A 型 Jackson 積分 と Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式, Slater ${}_r\psi_r$ 変換公式 の 一般化

伊藤 雅彦　(東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊　(神戸大学・理)

底 $q \in \mathbb{C}^*$ $(|q| < 1)$ に関して記号 $(u)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i u)$ を用いる．$(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\varphi = \varphi(z) = \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ に対して, $\langle \varphi, z \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle \varphi, z \rangle = \int_0^{z\infty} \varphi(w)\Phi(w)\Delta(w)\frac{d_q w_1}{w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q w_n}{w_n} = (1-q)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varphi(zq^\nu)\Phi(zq^\nu)\Delta(zq^\nu).$$

ただし $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して $zq^\nu = (z_1 q^{\nu_1}, \ldots, z_n q^{\nu_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n$ とする．ここで

$$\Phi(z) = (z_1 z_2 \cdots z_n)^\alpha \prod_{i=1}^{n}\prod_{m=1}^{s} \frac{(qa_m^{-1} z_i)_\infty}{(b_m z_i)_\infty} \prod_{1 \le j < k \le n} z_j^{2\tau-1} \frac{(qt^{-1} z_k/z_j)_\infty}{(tz_k/z_j)_\infty},$$

$$\Delta(z) = \prod_{1 \le j < k \le n} (z_j - z_k)$$

とする．ただし $q^\tau = t$ である．和 $\langle \varphi, z \rangle$ が収束するとき, $\langle \varphi, z \rangle$ を **A 型 Jackson 積分**と呼ぶ. $\theta(u) = (u)_\infty (qu^{-1})_\infty$ とするとき,

$$\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle = \frac{\langle \varphi, z \rangle}{\Theta(z)}, \qquad \Theta(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i^\alpha}{\prod_{m=1}^{s} \theta(b_m z_i)} \prod_{1 \le j < k \le n} \frac{z_j^{2\tau}\theta(z_j/z_k)}{\theta(tz_j/z_k)}$$

とおき, $\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle$ を A 型 Jackson 積分の**正則化**と呼ぶ.

$$Z = Z_{s,n} = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{N}^s \,;\, \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s = n\}$$

とおくとき $|Z_{s,n}| = \binom{n+s-1}{n}$ である．$x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ と $\mu \in Z_{s,n}$ に対して

$$x_\mu = (\underbrace{x_1, x_1 t, \ldots, x_1 t^{\mu_1 - 1}}_{\mu_1}, \underbrace{x_2, x_2 t, \ldots, x_2 t^{\mu_2 - 1}}_{\mu_2}, \ldots, \underbrace{x_s, x_s t, \ldots, x_s t^{\mu_s - 1}}_{\mu_s}) \in (\mathbb{C}^*)^n \tag{1}$$

とする．Jackson 積分表示の差分 de Rham 理論 [2] により, $\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle$ はランク $\binom{n+s-1}{n}$ の q-差分方程式を満たし, その方程式は z によらないことがわかっている．$\langle\!\langle \varphi, x_\mu \rangle\!\rangle$ $(\mu \in Z_{s,n})$ は解空間の基底をなし, $\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle$ をその一次結合で書くことを接続公式と呼ぶ.

定理 1(接続公式). $\varphi(z)$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の正則な対称函数ならば,

$$\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle = \sum_{\lambda \in Z_{s,n}} \langle\!\langle \varphi, x_\lambda \rangle\!\rangle E_\lambda(x; z) \tag{2}$$

が成立．ここで, 接続係数 $E_\lambda(x; z)$ は具体的に次のように与えられる．

$$E_\lambda(x; z) = \sum_{\substack{K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_s \\ = \{1,2,\ldots,n\}}} \prod_{i=1}^{s} \prod_{k \in K_i} \left[\frac{\theta(q^\alpha b_1 \cdots b_s t^{n-1} z_k \prod_{\substack{1 \le l \le s \\ l \ne i}} x_l t^{\lambda_l^{(k-1)}})}{\theta(q^\alpha b_1 \cdots b_s t^{n-1} \prod_{l=1}^{s} x_l t^{\lambda_l^{(k-1)}})} \prod_{\substack{1 \le j \le s \\ j \ne i}} \frac{\theta(z_k x_j^{-1} t^{-\lambda_j^{(k-1)}})}{\theta(x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}} x_j^{-1} t^{-\lambda_j^{(k-1)}})} \right]. \tag{3}$$

ただし $\lambda_i^{(k)} = |K_i \cap \{1, 2, \ldots, k\}|$ で, 和は $|K_i| = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ を満たすような添字集合の分割 $K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_s = \{1, 2, \ldots, n\}$ の全体に亘る.

接続公式 (2) は Slater の ${}_r\psi_r$ 変換公式 [4, 式 (5.4.3), p.142] の一般化になっている．また (3) で表される函数 $E_\lambda(x; z)$ を **A 型楕円 Lagrange 補間函数**と呼ぶことにする.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである。

例 ($n=1$ の場合). $Z_{s,1}=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_s\}$ である．ただし $\epsilon_i=(0,\dots,0,\overset{i}{\smile}{1},0,\dots,0)$. このとき $E_{\epsilon_i}(x;z)=\dfrac{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_s x_1\cdots x_s z/x_i)}{\theta(q^\alpha b_1\cdots b_s x_1\cdots x_s)}\displaystyle\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\dfrac{\theta(z/x_j)}{\theta(x_i/x_j)}$ となる．接続公式 (2) の $z=a_i$ $(i=1,\dots,s)$, $x_j=b_j^{-1}$ $(j=1,\dots,s)$ の場合は [3] に, $\varphi\equiv 1$ の場合は [8] に与えられている．また $\varphi\equiv 1$ の場合の接続公式 (2) は Slater の ${}_r\psi_r$ の変換公式と一致する [7].

例 ($s=1$ の場合). $Z_{1,n}=\{(n)\}$ であり, $x\in\mathbb{C}^*$ に対し, $x_{(n)}=(x,xt,\dots,xt^{n-1})$ である．このとき, 接続公式 (2) は以下のようになる ([5] 参照).

$$\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\varphi,x_{(n)}\rangle\!\rangle E_{(n)}(x;z),\quad \text{ただし}\quad E_{(n)}(x;z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}z_i)}{\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}xt^{i-1})}. \tag{4}$$

さらに, A 型楕円 Lagrange 補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の性質を使うことにより次が導かれる．

定理 2. $B=B_{s,n}=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\,;\,s-1\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0\}$ とする．Schur 函数 $\sigma_\lambda(z)=\det\left(z_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}/\Delta(z)$ に対して, 以下が成立する．

$$\begin{aligned}\det\Big(\langle\!\langle\sigma_\lambda,x_\mu\rangle\!\rangle\Big)_{\substack{\lambda\in B\\ \mu\in Z}}&=\{(1-q)(q)_\infty\}^{n\binom{n+s-1}{n}}\\ &\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(qt^{-(n-k+1)})_\infty^s}{(qt^{-1})_\infty^s}\frac{\theta(q^\alpha t^{n+k-2}\prod_{l=1}^s x_l b_l)\prod_{i=1}^s\prod_{j=1}^s(qa_i^{-1}b_j^{-1}t^{-(n-k)})_\infty}{(q^\alpha t^{n-k})_\infty(q^{1-\alpha}t^{-(n+k-2)}\prod_{i=1}^s a_i^{-1}b_i^{-1})_\infty}\right]^{\binom{s+k-2}{k-1}}\\ &\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{r=0}^{n-k}\prod_{1\le i<j\le s}x_i t^r\theta(x_i^{-1}x_j t^{(n-k)-2r})\right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.\end{aligned} \tag{5}$$

例 ($s=1$ の場合 [5]). 上記公式と (4) を組み合わせると

$$\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle=(1-q)^n(q)_\infty^n\prod_{j=1}^{n}\frac{(qt^{-j})_\infty(qa_1^{-1}b_1^{-1}t^{-(j-1)})_\infty\,\theta(q^\alpha b_1 t^{n-1}z_j)}{(qt^{-1})_\infty(q^\alpha t^{j-1})_\infty(q^{1-\alpha}a_1^{-1}b_1^{-1}t^{-(n+j-2)})_\infty}.$$

この公式は [1] で与えられ, 特に $z=(a_1,a_1t,\dots,a_1t^{n-1})$ のときは, Askey, Habsieger, Kadell, Evans によって与えられた q-Selberg 積分の公式と一致する．$n=1$ の場合は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和公式 [4, 式 (5.2.1), p.138] と一致することから, (5) は ${}_1\psi_1$ 和公式の拡張となっている。

注. 以上, 定理 1, 定理 2 に対応する BC_n 型 Jackson 積分の場合の結果は [6] を参照のこと．

講演では A 型楕円 Lagrange 補間函数との関係, 接続公式 (2) や上記公式 (5) の証明について触れる予定である．

参考文献

[1] K. Aomoto: On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems, J. Algebraic Combin. 8 (1998), 115–126.

[2] K. Aomoto and Y. Kato: A q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals, Special functions (Okayama, 1990), 30–62, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991.

[3] K. Aomoto and Y. Kato: Connection formula of symmetric A-type Jackson integrals, Duke Math. J. 74 (1994), 129–143.

[4] G. Gaspar and M. Rahman: *Basic hypergeometric series*, 2nd ed., Cambridge, 2004.

[5] M. Ito and P. J. Forrester: A bilateral extension of the q-Selberg integral, Trans. AMS, to appear.

[6] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, arXiv:1506.07267.

[7] M. Ito and Y. Sanada: On the Sears–Slater basic hypergeometric transformations, Ramanujan J. 17 (2008), 245–257.

[8] K. Mimachi: Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan–Pochhammer type. Nagoya Math. J. 116 (1989), 149–161.

A 型楕円 Lagrange 補間函数の構成法

伊藤 雅彦　(東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊　(神戸大学・理)

A 型 Jackson 積分の接続関係式 [1, 式 (2)] に現れる楕円 Lagrange 補間函数 $E_\mu(x;z)$ を, $z=(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ の函数として構成し, その性質を述べる ($\zeta=q^\alpha t^{n-1}b_1\cdots b_s$).

$\zeta\in\mathbb{C}^*$ を固定し, 次の条件 (1), (2) を満たす函数 $f(z)$ の全体を $H_{s,n}$ と書く.

(1) $f(z)$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の対称な正則函数,

(2) $f(z)$ は q シフト $z_i\to qz_i$ に対して次の擬周期性を満たす:

$$T_{q,z_i}f(z)=f(z)/(-z_i)^s\zeta\quad(i=1,2,\dots,n).$$

$H_{s,n}$ の $\mathbb{C}$ 線型空間としての次元は $\binom{s+n-1}{n}$ である.

$$Z=Z_{s,n}=\{\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s)\in\mathbb{N}^s\,;\,\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=n\}$$

とするとき $H_{s,n}$ の基底 $E_\lambda(x;z)$ $(\lambda\in Z_{s,n})$ で, 補間函数の性質

$$E_\lambda(x;x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}\quad(\lambda,\mu\in Z_{s,n})\tag{1}$$

を満たすものを構成する. x_μ は $x=(x_1,\dots,x_s)\in(\mathbb{C}^*)^s$ に対して次で与えられた点.

$$x_\mu=(\underbrace{x_1,x_1t,\dots,x_1t^{\mu_1-1}}_{\mu_1},\underbrace{x_2,x_2t,\dots,x_2t^{\mu_2-1}}_{\mu_2},\dots,\underbrace{x_s,x_st,\dots,x_st^{\mu_s-1}}_{\mu_s})\in(\mathbb{C}^*)^n$$

以下, $e(u;v)=u\theta(v/u)$ とおく. $e(u;v)=-e(v;u)$, $e(qu;v)=(-v/u)e(u;v)$ が成立.

例 ($n=1$ の場合). $Z_{s,1}=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_s\}$ である. ただし $\epsilon_i=(0,\dots,0,\overset{i}{\breve{1}},0,\dots,0)$. $x=(x_1,\dots,x_s)$ に対し, $x_{\epsilon_i}=x_i\in\mathbb{C}^*$.

$$E_{\epsilon_i}(x;z)=\frac{e(z\,\zeta\prod_{k=1}^s x_k;x_i)}{e(x_i\zeta\prod_{k=1}^s x_k;x_i)}\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\ne i}}\frac{e(z\,;x_j)}{e(x_i;x_j)}\tag{2}$$

とすれば, $E_{\epsilon_i}(x;x_j)=\delta_{ij}$ を満たし, $\{E_{\epsilon_i}(x;z)\,;\,i=1,\dots,s\}$ は $H_{1,n}$ の基底をなす.

●補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の構成法

$n\ge2$ の場合には $z=(z_1,\dots,z_n)$ に対して $E_\lambda(x;z)$ $(\lambda\in Z_{s,n})$ を帰納的に

$$E_\lambda(x;z_1,\dots,z_n)=\sum_{1\le k\le s;\,\lambda_k>0}E_{\lambda-\epsilon_k}(x;z_1,\dots.z_{n-1})E_{\epsilon_k}(xt^{\lambda-\epsilon_k};z_n).$$

で定義する. ただし, $xt^\mu=(x_1t^{\mu_1},\dots,x_st^{\mu_s})\in(\mathbb{C}^*)^s$. このとき,

定理 1.(双対 Cauchy 核) 条件 $\zeta\prod_{i=1}^s w_i=1$ のもとで,

$$\Psi(z,w):=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^s e(z_i,w_j)=\sum_{\mu\in Z_{s,n}}E_\mu(x;z)F_\mu(x;w)\tag{3}$$

が成立. ここで, $x,w\in(\mathbb{C}^*)^s$ に対して

$$F_\mu(x;w):=\Psi(x_\mu;w)=\prod_{i=1}^s\prod_{j=1}^s e(x_i;w_j)_{\mu_i}$$

と定める. ただし, $e(u;v)_r=e(u;v)e(ut;v)\cdots e(ut^{r-1};v)$.

三角性 $w_{(\nu)}:=\big(x_1t^{\nu_1},x_2t^{\nu_2},\dots,x_{s-1}t^{\nu_{s-1}},(\zeta\prod_{k=1}^{s-1}x_kt^{\nu_k})^{-1}\big)\in(\mathbb{C}^*)^s$ のとき, $F_\mu(x;w_{(\nu)})=\prod_{i=1}^s\{e(x_i;(\zeta\prod_{k=1}^{s-1}x_kt^{\nu_k})^{-1})_{\mu_s}\prod_{j=1}^{s-1}e(x_i;x_jt^{\nu_j})_{\mu_i}\}$ となり, 結果的に行列 $\big(F_\mu(a;w_{(\nu)})\big)_{\mu,\nu\in Z}$ は上三角となり, 特に $\det\big(F_\mu(a;w_{(\nu)})\big)_{\mu,\nu\in Z}\ne0$ であることが確かめられる.

本研究は科研費 [課題番号:(C)25400118 および (B)15H03626] の助成を受けたものである。

系. $\zeta\prod_{i=1}^{s} w_i = 1$ 上で $w \in (\mathbb{C}^*)^s$ の正則函数族 $\{F_\mu(x;w)\,;\mu \in Z_{s,n}\}$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立.

系. $\{E_\mu(x;z)\,;\mu \in Z_{s,n}\}$ は $\mathbb{C}$ 線形空間 $H_{s,n}$ の基底となり $E_\lambda(x;x_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$.

●補間函数の再帰的関係式

定理 2. $n = p + q$ とする. $z = (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ に対して, $z' = (z_1, \ldots, z_p) \in (\mathbb{C}^*)^p$ と $z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^q$ とおき, $z = (z', z'')$ と表す. このとき以下が成立する.

$$E_\lambda(x;z) = \sum_{\substack{\mu \in Z_{s,p},\, \nu \in Z_{s,q} \\ \mu+\nu=\lambda}} E_\mu(x;z')E_\nu(xt^\mu;z''). \tag{4}$$

※ (4) の証明には (3) と $F_\mu(x;w)$ の性質 $F_\mu(x;w)F_\nu(xt^\mu;w) = F_{\mu+\nu}(x;w)$ が使われる.

この漸化式 (4) を何度も使うと,

$$E_\lambda(x;z) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,s\}^n \\ \epsilon_{i_1}+\cdots+\epsilon_{i_n}=\lambda}} E_{\epsilon_{i_1}}(x;z_1)E_{\epsilon_{i_2}}(xt^{\epsilon_{i_1}};z_2)E_{\epsilon_{i_3}}(xt^{\epsilon_{i_1}+\epsilon_{i_2}};z_3)\cdots E_{\epsilon_{i_n}}(xt^{\epsilon_{i_1}+\cdots+\epsilon_{i_{n-1}}};z_n)$$

が得られるので, 式 (2) により補間函数 $E_\lambda(x;z)$ の**具体的表示**は以下のようになる.

系.

$$E_\lambda(x;z) = \sum_{\substack{K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s \\ =\{1,2,\ldots,n\}}} \prod_{i=1}^{s}\prod_{k\in K_i}\left[\frac{e(z_k\,\zeta\prod_{l=1}^{s} x_l t^{\lambda_l^{(k-1)}}; x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}})}{e(x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}}\zeta\prod_{l=1}^{s} x_l t^{\lambda_l^{(k-1)}}; x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}})}\prod_{\substack{1\le j\le s \\ j\ne i}}\frac{e(z_k; x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}})}{e(x_i t^{\lambda_i^{(k-1)}}; x_j t^{\lambda_j^{(k-1)}})}\right].$$

ただし $\lambda_i^{(k)} = |K_i \cap \{1,2,\ldots,k\}|$ で, 和は $|K_i| = \lambda_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$ を満たすような添字集合の分割 $K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_s = \{1,2,\ldots,n\}$ の全体に亘る.

●二つの補間函数間の変換係数

$x, y \in (\mathbb{C}^*)^s, z \in (\mathbb{C}^*)^n$ に対して, $E_\mu(x;z)$ を $E_\nu(y;z)$ $(\nu \in Z_{s,n})$ によって展開する.

$$E_\mu(x;z) = \sum_{\nu\in Z_{s,n}} c_{\mu\nu}\, E_\nu(y;z).$$

このとき, 式 (1) より直ちに変換係数 $c_{\mu\nu}$ は $c_{\mu\nu} = E_\mu(x;y_\nu)$ と書ける. よって特に

$$E_\mu(x;z_\lambda) = \sum_{\nu\in Z_{s,n}} E_\mu(x;y_\nu)\, E_\nu(y;z_\lambda).$$

これより, 変換係数 $c_{\mu\nu}$ からなる行列 $E(x;y) := \big(E_\mu(x;y_\nu)\big)_{\mu,\nu\in Z_{s,n}}$ に対して次が成立.

定理 3. $x, y, z \in (\mathbb{C}^*)^s$ に対し,

$$E(x;z) = E(x;y)E(y;z), \quad E(x;x) = I, \quad E(y;x) = E(x;y)^{-1}.$$

系. $$\det E(x;y) = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\theta(\zeta t^{k-1}\prod_{i=1}^{s} y_i)}{\theta(\zeta t^{k-1}\prod_{i=1}^{s} x_i)}\right]^{\binom{s+k-2}{k-1}}\left[\prod_{r=0}^{n-k}\prod_{1\le i<j\le s}\frac{e(y_i t^r; y_j t^{(n-k)-r})}{e(x_i t^r; x_j t^{(n-k)-r})}\right]^{\binom{s+k-3}{k-1}}.$$

※この行列式は, A 型 Jackson 積分の行列式公式 [1, 式 (5)] を証明する際に使われる.

注. 以上の定理に対応する BC_n 型楕円 Lagrange 補間函数の場合の結果は [2] を参照.

参考文献

[1] 伊藤, 野海: A 型 Jackson 積分と Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式, Slater ${}_r\psi_r$ 変換公式の一般化, 本アブストラクト集

[2] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, arXiv:1506.07267.

A generalization of the q-Chu–Vandermonde sum for basic hypergeometric series

上岡　修平　(京都大学)*

1. q-Chu–Vandermondeの和公式の一般化

Gaussの超幾何級数のq-類似であるq-超幾何級数

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a;q)_i (b;q)_i}{(c;q)_i (q;q)_i} z^i \tag{1} $$

を考える．ただし$(a;q)_i$はq-Pochhammer記号であり

$$ (a;q)_i = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - aq^k) \tag{2} $$

$(i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\})$により定義される．特に$a = q^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$のときq-超幾何級数(1)は(変数zに関して)高々n次の多項式になる．

q-超幾何級数(1)の満たす公式

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, a \\ c \end{matrix}; q, q\right) = \frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n} a^n, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3} $$

を*q-Chu–Vandermonde*の和公式という(例えば[1, 2])．q-Chu–Vandermondeの和公式(3)は，q-二項定理やq-Pfaff–Saalschützの和公式と並んでq-超幾何級数の満たす基本的な和公式のひとつである(例えば[1, 2])．本講演ではq-Chu–Vandermondeの和公式(3)のひとつの一般化として，次の和公式を紹介する．

定理 1 (K. [3])**.** 任意の$n \in \mathbb{N}$および不定元a, c, $p_1, \dots, p_{n-1}$, $q_1, \dots, q_{n-1}$に対して

$$ \sum_{i=0}^{n} \left\{ \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{k}}} - a \right) \right\} \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(c\boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} (c\boldsymbol{q}^{\overline{k}} - a) \tag{4} $$

が成り立つ．ただし$\boldsymbol{p}^{\overline{k}} = p_1 \cdots p_k$, $\boldsymbol{q}^{\overline{k}} = q_1 \cdots q_k$である．また左辺の第2の和は，弱い意味で単調減少な$n - i$個の非負整数の列$(\nu_i, \dots, \nu_{n-1})$で$\nu_i \leq i$を満たすもの全てにわたってとる．

和公式(4)は$p_1 = \cdots = p_{n-1} = q_1 = \cdots = q_{n-1} = q$のとき$q$-Chu–Vandermondeの和公式(3)に帰着する．この意味で和公式(4)はq-Chu–Vandermondeの和公式(3)の多パラメータ拡張を与えている．

2. 直交多項式への応用

変数zに関する多項式

$$ \mathcal{L}_n(z; a; p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots) = \sum_{i=0}^{n} z^i \left(\prod_{k=i}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \right) \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a\boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{5} $$

* 〒606-8501 京都市左京区吉田本町　京都大学大学院情報学研究科
e-mail: kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp

$(n \in \mathbb{N})$ を考える．多項式 (5) は $p_1 = p_2 = \cdots = q_1 = q_2 = \cdots = q$ のとき古典直交多項式のひとつである *little q-Laguerre (Wall)* **多項式** (例えば [4])

$$L_n(z; a/q; q) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (a;q)_n \, {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ a \end{matrix} ; q, zq \right) \tag{6}$$

に帰着する．この意味で多項式 (5) は little q-Laguerre 多項式の多パラメータ拡張を与えている．little q-Laguerre 多項式の持つ直交性は次のように拡張される．

定理 2 (K. [3])**.** 多項式 (5) は

$$\langle \mathcal{L}_n(z; a; p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots), z^j \rangle = \delta_{n,j} \times a^n \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} (\boldsymbol{q}^{\overline{k}} - \boldsymbol{q}^{\overline{n}}) \tag{7}$$

を満たす．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle z^i, z^j \rangle = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - a \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \boldsymbol{q}^{\overline{j}}), \qquad i, j \in \mathbb{N} \tag{8}$$

により定まる (非対称な) 双線形形式であり，$\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである．

直交関係式 (7) は和公式 (4) を用いて証明することができる．これは little q-Laguerre 多項式 (6) の持つ直交性を q-超幾何級数に関する q-Chu–Vandermonde の和公式 (3) を用いて示すのと同じである．

定理 *2* の証明．(5) と (8) より (7) の左辺は

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}^{\overline{k}} \right) \sum_{i=0}^{n} \left\{ \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{k}}} - a \boldsymbol{q}^{\overline{j}} \right) \right\} \sum_{i \geq \nu_i \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq 0} \prod_{k=i}^{n-1} \left(a \boldsymbol{q}^{\overline{k-\nu_k}} - \frac{1}{\boldsymbol{p}^{\overline{\nu_k}}} \right) \tag{9}$$

に等しい．和 $\sum_{i=0}^{n} \cdots$ に和公式 (4) を適用すれば直交関係式 (7) の右辺が得られる． □

多項式 (5) の 2 パラメータ変形として

$$\mathcal{L}_n^{(s,t)}(z; a; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \mathcal{L}(z; a \boldsymbol{p}^{\overline{s}} \boldsymbol{q}^{\overline{t}}; p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots; q_{t+1}, q_{t+2}, \ldots), \qquad s, t \in \mathbb{N} \tag{10}$$

を導入するとき多項式 (5) と **離散 *2* 次元戸田分子** との関係が明らかになる．これについては講演中に説明する．

参考文献

[1] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674.

[4] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

Pseudo Wilson polynomials

渋川 元樹　(阪大情報)*

概　　要

有限個の Jacobi 多項式からなる直交多項式系の Jacobi 変換を考えることで,
新たな有限個の直交多項式系とその諸性質を導出する.

Gauss の超幾何函数で定義される Jacobi 多項式

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(\alpha+1)_m}{m!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m, m+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right)$$

について, $\alpha, \beta > -1$ に対して, 以下の直交関係式が成立することが知られている.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx\\ &\quad= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{mn}.\end{aligned} \tag{1}$$

これとは別に, 自然数 N を fix したとき, $\alpha+\beta < -2N-1, \beta > -1, m, n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{1}^{\infty}(x+1)^\alpha(x-1)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(-x)P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)\,dx\\ &\quad= -\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-n-\alpha)n!}\delta_{mn}.\end{aligned} \tag{2}$$

という有限個の Jacobi 多項式からなる直交系も知られている ([1] 参照).

他方, 既知の直交系を Fourier 変換や Mellin 変換といった unitary 変換で写して新たな直交系を得るという研究も古くから知られている. Koornwinder は, Fourier-cosine 変換や Mehler-Fock 変換を特殊な場合として含む Jacobi 変換

$$\begin{aligned}J_{\alpha,\beta}(f)(\lambda) :=& \int_0^\infty f(t)\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt,\\ \phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) :=& {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1+i\lambda), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-i\lambda)\\ \alpha+1\end{matrix}; -\mathrm{sh}^2 t\right),\\ \Delta_{\alpha,\beta}(t) :=& (2\mathrm{sh}t)^{2\alpha+1}(2\mathrm{ch}t)^{2\beta+1},\end{aligned}$$

および $f \in L^2(\mathbb{R}, \Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\beta| \le \alpha+1$ に対して成立する Plancherel の定理

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(t)|^2\Delta_{\alpha,\beta}(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |J_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)|^2|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}\,d\lambda,\\ c_{\alpha,\beta}(\lambda) &:= \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(i\lambda+\alpha+\beta+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(i\lambda+\alpha-\beta+1)\right)},\end{aligned}$$

キーワード：直交多項式, Askey スキーム, Jacobi 多項式, Jacobi 変換
* 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山 1-1　大阪大学大学院情報科学研究科
e-mail: g-shibukawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

を用いて, Jacobi 多項式 (の直交関係式 (1)) から一般超幾何函数 ${}_4F_3$ で定まる Wilson 多項式

$$\frac{W_m(\lambda^2;a,b,c,d)}{(a+b)_m(a+c)_m(a+d)_m} := {}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,-m+a+b+c+d-1,a+i\lambda,a-i\lambda\\ a+b,a+c,a+d\end{matrix};1\right)$$

およびその直交関係式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left|\frac{\Gamma(a+i\lambda)\Gamma(b+i\lambda)\Gamma(c+i\lambda)\Gamma(d+i\lambda)}{\Gamma(2i\lambda)}\right|^2 W_m(\lambda^2;a,b,c,d)\overline{W_n(\lambda^2;a,b,c,d)}\,d\lambda\\ &=\frac{\Gamma(m+a+b)\Gamma(m+a+c)\Gamma(m+a+d)\Gamma(m+b+c)\Gamma(m+b+d)\Gamma(m+c+d)}{\Gamma(2m+a+b+c+d)}\\ &\quad\cdot(m+a+b+c+d-1)_m m!\delta_{mn},\quad \mathrm{Re}\,(a,b,c,d)>0,\end{aligned}$$

等の諸性質が得られることを示した [2],[3].

今回の発表では, 有限個の Jacobi 多項式からなる直交多項式系 (2) についても同様の計算を行い, 以下の ${}_4F_3$ から定まる有限個の直交系が得られること及びその退化や差分関係式等の諸性質を報告する.

定義 1. $\alpha-\delta<-1,\delta<1,|\beta|<\alpha+1$ に対し,

$$a:=\frac{-\alpha+\delta+i\mu}{2},b:=\frac{-\alpha+\delta-i\mu}{2},c:=\frac{\alpha+\beta}{2},d:=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

とおく. 自然数 N を fix して,

$$\begin{aligned}&PW_m(\lambda^2;a,b,c,d)\\ :=&\frac{(a+i\lambda)_{N-m}(a-i\lambda)_{N-m}}{\Gamma(a+c-m)\Gamma(a+d-m)}\frac{(-2N+m-a-b)_m}{m!}\\ &\cdot{}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,-m+a+b+c+d,a+N-m+i\lambda,a+N-m-i\lambda\\ a+b+1+2N-2m,a+c-m,a+d-m\end{matrix};1\right).\end{aligned}$$

とする.

定理 2. $m,n\in\{0,1,\dots,N\}$ について

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty PW_m(\lambda^2;a,b,c,d)\overline{PW_n(\lambda^2;a,b,c,d)}\\ &\cdot\left|\frac{\Gamma(a+i\lambda)\Gamma(b+i\lambda)\Gamma(c-N+i\lambda)\Gamma(d-N+i\lambda)}{\Gamma(2i\lambda)}\right|^2 d\lambda\\ &=-\frac{\Gamma(1+2N-m+a+b)\Gamma(m-2N-a-b)}{(2(N-m)+a+b)\Gamma(-m+a+b+c+d)m!}\delta_{mn}.\end{aligned}$$

参考文献

[1] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer (2010).

[2] T. H. Koornwinder, *Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier-Jacobi transform*, Orthogonal polynomials and applications, (1984), 174–183, LNM **1171**.

[3] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications, (1984), 1–85, Math. Appl., Reidel, Dordrecht.

パデ法とq差分ガルニエ系

長尾秀人（明石工業高等専門学校・一般科目）
山田泰彦（神戸大学大学院・理学研究科）

パデ近似を応用して，q 差分ガルニエ系に対する，時間発展方程式，ラックス形式および超幾何関数型特殊解の行列式表示を構成した．本講演では，その結果について報告する．

1. パデ法

パデ法とは，適当な特殊多項式の母関数 $Y(x)$ を与え, パデ近似の問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \ (mod \ \ x^{m+n+1}) \tag{1}$$

を設定して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 2 種類の 3 項間線形差分方程式

$$L_2(x) := \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \overline{y}(x) \\ u(x) & u(qx) & \overline{u}(x) \\ v(x) & v(qx) & \overline{v}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad L_3(x) := \begin{vmatrix} y(x) & \overline{y}(x) & \overline{y}(x/q) \\ u(x) & \overline{u}(x) & \overline{u}(x/q) \\ v(x) & \overline{v}(x) & \overline{v}(x/q) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

(ここで, $u(x) = P_m(x), \quad v(x) = Y(x)Q_n(x)$ とし，時間発展 $\overline{\bigcirc} = T(\bigcirc)$ と記す.) を構成して, パンルヴェ方程式, ラックス形式, 特殊解の 3 つを同時に求める方法である．パデ法の先行結果として，パンルヴェ方程式 VI，V，IV 型およびガルニエ系 [5] があり，離散パンルヴェ方程式では,

e-$E_8^{(1)}$	q-$E_8^{(1)}$	q-$E_7^{(1)}$	q-$E_6^{(1)}$	q-$D_5^{(1)}$	q-$A_4^{(1)}$	q-$(A_2+A_1)^{(1)}$
[4]	[6]	[2]	[1][2][3]	[1][2][3]	[2][3]	[2]

が知られている.

2. q-ガルニエ系の場合

- 母関数

$$Y(x) = \prod_{i=1}^{N+1} \frac{(a_i x)_\infty}{(b_i x)_\infty} \tag{3}$$

を与え，差分的時間発展を $T : (a_1, b_1) \mapsto (qa_1, qb_1)$ とし，パデ問題 (1) を設定する．ここで，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i)_j = \prod_{k=0}^{j-1}(1-\alpha_1 q^k)(1-\alpha_2 q^k)\cdots(1-\alpha_i q^k)$ とする.

- $y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 2 種類の線形差分方程式 (2) を計算すると,

$$\begin{aligned} L_2(x) &= A_1(x)y(qx) - (x/b_1)_1 G(x)y(x) - (1-g_0)F(x)\overline{y}(x) = 0, \\ L_3(x) &= B_1(x/q)\overline{y}(x/q) - r(x/a_1)_1 G(x/q)\overline{y}(x) - (1-rg_0)\overline{F}(x/q)y(x) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&A_i(x) = \frac{A(x)}{(a_i x)_1}, \quad A(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(a_i x)_1, \quad B_i(x) = \frac{B(x)}{(b_i x)_1}, \quad B(x) = \prod_{i=1}^{N+1}(b_i x)_1, \\
&F(x) = 1 + \sum_{i=1}^{N} f_i x^i, \quad G(x) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x^i,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$r = q^{-(m+n+1)}$ とし，$f_1 \ldots, f_N, g_0, \ldots, g_{N-1}$ は x に依存しない変数である．

- L_2, L_3 (4) の両立条件を考えると，$2N$ 変数 f_i, g_{i-1} $(i = 1, \ldots, N)$ に対する次の非線形差分方程式 (差分的時間発展方程式) が得られる．

$$
\begin{aligned}
&A_1(x)B_1(x) - r(a_1 x, b_1 x)_1 G(x)\underline{G}(x) = 0 \quad \text{for} \quad F(x) = 0, \\
&rA_1(x)B_1(x) - (1 - g_0)(1 - rg_0)F(x)\overline{F}(x) = 0 \quad \text{for} \quad G(x) = 0, \\
&f_N \overline{f}_N = \frac{(qra_1 g_{N-1} - \prod_{i=2}^{N+1}(-b_i)/s)(b_1 g_{N-1} - s\prod_{i=2}^{N+1}(-a_i))}{(1 - g_0)(1 - rg_0)},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここで，$s = q^m$ である．これは q-ガルニエ方程式 [7] と等価である．

- (6) の自励化は，超楕円曲線に対する QRT 系の拡張と見なせる．
- (4) から，$y(x/q), y(x), y(qx)$ の 3 項間線形差分方程式 $L_1(x)$ が得られ，ラックス形式 $L_1(x), L_2(x)$ が構成される．
- $Y(x)$ は q-アペル・ロリチェラの多変数超幾何関数 [8] の母関数であり，対応する特殊解は，q-アペル・ロリチェラの多変数超幾何関数を要素とする行列式として構成される．

参考文献

[1] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q-Painlevé Equation of Type $E_6^{(1)}$ by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.

[2] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations*, Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 4, 503–521.

[3] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations II (differential grid version)*, arXiv:1509.05892 .

[4] Noumi M., Tsujimoto S., and Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.

[5] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.

[6] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B47** (2014), 087–095.

[7] Sakai H., *A q-analog of the Garnier system*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2005), 273–297.

[8] Sakai H., *Hypergeometric Solution of q-Schlesinger System of Rank Two*, Lett. Math. Phys. **73** (2005), 237–247.

q-超幾何関数 ${}_3\phi_2$ を解に持つ4階q-パンルヴェ方程式

鈴木 貴雄　(近畿大学理工学部)*

1. はじめに

講演者は2012年春の学会において, 次の高階 q パンルヴェ方程式 q-$P_{(n,n)}$ を導入した:

$$\begin{cases} x_i(t)-x_{i-1}(t)=\dfrac{a_ix_i(qt)}{1+x_i(qt)y_{i-1}(t)}-\dfrac{b_{i-1}x_{i-1}(qt)}{1+x_{i-1}(qt)y_{i-1}(t)} \\ y_i(qt)-y_{i-1}(qt)=\dfrac{b_iy_i(t)}{1+x_i(qt)y_i(t)}-\dfrac{a_iy_{i-1}(t)}{1+x_i(qt)y_{i-1}(t)} \end{cases} \qquad (i=1,\dots,n),$$

ただし

$$b_0=\frac{b_n}{q},\quad x_0(t)=tx_n(t),\quad y_0(t)=\frac{y_n(t)}{qt},\quad \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1/2}}{b_i^{1/2}}\frac{1+x_i(qt)y_i(t)}{1+x_i(qt)y_{i-1}(t)}=\frac{1}{q^{1/4}}.$$

q-$P_{(n,n)}$ は $A_{2n-1}^{(1)}$ 型拡大アフィン・ワイル群対称性を持ち, また q-超幾何関数 ${}_n\phi_{n-1}$ によって記述される特殊解を持つ [2]. そして, 神保・坂井の q-P_{VI} [1] の高階化とみなすことが出来る.

事実 1.1 ([2]). q-$P_{(2,2)}$ の下で2つの従属変数を

$$x(t)=\frac{t(x_2(t)-x_1(t))\xi_1(t)}{\xi_2(t)},\quad y(t)=\frac{x_2(qt)(qt+x_1(qt)y_2(t))\psi_1(t)}{(1+x_2(qt)y_2(t))\psi_2(t)},$$

ただし

$$\begin{aligned}
\xi_1(t)&=qtx_1(t)y_1(t)-x_1(t)y_2(t)-qtx_2(t)y_1(t)+x_2(t)y_2(t)-(b_1-a_1)qt,\\
\xi_2(t)&=(tx_2(t)-x_1(t))(x_2(t)-x_1(t))(y_2(t)-qty_1(t))\\
&\quad+(b_1-a_1)qtx_1(t)+\{(a_2-b_1)t-(a_2-a_1)\}qtx_2(t),\\
\psi_1(t)&=(1-a_1b_1q^{1/2}t)x_2(qt)y_2(t)+qt-a_1b_1q^{1/2}t,\\
\psi_2(t)&=a_2(1-a_1b_1q^{1/2}t)x_1(qt)x_2(qt)y_2(t)\\
&\quad+a_1(qt-a_2b_1q^{1/2}t)x_1(qt)+(a_2-a_1)qtx_2(qt),
\end{aligned}$$

と定義すると, これらは q-P_{VI} を満たす.

一般に, q-$P_{(n,n)}$ は $2n$ 階の差分方程式系であることが期待されるが, 2012年春の時点で得られていた方程式系は上に記したように $2n+1$ 階であり, 一般の $n\geq 3$ に対して $2n$ 個の良い従属変数を定めることは, 上の事実を見ても分かるように困難であった. そして今回, $n=3$ の場合に q-P_{VI} に似た形の4階差分方程式系を得ることが出来たので, その結果を報告する.

本研究は科研費 (課題番号:15K04911) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 39A13
* 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部
e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

2. 4階 q-パンルヴェ方程式 q-$P_{(3,3)}$ の新しい表記

以下では, $\bar{f} = f|_{t\to t/q}$ という表記を用いる.

定理 2.1. q-$P_{(3,3)}$ の下で4つの従属変数を

$$x = -\frac{t(x_2(t)-x_1(t))}{x_1(t)-tx_3(t)}, \quad x' = -\frac{t(x_3(t)-x_2(t))}{x_1(t)-tx_3(t)},$$
$$y = \frac{a_2qtx_2(qt)(1+x_1(qt)y_1(t))}{x_1(qt)(1+x_2(qt)y_1(t))}, \quad y' = \frac{a_3qtx_3(qt)(1+x_2(qt)y_2(t))}{x_2(qt)(1+x_3(qt)y_2(t))},$$

と定義すると, これらは次の差分方程式系を満たす.

$$x\bar{x} = \frac{qt(x+tx'-t)(\bar{y}-ta_2)(\bar{y}-tb_1)\bar{y}'}{(x+x'-t)(a_1\bar{y}\bar{y}'-qt)(b_3\bar{y}\bar{y}'-q^2t)},$$
$$x'\bar{x}' = \frac{q(x+tx'-t)\bar{y}(\bar{y}'-ta_3)(\bar{y}'-tb_2)}{(x+x'-1)(a_1\bar{y}\bar{y}'-qt)(b_3\bar{y}\bar{y}'-q^2t)},$$
$$y\bar{y} = \frac{q^3(x+tx'-t)(yy'x+q^2t^2a_2b_1x'-a_2a_3b_1b_2t^2y)}{(x+x'-1)(a_1a_3b_2b_3yy'x+q^4tx'-a_3b_2q^2ty)},$$
$$y'\bar{y}' = \frac{qt^2(x+x'-t)(a_1a_3b_2b_3yy'x+q^4tx'-a_3b_2q^2ty)}{(x+tx'-t)(a_1b_3yy'x+a_1a_2b_1b_3q^2t^2x'-ty)}.$$

この差分方程式系は q-P_{VI} を含む. もう少し詳しく述べると, $x'=0, b_2=a_3$ という条件を課すと $y'=b_2qt$ が得られ, このとき残りの従属変数 x, y の満たす差分方程式は q-P_{VI} そのものとなる.

参考文献

[1] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation, Let. Math. Phys. **38** (1996) 145-154.

[2] T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, AMS Contemp. Math. **651** (2015) 25-38.

大久保型方程式を保つ畳み込みの解析

近内　翔太郎　(神戸大学・理)*

概　　要

大久保型方程式に対して, 結果が再び大久保型方程式となるような middle convolution のクラスを考察し, その具体的な構成法と応用について述べる。

Schlesinger 型常微分方程式 $\frac{d}{dx}Y=\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{x-t_k}Y$ $(A_k\in\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}))$ の留数行列の組を $\boldsymbol{A}=(A_1,\dots,A_r)$ で表す。r 個のパラメータの組 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{C}^r$ に対して,

$$\mathrm{add}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A})=(A_1+a_1,\dots,A_r+a_r) \tag{1}$$

を $\boldsymbol{A}$ の addition と呼ぶ。$\boldsymbol{A}$ の middle convolution は次のように 3 段階で定義される。

第 1 段階 (畳込み). Schlesinger 型方程式の留数行列の組 $\boldsymbol{A}$ に対し, $nr\times nr$ 行列の組

$$\boldsymbol{B}=(B_1,\dots,B_r);\quad B_k=\begin{pmatrix} & & O & & \\ A_1 & \cdots & A_k+\mu & \cdots & A_r \\ & & O & & \end{pmatrix}\quad (k=1,\dots,r) \tag{2}$$

と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}Z=\sum_{k=1}^{r}\frac{B_k}{x-t_k}Z$ を対応させる操作を $\mathrm{c}_\mu(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の畳込みと呼ぶ。

第 2 段階 (K 簡約). 留数行列 A_k $(k=1,\dots,r)$ の階数を n_k とする. 各 A_k を

$$A_k=P_kQ_k;\quad P_k\in\mathrm{Mat}(n,n_k;\mathbb{C}),\ Q_k\in\mathrm{Mat}(n_k,n;\mathbb{C}) \tag{3}$$

と分解し, ブロック行列 Q を

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}(\widetilde{n},nr;\mathbb{C})\quad (\widetilde{n}=\sum_{k=1}^{r}n_k) \tag{4}$$

で定義すると, $QB_k=\widetilde{B}_kQ$ を満たす $\widetilde{B}_k\in\mathrm{Mat}(\widetilde{n};\mathbb{C})$ が一意に定まる. この $\widetilde{\boldsymbol{B}}=(\widetilde{B}_1,\dots,\widetilde{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widetilde{Z}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\widetilde{B}_k}{x-t_k}\widetilde{Z}$ を $\boldsymbol{B}$ の K 簡約と呼ぶ。

第 3 段階 (L 簡約). $\widetilde{B}=\sum_{k=1}^{r}\widetilde{B}_k$ の階数を $\widehat{n}$ とする. これを 2 つの行列の積

$$\widetilde{B}=P_0Q_0;\quad P_0\in\mathrm{Mat}(\widetilde{n},\widehat{n};\mathbb{C}),\ Q_0\in\mathrm{Mat}(\widehat{n},\widetilde{n};\mathbb{C}) \tag{5}$$

に分解する。このとき $Q_0\widetilde{B}_k=\widehat{B}_kQ_0$ $(k=1,\dots,r)$ を満たす行列の組 $\widehat{\boldsymbol{B}}=(\widehat{B}_1,\dots,\widehat{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widehat{Z}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\widehat{B}_k}{x-t_k}\widehat{Z}$ が一意に定まる。この一連の操作を $\mathrm{mc}_\mu(\boldsymbol{A})=\widehat{\boldsymbol{B}}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の middle convolution と呼ぶ。

以下では $\boldsymbol{A}$ に対応する Schlesinger 型方程式は, 型 $(n_1,\dots,n_r)$ の大久保型方程式であって, ブロック行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{r}$ を用いて

$$(x-T)\frac{d}{dx}Y=AY;\qquad T=\mathrm{diag}(t_1I_{n_1},\dots,t_rI_{n_r}) \tag{6}$$

と表される場合を考える。このとき次の定理が成立する。

* e-mail: konnai@math.kobe-u.ac..jp

定理 1. 大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}Y = AY$ において, 1 個の添字 $k \in \{1,\dots,r\}$ を選び, $\mathrm{Ker}(A_{kk}+c)=0$, $\mathrm{Ker}(A_{kk}-\rho)=0$ と仮定する。このとき

$$\boldsymbol{A}^{mc} = \mathrm{add}_{(0,\dots,\rho,\dots,0)} \circ \mathrm{mc}_{-\rho-c} \circ \mathrm{add}_{(0,\dots,c,\dots,0)}(\boldsymbol{A}) = (A_1^{mc},\dots,A_r^{mc}) \tag{7}$$

は, 次の行列 A^{mc} の定める大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}W = A^{mc}W$ と同値である。

$$A^{mc} = \begin{pmatrix} & & & A_{1k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_1 & & \\ & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & & \vdots & \vdots & A_{ij} & \\ & & & A_{k-1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_{k-1} & & \\ A_{k1} & \dots & A_{k,k-1} & A_{kk} & 0 & A_{k,k+1} & \dots & A_{kr} \\ \eta_1 & \dots & \eta_{k-1} & 0 & \rho & \eta_{k+1} & \dots & \eta_r \\ & & & A_{k+1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_{k+1} & & \\ & A_{ij} & & \vdots & \vdots & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & \\ & & & A_{rk}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} & (\rho+c)\xi_r & & \end{pmatrix}$$

ここで $\xi_i \in \mathrm{Mat}(n_i,n_k;\mathbb{C})$, $\eta_j \in \mathrm{Mat}(n_k,n_j;\mathbb{C})$ は次の関係式を満たすものとする。

$$\xi_i\eta_j = A_{ij} - \rho - A_{ik}(A_{kk}-\rho)^{-1}A_{kj} \quad (i,j=1,\dots,r, i,j \neq k) \tag{8}$$

この定理は方程式に対するものであるが, 類似の定理がモノドロミー行列のレベルでも成立し, 解の基本行列の接続係数の追跡に応用することができる。講演ではそれらについても述べる。

例. n 階の一般超幾何微分方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}Y = A^{(n)}Y$ は, middle convolution

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \mathrm{add}_{(\rho,0)} \circ \mathrm{mc}_{-\rho-c} \circ \mathrm{add}_{(c,0)}(\boldsymbol{A}^{(n-1)}) \tag{9}$$

によって, 帰納的に構成することが出来る。上記の定理を繰り返し用いて, パラメータを適当に置き換えると, $A^{(n)}$ が

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}; \quad a_{nj} = -\frac{\prod_{k=1}^{n}(\rho_k-\alpha_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_j)} \quad (j=1,\dots,n-1) \tag{10}$$

と表示されることが示される。ここで $\rho_1,\dots,\rho_n$ は, $A^{(n)}$ の固有値を表す。

参考文献

[1] N.M. Katz: *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[2] K. Okubo: *On the Group of Fuchsian Equations*, Seminar Reports of Tokyo Metropolitan University, 1987.

[3] M. Dettweiler and S. Reitter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[4] S. Konnai. Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations (in preparation)

Stokes現象と絡み目について

廣惠　一希　(城西大学)*

代数的な線形常微分方程式の分岐不確定特異点と平面代数曲線の芽の特異点の類似性について考える．例えば微分方程式の局所 Fourier 変換と代数曲線のブローアップの類似性，また微分方程式の特異点の小松-Malgrange 不確定度と平面曲線の特異点の Milnor 数や交叉数の類似性などが既に報告されている（例えば [1]）．本講演では平面代数曲線の特異点の絡み目構造の類似として，分岐不確定特異点を持つ微分方程式に付随した絡み目を定義する．そして微分方程式の不変量と絡み目不変量との対応を与え，さらに分岐不確定特異点を持つ微分方程式のモノドロミー保存変形が対応する絡み目のイソトピーを引き起こすことを説明する．これは代数曲線の同特異性 (equisingularity) が対応する絡み目のイソトピーを引き起こす事実の類似と思える．さらにモノドロミー保存変形によって動く Stokes 因子たちの間の関係式と組み紐関係式の相関にも触れたい．

参考文献

[1] K. Hiroe, “Local Fourier transform and blowing up”, preprint, arXiv:1406.5788.

本研究は科研費 (課題番号:26800072) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14H20, 14H50, 34M25, 34M35, 34M40
キーワード：Stokes phenomenon, link invariants
* 〒350-0295 埼玉県坂戸市けやき台 1-1　城西大学　理学部数学科
e-mail: kazuki@josai.ac.jp
web: http://researchmap.jp/kazukiadvb/

KZ方程式に付随したモノドロミー保存変形の正則解について

上野 喜三雄　(早稲田大学 理工学術院)*

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,6}$ 上のKZ方程式を，その上の立方体座標 (z, w_1, w_2) で表示したものを3変数KZ方程式と呼び，これを3KZと表記する．3KZにおいて，z を主変数，$w = (w_1, w_2)$ をパラメータとみなして，つぎの方程式系（3KZに付随したモノドロミー保存変形）を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = \left(\dfrac{X}{z} + \dfrac{Y}{1-z} + \dfrac{w_1 Z^{(1)}}{1-zw_1} + \dfrac{w_1 w_2 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2} \right) L \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial w_1} = \left(\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{zZ^{(1)}}{1-zw_1} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2} + \dfrac{zw_2 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2} \right) L \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial w_2} = \left(\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2} + \dfrac{zw_1 Z^{(3)}}{1-zw_1w_2} \right) L \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ は定数行列であり，$X = X(w)$, $Y = Y(w)$, $Z^{(1)} = Z^{(1)}(w)$, $Z^{(3)} = Z^{(3)}(w)$ は w の関数を成分とする行列である．この方程式系を 3MPD と表記する．定数行列 $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ に応じて3MPD が決まるものと考える．ただし，定数行列 $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Z_0^{(2)}$ はつぎの条件をみたしているとする．

$$\begin{cases} \left[X_0^{(1)}, X_0^{(2)}\right] = \left[X_0^{(1)}, Y_0^{(2)}\right] = \left[X_0^{(2)}, Y_0^{(1)}\right] = 0, \\ \left[Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}\right] = -\left[Y_0^{(1)}, Z_0^{(2)}\right] = \left[Y_0^{(2)}, Z_0^{(2)}\right] = -\left[X_0^{(1)} - X_0^{(2)}, Z_0^{(2)}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

その上で，3MPDの可積分条件をみることにより次の非線形方程式系が得られるが，これを変形方程式2DEと表記することにしよう．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2}, X \right], \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)}}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Z^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2(Z_0^{(2)} + Z^{(3)})}{1-w_1w_2}, Y \right], \\[2ex] \dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)} - X + Y}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)} + Y}{1-w_1} + \dfrac{w_2 Z_0^{(2)}}{1-w_1w_2}, Z^{(1)} \right], \\[2ex] \dfrac{\partial Z^{(3)}}{\partial w_1} = \left[\dfrac{X_0^{(1)} - X + Y}{w_1} + \dfrac{Y_0^{(1)}}{1-w_1} + \dfrac{w_2(Y + Z_0^{(2)})}{1-w_1w_2}, Z^{(3)} \right]. \end{cases} \tag{3}$$

本研究は科研費 (課題番号:25400054) の助成を受けたものである．

* e-mail: uenoki@waseda.jp

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1 w_2}, X \right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Y}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 (Z_0^{(2)} + Z^{(3)})}{1-w_1 w_2}, Y \right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)} + Z^{(3)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 Z_0^{(2)}}{1-w_1 w_2}, Z^{(1)} \right], \\[2ex]
\dfrac{\partial Z^{(3)}}{\partial w_2} = \left[\dfrac{X_0^{(2)} - X + Y + Z^{(1)}}{w_2} + \dfrac{Y_0^{(2)} + Z^{(1)}}{1-w_2} + \dfrac{w_1 (Y + Z_0^{(2)})}{1-w_1 w_2}, Z^{(3)} \right].
\end{cases}
\tag{4}
$$

さて，変形方程式 2DE (3)，(4) の，原点 $w = (0,0)$ の近傍で正則な解を考察しよう．この解の初期値を $X_0 = X(0,0),\ Y_0 = Y(0,0),\ Z_0^{(1)} = Z^{(1)}(0,0),\ Z_0^{(3)} = Z^{(3)}(0,0)$ とおく．

定理 1 行列 $X_0,\ Y_0,\ Z_0^{(1)},\ Z_0^{(3)}$ が 条件

$$
\begin{cases}
\left[X_0^{(1)}, X_0\right] = \left[X_0^{(2)}, X_0\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)}, Y_0\right] = \left[X_0^{(2)}, Y_0\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0^{(1)}\right] = \left[X_0^{(2)}, Z_0^{(1)}\right] = 0, \\
\left[X_0^{(1)} - X_0 + Y_0, Z_0^{(3)}\right] = \left[X_0^{(2)} - X_0 + Y_0, +Z_0^{(1)} Z_0^{(3)}\right] = 0.
\end{cases}
\tag{5}
$$

及び

$$
\begin{cases}
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(\alpha)}\right) \quad \text{可逆} \quad (l \geq 0,\ \alpha = 1,2) \\
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(1)} - X_0 + Y_0\right) \quad \text{可逆} \quad (l \geq 0), \\
(l+1)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}\left(X_0^{(2)} - X_0 + Y_0 + Z_0^{(1)}\right) \quad \text{可逆} \quad (l \geq 0)
\end{cases}
\tag{6}
$$

をみたすとする．このとき，初期値を $X_0,\ Y_0,\ Z_0^{(1)},\ Z_0^{(3)}$ とする，2DE (3)，(4) の原点における正則解 $X(w),\ Y(w),\ Z^{(1)}(w),\ Z^{(3)}(w)$ が一意的に存在する．

定理 2 3変数KZ方程式は変形方程式2DEの定数解として特徴づけられる．

複素鏡映群に関するbraid群の表現について

原岡　喜重　(熊本大自然)*

Artinのbraid群B_nは，平面上のn点を始点および終点の集合とするn本の組み紐のなす群として定義される。平面を複素平面$\mathbb{C}$と思い，そのn点の1次からn次までの基本対称式の組を$\mathbb{C}^n$の点と見ると，B_nは基本群$\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus D)$ととらえることができる。ここで$D$は判別式の零点集合を表す。基本対称式は対称群$S_n$に関する不変多項式の基底であるが，$S_n$を有限鏡映群，あるいは有限複素鏡映群と思うことで，braid群の自然な拡張を考えることができる。すなわち有限次元線形空間Vに働く有限複素鏡映群Gに対して，Gの作用によるregular orbitsの空間は，判別式と呼ばれるある多項式の零点集合の補空間として表される。その空間の基本群が，Gに関するbraid群である。

群が定義されたので，その表現を求めるというのは自然な問題であろうが，上記の定義においては判別式の零点集合の補空間という幾何学的な対象が現れていることが重要であり，その幾何学的構造が表現全体に構造を与えることになる。

Gを$\mathbb{C}^n$に働く有限既約複素鏡映群，ΔをGに対する判別式とし([1])，Dをその零点集合とする。Gに関するbraid群Bは

$$B = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus D)$$

により定義される。$\mathbb{C}^n$のcompact化としてたとえば$\mathbb{P}^n$を考え，無限遠超平面をH_∞とおくと，

$$B = \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus (D \cup H_\infty)$$

ととらえることもできる。$\hat{D} = D \cup H_\infty$とおき，$\hat{D}$の既約分解を

$$\hat{D} = \bigcup_j D_j$$

とする。すると各D_jに対し，monodromy（D_jを正の向きに1周し他のD_kは回らないloop, 以下では(+1)-loopと呼ぶことにする）の$\pi_1(\mathbb{P}^n \setminus (D \cup H_\infty))$における共役類は$D_j$により一意的に定まる([2])。

表現

$$\rho : B \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$$

を考える。各D_jに対する(+1)-loopの像の共役類はD_jのみにより決まるので，それをD_jにおける局所モノドロミーと呼ぶ。各既約成分における局所モノドロミーによってρが同型を除いて一意的に定まるとき，ρをrigidという。これはKatzによるrigid局所系の概念([3])を高次元の場合に拡張したものである。このような見方は，Riemann-Hilbert対応によって表現に対応するregular holonomic系を考えることから得られた。regular holonomic系においては局所モノドロミーは有限の手順で求めることができるので，局所モノドロミーをあらかじめ指定した場合に（monodromy）表現が構成できるか，というのは自然な問である。

この講演では，3次primitive有限既約複素鏡映群に関するbraid群の3次元表現を考察する。そのような群はShephard-Toddの分類[4]においてG_k $(k = 23, 24, 25, 26, 27)$

本研究は科研費(基盤(B), 15H03628)の助成を受けたものである。

*e-mail: haraoka@kumamoto-u.ac.jp

として与えられている。G_k に関する braid 群を $B^{(k)}$ とおく。$B^{(23)}, B^{(25)}$ の表示は齋藤-石部 [5] で求められており，また $B^{(24)}, B^{(27)}$ の表示については Bessis-Michel [6] で求められたものを用いた。（$B^{(26)}$ については自前のものを求める必要があった。）たとえば $B^{(23)}$ の表示は

$$B^{(23)} = \langle a, b, c \mid ababa = babab, bc = cb, aca = cac \rangle$$

で与えられるが，この場合判別式の零点集合 D_{23} は既約であって，a, b, c はいずれもその既約な D_{23} に対する $(+1)$-loop となる。特に a, b, c は互いに共役である。表現

$$\rho : B^{(23)} \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$$

を考える。

定理　既約な表現 ρ は，D_{23} における局所モノドロミーのスペクトル型が $(21), (111), ((111))$ の場合にのみ存在する。そのとき ρ は rigid であり，具体的に記述することができる。それぞれの既約表現において，局所モノドロミーの固有値が modulus 1 の場合，不変 Hermite 形式が定数倍を除いて一意的に存在する。

スペクトル型は Jordan 標準形の型を表すデータである ([2] を参照)。局所モノドロミーの固有値が modulus 1 というのは，対応する holonomic 系の特性指数が実数ということに相当する。

Artin の braid 群の表現については多くの研究があるが，局所モノドロミー・スペクトル型に基づく表現の分類，rigidity，不変 Hermite 形式の存在・構成といった観点は今までなかったのではないだろうか。これらの観点は regular holonomic 系との関わりで重要である。

G_k の 3 次元表現は，加藤-関口 [7] が構成した free divisor を特異 locus とする holonomic 系（齋藤 [8] の提唱した uniformization equation）の monodromy 表現を求めるために研究した。rigidity によって，求めた ρ が monodromy 表現に一致することがわかる。

参考文献

[1] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes, Springer-Verlag, 1992.

[2] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.

[3] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[4] G. C. Shephard and A. J. Todd, Finite reflaction groups, Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

[5] K. Saito and T. Ishibe, Monoids in the fundamental groups of the complement of logarithmic free divisors in $\mathbb{C}^3$, J. Algebra, **344** (2011), 137-160.

[6] D. Bessis and J. Michel, Explicit presentations for exceptional braid groups, Experimental Math. **13** (2004), 257-266.

[7] M. Kato and J. Sekiguchi, Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three, Kyushu J. Math., **68** (2014), 181-221.

[8] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci, RIMS Kokyuroku **287** (1977), 117-137.

Twisted wild character varieties

山川 大亮　(東京工業大学 大学院理工学研究科)*

概　　要

Alekseev–Malkin–Meinrenken の擬ハミルトン空間の理論を用いて，Boalch は wild character variety と呼ばれる代数多様体の上のポアソン構造を構成した．本稿では，最近 Boalch との共同研究により得られた wild character variety の拡張と，その上のポアソン構造を構成するのに有効な擬ハミルトン空間の理論の拡張について述べる．

はじめに

本稿では，Philip Boalch との共同研究により得られた結果 [5] について解説する．

Σ を滑らかな複素射影代数曲線，$\alpha \subset \Sigma$ を空でない有限集合とし，$\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \alpha$ とおく．Σ° 上の代数的ベクトル束とその上の接続からなる組 $(\mathcal{V}, \nabla)$ を，α に特異点を持つ Σ 上の**有理型接続**と呼ぶ．有理型接続の特異点は，確定特異点と呼ばれるある種 tame なものと，不確定特異点と呼ばれる wild なものの二種類に分かれる．

確定特異点型接続，すなわち特異点が全て確定特異点であるような有理型接続については，次の Deligne [6] の結果がよく知られている：α に特異点を持つ Σ 上の確定特異点型接続 $(\mathcal{V}, \nabla)$ に対し，その水平切断の芽のなす Σ° 上の有限次元複素ベクトル空間の局所系 $\ker \nabla$ を対応させる事で，両者の圏の間の同値関手が定まる．この圏同値を**リーマン・ヒルベルト対応**と呼ぶ．

α における Σ の有向実ブローアップを $\pi\colon \widehat{\Sigma} \to \Sigma$ としよう．従って $\widehat{\Sigma}$ は境界付き実曲面であり，その境界 ∂ の連結成分は α の各点の π による逆像（向きの付いた S^1）で与えられる．$\pi_1(\widehat{\Sigma}) \simeq \pi_1(\Sigma^\circ)$ に注意して，Σ° 上の局所系の代わりに $\widehat{\Sigma}$ 上の局所系を考えよう．基点の集合 $\beta \subset \partial$ を境界の各連結成分との交わりが 1 点となるように取る．このとき β における枠を備えた $\widehat{\Sigma}$ 上の階数 n の局所系の同型類全体と，β を基点集合とする $\widehat{\Sigma}$ の基本亜群の表現空間

$$\mathrm{Hom}(\Pi_1(\widehat{\Sigma}, \beta), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

の間に全単射がある（モノドロミー表現を取る写像）．この表現空間は群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta := \mathrm{Map}(\beta, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の自然な作用について，Alekseev–Malkin–Meinrenken [1] によって導入された**擬ハミルトン空間**の構造を持ち，特にアフィン商

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}} := \mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\widehat{\Sigma}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

はポアソン構造を持つ．なお $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を一般の連結複素簡約代数群にしても同様の事がいえる．空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ を **character variety** と呼ぶ．

ここで擬ハミルトン空間について少し述べておこう（詳しくは第 3 節を参照）．連結複素簡約群 G が作用するシンプレクティック代数多様体 (M, ω) と，運動量写像と呼ばれる射 $\mu\colon M \to (\mathrm{Lie}\, G)^*$ からなる組 (M, ω, μ) をハミルトン G 空間と呼ぶ．擬ハミルト

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: yamakawa@math.titech.ac.jp

ン空間はハミルトン空間の「乗法的類似物」といえるもので，ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方，擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る．先程の基本亜群の表現空間の場合，運動量写像は各基点における境界成分に沿ったモノドロミーで与えられる．

ところでリーマン・ヒルベルト対応は不確定特異点型接続に対しても拡張されており（例えば [14] を参照），その場合に有理型接続に対応するものをストークスデータもしくは一般モノドロミーデータと呼ぶ．Boalch [4] は，不確定特異点が全て「不分岐」と呼ばれる性質を持つ場合に，$\widehat{\Sigma}$ からいくつかの点を除いて得られる補助的な曲面 $\widetilde{\Sigma}$，及びその基本亜群の表現空間のある特別な部分多様体（**ストークス表現**の空間）

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\subset\mathrm{Hom}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

を導入し，ある簡約部分群 $\mathbf{H}\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ の作用に関するこの空間内の軌道がストークスデータの同型類をパラメータ付ける事を示した．更に，この部分多様体が擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造を持つ事を示し，その系としてアフィン商 (**wild character variety**)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi_1(\widetilde{\Sigma},\beta),\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathbf{H}$$

の上にポアソン構造が定まる事を示した（実際には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が一般の複素簡約群になった場合でも示されている）．この場合の運動量写像も，やはり各境界成分に沿ったモノドロミー（有理型接続の**形式的モノドロミー**と呼ばれるものに対応する）を考える事で得られる．

今回 [5] で得られた結果は，不分岐とは限らない一般の場合への上の結果の拡張である．これを紹介するため本稿の構成を次のようにした：第 1 節でストークス表現の空間を導入するための準備を行い，第 2 節で (twisted) wild character variety をアフィン代数多様体として導入する．不分岐の場合と異なり，一般の場合にはストークス表現の空間に擬ハミルトン空間の構造が自然には入らない．何故なら，境界に沿ったモノドロミーが一般には $\mathbf{H}$ の元でないからである．この問題を解決するのに有効な，擬ハミルトン空間の概念そのものの拡張について第 3 節で述べ，それを用いて第 4 節で主定理を述べる．なお，話を分かりやすくするため基本的に構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合に限って述べるが，[5] では一般の（連結）複素簡約構造群の場合，更には構造群が「局所定数で動く」場合も扱っている．第 4 節でこのような構造群の一般化にも少し触れる．

1. 有理型接続の形式的分類理論と次数付き局所系

この節ではよく知られている有理型接続の形式的分類理論を手短に紹介する．

Σ を滑らかな複素代数曲線とする．基点 $0\in\Sigma$ を取り，簡単のため点 0 で消える局所座標 z を固定する．$\Sigma\setminus\{0\}$ 上の接続 $(\mathcal{V},\nabla)$ に対し，射 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((z))\to\Sigma\setminus\{0\}$ で引き戻す事で $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((z))$ 上の接続，すなわち $\mathbb{C}((z))$ 上の有限次元ベクトル空間 V とライプニッツ則を満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $\nabla\colon V\to V\,dz$ からなる対 (V,∇) が得られる．形式的分類とは，$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((z))$ 上の接続の分類を指す．

1.1. Hukuhara–Turrittin の定理

$\mathcal{P}=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}\mathbb{C}((z^{1/r}))$ をピュイズー級数体，$\mathcal{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}\mathbb{C}[\![z^{1/r}]\!]$ を負べきの項を持たないピュイズー級数からなる部分環とし，

$$\mathcal{Q}=\mathcal{P}/\mathcal{R}\simeq\bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}z^{-1/r}\mathbb{C}[z^{-1/r}]$$

とおく．モノドロミー$\sigma\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\sigma(z^a) = e^{2\pi\sqrt{-1}a} z^a$ は$\mathcal{R}$を保ち，$\mathcal{Q}$の変換を誘導する．

次はHukuhara [7] とTurrittin [12] の結果を言い換えたものである．

定理 1.1. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$ 上の接続 (V, ∇) の圏と，$\mathcal{Q}$次数付き有限次元複素ベクトル空間

$$W = \bigoplus_{q \in \mathcal{Q}} W_q$$

とWの線形自己同型M_Wからなる対(W, M_W)で$M_W(W_q) = W_{\sigma(q)}$, $q \in \mathcal{Q}$ を満たすものの圏の間に直和・テンソル積を保つ圏同値がある．

大雑把に言えば，接続(V, ∇)に対しWは形式解のなすベクトル空間，M_Wは形式解のモノドロミーによって与えられる．これの証明は例えば[14]にある．

$\Sigma \setminus \{0\}$ 上の接続$(\mathcal{V}, \nabla)$が定める$\operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$上の接続に対$(W, M_W)$が対応するとき，$\sigma$不変集合$\mathrm{Irr} := \{\, q \in \mathcal{Q} \mid \dim W_q \neq 0 \,\}$の元を接続$(\mathcal{V}, \nabla)$の特異点$0$における**固有値**と呼ぶ事がある．$\mathrm{Irr} = \{0\}$であるとき，点$0 \in \Sigma$を接続$(\mathcal{V}, \nabla)$の**確定特異点**という．$\mathrm{Irr} \neq \{0\}$で$\mathrm{Irr}$への$\sigma$の作用が自明であるときは**不分岐不確定特異点**，Irrへのσの作用が非自明であるときは**分岐不確定特異点**という．

Wの$\mathcal{Q}$次数付きベクトル空間としての同型類を$(\mathcal{V}, \nabla)$の$0 \in \Sigma$における**不確定類**という．$\langle\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{Q})$を$\sigma$によって生成される巡回群とすると，階数$n$の接続の不確定類と軌道集合$\mathcal{Q}/\langle\sigma\rangle$ 上の$\mathbb{Z}_{\geq 0}$値関数$I \mapsto n_I$で

$$\sum_{I \in \mathcal{Q}/\langle\sigma\rangle} n_I \cdot \#I = n$$

を満たすものは1対1に対応する（ただし$\#I$はIの濃度を表す）．

1.2. 次数付き局所系による言い換え

$\pi\colon \widehat{\Sigma} \to \Sigma$を$\Sigma$の$0$における有向実ブローアップとし，$\partial = \pi^{-1}(0) \simeq S^1$とおく．定理1.1に現れる対$(W, M_W)$は，$W$を$\partial$のある点におけるファイバー，$M_W$をモノドロミーとする$\partial$上のベクトル空間の局所系を定める．$\operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$上の接続のこのような見方は接続の大域的分類について述べる上で有用である．Wが持つ次数付けを局所系の言葉で言い換えるために，対$(\mathcal{Q}, \sigma)$に対応する局所系を次のように定義しておこう．

∂の各開区間Uに対し，0を中心とし中心角がUで与えられる扇形領域の芽$\mathrm{Sect}(U)$が定まる．その上の正則関数qの$z = 0$における芽で，

$$q = \sum_{i=1}^{k} a_i z^{-i/r} \qquad (a_i \in \mathbb{C},\ r, k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

の形で表されるもの全体を$\mathcal{I}(U)$とする．$\mathcal{I}(U)$達はファイバーが$\mathcal{Q}$と同型な∂上のベクトル空間の局所系を定めるが，これをあえて集合の局所系，すなわち被覆空間$\pi\colon \mathcal{I} \to \partial$とみなす．すると$\mathcal{I}$の連結成分と$\mathcal{Q}$における$\langle\sigma\rangle$軌道の間に自然な全単射がある．連結成分$I \in \pi_0(\mathcal{I})$に対し，被覆$\pi\colon I \to \partial$の次数を$\mathrm{ram}(I)$とおけば，これは対応する$\langle\sigma\rangle$軌道の元の個数に等しく，各元は$z^{-1/r}$, $r = \mathrm{ram}(I)$の多項式である．その次数を$\deg(I)$と書き，$\mathrm{lev}(I) := \deg(I)/\mathrm{ram}(I)$を$I$（またはその元）の**レベル**と呼ぶ．

定義 1.2. $\mathcal{L}$ を ∂ 上の有限次元ベクトル空間の局所系とする．各点 $b \in \partial$ におけるファイバー $\mathcal{L}_b$ が $\mathcal{I}_b$ による次数付け

$$\mathcal{L}_b = \bigoplus_{q \in \mathcal{I}_b} \mathcal{L}_{b,q}$$

を備えており，これが $\mathcal{I}$ の局所系構造と次の意味で両立するとき，$\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ **次数付き局所系**という：∂ における任意の道 $\gamma\colon [0,1] \to \partial$ に対し，$\mathcal{I}$, $\mathcal{L}$ における γ に沿った平行移動を共に γ_* で表したとき，

$$\gamma_*(\mathcal{L}_{\gamma(0),q}) = \mathcal{L}_{\gamma(1),\gamma_*(q)} \qquad (q \in \mathcal{I}_{\gamma(0)})$$

が成り立つ．

先の定理を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる（Deligne による）：

定理 1.3. $\operatorname{Spec} \mathbb{C}((z))$ 上の接続のなす圏と ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系のなす圏は同値である．

また接続の不確定類を $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定義 1.4. ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系の局所同型類を**不確定類**と呼ぶ．

従って二つの $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ が同じ不確定類に属すための必要十分条件は，任意の $b \in \partial$ に対し $\mathcal{L}_b$ と $\mathcal{L}'_b$ が $\mathcal{I}_b$ 次数付きベクトル空間として同型となる事である．

1.3. POM とストークス群

∂ 上の被覆空間 $\mathcal{I}$ は特別な点を持つ．

定義 1.5. 次の条件を満たす点 $q \in \mathcal{I}$ を **POM** (point of maximal decay) と呼ぶ：q を $q = a_k z^{-k/r} + a_{k-1} z^{-(k-1)/r} + \cdots$ と書いたとき，$a_k z^{-k/r}$ が $\pi(q) \in \partial$ の定める半直線 $\mathbb{R}_{>0}\pi(q)$ 上で負の実数となる．

各連結成分 $I \in \pi_0(\mathcal{I})$ は，その上に丁度 $\deg(I)$ 個の POM を持つ事が容易に確かめられる．

$\mathcal{L}$ を ∂ 上の $\mathcal{I}$ 次数付き局所系とする．このとき $\operatorname{End}\mathcal{L} = \operatorname{Lie}(\operatorname{Aut}\mathcal{L})$ も $\mathcal{I}$ 次数付き局所系となる．各 $d \in \partial$ に対し，$\mathcal{I}_d$ のすべての POM q に渡る $(\operatorname{End}\mathcal{L}_d)_q$ の直和を sto_d と定める．これは $\operatorname{End}\mathcal{L}_d$ の冪零部分リー環である事が知られている．そこで

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_d = \exp(\mathrm{sto}_d) \subset \operatorname{Aut}\mathcal{L}_d$$

とおく．

定義 1.6. 集合 $\mathbb{A} := \{\, d \in \partial \mid \dim \mathrm{sto}_d > 0 \,\}$ の元を**特異方向**と呼び，各 $d \in \mathbb{A}$ に対し $\mathbb{S}\mathrm{to}_d$ を特異方向 d に付随する**ストークス群**と呼ぶ．

集合 $\mathbb{A}$ は $\mathcal{L}$ の不確定類のみに依る事に注意しよう．また $\mathcal{I}$ 次数付き局所系 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ が局所同型であれば，同型 $\mathcal{L}_d \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}'_d$ で両者のストークス群は移り合う．この意味でストークス群も不確定類のみに依る概念である．

2. Twisted wild character varieties

この節でストークス局所系を導入し，これを用いて有理型接続の大域的分類に関する既知の結果（リーマン・ヒルベルト対応）を言い換える．

2.1. ストークス局所系とリーマン・ヒルベルト対応

Σをコンパクトリーマン面（境界を持っても良い），$\alpha \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$を有限部分集合とし，$\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \alpha$とおく．$\pi\colon \widehat{\Sigma} \to \Sigma$を$\alpha$における$\Sigma$の有向実ブローアップとし，その境界$\partial$は空でないと仮定する．定義から，$\partial$は$\Sigma$の境界$\partial\Sigma$と有向実ブローアップでできた新たな境界$\pi^{-1}(\alpha)$の和である．

各$i \in \alpha$に対し，前に定義した$\mathcal{I}$に相当する$\pi^{-1}(i)$上の局所系$\mathcal{I}_i \to \pi^{-1}(i)$が定まる．$\pi^{-1}(i)$における階数$n$の不確定類$Q_i$を任意に取って$\mathbf{Q} = (Q_i)$とする．

定義 2.1. 組$\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \alpha, \mathbf{Q})$を階数$n$の**不確定曲線**と呼ぶ．

不確定曲線$\mathbf{\Sigma}$に次のような実曲面$\widetilde{\Sigma}$を付随させる．$\mathbb{A}_i \subset \pi^{-1}(i)$を不確定類$Q_i$の特異方向のなす集合とし，$\mathbb{A} = \bigcup \mathbb{A}_i \subset \partial$とおく．また各$\pi^{-1}(i)$の小さな管状近傍$N_i$を取る．各$d \in \mathbb{A}_i$から$N_i$の境界$\overline{N}_i \setminus N_i$に向かって線分を互いに交わらないよう引き，その終点を$e(d) \in \overline{N}_i \setminus N_i$として

$$\widetilde{\Sigma} = \widehat{\Sigma} \setminus \{\, e(d) \mid d \in \mathbb{A} \,\}$$

とおく．各$d \in \mathbb{A}$に対し，dを基点とし$e(d)$の周りを一周する単純閉曲線γ_dを取る．

定義 2.2. $\mathbf{\Sigma}$上の**ストークス局所系**とは，$\widetilde{\Sigma}$上の階数nの局所系$\mathcal{L}$で次の条件を満たすものをいう．

(1) $\mathcal{L}$の各N_iへの制限はQ_iを不確定類とする$\mathcal{I}_i$次数付き局所系の構造を持つ．

(2) $\mathcal{L}$の各γ_dに沿ったモノドロミーはストークス群$\mathbb{S}\mathrm{to}_d \subset \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}_d$に属す．

ここで$\mathcal{I}_i$はN_i上の局所系へ自明な方法で延長している．ストークス局所系の同型の定義は明らかであろう：$\widetilde{\Sigma}$上の局所系としての同型であって，各N_iに制限したとき$\mathcal{I}_i$次数付き局所系の同型となるものである．

このストークス局所系に枠を付ける事を考えよう．境界∂の各連結成分の基点を一つずつ取り，それら基点の集合を$\beta \subset \partial$とする．各$b \in \partial$に対し，bを含む∂の唯一の連結成分を∂_bと書く．各$i \in \alpha$に対し，不確定類Q_iに属す$\pi^{-1}(i)$上の$\mathcal{I}_i$次数付き局所系$\mathcal{L}_i$を取る．基点$b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$におけるファイバー$(\mathcal{L}_i)_b$は$(\mathcal{I}_i)_b$次数付きベクトル空間である．$(\mathcal{L}_i)_b$の基底を任意に取り，それによって$\mathbb{C}^n$に$(\mathcal{I}_i)_b$次数付きベクトル空間の構造を入れたものを$F_b$とおく．また$b \in \beta \cap \partial\Sigma$に対しては，$F_b = \mathbb{C}^n$とおき，これを自明な次数付けを持つベクトル空間とみなす．F_bを基点bにおける**標準ファイバー**と呼ぼう．

定義 2.3. $\mathbf{\Sigma}$上のストークス局所系$\mathcal{L}$と，各$b \in \beta$におけるファイバー$\mathcal{L}_b, F_b$の次数付きベクトル空間としての同型$\varphi_b\colon F_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_b$からなる組$(\mathcal{L}, (\varphi_b))$を**枠付きストークス局所系**という．

各$b \in \beta$に対し，F_bの次数付きベクトル空間としての自己同型全体を$H_b \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$とし，$\mathbf{H} = \prod_{b \in \beta} H_b$とおく．各$H_b$は複素簡約群であり，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$を$\mathbf{\Sigma}$上の枠付きストークス局所系の同型類全体とすると，これには枠の取り替えによって$\mathbf{H}$が作用する．

有理型接続のリーマン・ヒルベルト対応（例えば[13]を参照）を我々のストークス局所系の言葉で言い換えると次のようになる：

定理 2.4. Σ が滑らかな複素射影代数曲線であるとき，α に特異点を持ち各 $i \in \alpha$ における不確定類が Q_i で与えられる Σ 上の階数 n の有理型接続の同型類と，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ の $\mathbf{H}$ 軌道（すなわち $\mathbf{\Sigma}$ 上のストークス局所系の同型類）の間に全単射がある．

2.2. 形式的モノドロミーと両側主等質空間

$(\mathcal{L}, (\varphi_b))$ を枠付きストークス局所系とする．各 $b \in \beta$ を基点とする，∂_b に沿った $\mathcal{L}$ のモノドロミーを考えよう．これを同型 φ_b で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に移したものを M_b とおき（従って $\mathcal{L}$ のモノドロミーは $\varphi_b M_b \varphi_b^{-1} \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}_b$ である），枠付きストークス局所系の基点 b における**形式的モノドロミー**と呼ぶ．$b \in \beta \cap \pi^{-1}(\alpha)$ のとき，$i = \pi(b)$ とおき F_b が $(\mathcal{I}_i)_b$ 次数付きベクトル空間 $(\mathcal{L}_i)_b$ の基底を固定して得られたものであった事を思い出して，$P_b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $\mathcal{L}_i$ の基点 b におけるモノドロミーの（その基底に関する）行列表現とすると，

$$P_b^{-1} M_b \in H_b$$

が成り立つ．実際，σ を $(\mathcal{I}_i)_b$ の b を基点とするモノドロミーとすると，各 $q \in (\mathcal{I}_i)_b$ に対し $\mathbb{C}^n$ の次数 q の斉次元は M_b によって次数 $\sigma(q)$ の斉次元に移り，その後 P_b^{-1} によって次数 q の斉次元に移る．よって M_b は剰余類

$$H(\partial_b) := P_b H_b = H_b P_b \subset G$$

に値を取る．

代数群 G の**主等質空間**とは，G が単純推移的に作用する代数多様体の事であった．G が左右両側から単純推移的に作用し，それらが互いに可換であるような代数多様体をここでは G の**両側主等質空間**と呼ぶ事にする．次は明らかであろう：

命題 2.5. $H(\partial_b)$ は H_b の両側主等質空間である．

$b \in \beta \cap \partial\Sigma$ に対し $H(\partial_b) = G$ とおき，

$$\mathbf{H}(\partial) = \prod_{b \in \beta} H(\partial_b)$$

と定める．これは $\mathbf{H}$ の両側主等質空間である．

2.3. 基本亜群のストークス表現

$\Pi = \Pi_1(\widetilde{\Sigma}, \beta)$ を $\widetilde{\Sigma}$ の β を基点集合とする基本亜群，すなわち β の元を対象とし，$b, b' \in \beta$ に対し b から b' への道のホモトピー類を射 $b \to b'$ とする圏とし，Π から群 G への射全体を $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ と書く（ここでもちろん G は対象が 1 点のみからなる亜群とみなしている）．定義から $\mathrm{Hom}(\Pi, G)$ の元 ρ は，β の点を結ぶ道のホモトピー類全体から G への写像 $[\gamma] \mapsto \rho(\gamma)$ で，γ_1 の始点と γ_2 の終点が一致する限り

$$\rho(\gamma_1 \gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

が成り立つようなものを指す．

各特異方向 $d \in \mathbb{A}_i$ に対し，λ_d を $\pi^{-1}(i)$ に沿って $b \in \beta \cap \pi^{-1}(i)$ から d へ向かう円弧とする．λ_d に沿った平行移動によって，$\mathcal{L}_i$ のストークス群 $\mathbb{S}\mathrm{to}_d \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_d$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}_i)_b \simeq \mathrm{Aut}\,F_b = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群と同一視する．また

$$\widehat{\gamma}_d = \lambda_d^{-1} \circ \gamma_d \circ \lambda_d \in \Pi \qquad (d \in \mathbb{A})$$

とおき，各境界成分 ∂_b を b を基点とする閉曲線と与えられた向きによって同一視する．

定義 2.6. Π の n 次元**ストークス表現**とは，$\mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の元 ρ で次の条件を満たすものをいう：

(1) 各 $b \in \beta$ に対し $\rho(\partial_b) \in H(\partial_b)$ が成り立つ．

(2) 各特異方向 $d \in \mathbb{A}$ に対し $\rho(\widehat{\gamma}_d) \in \mathbb{S}\mathrm{to}_d$ が成り立つ．

n 次元ストークス表現全体を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ と表す．

$\mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ には群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\beta$ が自然に作用する事に注意しよう．具体的に書けば，$g = (g_b) \in G^\beta$, $\rho \in \mathrm{Hom}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ 及び道 $\gamma\colon b_1 \to b_2$ に対し

$$(g \cdot \rho)(\gamma) = g_{b_2} \rho(\gamma) g_{b_1}^{-1}$$

によって定義される．この作用を部分群 $\mathbf{H} \subset G^\beta$ に制限したものは，ストークス表現全体 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ を保つ．

命題 2.7. モノドロミーを取る事により，$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の間に $\mathbf{H}$ 同変な全単射が定まる．特に，$\mathbf{\Sigma}$ 上のストークス局所系の同型類と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の $\mathbf{H}$ 軌道は 1 対 1 対応する．

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ がアフィン代数多様体の構造を持つ事は明らかであろう．

定義 2.8. アフィン商

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathbf{H} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))]^{\mathbf{H}}$$

を **(twisted) wild character variety** と呼ぶ．

主結果の一つは次のように述べられる：

定理 2.9. $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{\Sigma}, n)$ はポアソン構造を持つ．

ここで最も基本的な場合にストークス表現の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の代数多様体としての構造を見ておこう．

Σ として $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を中心とする閉円板を取る．原点における階数 n の不確定類 Q を固定し，不確定曲線 $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \{0\}, Q)$ を考えよう．付随する曲面 $\widetilde{\Sigma}$ の境界 ∂ の連結成分は，Σ の境界 ∂_1 と有向実ブローアップして新たにできる境界 ∂_0 の二つである．それぞれの基点 $b_i \in \partial_i$ と Q に属す ∂_0 上の次数付き局所系 $\mathcal{L}$ を取り，それらを用いて標準ファイバー F_0, F_1 を定めれば，n 次元ストークス表現のなす空間

$$\mathcal{A}(Q) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

ができる．

補題 2.10. $\mathbf{H}$ 同変な同型

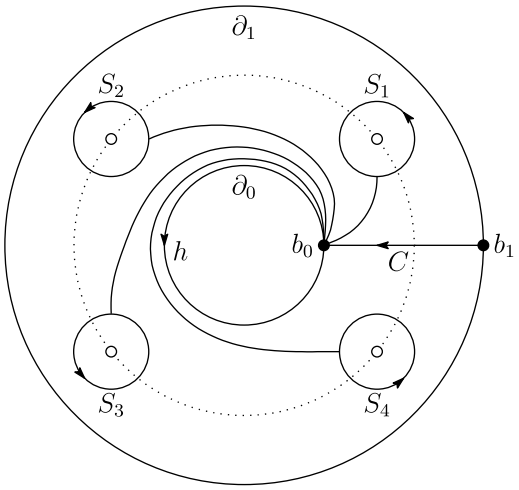
$$\mathcal{A}(Q) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times H(\partial_0) \times \prod_{d \in \mathbb{A}} \mathbb{S}\mathrm{to}_d(Q)$$

が存在する．ただし $\mathbf{H} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times H_0$ は右辺の空間に

$$(g, k) \cdot (C, h, (S_d)) = (kCg^{-1}, khk^{-1}, (kS_dk^{-1}))$$

で作用する．

これは，次の図（$\#\mathbb{A} = 4$ の場合）のように Π を生成する道を取る事で直ちに示される．



3. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

定理 2.9 は，不確定特異点が全て不分岐の場合に Boalch [2, 3, 4] によって示された．そこでの証明のアイディアは，Alekseev–Malkin–Meinrenken [1] によって導入された擬ハミルトン空間を用いる事であった．最初に述べた通り，擬ハミルトン空間はハミルトン空間の乗法的類似物であり，ハミルトン空間の運動量写像がリー環の双対空間に値を取る一方，擬ハミルトン空間の運動量写像は作用する群に値を取る．Boalch は，不分岐の場合に空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ に擬ハミルトン $\mathbf{H}$ 空間の構造が定まり，その運動量写像は形式的モノドロミーの逆元で与えられる事を示した．

分岐不確定特異点がある場合には，先に述べたように形式的モノドロミーの住処が群 $\mathbf{H}$ ではなく両側主等質空間 $\mathbf{H}(\partial)$ である．そこで，擬ハミルトン空間の概念を運動量写像が両側主等質空間に値を取れるように拡張する事を考える．

3.1. 両側主等質空間と外部自己同型群

代数群 G とその自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の半直積 $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ を考えよう．積は

$$(g, \phi)(h, \psi) = (g\phi(h), \phi\psi)$$

で与えられる．各 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し

$$G(\phi) = \{\, (g, \phi) \mid g \in G \,\} \subset G \ltimes \mathrm{Aut}(G)$$

とおけば，これは埋め込み $G \hookrightarrow G \ltimes \mathrm{Aut}(G)$ を通して G が両側から作用し，G の両側主等質空間の構造を持つ．$G(\phi)$ は G の右移動を ϕ でねじったものである．

$\mathbb{G}$ を任意の両側主等質空間としたとき，各 $x \in \mathbb{G}$ が定める同型写像 $G \to \mathbb{G}$, $g \mapsto gx$ の逆写像を簡単に $y \mapsto yx^{-1}$ と表し，同様に $g \mapsto xg$ の逆写像を $y \mapsto x^{-1}y$ と表す事にすると，写像

$$\phi_x \colon G \to G; \quad g \mapsto xgx^{-1} = (xg)x^{-1}$$

はGの自己同型であり，これが代表する外部自己同型群$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ の元$[\mathbb{G}]$はxの取り方に依らない．対応$\mathbb{G} \mapsto [\mathbb{G}]$によって$G$の両側主等質空間の同型類と$\mathrm{Out}(G)$の元は1対1に対応し，$\phi \mapsto G(\phi)$が逆写像を誘導する．

$\mathrm{Out}(G)$の群演算に対応する両側主等質空間の演算は次のようにして与えられる．二つの両側主等質空間$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$に対しその積$\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$は

$$\mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_1 \times_G \mathbb{G}_2, \qquad [x_1, x_2] = [x_1 g^{-1}, g x_2] \ (g \in G)$$

と定義される．各$[x_1, x_2] \in \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{G}_2$は$x_1 x_2$と書かれ$x_1, x_2$の積と呼ばれる．また両側主等質空間$\mathbb{G}$に対し，そのコピー$\{\, x^{-1} \mid x \in \mathbb{G} \,\}$に$G$を

$$g x^{-1} = (x g^{-1})^{-1}, \quad x^{-1} g = (g^{-1} x)^{-1} \quad (x \in \mathbb{G},\ g \in G)$$

によって作用させたものを$\mathbb{G}^{-1}$と書く事にすれば，Gの両側主等質空間の自然な同型

$$\mathbb{G} \cdot \mathbb{G}^{-1} \simeq \mathbb{G}^{-1} \cdot \mathbb{G} \simeq G$$

がある（$x x^{-1}$, $x^{-1} x$ $(x \in \mathbb{G})$ がGの単位元に対応する）．各$x^{-1} \in \mathbb{G}^{-1}$を$x \in \mathbb{G}$の逆元と呼ぶ．

Gの両側主等質空間$\mathbb{G}$へのG作用$x \overset{g}{\mapsto} g x g^{-1}$ を$\mathbb{G}$における**共役作用**と呼ぶ．$\mathbb{G} = G(\phi)$のとき，点$x = (u, \phi) \in G(\phi)$の$g \in G$による共役は

$$(g, 1)(u, \phi)(g^{-1}, 1) = (g u \phi(g)^{-1}, \phi)$$

で与えられる．Gの自身への作用$u \mapsto g u \phi(g)^{-1}$は**ねじれ共役作用**等と呼ばれ，$G$が複素単純代数群の場合等に詳しく調べられている（例えば[11]を参照）．

3.2. 両側主等質空間に値を取る運動量写像

以降Gを（連結）複素簡約代数群とし，そのリー環$\mathfrak{g}$上の随伴作用不変な非退化対称双線形形式$(\ ,\ )$を固定する．Gの両側主等質空間は対応する$\mathrm{Out}(G)$の元が$(\ ,\ )$を保つもののみを考える．

Gの両側主等質空間$\mathbb{G}$が与えられたとき，Gのモーレー・カルタン形式の類似物である$\mathbb{G}$上の左不変$\mathfrak{g}$値1次微分形式θ，右不変$\mathfrak{g}$値1次微分形式$\overline{\theta}$が

$$\theta_x(X) = x^{-1} X, \quad \overline{\theta}_x = X x^{-1} \quad (x \in \mathbb{G},\ X \in T_x \mathbb{G})$$

によって定まる．ここで例えば$x^{-1} X \in \mathfrak{g}$は写像$\mathbb{G} \to G$, $y \mapsto x^{-1} y$のX微分である．これらを**$\mathbb{G}$上のモーレー・カルタン形式**と呼ぶ事にする．

定義 3.1. Gが作用する滑らかな複素代数多様体Mが

- M上のG不変2次微分形式ω,
- Gのある両側主等質空間$\mathbb{G}$への（共役作用に関し）G同変な射$\mu \colon M \to \mathbb{G}$

を備え，次の条件を満たすとき，Mを**（ねじれ）擬ハミルトンG空間**と呼び，μをその**運動量写像**と呼ぶ．

(QH1) $d\omega = \frac{1}{12} \mu^*(\theta, [\theta, \theta])$.

(QH2) $\omega(v_X,\cdot)=\mu^*(\theta+\overline{\theta},X)$ $(X\in\mathfrak{g})$. ここで $v_X|_p=\frac{d}{dt}(e^{-tX}\cdot p)|_{t=0}$ $(p\in M)$.

(QH3) $\operatorname{Ker}\omega_p\cap\operatorname{Ker}(d\mu)_p=\{0\}$ $(p\in M)$.

$\mathbb{G}\simeq G$ のとき，M は Alekseev–Malkin–Meinrenken の意味の擬ハミルトン G 空間である．従って上の定義は彼らのそれを運動量写像が一般の両側主等質空間に値を取れるように拡張したものといえる．なお我々がこれを導入した直後，G がコンパクトリー群，M が可微分多様体の場合にほぼ同じ概念を Meinrenken [10] も導入している．

G の余随伴軌道がハミルトン G 空間の構造を持つ事の乗法的類似として，G の共役類には包含写像を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造が入る事がよく知られている．この事実は次のように拡張される．

例 3.2. G の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ の任意の共役類（共役作用に関する軌道）$\mathcal{C}\subset\mathbb{G}$ は，包含写像 $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathbb{G}$ を運動量写像とする擬ハミルトン G 空間の構造を持つ．微分形式 ω は次式で与えられる：

$$\omega_x(v_X,v_Y)=\frac{1}{2}(X,\operatorname{Ad}_x Y)-\frac{1}{2}(Y,\operatorname{Ad}_x X)\qquad(x\in\mathcal{C},\ X,Y\in\mathfrak{g}).$$

ここで $\operatorname{Ad}_x\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ は x が定める G の自己同型 ϕ_x の単位元における微分である．

更に，任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$（特に G）も擬ハミルトン $G\times G$ 空間の構造を持つ事が次のようにして分かる．

例 3.3. $\mathbb{G}$ を G の両側主等質空間とする．$\mathbb{G}\times\mathbb{G}$ に $G\times G$ の両側主等質空間としての構造を

$$(g_1,g_2)(x,y)=(g_1x,yg_2^{-1}),\quad(x,y)(g_1,g_2)=(xg_2,g_1^{-1}y)$$

によって入れたものを $\mathbb{H}$ とすると，対角集合 $\{\,(x,x)\,|\,x\in\mathbb{G}\,\}\simeq\mathbb{G}$ は $\mathbb{H}$ の共役類である．よって G の任意の両側主等質空間 $\mathbb{G}$ は擬ハミルトン $G\times G$ 空間の構造を持つ．なお $G\times G$ の $\mathbb{G}$ への作用は $(g_1,g_2)\cdot x=g_1xg_2^{-1}$ で与えられる．

元々の擬ハミルトン G 空間について知られている事柄の多くは主等質空間に値を取る場合に拡張される．代表的なものを挙げておこう：

(1) アフィン代数多様体である擬ハミルトン G 空間 M に対し，そのアフィン商 $M/G=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[M]^G$ にポアソン構造が定まる．

(2) $\mathbb{G},\mathbb{H}$ をそれぞれ複素簡約群 G,H の両側主等質空間とし，M を擬ハミルトン $G\times H$ 空間でその運動量写像を

$$(\mu_G,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}\times\mathbb{H}$$

とする． また $\mathcal{C}\subset\mathbb{G}$ を共役類とする．もし $\mu_G^{-1}(\mathcal{C})$ に G が自由に作用し幾何的商 $M/\!\!/_{\mathcal{C}}G:=\mu_G^{-1}(\mathcal{C})/G$ が代数多様体として存在すれば，$M/\!\!/_{\mathcal{C}}G$ に擬ハミルトン H 空間の構造が定まる．これを M の $\mathcal{C}$ に沿った**擬ハミルトン簡約**と呼ぶ．なお $\mathbb{G}=G,\mathcal{C}=\{1\}$ の場合はこれを単に $M/\!\!/G$ と書く．

(3) $\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2$ を G の両側主等質空間とし，$\mathbb{H}$ を別の複素簡約群 H の両側主等質空間とする．自明な方法で $\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$ を $G\times G\times H$ の両側主等質空間とみなす．M を運動量写像

$$(\mu_1,\mu_2,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$$

を持つ擬ハミルトン$G\times G\times H$空間とすると，Gの対角作用とHの作用に関してMに

$$(\mu_1\cdot\mu_2,\mu_H)\colon M\to\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン$G\times H$空間の構造が定まる．その微分形式ω_{diag}は，元の微分形式ωから次のようにして得られる：

$$\omega_{\mathrm{diag}}=\omega-\frac{1}{2}(\mu_1^*\theta,\mu_2^*\overline{\theta}).$$

特に$i=1,2$に対し，$\mathbb{H}_i$を複素簡約群H_iの両側主等質空間，M_iを$\mathbb{G}_i\times\mathbb{H}_i$値運動量写像を持つ擬ハミルトン$G\times H_i$空間とすると，直積$M_1\times M_2$は自然に擬ハミルトン$G\times G\times H_1\times H_2$空間の構造を持つため，今述べた方法により，$M_1\times M_2$に（$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{H}_1\times\mathbb{H}_2$値運動量写像を持つ）擬ハミルトン$G\times H_1\times H_2$空間の構造が定まる．これを$M_1\circledast M_2$と書き$M_1$と$M_2$の**フュージョン**と呼ぶ．

(4) 上で$\mathbb{G}_2=\mathbb{G}_1^{-1}$の場合，擬ハミルトン簡約$M_1\underset{G}{\leftrightarrows}M_2:=(M_1\circledast M_2)/\!\!/G$が存在すればそれを$M_1$と$M_2$の**貼りあわせ**と呼ぶ．例えば(2)の状況で$\mathcal{C}^{-1}\subset\mathbb{G}^{-1}$を$\mathcal{C}$の元の逆元からなる共役類とすると，$M\underset{G}{\leftrightarrows}\mathcal{C}^{-1}\simeq M/\!\!/_{\mathcal{C}}G$である．

例 3.4. $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$をGの両側主等質空間とする．前の例で述べた方法で$\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2^{-1}$に擬ハミルトン$G\times G$空間の構造を入れ，それらのフュージョン$\mathbf{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2):=\mathbb{G}_1\circledast\mathbb{G}_2^{-1}$を考えると，これの運動量写像は$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1}$に値を取ると考えて良い事が分かる．実際，$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_1$に前の例で述べた方法で両側主等質空間の構造を入れたものを$\mathbb{H}_1$とし，同様の方法で$\mathbb{G}_2^{-1}$から得られるものを$\mathbb{H}_2$とすると，両側主等質空間の同型

$$\mathbb{H}_1\cdot\mathbb{H}_2\xrightarrow{\simeq}\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1};\qquad(x_1,y_1)\cdot(x_2^{-1},y_2^{-1})\mapsto(x_1y_2,y_1^{-1}x_2^{-1})$$

が得られる．このとき運動量写像は

$$\mathbb{G}_1\circledast\mathbb{G}_2^{-1}\to\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1};\qquad(x_1,x_2^{-1})\mapsto(x_1x_2,x_1^{-1}x_2^{-1})$$

で与えられる．これはGの**ダブル**と呼ばれる擬ハミルトン$G\times G$空間$\mathbf{D}(G):=G\times G$の一般化である．更に(3)で述べた方法により，Gの対角作用に関し$\mathbf{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2)$に擬ハミルトン$G$空間の構造を入れたものを$\mathbb{D}(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2)$と書く．これの運動量写像は$\mathbb{G}_1$と$\mathbb{G}_2$の「交換子」$\mathbb{G}_1\cdot\mathbb{G}_2\cdot\mathbb{G}_1^{-1}\cdot\mathbb{G}_2^{-1}$に値を取る．

4. 主定理と一般化

定理2.9は，次の主定理の系として得られる：

定理 4.1. ストークス表現の空間$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$は滑らかなアフィン代数多様体で，形式的モノドロミーの逆元を取る写像

$$\mu\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\to\mathbf{H}(\partial)^{-1};\quad\rho\mapsto(\rho(\partial_b)^{-1})_{b\in\beta}$$

を運動量写像とする擬ハミルトン$\mathbf{H}$空間の構造を持つ．

特に，補題2.10で扱った$\mathcal{A}(Q)$に擬ハミルトン空間の構造が定まる．実は一般の場合はフュージョンを用いて

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\simeq\mathcal{A}(Q_1)\circledast\cdots\circledast\mathcal{A}(Q_m)\circledast\mathbb{D}(G,G)^{\circledast g}/\!\!/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

と表される（ここで$m=\#\alpha$とおいた）．

4.1. Twisted fission spaces

補題2.10で扱った$\mathcal{A}(Q)$に擬ハミルトン空間の構造が定まる事を示せば，定理4.1の主張が従う．実は$\mathcal{A}(Q)$自身も，より基本的な擬ハミルトン空間 (fission space) をいくつか貼り合わせて得られる．

Gを複素簡約群とする．次のようなデータが与えられたとしよう：

- Gのある放物型部分群のレヴィ部分群H.
- H共役で保たれるGの冪単部分群U_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.
- Gの主等質空間$\mathbb{G}$.
- $H \times H$不変部分多様体$\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$でそれ自身が$H$の主等質空間となるもの．

このとき

$$U_{is+j} = \mathbb{H}^{-i} U_j \mathbb{H}^i \subset G \qquad (i \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \ldots, s)$$

とおくと，全てのU_j, $j \in \mathbb{Z}$はH共役で保たれる冪単部分群である．

今$l \in \mathbb{Z}_{>0}$が存在して任意の$j \in \mathbb{Z}$に対し次が成り立つと仮定しよう：

(1) $U_{j+2l} = U_j$.

(2) 部分群$U_{j+1}, U_{j+2}, \ldots, U_{j+l}$は，$H$をレヴィ部分群とするある放物型部分群$P_+$の冪単根基$U_+$に含まれ，かつ積を取る写像

$$U_{j+l} \times \cdots \times U_{j+2} \times U_{j+1} \to U_+; \quad (S_{j+l}, \ldots, S_{j+2}, S_{j+1}) \mapsto S_{j+l} \cdots S_{j+2} S_{j+1}$$

は代数多様体としての同型である．また$U_{j+l+1}, \ldots, U_{j+2l}$は$P_+$とoppositeな放物型部分群$P_-$の冪単根基$U_-$に含まれ，これについても同様の事が成り立つ．

このとき

$$\mathcal{A} = G \times \mathbb{H} \times \prod_{i=1}^{s} U_i$$

とおき，群$G \times H$を$\mathcal{A}$に

$$(g, k) \cdot (C, h, (S_i)) = (kCg^{-1}, khk^{-1}, (kS_ik^{-1}))$$

によって作用させ，また$G \times H$同変な写像$\mu = (\mu_G, \mu_H) \colon \mathcal{A} \to \mathbb{G} \times \mathbb{H}^{-1}$を

$$\mu_G(C, h, (S_i)) = C^{-1} h S_s \cdots S_1 C, \quad \mu_H(C, h, (S_i)) = h^{-1}$$

と定める．更に$\mathcal{A}$上の微分形式ωを

$$2\omega = (C^*\overline{\theta}, \mathrm{Ad}_b\, C^*\overline{\theta}) + (C^*\overline{\theta}, b^*\overline{\theta}_{\mathbb{G}}) + (C_s^*\overline{\theta}, h^*\theta_{\mathbb{H}}) - \sum_{i=1}^{s} (C_i^*\theta, C_{i-1}^*\theta).$$

と定義する．ただし$\theta, \overline{\theta}$は$G$上のモーレー・カルタン形式，$\overline{\theta}_{\mathbb{G}}, \theta_{\mathbb{H}}$は$\mathbb{G}, \mathbb{H}$上のモーレー・カルタン形式（上線が付いたものは右不変）で，

$$C_i = S_i \cdots S_2 S_1 C \colon \mathcal{A} \to G, \qquad b = hS_s \cdots S_2 S_1 \colon \mathcal{A} \to \mathbb{G}$$

とおいた．

補題 4.2. $(\mathcal{A}, \omega, \mu)$ は擬ハミルトン $G \times H$ 空間である．

このようにして得られる擬ハミルトン空間 $\mathcal{A}$ を **(twisted) fission space** と呼ぶ．空間 $\mathcal{A}(Q)$ は，複素簡約群の包含列

$$H_0 = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_r \subset K_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

各 K_i の両側主等質空間

$$H(\partial_0) = \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_{r+1} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

及び運動量写像が $\mathbb{K}_{i+1} \times \mathbb{K}_i^{-1}$ に値を取る擬ハミルトン $K_{i+1} \times K_i$ 空間の構造を備えた fission space $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ を適当に取れば

$$\mathcal{A}(Q) \simeq \mathcal{A}_1 \underset{K_2}{\leftrightarrows} \mathcal{A}_2 \underset{K_3}{\leftrightarrows} \cdots \underset{K_r}{\leftrightarrows} \mathcal{A}_r$$

と表す事ができる．この $\mathcal{A}(Q)$ の fission space による分解は，ストークス群の**レベル分解**（[4, 8, 9] 参照）

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_d \simeq \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_1) \times \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_2) \times \cdots \times \mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_r)$$

に付随して起こる．ここで $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ は $\mathrm{End}\,\mathcal{L}_d$ 内に非自明な斉次元を持つ次数 q 達のレベルを並べたものであり，$\mathbb{S}\mathrm{to}_d(k)$ は，$\mathrm{lev}(q) = k$ を満たす全ての POM q に渡る $(\mathrm{End}\,\mathcal{L}_d)_q$ の直和をリー環とする $\mathbb{S}\mathrm{to}_d$ の連結閉部分群である．各 $\mathcal{A}_i$ を構成する冪単部分群 U_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ は $\mathbb{S}\mathrm{to}_d(k_i)$, $d \in \mathbb{A}$ で与えられる．

4.2. 構造群の一般化

これまでの話は全て接続の構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合を扱っていたが，[5] では一般の複素簡約群 G を構造群とするストークス局所系を導入し，そのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\Sigma}, G)$ に関してもポアソン構造の構成を行っている．これについて少し述べる．

定理 1.1 は複素簡約構造群の場合へ次のように一般化される．まず複素 n 次元ベクトル空間と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間[1] の間に対応がある事を思い出そう．実際，W が n 次元ベクトル空間であれば，$\mathbb{C}^n$ から W への線形同型全体 $\mathbb{G}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間であり，逆に主等質空間 $\mathbb{G}$ に対し，$W = \mathbb{G} \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$ は n 次元ベクトル空間の構造を持つ．この対応の下で $\mathrm{GL}(W)$ と主等質空間の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ は自然に同型になる．次にベクトル空間 W の有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X による次数付けと，X を指標格子とするトーラス $T_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{C}^\times)$ の W への作用が対応する事を思い出して，$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathcal{Q}$ を「指標格子」とする副トーラス $T_{\mathcal{Q}}$ を考える（$\mathcal{Q}$ は有限生成でない事に注意しよう）．なおこの副トーラスは [9] にも現れる．$\mathcal{Q}$ のモノドロミー自己同型 σ は $T_{\mathcal{Q}}$ の自己同型 σ を誘導する．よって定理 1.1 にある対 (W, M_W) は，

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の主等質空間 $\mathbb{G}$,
- $\mathbb{G}$ の自己同型 $M \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$,
- 群準同型 $\varphi\colon T_{\mathcal{Q}} \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ で，$\mathcal{Q}$ のある有限生成部分自由 $\mathbb{Z}$ 加群 X を指標格子とするトーラス T_X への自然な全射 $T_{\mathcal{Q}} \twoheadrightarrow T_X$ と代数群の射 $T_X \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{G}$ の合成として表されるようなもの

[1] 特に断らない限り主等質空間の作用は右作用であると約束する．

からなる三つ組で，任意の $t \in T_{\mathbb{Q}}$ に対し $\varphi(\sigma(t)) = M\varphi(t)M^{-1}$ を満たすものと対応する．この三つ組は一般の複素簡約構造群 G の場合に直ちに拡張され，そのようなものの圏と $\operatorname{Spec}\mathbb{C}((z))$ 上の G 接続の圏は同値になる．

G **局所系**とは，G の主等質空間をファイバーとする局所系の事であった．上の三つ組の定義を基にすれば，円 ∂ 上の $\mathcal{I}$ **次数付き** G **局所系**の概念を定義する事は容易である．不確定類，ストークス群といった概念も自然に拡張され，それらを用いて不確定曲線上の**ストークス** G **局所系**や，付随する基本亜群 Π のストークス表現の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\Pi, G)$ が定義される．定理 4.1 はその場合でも正しい．

4.3. 構造群のねじれ

[5] では，更に複素簡約構造群が局所定数で動く状況を扱っている．すなわち，複素簡約群 G を固定して，ファイバーが G と同型な代数群の局所系 $\mathcal{G}$ を取り，各点におけるファイバーがその点における $\mathcal{G}$ のファイバーの主等質空間であるような局所系（$\mathcal{G}$ **局所系**）を G 局所系の代わりに用いるのである．$\mathcal{G}$ 局所系のある点 b を基点とする閉曲線に沿ったモノドロミーの住処は，$\mathcal{G}$ 自身のモノドロミーを $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_b)$ としたとき両側主等質空間 $\mathcal{G}_b(\phi)$ と同一視される．この場合にも不確定類や不確定曲線，その上の**ストークス** $\mathcal{G}$ **局所系**といった概念が定義される．またストークス表現の空間も $\mathrm{Hom}(\Pi, G \rtimes \mathrm{Aut}(G))$ のある部分集合として定義され，定理 4.1 も拡張される．

参考文献

[1] A. Alekseev, A. Malkin, and E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495.

[2] P. Boalch, *Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 2, 369–405.

[3] ———, *Through the analytic Halo: fission via irregular singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2669–2684.

[4] ———, *Geometry and braiding of Stokes data; fission and wild character varieties*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 1, 301–365.

[5] P. Boalch and D. Yamakawa, *Twisted wild character varieties*, arXiv:1512.08091.

[6] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[7] M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. II*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **5** (1937), no. 3-4, 123–166.

[8] M. Loday-Richaud, *Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), no. 3, 849–906.

[9] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Elementary acceleration and multisummability. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **54** (1991), no. 4, 331–401.

[10] E. Meinrenken, *Convexity for twisted conjugation*, arXiv:1512.09000.

[11] T. A. Springer, *Twisted conjugacy in simply connected groups*, Transform. Groups **11** (2006), no. 3, 539–545.

[12] H. L. Turrittin, *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point*, Acta Math. **93** (1955), 27–66.

[13] M. van der Put and M.-H. Saito, *Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 7, 2611–2667.

[14] M. van der Put and M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **328**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.