも自然に拡張される.

以上で構成された $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$\begin{aligned}s_i(x_i) &= x_i - (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1})(y_i + x_{i+1})^{-1} = (x_i + y_{i+1}) x_{i+1} (y_i + x_{i+1})^{-1}, \\ s_i(x_{i+1}) &= x_{i+1} + (x_i + y_{i+1})^{-1} (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1} x_i (y_i + x_{i+1}), \\ s_i(y_i) &= y_i - (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})(x_i + y_{i+1})^{-1} = (y_i + x_{i+1}) y_{i+1} (x_i + y_{i+1})^{-1}, \\ s_i(y_{i+1}) &= y_{i+1} + (y_i + x_{i+1})^{-1} (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1} y_i (x_i + y_{i+1}), \\ s_i(x_{i+2}) &= x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2}, \\ s_i(t_i) &= t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2}, \\ \pi(x_i) &= x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}.\end{aligned}$$

これらの公式は q が一ヶ所も出て来ないように書かれているので古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

残りの $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の部分の作用の量子化も同様に構成される. d_i, d'_i を次のように定めるとすべての x_i, y_i, t_i と可換である:

$$d_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \quad d'_i = y_{i+2}y_{i+1}y_i.$$

量子化された $V_i(w), R_i, \rho_i, Q_i$ を古典の場合の公式をそのまま用いて

$$V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_i = r \frac{d_i - d'_{i+1}}{Q_i},$$

$$Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i.$$

と定める. このとき x_i, y_i によって $\mathbb{C}(r, q)$ 上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の作用を (古典の場合と同様の) 次の式によって定めることができる:

$$r_1(V_i(z)) = R_{i+1}^{-1}V_i(z)R_i, \quad \varpi(V_i(z)) = \Lambda_2(w)V_i(w)\Lambda_2(w)^{-1}.$$

この作用はパラメータ変数 t_i にも自然に拡張される.

以上で構成された $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$r_1(x_i) = x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i,$$

$$r_1(y_i) = y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1},$$

$$r_1(t_i) = t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.$$

これらの公式も古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

さらに, 以下の条件で以上で定義した2つの拡大アフィン Weyl 群の x_i, y_i への作用を特徴付けることもできる:

$$r_1(X(z)Y(rz)) = X(z)Y(rz),$$

$$r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) = y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i,$$

$$\varpi(X(z)) = Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z),$$

$$s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) = V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w),$$

$$s_i(x_iy_i) = x_{i+1}y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1}y_{i+1}) = x_iy_i,$$

$$\pi(V_i(w)) = V_{i+1}(w).$$

このことから2つの拡大アフィン Weyl 群の作用が可換になることもわかる. したがって, 以上によって, $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化が構成できたことになる.

1.8. qP_{IV} の量子化

古典の場合の q 差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展は $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用における $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$ の側の $U_1 = r_1\varpi$ の作用に一致しているのであった.

量子化された $U_1 = r_1\varpi$ の作用の仕方は次の通り:

$$U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \quad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \quad U_1(t_i) = t_i.$$

Q_i は $Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i$ と定義されたのであった.

量子化されたパラメーター変数 a_i は古典の場合と同様に $a_i = t_i t_{i+1}^{-1}$ と定義されたのであった ($t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$). 量子化された従属変数 F_i も古典の場合と同様に次のように定義しよう:

$$F_i = t_i^{-1} t_{i+1}^{-1} x_{i+1} x_i.$$

このとき, $F_{i+3} = F_i$, $a_{i+3} = a_i$ が成立しており, それらは以下の関係式を満たしている:

$$F_i F_j = q^{2b_{ij}} F_j F_i, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad a_i F_j = F_j a_i.$$

たとえば $F_i F_{i+1} = q^2 F_{i+1} F_i$. この関係式の古典極限は古典の場合の Poisson 構造を再現する.

F_i の定義と $t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$ と $x_i x_{i+1} = q^2 x_{i+1} x_i$ などより,

$$x_{i+1} x_i = t_i t_{i+1} F_i, \quad y_{i+2} x_i = t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1}, \quad y_{i+2} y_{i+1} = q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} Q_i &= q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+1} F_i \\ &= (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}) q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} \\ Q_{i+1} &= (1 + q^2 a_{i+1} F_{i+1} + q^2 a_{i+1} a_{i-1} F_{i+1} F_{i-1}) q^{-2} r^{-1} t_{i+2} t_i F_{i-1}^{-1} \\ Q_{i+2} &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) q^{-2} r^{-2} t_i t_{i+1} F_i^{-1}. \end{aligned}$$

これより, 特に

$$\begin{aligned} U_1(F_i) &= r^2 Q_{i+2} F_i Q_i^{-1} \\ &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) a_i a_{i+1} F_{i+1} (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1})^{-1} \end{aligned}$$

これが q 差分版 Painlevé IV 方程式の量子化された離散時間発展である.

1.9. まとめ

以上によって q 差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展とその $A_2^{(1)}$ 対称性が量子化された. 量子化の過程で, q 差分版 Painlevé IV 方程式の対称形式の独立変数 F_i , x_i , y_i たちとパラメーター変数 a_i , t_i たちが量子群のどこにどのように住んでいるかもわかった.

量子化された従属変数 F_i とパラメーター変数 a_i の積 $a_i F_i = y_{i+1}^{-1} x_i$ は q のべき因子を除いて $\varphi_i \otimes \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$ の像 f_{i1} と $1 \otimes \varphi_i$ の像 f_{i2} の比 $f_{i2}^{-1} f_{i1}$ に等しい. すなわち $a_i F_i$ は q のべき因子を除いて量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の余積の2つの項の比の像に等しい.

量子化されたパラメーター変数 t_i , a_i のそれぞれは q べき因子の違いを除いて量子展開環の Cartan 部分代数の元 κ_i , $\kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$ の余積の像に等しい.

要するに q 差分化された Painlevé IV 方程式の対称形式の従属変数は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元から来ており, パラメーター変数は量子展開環の Cartan 部分代数の生成元から来ている.

q 差分化された Painlevé IV 方程式の量子化の対称性 s_i の作用は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積の像 f_i のべき f_i^γ の作用から来ている. ただし, γ とパラメーター変数の関係を $a_i = t_i/t_{i+1} = q^{-\gamma}$ としなければいけない.

x_i , y_i , t_i 変数は local L -operators $L_1(z)$, $L_2(z)$ の可逆な対角行列による gauge 変換で不変な元であり, それらの逆元と $r^{\pm 1}$ から gauge 変換で不変な B の元全体のなす部分代数 B^{gauge} が生成される.

2. τ 関数の量子化

前節では q 差分版 Painlevé IV 方程式を例に Painlevé 系の量子化を量子群を使って遂行する方法について説明した。しかし、そこで量子化されたのは従属変数 F_i, x_i, y_i たちとパラメーター変数 a_i, t_i たちだけであり、 τ 関数は一切登場しなかった。

この節では τ 関数の量子化を扱うことにする。より正確に言えば表現論と相性の良い量子化された τ 変数を導入し、その基本性質を調べる。

この文書で「量子化」は「Poisson 括弧を非可換環の交換子で置き換えることおよびその一般化」を意味しているのであった(第 3.1 節)。Painlevé 系の解に付随する τ 関数を考えてしまうと、その意味での量子化を遂行できない。量子化できるのは Poisson 構造が定められた変数たちの方である。だから、この文書のタイトルは「 τ 関数の量子化」ではなく「 τ 変数の量子化」とするべきだったかもしれない。

Painlevé 系の従属変数とパラメーター変数は Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体の座標変数であると考えられる。ゆえにそこに新たに τ 変数を付け加えるということは、Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体を拡張することを意味している。

τ 変数の量子化のためには τ 変数と従属変数やパラメーター変数のあいだの Poisson 括弧が適切に定義されていなければいけない。しかし、非常に残念なことに古典 Painlevé 系の論文で τ と他の変数のあいだに Poisson 括弧を導入しているものを見付けることができなかった。だから、Poisson 括弧の情報無しに適切な量子 τ 変数の定義を見付けなければいけない。

現時点でわかっていることは以下の通りである。

2.1. 量子 τ 変数の導入

q 差分版 Painlevé IV 方程式の量子化において出発点になる基礎となる代数は量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数 $U_q(\mathfrak{b}_-)$ だった。以下ではこの場合を例に量子化された τ 変数を導入しよう。ただし、可能な限り、任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合への一般化の仕方が分かるように説明したい。

$\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$ とおき、量子展開環などは \mathbb{F} 上の代数として定義されていると考えることにする。以下で主に使うのは $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ の下 Borel 部分代数全体ではなく、下三角部分 $U_q(\mathfrak{n}_-) = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ の方である。

まず、 \mathcal{A} は $U_q(\mathfrak{n}_-)$ のある剰余環を部分環として含む Ore 整域であると仮定し、 $Q(\mathcal{A})$ はその分数斜体であるとする：

$$Q(\mathcal{A}) = \{ ab^{-1} \mid a, b \in \mathcal{A}, b \neq 0 \} = \{ b^{-1}a \mid a, b \in \mathcal{A}, b \neq 0 \}.$$

たとえば第 1.4 節の \mathcal{B} はそのような \mathcal{A} の例になっている。一般にアフィン型もしくは有限型の量子展開環の部分環の剰余環で整域になっているものはすべて Ore 整域になっている²⁴。

次に、記号 $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$ で張られる自由 \mathbb{Z} 加群 Q^\vee を考える²⁵。 Q^\vee をコルート格子

²⁴ 我々が扱っている Weyl 群作用は双有理作用なので、変数に作用した結果が変数の多項式ではなく、変数の有理関数になってしまう。だから、その量子化を扱うためには非可換環における分数の構成が必要になる。非可換における分数の構成は特に Ore 整域において非常にうまく行くことが知られている。Ore 整域に関する解説を [11], [12] に書いておいた。非可換分数の理論に不慣れな読者はそれらを参照して欲しい。

²⁵ δ^\vee はアフィン Lie 環の中心元 “ c ” に対応している。

と呼ぶことにする. 準周期性²⁶

$$\varepsilon_{i+3}^\vee = \varepsilon_i^\vee - \delta^\vee$$

によってインデックスを整数全体に拡張しておく. Q^\vee の群環の基底を q^γ ($\gamma \in Q^\vee$) と書き, Q^\vee の群環を $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ と書くことにする. ($\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ は Laurent 多項式環である.)

$\varepsilon_i^\vee, \delta^\vee$ そのものおよび $q^{\varepsilon_i^\vee}, q^{\delta^\vee}$ をパラメーター変数と呼ぶことにする.

以下, \mathcal{K} は \mathcal{A} の分数斜体 $Q(\mathcal{A})$ の部分斜体であると仮定する.

\mathcal{K} と $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ のテンソル積代数を $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}] = \mathcal{K} \otimes \mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$ と表わす. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ は \mathcal{K} にパラメーター変数を添加して得られる代数である. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ の中でパラメーター変数 q^γ ($\gamma \in Q^\vee$) はすべての元と可換である. $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$ も Ore 整域になるので, その分数斜体を $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ と表わす.

単純コルートに対応するパラメーター変数 α_i^\vee を次のように定める:

$$\alpha_i^\vee = \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee.$$

たとえば, $\theta^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee = \varepsilon_1^\vee - \varepsilon_3^\vee$ とおくと $\alpha_0^\vee = \delta^\vee - \theta^\vee$ であり, 周期性 $\alpha_{i+3}^\vee = \alpha_i^\vee$ が成立している.

コルート格子 Q^\vee の双対格子を P と書き, ウェイト格子と呼び, $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$ の双対基底を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Lambda_0$ と書く:

$$\langle \varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \varepsilon_i^\vee, \Lambda_0 \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \varepsilon_j \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \Lambda_0 \rangle = 1.$$

$\varepsilon_i, \alpha_i, \Lambda_i \in X$ ($i \in \mathbb{Z}$) を次の条件によって定める:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+3} &= \varepsilon_i, & \Lambda_i &= \Lambda_{i-1} + \varepsilon_i, \\ \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

このとき, 次が成立している:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle &= a_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2), \\ \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle &= \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_{j+3} \rangle = \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle \quad (i, j \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

ここで $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$ は $A_2^{(1)}$ 型の一般 Cartan 行列である. そこで α_i を単純ルートと呼び, Λ_i を基本ウェイトと呼び, P の元を整ウェイトと呼ぶことにする.

任意の $\mu \in P$ に対して, パラメーター変数に作用する差分作用素 τ^μ を次のように定める:

$$\tau^\mu(\gamma) = \gamma + \langle \gamma, \mu \rangle \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

この作用は q^γ のタイプのパラメーター変数に自然に拡張される:

$$\tau^\mu(q^\gamma) = q^{\langle \gamma, \mu \rangle} q^\gamma \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

そこで次の関係式によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に τ^μ ($\mu \in P$) を添加してできる $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に作用する q 差分作用素環 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ が定義される:

$$\tau^\lambda a = a \tau^\lambda, \quad \tau^\lambda q^\gamma = q^{\langle \gamma, \lambda \rangle} q^\gamma \tau^\lambda, \quad \tau^\lambda \tau^\mu = \tau^{\lambda+\mu} \quad (a \in \mathcal{K}, \gamma \in Q^\vee, \lambda, \mu \in P).$$

²⁶ この準周期性はパラメーター変数の準周期性 $t_{i+3} = r^{-1}t_i$ に対応している. δ^\vee はアフィン Lie 環の中心元 “c” に対応していたので, 準周期性は “レベル” の情報を持っていると考えることもできる.

実はこの差分作用素の意味で導入された記号 τ^λ たちが我々が必要としている量子化された τ 変数である。量子 τ 変数はパラメーター変数を動かす差分作用素なので、量子化された場合にパラメーター変数たちは τ 変数たちと非可換になる。

特に基本的なのは基本ウェイトに対応する差分作用素 τ^{Λ_i} たちである。そこでそれらを τ_i と書き、基本 τ 変数と呼ぶことにする：

$$\tau_i := \tau^{\Lambda_i} \quad (\text{基本 } \tau \text{ 変数}).$$

基本 τ 変数 τ_i とは、単純コルートに対応するパラメーター変数 α_i^\vee の正準共役演算子 $\partial/\partial\alpha_i^\vee$ の指数関数 $\exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ のことだと考えることもできる。これが “ τ_i ” の正体である！

2.2. 量子 τ 変数への Weyl 群作用

コルート格子 Q^\vee とウェイト格子 P には次によって Weyl 群作用が定まる：

$$s_i(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee, \quad s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i \quad (\gamma \in Q^\vee, \lambda \in P).$$

たとえば、 $i = 0, 1, 2$ について、

$$s_i(\Lambda_i) = \Lambda_i - \alpha_i = \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - \Lambda_i, \quad s_i(\Lambda_j) = \Lambda_j \quad (i \neq j).$$

この作用を \mathcal{K} の元を固定するように $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ に拡張したものを \tilde{s}_i と書く。すなわち、以下の条件によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ の代数自己同型 \tilde{s}_i を定める：

$$\tilde{s}_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad \tilde{s}_i(\tau^\lambda) = \tau^{s_i(\lambda)}, \quad \tilde{s}_i(a) = a \quad (\gamma \in Q^\vee, \lambda \in P, a \in \mathcal{K}).$$

後で Painlevé 系の対称性としての $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ への作用を s_i と書くことになる。それとは区別するために \tilde{s}_i という記号を使った。

代数 \mathcal{A} における量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元 φ_i の像を f_i と書くことにする。そして、簡単のため、すべての i について $f_i \neq 0$ であると仮定する²⁷。

さらに、 $Q(\mathcal{A})$ の部分斜体 \mathcal{K} は

$$f_i^\gamma \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) f_i^{-\gamma} \subset \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) \quad (\gamma \in Q^\vee)$$

を満たしていると仮定する。たとえば、Ore 整域 \mathcal{A} が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の剰余環になっているとき、その分数斜体 $Q(\mathcal{A})$ そのものを \mathcal{K} とするとその条件が満たされている。 \mathcal{A} が第 1.4 節の代数 \mathcal{B} のとき、以下の斜体はその条件を満たしている：

- 第 1.4 節の \tilde{a}_i, b_i, c_i たちから生成される部分斜体、
- 第 1.5 節の t_i, \hat{f}_i たちから生成される部分斜体、
- 第 1.6 節の t_i, x_i, y_i たちから生成される部分斜体、
- 第 1.8 節の a_i, F_i たちから生成される部分斜体。

²⁷ $f_i = 0$ となる場合には Weyl 群作用を構成するときに $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を 1 に置き換えればよい。 $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を含む Verma 関係式の $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を 1 で置き換えて得られる関係式は自明に成立している。相空間の次元が低い Painlevé 系の対称性を理解するためにはこのアイデアが必須である。

Verma 関係式より, $a_{ij} = a_{ji} = -1$ ならば

$$f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee + \alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee} = f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee}$$

が成立している (第 3.4 節). 作用素として $\tilde{s}_i f^\gamma = f^{s_i(\gamma)} \tilde{s}_i$ ($f \in \mathcal{A}$, $\gamma \in Q^\vee$) が成立することをすると,

$$f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i = f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j$$

が成立することがわかる. このことから, 斜体 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ に

$$s_i(x) = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})(\tilde{s}_i(x)) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x \in \mathcal{K}(q^{Q^\vee}))$$

によって Weyl 群の代数自己同型作用を定められることがわかる.

ここで, すべての f_i が \mathcal{K} に含まれていると仮定する.

このとき $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \tilde{s}_i$ の作用は q 差分作用素環 $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ に拡張される. 公式 $\tau^\lambda f_i^\gamma = f_i^{\gamma + (\gamma, \lambda)} \tau^\lambda$ ($\gamma \in Q^\vee$) などを使うと, 次が成立していることがわかる:

$$s_i(\tau^\lambda) = f_i^{(\alpha_i^\vee, \lambda)} \tau^{s_i(\lambda)},$$

特に基本 τ 変数への作用は以下ようになる:

$$s_i(\tau_i) = f_i \tau^{\Lambda_i - \alpha_i} = f_i \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i, j = 0, 1, 2; i \neq j).$$

たとえば, 整域 \mathcal{A} が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の剰余環で $\mathcal{K} = Q(\mathcal{A})$ のとき, 以下の公式が成立していることがわかる:

$$s_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad s_i(\tau^\lambda) = f_i^{(\alpha_i^\vee, \lambda)} \tau^{s_i(\lambda)},$$

$$s_i(f_j) = \begin{cases} f_j & (i = j \text{ or } a_{ij} = 0), \\ q^{\pm \alpha_i^\vee} f_j + [\alpha_i^\vee]_q (f_i f_j - q^{\pm 1} f_j f_i) f_i^{-1} & (a_{ij} = a_{ji} = -1). \end{cases}$$

これらの公式 (およびその対称化可能一般 Cartan 行列の場合への一般化) は文献 [19] で構成された Weyl 群双有理作用の量子化かつ q 差分化になっている.

2.3. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (1)

この節では \mathcal{A} は第 1.4 節の \mathcal{B} であるとし, \mathcal{K} は

$$f_i := (q^{-1} - q)^{-1} \tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1}, \quad d_i := (q^{-1} - q)^{-1} \tilde{a}_i^{-1} c_i \tilde{a}_{i+2}^{-1}$$

から生成される分数斜体 $Q(\mathcal{B})$ の部分斜体であると仮定する. このとき, f_i, d_i たちは

$$f_i f_{i+1} - q f_{i+1} f_i = q d_i,$$

$$f_i d_{i-1} = q d_{i-1} f_i, \quad f_i d_i = q^{-1} d_i f_i, \quad f_i d_{i+1} = d_{i+1} f_i,$$

$$d_i d_{i+2} = q d_{i+2} d_i, \quad d_i d_{i-2} = q^{-1} d_{i-2} d_i$$

を満たしている²⁸. インデックスの 3 周期性に注意せよ. さらに前節の記号のもとで $t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$, $r = q^{-\delta^\vee}$ とおき, $t = (t_1, t_2, t_3)$ とおく. このとき準周期性 $t_{i+3} = r^{-1} t_i$ が成立している. z を $r z$ に移す差分作用素 $r^{z\partial/\partial z}$ を $T_{z,r}$ と書く:

$$T_{z,r} f(z) = r^{z\partial/\partial z} f(z) = f(rz).$$

²⁸ $m = 4$ の場合には例外的に d_i どうしは可換になる. $m \geq 4$ の場合には $f_i d_{i-2} = q^{-1} d_{i-2} f_i$, $f_i d_{i+1} = q d_{i+1} f_i$ となり, $m = 3$ の場合には例外的に f_i と $d_{i-2} = d_{i+1}$ が可換になる.

行列 $D(t)$, $\widetilde{M}(z)$ と行列値差分作用素 $M(z)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} D(t) &= \text{diag}(t_1, t_2, t_3), \\ \widetilde{M}(z) &= L_0^{-1} \widetilde{L}(z) L_0^{-1} = L_0^{-1} L_1(z) L_2(z) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (q^{-1} - q)f_1 & (q^{-1} - q)d_1 \\ z(q^{-1} - q)d_2 & 1 & (q^{-1} - q)f_2 \\ z(q^{-1} - q)f_3 & z(q^{-1} - q)d_3 & 1 \end{bmatrix}, \\ M(z) &= D(t) \widetilde{M}(rz) D(t) T_{z,r}^2 \\ &= \begin{bmatrix} t_1^2 & (q^{-1} - q)t_1 f_1 t_2 & (q^{-1} - q)t_1 d_1 t_3 \\ z(q^{-1} - q)t_2 d_2 t_4 & t_2^2 & (q^{-1} - q)t_2 d_2 t_3 \\ z(q^{-1} - q)t_3 f_3 t_4 & z(q^{-1} - q)t_3 d_3 t_5 & t_3^2 \end{bmatrix} T_{z,r}^2. \end{aligned}$$

行列値差分作用素 $M(z)$ を $D(t)^2 T_{z,r}^2$ に“対角化”しよう. $\mathcal{K}[[z]]$ の元を成分に持つ 3×3 行列 $U(z) = [u_{ij}(z)]$ で, $U(0)$ が対角線が 1 の上三角行列になり,

$$M(z) = U(z) D(t)^2 T_{z,r}^2 U(z)^{-1}$$

を満たすものが唯一存在する. $g_i \in \mathcal{K}$ と行列 G_i を次のように定める:

$$g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{(q^{-1} - q)t_i f_i t_{i+1}} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{f_i}, \quad G_i = y_i(g_i).$$

このとき, $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$ であつ, 前節の方法で定めた Weyl 群作用について,

$$\begin{aligned} s_i(M(z)) &= G_i M(z) G_i^{-1}, \\ \pi(M(z)) &= (\Lambda_3(z) T_{z,r}) M(z) (\Lambda_3(z) T_{z,r})^{-1} \end{aligned}$$

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax** 表示と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i^\vee}$ とおき, 対角行列 D_Z と行列 $Z(z)$ を

$$D_Z = \text{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z) D_Z$$

と定める. 行列 S_i^g, S_i を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_1^g &= \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき以下が成立している:

$$\begin{aligned} M(z) &= Z(z) D((qt) T_{z,r})^2 Z(z)^{-1} = Z(z) D(qt)^2 Z(r^2 z)^{-1} T_{z,r}^2, \\ s_i(U(z)) &= G_i U(z) S_i^g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_i(D_Z) &= (S_i^g)^{-1} D_Z S_i, \\
s_i(D(t)T_{z,r}) &= S_i^{-1} D(t)T_{z,r} S_i \\
s_i(Z(z)) &= G_i Z(z) S_i.
\end{aligned}$$

π の作用はどれも次の形になっている:

$$\pi(A(z)) = (\Lambda_3(z)T_{z,r})A(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \quad (A(z) = U(z), D_Z, D(t)T_{z,r}, Z(z)).$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson 表示** と呼ぶ.

2.4. 基本 τ 変数への Weyl 群作用の結果の正則性

前々節の構成が対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合にまで一般化され, 次の定理が成立している.

定理 2.1 ([16]). 基本 τ 変数への Weyl 群作用の結果は $f_i, q^{\pm\alpha_i^\vee}$ たちについて多項式になる. \square

整ウエイト $\mu \in X$ が任意の i について $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \geq 0$ を満たしているとき, μ をドミナント整ウエイトと呼ぶ. ドミナント整ウエイト全体の集合を P_+ と書く. Weyl 群を W と書く.

ドミナント整ウエイト μ と Weyl 群の元 w によって $w(\mu)$ と表わされる整ウエイト全体の集合を WP_+ と書く. $\nu \in WP_+$ を $\nu = w(\mu), w \in W, \mu \in P_+$ と書くとき $w(\tau^\mu)$ は ν だけから決まり, w と μ の取り方によらない. そこで $\nu = w(\mu) \in WP_+$ に対して, $\tau(\nu) = w(\tau^\mu)$ とおく.

実際に証明できているのは次の結果である: \mathcal{A} が $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の像に一致し, $\mathcal{K} = Q(\mathcal{A})$ のとき, すべての f_i が 0 でないならば, 任意の $\nu \in WP_+$ に対して

$$\tau(\nu) = w(\tau^\mu) \in \mathcal{A}[q^{Q^\vee}] \tau^\nu \quad (\nu = w(\mu), w \in W, \mu \in P_+).$$

証明には表現論における BGG 圏 \mathcal{O} に関する理論を使う ([16]). 証明の概略を以下で説明しよう.

以下, $\mu, \lambda \in P_+$ であるとする.

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ は Weyl 群の元 w の簡約表示であるとする. このとき

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= \tilde{s}_{i_N} \cdots \tilde{s}_{i_2} \tilde{s}_{i_1}, \quad \gamma_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee), \\
X &= f_{i_1}^{\gamma_1} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N}, \quad Y = f_{i_1}^{\gamma_1 + \langle \gamma_1, \mu \rangle} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N + \langle \gamma_N, \mu \rangle}
\end{aligned}$$

とおくと, $\tau(w(\mu)) = w(\tau^\mu)$ は次のように表わされる:

$$w(\tau^\mu) = \tilde{w} (X^{-1}Y) \tau^{w(\mu)}.$$

ゆえに Y が X で左から割り切れること $Y \in X\mathcal{A}[q^{Q^\vee}]$ を示せばよい. そのためには, $X^{-1}Y \in \mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ なので, α_i^\vee たちに非負の整数を代入した場合に割り切れることを示せば十分である. そしてそのためには $\mathcal{A} = U_q(\mathfrak{n}_-)$, $f_i = \varphi_i$ の場合に割り切れることを示せば十分なので以下ではそのように仮定する.

ρ は $\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$ をみたすウエイトであるとし, Weyl 群の元 w とウエイト λ に対して, w の λ への shifted action を

$$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

と定める. このとき

$$\lambda_k = (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}) \circ \lambda, \quad f_w^\lambda = f_{i_N}^{\langle \alpha_{i_N}^\vee, \lambda_N \rangle + 1} \cdots f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda_1 \rangle + 1}$$

とおくと, X, Y の積の順序を逆転し, 各 α_i^\vee に非負の整数 $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ を代入した結果はそれぞれ $f_w^\lambda, f_w^{\lambda+\mu}$ になる. ゆえに $f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$ を示せばよい.

$f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$ の証明が次の可換図式の存在に帰着することを示そう:

$$\begin{array}{ccc} M(\lambda) \otimes L(\mu) & \longleftarrow & M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(\lambda + \mu) & \longleftarrow & M(w \circ (\lambda + \mu)). \end{array}$$

この可換図式の内容について説明しよう. $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ はそれぞれ最高ウェイト λ の Verma 加群とその既約商加群であるとし, それぞれの最高ウェイトベクトルを v_λ, u_λ と書くことにする. このとき $f_w^\lambda v_\lambda$ は $M(\lambda)$ におけるウェイト $w \circ \lambda$ の特異ベクトル (定数倍を除いて唯一) になる. ゆえに $v_{w \circ \lambda}$ を $f_w^\lambda v_\lambda$ に移す $M(w \circ \lambda)$ から $M(\lambda)$ への準同型写像が得られる. 上の図式の横向きの矢線はこの種の準同型とこの種の準同型から誘導された準同型写像である. 左側の上向きの矢線は $v_{\lambda+\mu}$ を $v_\lambda \otimes u_\mu$ に移す準同型写像である. 上の図式を可換にするような右側の上向きの矢線 (準同型写像) が存在すると仮定する.

上の可換図式における $v_{w \circ (\lambda + \mu)} \in M(w \circ (\lambda + \mu))$ の $M(\lambda) \otimes L(\mu)$ における像を考える. $M(\lambda + \mu)$ を経由して得られる像は $\Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu)$ である (ここで Δ は余積を表わす). 上の可換図式より, それは $M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu)$ の $M(\lambda) \otimes L(\mu)$ における像 $(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu)$ に含まれる:

$$(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu) \ni \Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu) = (a f_w^{\lambda+\mu} v_\lambda) \otimes u_\mu + (\text{lower terms}).$$

ここで a は 0 でない定数であり, “(lower terms)” の部分は $M(\lambda)$ のベクトルとウェイトが μ より小さな $L(\mu)$ のウェイトベクトルのテンソル積の和である. これより $U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda \ni f_w^{\lambda+\mu}$ となることがわかる.

上の可換図式は Kac-Moody 代数の場合には [4] の結果より存在することが知られている (translation functor の理論より, [7] Section 2 も参照). ゆえに量子展開環の場合にも [5] の結果より存在することがわかる ($U(\mathfrak{g})$ の BGG 圏 \mathcal{O} と $U_q(\mathfrak{g})$ の BGG 圏 \mathcal{O} の braided tensor category として圏同値より).

要するに $\mu \in P_+$ に対する $w(\tau^\mu)$ が f_i について多項式になるという結果は任意の $\lambda \in P_+$ に対して $M(\lambda + \mu)$ のウェイト $w \circ (\lambda + \mu)$ の特異ベクトルが $M(\lambda)$ のウェイト $w \circ \lambda$ の特異ベクトルで割り切れるという結果から導かれる.

2.5. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (2)

この節では \mathcal{A} は第 1.4 節の代数 \mathcal{B} であるとし, \mathcal{K} は第 1.5 節の t_i, \hat{f}_i たちで生成される斜体であるとし, 前節までとは少し異なる Weyl 群作用を $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$ 上に定める.

$U_q(\mathfrak{n}_-)$ の Chevalley 生成元の取り方には定数倍の不定性があり, 公式 $s_i(\tau_i) = f_i \tau_i$ より, Weyl 群の τ 変数への作用の仕方は Chevalley 生成元を定数倍すれば変わる. τ 変数への Weyl 群作用にはもっと大きな不定性がある.

前節の議論から f_i たちが Verma 関係式を満たしていれば, $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ の形で Weyl 群作用を定めるには十分である. さらに q べき因子の違いを除いて A と B が等しいことを $A \sim B$ と書くことにすると, Verma 関係式そのものがびったり成立している必要はなく, f_i たちが $f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee + \alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_j^\vee} \sim f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee}$ ($a_{ij} = a_{ji} = -1$) のタイプの弱い Verma 関係式を満たしていれば, $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることができる. f_i たちが Verma 関係式を満たしており, $u_i \in Q(\mathcal{A})$ たちの積は q べき因子の違いを除いて可換であり, $f_i u_j = u_j f_i$ が成立しているとき, $u_i f_i$ たちは弱い Verma 関係式を満たしている. だから $s_i = \text{Ad}((u_i f_i)^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることもできる. このとき $s_i(\tau_i) = u_i f_i \tau_i$ となる.

この構成を第 1.5 節の \hat{f}_i たちに適用しよう. \mathcal{A} は第 1.4 節の \mathcal{B} であり, \mathcal{K} は第 1.5 節の t_i, \hat{f}_i たちで生成される斜体であるとする. \hat{f}_i は f_i に f_i たちと可換な $c_j^{\pm 1}$ たちの積をかけたものになっており, c_j たちの積は q べき因子の違いを除いて可換である. さらに \hat{f}_i たちと t_j たちは可換であり, $t_{i+3} = r^{-1}t_i, q^{\varepsilon_{i+3}} = q^{-\delta^\vee} q^{\varepsilon_i^\vee}$ が成立しているので, $r = q^{\delta^\vee}, t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$ と同一視することにする. このとき第 1.5 節の \tilde{s}_i と前節の \tilde{s}_i は一致する. この同一視によって $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$ の代わりに \mathcal{K} そのものを扱えばよいことになった. π の \mathcal{K} への作用は第 1.5 節と同様に定めておく.

q 差分作用素環 $\mathcal{K}[\tau^P]$ に $s_i = \text{Ad}(\hat{f}_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ によって Weyl 群作用を定めることができる. このとき, 以下の公式が成立している²⁹:

$$\begin{aligned} s_i(\tau_i) &= \hat{f}_i \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i}, & s_i(\tau_j) &= \tau_j \quad (i = 0, 1, 2, i \neq j), \\ s_i(t_i) &= t_{i+1}, & s_i(t_{i+1}) &= t_i, & s_i(t_{i+2}) &= t_{i+2}, \\ s_i(\hat{b}_i) &= \hat{b}_i, & s_i(\hat{b}_{i+1}) &= \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, & s_i(\hat{b}_{i-1}) &= \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\ \pi(t_j) &= t_{j+1}, & \pi(\hat{b}_j) &= \hat{b}_{j+1}. \end{aligned}$$

新しい公式は最初の行だけである, 残りの公式はすでに第 1.5 節で得られている. 第 1.5 節では s_i の t_i と \hat{b}_i たちへの作用を行列 $\widehat{L}(z)$ を用いて記述する公式 (Lax 表示) が得られている. 以下では s_i の τ 変数たちへの作用の行列表示 (Sato-Wilson 表示) について説明する.

以下の構成は第 2.3 節と完全に同様である. $t = (t_1, t_2, t_3)$ とおき,

$$D(t) = \text{diag}(t_1, t_2, t_3)$$

と定め, z を rz に移す差分作用素を $T_{z,r}$ と書き, 行列値差分作用素 $\widehat{M}(z)$ を

$$\widehat{M}(z) = \widehat{L}(z)T_{z,r}^2$$

と定める. この行列値差分作用素 $\widehat{M}(z)$ を $(D(t)T_{z,r})^2$ に“対角化”しよう. $\mathcal{K}[[z]]$ の元を成分に持つ 3×3 行列 $U(z) = [u_{ij}(z)]$ で $U(0)$ が対角成分がすべて 1 の上三角行列になり,

$$\widehat{M}(z) = U(z)(D(t)T_{z,r})^2 U(z)^{-1}, \quad \text{すなわち } \widehat{L}(z) = U(z)D(t)^2 U(r^2 z)^{-1}$$

を満たすものが一意に存在する. この一意性を使うと $\widehat{L}(z)$ への Weyl 群作用の公式から $U(z)$ への Weyl 群作用の公式を得ることができる. 結果を以下で説明しよう.

²⁹ $\hat{b}_i = -(q - q^{-1})t_i \hat{f}_i t_{i+1}$ を使えばそれらの公式から $s_i(\hat{f}_i)$ を計算することができる.

$g_i \in \mathcal{K}$ と行列 G_i を次のように定める ($i = 1, 2$):

$$g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}, \quad G_i = y_i(g_i).$$

このとき, $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$ となり,

$$\begin{aligned} s_i(\widehat{M}(z)) &= G_i \widehat{M}(z) G_i^{-1}, \\ \pi(\widehat{M}(z)) &= (\Lambda_3(z) T_{z,r}) \widehat{M}(z) (\Lambda_3(z) T_{z,r})^{-1} \end{aligned}$$

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax 表示** と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i^\vee}$ とおき, 対角行列 D_Z と行列 $Z(z)$ を

$$D_Z = \text{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z) D_Z$$

と定める. 行列 S_i^g, S_i を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_1^g &= \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき以下が成立している:

$$\begin{aligned} \widehat{M}(z) &= Z(z) D((qt) T_{z,r})^2 Z(z)^{-1} = Z(z) D(qt)^2 Z(r^2 z)^{-1} T_{z,r}^2, \\ s_i(U(z)) &= G_i U(z) S_i^g, \\ s_i(D_Z) &= (S_i^g)^{-1} D_Z S_i, \\ s_i(D(t) T_{z,r}) &= S_i^{-1} D(t) T_{z,r} S_i \\ s_i(Z(z)) &= G_i Z(z) S_i. \end{aligned}$$

π の作用はどれも次の形になっている:

$$\pi(X(z)) = (\Lambda_3(z) T_{z,r}) X(z) (\Lambda_3(z) T_{z,r})^{-1} \quad (X(z) = U(z), D_Z, D(t) T_{z,r}, Z(z)).$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson 表示** と呼ぶ.

2.6. まとめ

量子化された τ 関数 (より正確に言えば τ 変数) は単純コルートに対応するパラメータ変数 α_i^\vee の正準共役 $\partial/\partial\alpha_i^\vee$ の指数関数 $\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ のことである.

量子化された Weyl 群作用は $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \tilde{s}_i$ の形式で構成されたのでそれをそのまま τ_i たちに作用させれば, Weyl 群作用が量子化された τ 変数まで拡張される.

その作用のもとで $\mu \in P_+$ に対する $w(\tau^\mu)$ は従属変数 f_i たちとパラメータ変数 $q^{\pm\alpha_i^\vee}$ たちについて多項式になる.

τ 変数への Weyl 群作用は Sato-Wilson 表示を持つ.

3. 付録: 「量子化」と「変数べき f^γ の構成法」について

この付録では(正準)量子化と古典極限についておよび非可換環における変数 γ によるべき f^γ の構成法について解説する.

3.1. q 差分化と量子化の区別

「 q 差分化」と「量子化」という用語を厳密に区別して用いたい.

微分 $df(x)/dx$ を用いた事柄をパラメーター q で変形して, q 差分

$$T_{x,q}f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

を用いた事柄に拡張することおよびその適切な一般化を q 差分化と呼ぶことにする. 逆に $q \rightarrow 1$ で $T_{q,x} \rightarrow d/dx$ の極限を取る操作を 微分極限と呼ぶことにする. そして, 微分を用いて記述される数学的対象を微分版と呼び, q 差分を用いて記述される数学的対象を q 差分版と呼ぶことにする.

Poisson 括弧 $\{p, x\} = 1$ を持つ代数に関する事柄を交換関係

$$[p, x] = px - xp = 1$$

を満たす非可換環に関する事柄に拡張することおよびその適切な一般化を正準量子化と呼ぶことにする. 以下では簡単のため正準量子化を単に量子化と呼ぶことにする.

たとえば, 座標 x を持つ直線の余接束上の函数環の自然な量子化は x と d/dx で生成される微分作用素環である.

たとえば, Lie 代数 \mathfrak{g} の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ は \mathfrak{g} から生成される対称代数 $S(\mathfrak{g})$ (これは \mathfrak{g}^* 上の函数環とみなされる) の量子化である. さらに \mathfrak{g} が Kac-Moody 代数ならば, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の代数としての q 差分化であるとみなせる. 代数として $U_q(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の量子化とはみなさない. $U(\mathfrak{g})$ は不変微分作用素環とみなせるので微分版の数学的対象とみなされ, それとの対比で $U_q(\mathfrak{g})$ は代数として q 差分版の数学的対象とみなされる. 代数として量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は対称代数 $S(\mathfrak{g})$ の量子化かつ q 差分化になっている.

一方, $U_q(\mathfrak{g})$ の余積は非余可換であり, $q \rightarrow 1$ の極限で余可換な $U(\mathfrak{g})$ の余積が再現されるので, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は余代数として普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の量子化だとみなせる.

量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は代数として普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の q 差分化になっており, 余代数としては普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の量子化になっている. 代数としての q 差分化と余代数としての量子化のためのパラメーターの両方が同じ q になっているので混乱しないように注意が必要である.

3.2. 古典極限と Poisson 構造

パラメーター \hbar を含む可換とは限らない環 A_\hbar に対して, $\hbar \rightarrow 0$ の極限で得られる環 (すなわち \hbar で生成されるイデアルで A_\hbar を割ってできる剰余環 $A_\hbar/\hbar A_\hbar$) を A_0 と書き, $a \in A_\hbar$ の A_0 での像を \bar{a} と書くことにする.

A_0 は可換環になると仮定する. このとき A_\hbar は A_0 の量子化であるという. 仮定より, 任意の $a, b \in A_\hbar$ の交換子 $[a, b] = ab - ba$ は \hbar で割り切れる. 任意の $a, b \in A_\hbar$ に対して, $\hbar^{-1}[a, b] \in A_\hbar$ の A_0 での像は a, b の像だけから決まることがわかり, 可換環 A_0 に Poisson 構造を $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{\hbar^{-1}[a, b]}$ によって定めることができる. このように構成された Poisson 代数 A_0 を A_\hbar の古典極限と呼ぶことにする.

たとえば, $p = d/dx$ と x から $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成されるパラメーター \hbar 付きの微分作用素環 $\mathbb{C}[\hbar, x, d/dx]$ を考え, $p = \hbar d/dx$ と x から $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成される部分代数を A_\hbar と書くことにする. このとき $A_0 = A_\hbar/\hbar A_\hbar$ は \bar{p} と \bar{x} で生成される可換な多項式環になり, $\hbar^{-1}[p, x] = 1$ なので, $A_0 = \mathbb{C}[\bar{p}, \bar{x}]$ には $\{\bar{p}, \bar{x}\} = 1$ で自然に Poisson 構造が定まる. これが上の意味での古典極限の典型例である.

\mathbb{C} 上の Lie 環 \mathfrak{g} の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の古典極限は以下のように構成される. まず, $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}[\hbar]$ による係数拡大 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[\hbar]$ を考える. そして, $\hbar A$ ($A \in \mathfrak{g}$) たちから $\mathbb{C}[\hbar]$ 上生成されるその部分代数を A_\hbar とする. このとき $A_0 = A_\hbar/\hbar A_\hbar$ は可換環になり, $\hbar \mathfrak{g}$ から \mathbb{C} 上生成される対称代数 $S(\hbar \mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})$ に同型になる. これを $U(\mathfrak{g})$ の古典極限と呼ぶ. さらに, $A, B \in \mathfrak{g}$ に対して $[A, B] = C$ が成立しているとき, $\hbar^{-1}[\hbar A, \hbar B] = \hbar C$ となるので, $\hbar A, \hbar B, \hbar C$ の A_0 での像をそれぞれ a, b, c と書くと A_0 において $\{a, b\} = c$ が成立している. 要するに Lie 環における Lie ブラケット $[\ , \]$ をそのまま Poisson 括弧 $\{ \ , \ }$ に置き換えるだけで古典極限における Poisson 構造が得られる.

生成元 x, y と基本関係式 $xy = qyx$ で定義される $\mathbb{C}[q]$ 上の代数 A_q を考える. (古典極限は $q \rightarrow 1$ で得られる. $\hbar = q-1$ とおいて考えよ.) このとき $[x, y] = xy - yx = (q-1)yx$ が成立しているので, $A_{q=1} = A_q/(q-1)A_q$ は可換環になり, $A_{q=1}$ に自然に入る Poisson 構造は $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{x}\bar{y}$ を満たしている. このことから $\{a, b\} = ab$ 型の Poisson 構造の量子化は $xy = qyx$ 型の交換関係で定義される代数を用いて構成可能なことがわかる. この例は q 差分化された場合の量子化の構成において最も基本的である.

古典極限の形だけがわかっていても, 可能な量子化は無数にある. 我々が欲しいのは古典極限のレベルで成立している多くの結果が保たれるような良い量子化である. q 差分化されていない微分版の場合には, 手頃な手間で可能な直線的な手計算のみで良い量子化を構成可能なことが多いが, q 差分化された場合はそうではない. 背景に隠れている代数構造を明らかにしないと良い量子化を作ることは難しい.

しかも実際には古典極限における Poisson 構造の定義式が明らかになっていない場合が多数ある. そのような場合には量子化はさらに困難になる³⁰.

3.3. 非可換環の元の変数によるべきを導入する方法

非可換環の元 f の変数 γ によるべき f^γ を純代数的に構成する方法を解説しておく. さらに次の節で量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元のべきが満たす関係式の証明も簡単に解説しておく.

A は可換とは限らない環であるとする.

X は空でない集合であるとする. このとき, べき集合 A^X には自然に環構造が入る. 以下では, この状況の下で, A と単射準同型写像 $A \rightarrow A^X, a \mapsto (a)_{x \in X}$ による像を同一視することにする. これによって A は A^X の部分環とみなされる.

変数 γ による A の可逆元 f のべき f^γ は環 $A^\mathbb{Z}$ の元として $f^\gamma = (f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ と定義される. 任意の $k \in \mathbb{Z}$ について f^k が満たしている関係式を f^γ も満たしている. $A^\mathbb{Z}$ に埋め込まれた A と f^γ から生成された $A^\mathbb{Z}$ の部分環を考えれば, A に f の変数 γ によるべき f^γ を付け加えた環が得られる.

より一般に, 変数の組 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ の整係数多項式 $p(\gamma)$ に対して, $f^{p(\gamma)}$ は $A^{\mathbb{Z}^N}$ の元として $f^{p(\gamma)} = (f^{p(k)})_{k \in \mathbb{Z}^N}$ と定義される. このように定義された f のべきは変数 γ_i に任意の整数の組を代入したときに成立しているすべての関係式をみたしている. た

³⁰ 古典 Painlevé 系の研究者の方々にお願ひ. Poisson 構造も論文に書いて下さい. お願い致します.

たとえば

$$f^\gamma f^{-\gamma} = f^{-\gamma} f^\gamma = 1, \quad f^\lambda f^\mu = f^{\lambda+\mu}$$

が成立している. さらに, もしも A の可逆元 f, g と中心可逆元 c が

$$fg = cgf$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^\gamma = c^{\beta\gamma} g^\gamma f^\beta$$

が成立している.

他にも, たとえば, もしも A の可逆元 f, g が

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

も成立している.

このように単純な処方箋で, 自然な関係式を満たしている変数 γ によるべき f^γ を非可換環に自由に付け加えることができる.

3.4. Chevalley 生成元のべきが満たす関係式

いつものように q 二項係数を次のように定めておく:

$$\begin{aligned} [x]_q &= \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, & [k]_q! &= [1]_q [2]_q \cdots [k]_q, \\ \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$\mathbb{C}(q)$ 上の代数 A の可逆元 f, g はを任意に取り, 非負の整数 k に対する $\text{ad}_q(f)^k(g) \in A$ を次のように定める:

$$\text{ad}_q(f)(g) = fg - q^{-1}gf, \quad \text{ad}_q(f)^{k+1}(g) = f \text{ad}_q(f)^k(g) - q^{2k-1} \text{ad}_q(f)^k(g)f.$$

このとき, すべての整数 l について次が成立することを帰納法で示せる³¹:

$$f^l g f^{-l} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k-1)(l-k)} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}_q \text{ad}_q(f)^k(g) f^{-k}.$$

$k > l$ のとき q 二項係数は 0 になるので右辺は実際には有限和である.

ここで, 次の q -Serre 関係式が成立していると仮定する:

$$\text{ad}_q(f)^2(g) = f^2 g - (q + q^{-1})fgf + gf^2 = 0.$$

³¹ l が正の場合には両辺に右から f^l をかけて得られる公式を帰納法で証明し, l が負の場合には両辺に左から f_i^{-l} をかけて得られる公式を証明する.

このとき、上の公式より次が成立する:

$$f^l g f^{-l} = q^{-l} g + [l]_q (f g - q^{-1} g f) f^{-1}.$$

ゆえに前節の構成によって変数によるべき f^γ は次を満たしている:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = q^{-\gamma} g + [\gamma]_q (f g - q^{-1} g f) f^{-1}.$$

この右辺は次のように変形できる:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = [1 - \gamma]_q g + [\gamma]_q f g f^{-1} = q^\gamma g + [\gamma]_q (f g - q g f) f^{-1}.$$

さらに、次の q -Serre 関係式も成立していると仮定する:

$$g^2 f - (q + q^{-1}) g f g + f g^2 = 0.$$

このとき量子展開環の表現論によって任意の非負の整数 k, l に対して

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k$$

が成立することが知られている³²。これを **Verma 関係式**と呼ぶ³³。 k, l が両方非負の整数の場合の Verma 関係式から、 k, l のどちらか片方もしくは両方が負の整数の場合にも同じ公式が成立することが導かれる³⁴。

ゆえに、前節の構成によって、整数べきを変数べきで置き換えた次の公式が成立している:

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

これも Verma 関係式と呼ぶ。

参考文献

- [1] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., and Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. Nuclear Phys. B 241 (1984), no. 2, 333-380.
- [2] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 188-236. [arXiv:math/9912105](https://arxiv.org/abs/math/9912105)
- [3] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases. Quantum groups, 13-88, Contemp. Math., 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. [arXiv:math/0601391](https://arxiv.org/abs/math/0601391)
- [4] Deodhar, Vinay V., Gabber, Ofer, and Kac, Victor. Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras. Adv. in Math. 45 (1982), no. 1, 92-116.
- [5] Etingof, Pavel and Kazhdan, David. Quantization of Lie bialgebras. VI. Quantization of generalized Kac-Moody algebras. Transform. Groups 13 (2008), no. 3-4, 527-539. [arXiv:math/0004042](https://arxiv.org/abs/math/0004042)

³² Verma 加群のあいだの準同型がどれだけ存在するかに関する結果の一部である。 q -Serre 関係式を用いた直接の計算によって証明することもそう難しくない。

³³ より一般の Verma 関係式とその証明については教科書 [17] の Proposition 39.3.7 を参照せよ。

³⁴ たとえば k が負で $k+l$ が非負の場合の Verma 関係式は、両辺に左から f^{-k} をかけて右から g^{-k} をかけると、非負の整数べきのみを含む Verma 関係式の形になる。

- [6] Hasegawa, Koji. Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 275-288, Adv. Stud. Pure Math., 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. [arXiv:math/0703036](#)
- [7] Kac, Victor G. and Wakimoto, Minoru. Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 85 (1988), no. 14, 4956–4960.
- [8] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. A study on the fourth q -Painlevé equation. *J. Phys. A* 34 (2001), no. 41, 8563-8581. [arXiv:nlin/0012063](#)
- [9] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. Discrete dynamical systems with $W(A_{m-1}^{(1)}(1) \times A_{n-1}^{(1)})$ symmetry. *Lett. Math. Phys.* 60 (2002), no. 3, 211-219. [arXiv:nlin/0106029](#)
- [10] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy. *Lett. Math. Phys.* 62 (2002), no. 3, 259-268. [arXiv:nlin/0112045](#)
- [11] 黒木玄. 非可換環の局所化の演習問題. 演習問題集 10 pages, 2007年.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20070216_localization.pdf
- [12] 黒木玄. Ore集合の作り方. ノート 15 pages, 2010年作成.
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20101116OreSets.pdf>
- [13] 黒木玄. 量子 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ 双有理作用. ノート 15 pages, 2010年作成.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_WxW.pdf
- [14] 黒木玄. 互いに素な m, n に対する拡大アフィンWeyl群の直積 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の双有理作用の量子化. 講演スライド, 2013年作成.
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20130322WxW.pdf>
- [15] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 289-325, Adv. Stud. Pure Math., 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. [arXiv:0808.2604](#)
- [16] Kuroki, Gen. Regularity of quantum tau-functions generated by quantum birational Weyl group actions. [arXiv:1206.3419](#)
- [17] Lusztig, George. Introduction to quantum groups. Reprint of the 1994 edition. *Modern Birkhauser Classics*. Birkhauser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp.
- [18] Noumi, Masatoshi. Affine Weyl group approach to Painlevé equations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III (Beijing, 2002), 497-509, Higher Ed. Press, Beijing, 2002. [arXiv:math-ph/0304042](#)
- [19] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. *Physics and combinatorics 1999* (Nagoya), 287–319, *World Sci. Publ.*, River Edge, NJ, 2001. [arXiv:math.QA/0012028](#)
- [20] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions. *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 371-442, Adv. Stud. Pure Math., 40, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2004. [arXiv:math-ph/0203030](#)