11

Algebraic construction of multi-species q-Boson system

竹山 美宏　(筑波大学数理物質系)*

先の論文 [6] では, アフィンヘッケ代数の変形を定義し, その表現を使って可積分な確率過程の Q 行列を構成した. ここで得られた確率過程は, q-Hahn 系の連続時間極限 [1, 4] であり, q-Boson 系 [5] の拡張となっている. 今回の講演では, 以上の結果を表現論的に拡張することにより「多種の粒子が運動する q-Boson 系」と見なされる確率過程が得られることについて述べる [7]. 以下の構成は Emsiz-Opdam-Stokman によるデルタボーズガスの拡張 [2] の差分化になっている.

2 以上の正の整数 k(粒子数) を固定する. GL_k 型のアフィンヘッケ代数の変形 $\mathcal{A}_k$ を, 生成元 $X_i^{\pm 1}(1 \le i \le k)$, $T_i(1 \le i < k)$ と次の関係式によって定義する.

$$
\begin{aligned}
&(T_i - 1)(T_i + q) = 0 \quad (1 \le i < k), \qquad T_i T_{i+1} T_i = T_i T_{i+1} T_i \quad (1 \le i \le k-2),\\
&T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| > 1), \quad X_i X_j = X_j X_i \quad (i, j = 1, \dots, k),\\
&X_{i+1} T_i - T_i X_i = T_i X_{i+1} - X_i T_i = (1-q) X_{i+1} + \alpha \quad (1 \le i < k),\\
&X_i T_j = T_j X_i \quad (i \ne j, j+1).
\end{aligned}
$$

ただし α, q はパラメータである. $T_i(1 \le i < k)$ が生成する部分代数 $\mathcal{H}_k$ は, A_{k-1} 型のヘッケ代数と同型である. $\alpha = 0$ のとき $\mathcal{A}_k$ は GL_k 型のアフィンヘッケ代数となる.

k 次元ユークリッド空間 $V = \oplus_{i=1}^k \mathbb{R} v_i$ とその双対 $V^* = \oplus_{i=1}^k \mathbb{R}\epsilon_i$ を用意し, A_{k-1} 型ルート系の単純ルート $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ を $a_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ で実現する. Weyl 群とその生成元を $W = \langle s_1, \dots, s_{k-1} \rangle$ とする.

M は左 $\mathcal{H}_k$-加群であるとする. $L = \oplus_{i=1}^k \mathbb{Z} v_i$ とし, M に値を取る L 上の関数全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $F(L, M)$ とする. Weyl 群 W は $F(L, M)$ に左から作用する. また, $(\widehat{T}_i f)(x) = T_i.f(x)$ $(1 \le i < k, f \in F(L, M), x \in L)$ によって $\mathcal{H}_k$ の作用が定まる. ただし . は $\mathcal{H}_k$ の M への作用である.

L の群環 $\mathbb{C}[L]$ を $\mathbb{C}[e^{\pm v_1}, \dots, e^{\pm v_k}]$ と同一視する. 写像 $\check{I}_i : \mathbb{C}[L] \to \mathbb{C}[L]$ $(1 \le i < k)$ を

$$
\check{I}_i(P) = (P - P s_i) \frac{\alpha e^{v_{i+1}} + 1 - q}{1 - e^{-v_i + v_{i+1}}}
$$

で定義する. ただし W の右作用 $P s_i$ は $e^x w = e^{w^{-1} x}$ $(x \in L, w \in W)$ で定める. 非退化な pairing $\mathbb{C}[L] \times F(L, M) \to M$ を $(e^x, f) = f(x)$ $(x \in L, f \in F(L, M))$ で定め, 写像 $\widehat{I}_i : F(L, M) \to F(L, M)$ を $(\check{I}_i(P), f) = (P, \widehat{I}_i(f))$ $(\forall P \in \mathbb{C}[L])$ で定義する. さらに, シフト作用素 $(t_i f)(x) = f(x - v_i)$ $(1 \le i \le k, f \in F(L, M), x \in L)$ を考えると, 次のことが言える.

命題 $F(L, M)$ 上の $\mathcal{A}_k$ の表現 ρ が $\rho(X_i) = t_i$, $\rho(T_i) = \widehat{T}_i s_i + \widehat{I}_i$ により定まる.

$L_+ = \{x \in L \,|\, \forall i : a_i(x) \ge 0\}$ とする. $x \in L$ に対し $wx \in L_+$ を満たす W の最短元 w を w_x で表す. W の元 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ (reduced expr.) に対し $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_r}$ と定める. このとき, propagation operator $G : F(L, M) \to F(L, M)$ を $(Gf)(x) = T_{w_x}^{-1}.((\rho(T_{w_x}) f)(w_x x))$ で定める.

$x \in L$ に対し $d_i^{\pm}(x) = \#\{p \,|\, p \gtrless i, \epsilon_i(x) = \epsilon_p(x)\}$ $(1 \le i \le k)$ とおき, $\sigma_x \in \mathfrak{S}_k$ を $w_x v_i = v_{\sigma_x(i)}$ $(\forall i)$ により定める. このとき, $T_i^{(\pm)}(x) \in \mathcal{H}_k$ $(1 \le i \le k)$ を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
T_i^{(-)}(x) &= T_{w_x}^{-1} \left(T_{\sigma_x(i)-1}^{-1} \cdots T_{\sigma_x(i) - d_i^-(x)}^{-1} \right) \left(T_{\sigma_x(i) - d_i^-(x)}^{-1} \cdots T_{\sigma_x(i)-1}^{-1} \right) T_{w_x},\\
T_i^{(+)}(x) &= T_{w_x}^{-1} \left(\sum_{j = \sigma_x(i)}^{\sigma_x(i) + d_i^+(x) - 1} \left(T_{\sigma_x(i)}^{-1} \cdots T_{j-1}^{-1} \right) T_j^{-1} \left(T_{j-1} \cdots T_{\sigma_x(i)} \right) \right) T_{w_x}.
\end{aligned}
$$

本研究は科研費 (基盤 (C) 課題番号:24600106) の助成を受けたものである。
* e-mail: takeyama@math.tsukuba.ac.jp
web: http://researchmap.jp/takeyama/

定理 次で定まる $H : F(L,M) \to F(L,M)$ について $HG = G(\sum_{i=1}^{k} t_i)$ が成り立つ.

$$(Hf)(x) = \sum_{i=1}^{k} q^{d_i^-(x)} T_i^{(-)}(x).\Big(f(x-v_i) - \alpha T_i^{(+)}(x).f(x)\Big) \quad (f \in F(L,M), x \in L)$$

さらに, 次の部分空間 $F_0(L,M)$ は H に関して不変である.

$$F_0(L,M) = \{f \in F(L,M) \,|\, f(s_i x) = T_i^{-1}.f(x) \text{ if } a_i(x) \geq 0 \, (1 \leq i < k)\}$$

正の整数 N(粒子の種類) を固定する. ベクトル空間 $(\mathbb{C}^N)^{\otimes k}$ には, R 行列の作用によって $\mathcal{H}_k$-加群の構造が入る [3]. そこで以下では $M = (\mathbb{C}^N)^{\otimes k}$ の場合を考える.

$1, 2, \ldots, N$ のいずれかの番号のついた k 個のボゾン粒子を考える. 1 次元の格子 $\mathbb{Z}$ にこれらの粒子を並べた配置全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とする. このとき, $\mathcal{S}$ 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間 $F(\mathcal{S})$ と $F_0(L, (\mathbb{C}^N)^{\otimes k})$ の間には同型写像がある (講演で簡単な場合の例を挙げる). この同型を $\psi : F(\mathcal{S}) \to F_0(L, (\mathbb{C}^N)^{\otimes k})$ と書く. さらに上で定義した作用素 H の $F_0(L,M)$ への制限を H^+ とする.

定理 $0 < q < 1, \alpha = -(1-q)$ とする. このとき, $Q = \psi^{-1} H^+ \psi - k$ は $\mathcal{S}$ に値を取る連続時間マルコフ連鎖の Q 行列 (transition rate matrix) となる.

この定理で得られた Q 行列が定める確率過程は以下のように記述される. $\mathbb{Z}$ 上に $1, 2, \ldots, N$ のいずれかの番号のついた k 個の粒子がある. 同じサイトに複数の粒子があってもよい. これらのうち 1 個の粒子が, サイト i から $i-1$ に, i に関して独立に動く. 番号 a の粒子が m_a 個あるサイトから $(1 \leq a \leq N)$, 番号 b の粒子が動くレートは

$$\frac{1-q^{m_b}}{1-q} q^{\sum_{a=b+1}^{N} m_a}$$

である. 特に $N = 1$ の場合は q-Boson 系におけるレートと定数倍を除いて一致するので, ここで得られた確率過程は q-Boson 系の拡張となっている.

以上の表現論的な枠組みにおいては, Q 行列に対する固有関数も (少なくとも原理的には) 自然に構成できる. 時間があればこの点についても簡単に述べる予定である.

参考文献

[1] Barraquand G. and Corwin I., The q-Hahn asymmetric exclusion process, preprint, `arXiv:1501:03445`.

[2] Emsiz, E., Opdam, E. M., and Stokman, J. V., Trigonometric Cherednik algebra at critical level and quantum many-body problems, *Selecta Math.* **14** (2009), no. 3-4, 571–605.

[3] Jimbo, M., A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), no. 3, 247–252.

[4] Povolotsky, A. M., On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46** (2013), 465205.

[5] Sasamoto, T. and Wadati, M., Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models, *J. Phys. A* **31** (1998), no. 28, 6057–6071.

[6] Takeyama, Y., A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47** (2014), 465203.

[7] Takeyama, Y., Algebraic construction of multi-species q-Boson system, preprint, `arXiv:1507.02033`.

多状態TAZRP

国場 敦夫　(東大総合文化)
丸山 翔也　(東大総合文化)
尾角 正人　(阪市大理)

秋の学会で報告した n-TASEP のいわば姉妹版を構成したので報告する．

1. n-TAZRP

サイト数 L の周期的一次元格子を考える．各サイトは $i \in \mathbb{Z}_L$ でラベルされ，状態 $\sigma_i = (\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ をとるものとする．これは n 種ある粒子のうち j 番目のものが σ_i^j 個ある状態を表す．サイト上の状態は枠が一行のヤング盤 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ $(1 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r \leq n)$ で表示することもできる．$(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ をそれぞれ 2 サイトでの状態のペアとし，$(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ を β のヤング盤表示とするとき

$$(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \gamma = \alpha \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_k\},\ \delta = (\beta_{k+1}, \ldots, \beta_r) \ \text{ for some } k \in [1, r]$$

と定義する．ただし，$\alpha \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ は多重集合としての和集合である．任意の隣り合うサイト $(i, i+1)$ で，その状態 (α, β) が $(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$ なる (γ, δ) に一定の遷移確率で移るダイナミクスに従う確率過程を n-TAZRP(totally asymmetric zero range process) という．たとえば，状態 $(235, 12446)$ は次の状態の 1 つに等確率で移る．

$$(1235, 2446), (12235, 446), (122345, 46), (1223445, 6), (12234456, \emptyset)$$

n-TAZRP ダイナミクスは n 種の粒子の重複度 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ を保存するので，状態は $\mathbf{m}$ によって定まるセクター

$$S(\mathbf{m}) = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_L),\, \sigma_i = (\sigma_i^1, \ldots, \sigma_i^n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid \sum_{i=1}^{L} \sigma_i^a = m_a, \forall a \in [1, n]\}$$

に分かれる．時刻 t に配置 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_L)$ をとる (相対) 確率を $P(\boldsymbol{\sigma}; t)$ とし, $|P(t)\rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\mathbf{m})} P(\boldsymbol{\sigma}; t) \,|\boldsymbol{\sigma}\rangle$ とおくと，n-TAZRP は次のマスター方程式で特徴づけられる．

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = H|P(t)\rangle, \qquad H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{i,i+1}, \qquad h\,|\alpha, \beta\rangle = \sum_{\gamma, \delta} h_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}\,|\gamma, \delta\rangle\,,$$

$$h_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta} = 1\ ((\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)),\ = -|\beta|\ ((\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)),\ = 0\ (\text{otherwise}).$$

ここで，$h_{i,i+1}$ は $i, i+1$ 番目の成分に h，他の成分には 1 で作用する．我々は $H|P(t)\rangle = 0$ となる状態（定常状態）に興味がある．これは，L とセクター $\mathbf{m}$ によってただ 1 つに定まるので $\left|\bar{P}_L(\mathbf{m})\right\rangle$ と表す.

2. 組合せ R と multiline process

セクター $S(\mathbf{m})$ の重複度 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^n$ に対し $\ell_a = m_a + m_{a+1} + \cdots + m_n\ (1 \leq a \leq n)$ と定め，次のようにおく．

$$B(\mathbf{m}) = B_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes B_{\ell_n}, \quad B_\ell = \{(x_1, \ldots, x_L) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid x_1 + \cdots + x_L = \ell\}$$

B_ℓ は $U_q(\widehat{sl}_L)$ の ℓ 次対称テンソル表現に付随する結晶基底である．サイト $i+1$ から i へ小さい種から順に k 個の粒子が移動するプロセスを τ_i^k で表す.

Proposition 1. $(i,a,k) \in \mathbb{Z}_L \times [1,n] \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\tilde{\tau}^k_{i,a} = \tau^k_i\,(a=1),\ = 1\,(a \in [2,n])$ とおく．このとき，写像 $T^k_{i,a}$ と組合せ R の合成により定義される射影 π が定義できて次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} B(\mathbf{m}) & \xrightarrow{T^k_{i,a}} & B(\mathbf{m}) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S(\mathbf{m}) & \xrightarrow[\tilde{\tau}^k_{i,a}]{} & S(\mathbf{m}) \end{array}$$

n-TASEP のときは π にあたるものが [2] で与えられており，ℓ 次反対称テンソル表現に付随する結晶基底の組合せ R により再定式化がされている [3].

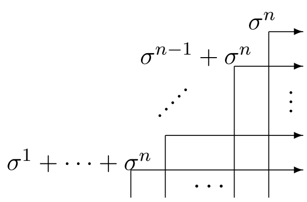
3. 主結果

n-TASEP のときと全く同様に，次の結果が得られる [4].

Theorem 2. *n-TAZRP の定常状態は* $|\bar{P}_L(\mathbf{m})\rangle = \sum_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{m})} |\pi(\mathbf{x})\rangle$ と表せる．

$\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ に対し，X_σ を

$$X_\sigma = \sum$$



で定義する．各交点にはフォック空間 F に働く $q=0$ 振動子代数に値をとる頂点模型があり，和 $\sum$ は与えられた境界条件を満たす頂点模型のすべての状態にわたってとる．

Theorem 3. *n-TAZRP の定常状態は，次のように行列積を使っても表せる．*

$$|\bar{P}_L(\mathbf{m})\rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\mathbf{m})} \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma}) |\boldsymbol{\sigma}\rangle, \quad \mathbb{P}(\sigma_1, \ldots, \sigma_L) = \mathrm{Tr}_{F^{\otimes n(n-1)/2}}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$$

Theorem 3 の導出は [1] に倣って示すこともできる．$\mathrm{Tr}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L})$ が定常状態の確率であるためには $X_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\alpha X_\beta = \sum_{\gamma,\delta} h^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta} X_\gamma X_\delta$ となる $\hat{X}_\alpha \in \mathrm{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ が見つかればよい．実際これは，４面体方程式を満たす３次元格子模型の層転送行列の可換性を使って構成される [5].

参考文献

[1] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, J. Phys. A: Math. Gen. **26** 1493–1517 (1993).

[2] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, Ann. Probab. **35** (2007) 807–832.

[3] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 34FT02 (19pp).

[4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R, in preparation.

[5] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation, in preparation.

箱玉系の線形化に対する初等的アプローチ

筧 三郎 (立教大学理学部)
Jonathan J.C. Nimmo (グラスゴー大学)
辻本 諭 (京都大学大学院情報学研究科)
Ralph Willox (東京大学大学院数理科学研究科)

箱玉系に対する「逆散乱法」[1] では，箱玉系の状態と，“rigged configuration” と呼ばれる組合せ論的対象とを対応付けることで，系の時間発展が線形化されることを主張する．論文 [1] におけるこの予想は，[2, 3] において証明された．論文 [2] においては，系の状態を行数が 2 の行列で表し，その行列を操作することで証明が行われている．また，[3] においてはクリスタル理論の立場からの証明が与えられている．本研究では，この「rigged configuration による線形化」という定理に対して，より初等的かつ簡明な証明を与えることを第 1 の目的とする．

“Rigged configuration” とは，具体的にはヤング図形と数字の組 (rigging) のことであり，可積分量子スピン系に対するベーテ方程式の根の研究から生まれた概念である．論文 [4] では，rigged configuration によって箱玉系の時間発展が線形化されるという事実を利用して，周期箱玉系の初期問題の解を与えている．一方，間田・泉・時弘の研究 [5] では，“10-elimination” という定式化により周期箱玉系の初期問題の解が与えている．これら 2 つの手法が等価であることは [6] で考察されている．

上述の成果において,「線形化」という事実は大変重要であるが，その証明は (少なくとも筆者にとっては) 複雑なものである．また，間田らの “10-elimination” という定式化自体は，クリスタル理論を経由する必要がないという意味で初等的であるが，その後の組合せ論的議論は複雑である．本研究では，上述の成果をふまえた上で，“10-elimination” と “01-elimination” を同時に考えることで,「時間発展の線形化」という事実の証明が著しく簡略化されることを示す.

箱玉系の状態は，“0”, “1” の半無限列で，以下の条件を持つものとする:

$$\mathcal{U} = \{\{u_n\}_{n=0,1,2,\dots}\,;\ u_0 = 0,\ u_n = 0 \text{ or } 1,\ u_n = 1 \text{ となる } n \text{ は有限個}\}.$$

さらに，$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる部分列 “10” の個数を $N_{10}(\mathbf{u})$ で表し，条件 $N_{10}(\mathbf{u}) = N$ である $\mathcal{U}$ の部分集合を $\mathcal{U}_N$ で表すことにする．

ここでは簡単のため，最も基本的な場合の時間発展を考える．系の時間発展 $T : \mathcal{U}_N \to \mathcal{U}_N$ は次のように与えられる [7]:

i) $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる “10” をすべて “arc” でつなぐ.

ii) i) でつないだ “10” を無視して，残りの数列中の “10” をすべて “arc” でつなぐ. この操作を，“1” がなくなるまで繰り返す.

iii) つながれた “1” と “0” とをすべて入れ替える.

次に，写像 $\Phi_{10} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ を，$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に含まれる “10” を消去して左に詰めることで定義する (“10-elimination”)．01-elimination Φ_{01} も同様に定義すると，次が成り立つのは明らかであろう:

本研究は科研費 (課題番号:23540252, 25400110, 15K04893) の助成を受けたものである.

命題 1. $\Phi_{10} = \Lambda \circ \Phi_{01}$ （ただし $\Lambda : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ は右方向へのシフトとする).

命題 2. $T \circ \Phi_{10} = \Phi_{01} \circ T$.

写像 Φ_{10} は明らかに可逆ではなく，可逆にするには消去した “10” の位置を記録する必要がある．その際に,「ある場所における 1 つの “10 消去” が $\mathcal{U}_N \to \mathcal{U}_{N-1}$ となるときのみ記録する」というルールを採用する．具体的には，次の例のように考える:

例 1. $\mathbf{u} = 0110011101010011001000\cdots$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u} & : & 0\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,1\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,\overset{\frown}{1\,0}\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,1\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,\overset{\frown}{1\,0}\,0\,0\cdots \\ \Rightarrow\quad \Phi_{01}(\mathbf{u}) & : & 0\,1\overset{\times}{|}0\,1\,1\overset{\times}{|}\overset{\bigcirc}{|}\overset{\bigcirc}{|}0\,1\overset{\times}{|}0\overset{\bigcirc}{|}0\,0\cdots \\ n & : & 0\,1\quad 2\,3\,4\qquad\quad 5\,6\quad 7\quad 8\,9\cdots \end{array}$$

ここで $\overset{\bigcirc}{|}$ は記録する 10 消去，$\overset{\times}{|}$ は記録しない 10 消去に対応しており，消去は右から左の順に行うと考えている．(「記録する 10 消去」は，[5] の “0-soliton” に対応する．)

例 1 の場合は，$\{4, 4, 7\}$ というデータを記録することになる．これを $\rho_{10}(\mathbf{u}) = \{4, 4, 7\}$ と表すことにする．一般の $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に対しても，同様にして $\rho_{10}(\mathbf{u})$ が定められる．01 消去に付随するデータ $\rho_{01}(\mathbf{u})$ も，同様にして定義できる．上述の ρ_{10} なる写像は，論文 [2] において導入された，$A_1^{(1)}$ の場合の rigged configuration の計算法と等価である．以上の準備の下で，以下の命題を示すことができる:

命題 3. $\rho_{10} = \rho_{01} \circ T$.

命題 4. 任意の $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ に対して，$\rho_{10}(\mathbf{u}) = \rho_{01}(\mathbf{u}) + \{1, \ldots, 1\}$.

箱玉系の時間発展の線形化という事実は，命題 1 ∼ 4 からの帰結として得られる．命題 1 ∼ 3 の成立はほぼ自明であり，議論を要するのは 命題 4 のみであるが，命題 4 も比較的単純な場合分けで証明できる．さらに，有限容量の運搬車による時間発展に対しても，同様の手法で時間発展が線形化されることを示すことができる．詳細については，講演の際に述べる．

参考文献

[1] 国場敦夫・尾角正人・高木太一郎・山田泰彦，箱玉系の頂点作用素と分配関数，数理解析研究所講究録 **1302** (2003), 91–107.

[2] T. Takagi, Inverse scattering method for a soliton cellular automaton, *Nucl. Phys.* **B707** (2005), 577–601 .

[3] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection, *Nucl. Phys.* **B740** (2006), 299–327.

[4] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system, *Nucl. Phys.* **B747** (2006), 354–397.

[5] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, On the initial value problem of a periodic box-ball system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), L617–L623.

[6] A.N. Kirillov and R. Sakamoto, Relationships between two approaches: rigged configurations and 10-eliminations, *Lett. Math. Phys.* **89** (2009), 51–65.

[7] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, Fundamental cycle of a periodic box-ball system, *J. Phys. A* ∶ *Math. Gen.* **36**, 99–121 (2003).

離散空間曲線の運動に対する行列式解と Pfaffian 解

廣瀬 三平 (芝浦工大教育イノベ)
井ノ口 順一 (筑波大数理物質)
梶原 健司 (九大 IMI)
松浦 望 (福岡大理)
太田 泰広 (神戸大理)

空間曲線の時間的な変形の典型例として, 局所誘導近似のもとでの渦糸の運動がよく知られている. 弧長パラメータ x と時間 t について, 渦糸方程式は $\gamma_t = \gamma_x \times \gamma_{xx}$ で与えられ, 曲線 γ と Frenet 枠 (T, N, B) は,

$$\gamma = \begin{pmatrix} (H+H^*)/F \\ i(H-H^*)/F \\ x-(2\log F)_z \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} (f^{*2}-g^{*2})G+(f^2-g^2)G^* \\ i((f^{*2}+g^{*2})G-(f^2+g^2)G^*) \\ -2f^*g^*G-2fgG^* \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{1}{F^2}\begin{pmatrix} gf^*+fg^* \\ i(gf^*-fg^*) \\ ff^*-gg^* \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\kappa F^3}\begin{pmatrix} -i(f^{*2}-g^{*2})G-(f^2-g^2)G^* \\ (f^{*2}+g^{*2})G+(f^2+g^2)G^* \\ i(2f^*g^*G-2fgG^*) \end{pmatrix},$$

のように τ 函数 F, G, H, f, g を用いて書かれる. ここで, * は複素共役, z は補助変数, κ は曲率であり $\kappa = 2|G|/F$ によって与えられる. 複素曲率 $u = 2G/F$ は非線形 Schrödinger(NLS) 方程式 $iu_t = u_{xx} + \frac{1}{2}|u|^2 u$ に従う. 以上を離散化し, 離散空間曲線の可積分な時間発展および付随するソリトン方程式に対して, 行列式解や Pfaffian 解を構成することを目的とする.

離散曲線 γ_n の場合,

$$T_n = \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{|\gamma_{n+1}-\gamma_n|}, \quad N_n = B_n \times T_n, \quad B_n = \frac{T_{n-1}\times T_n}{|T_{n-1}\times T_n|},$$

によって枠を定める. $|\gamma_{n+1}-\gamma_n| = 1$ の場合の典型的なソリトン解は, 二重 Wronski 行列式 $\tau_n^\nu(k)$ とゲージ因子 $\mathcal{G}_n(k)$,

$$\tau_n^\nu(k) = \begin{vmatrix} \left(p_i^{n+j-1}(1-p_i)^{-k}e^{\xi_i} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left(-(\frac{1}{p_i})^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \\ \left((\frac{1}{p_i^*})^{n+j-1}(1-\frac{1}{p_i^*})^{-k}e^{-\xi_i^*} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N+\nu} & \left((p_i^*)^{j-1} \right)_{i=1,j=1}^{N,\ N-\nu} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{G}_n(k) = \prod_{i=1}^{N}(p_i^*)^n(1-\frac{1}{p_i^*})^k e^{\xi_i^*}, \quad \xi_i = -\frac{1+p_i}{1-p_i}\frac{z}{2}+\theta_i,$$

を用いて,

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} (H_{n+1}+H_{n+1}^*)/F_n \\ i(H_{n+1}-H_{n+1}^*)/F_n \\ n-(2\log F_n)_z \end{pmatrix}, \quad T_n = \frac{1}{F_{n+1}F_n}\begin{pmatrix} g_{n+1}f_n^*+f_ng_{n+1}^* \\ i(g_{n+1}f_n^*-f_ng_{n+1}^*) \\ f_nf_n^*-g_{n+1}g_{n+1}^* \end{pmatrix},$$

のように与えられる．ただし，

$$F_n = \tau_n^0(0)\mathcal{G}_n(0), \quad H_n = \tau_n^1(2)\mathcal{G}_n(2), \quad f_n = \tau_n^0(-1)\mathcal{G}_n(-1), \quad g_n = -\tau_n^1(1)\mathcal{G}_n(1),$$

である．ここで p_i, θ_i は $|p_i| > 1$ なる定数である．このとき複素共役条件と正則性条件,

$$\left(\tau_{n+k}^{\nu}(k)\mathcal{G}_{n+k}(k)\right)^* = (-1)^{k\nu}\tau_n^{-\nu}(-k)\mathcal{G}_n(-k), \quad F_n > 0,$$

がみたされる．θ_i に時間依存性を導入することによって, 離散曲線の時間的な変形を考えることができる．その際, 複素共役条件を満足する変形のみが許される．離散曲線の複素曲率が従う方程式として, 離散化された NLS 方程式が現れる．

離散 NLS 方程式にはいくつかのバージョンが知られている．広田-辻本による離散 NLS 方程式には行列式解があることがわかっている．一方, 広田-辻本の離散 NLS 方程式から変数変換でえられる方程式,

$$b(u_{n+1}^{t+1} - u_n^t) = a(u_{n+1}^t - u_n^{t+1})\Gamma_{n+1}^t, \quad \frac{\Gamma_{n+1}^t}{\Gamma_n^t} = \frac{1+|u_n^t|^2}{1+|u_n^{t+1}|^2},$$

は $u_n^t = G_n^t/F_n^t$, $\Gamma_n^t = F_n^t F_{n-1}^{t+1}/F_n^{t+1}F_{n-1}^t$ とおくことにより，

$$b(G_{n+1}^{t+1}F_n^t - G_n^t F_{n+1}^{t+1}) = a(G_{n+1}^t F_n^{t+1} - G_n^{t+1}F_{n+1}^t), \quad F_{n+1}^t F_{n-1}^t - F_n^t F_n^t = |G_n^t|^2,$$

と双線形化され, 自然に Pfaffian 解をもつ．実際, 第一の双線形方程式は離散 mBKP 階層の方程式であり, 第二の双線形方程式は複素 mKdV 階層を BKP 階層に埋め込むときに現れる一次元戸田格子方程式である．ソリトン解は Pfaffian の成分を

$$(i,j) = \sum_{\nu=1}^{2N}\sum_{\mu=1}^{2N}\frac{p_\nu - p_\mu}{p_\nu + p_\mu}\varphi_\nu^i\varphi_\mu^j, \quad (d,i) = \sum_{\nu=1}^{2N}\varphi_\nu^i,$$

$$\varphi_\nu^i = \left(\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu} + \frac{1-\alpha p_\nu}{1+\alpha p_\nu}\right)^i\left(\frac{1+\alpha p_\nu}{1-\alpha p_\nu}\right)^n\left(\frac{1+\beta p_\nu}{1-\beta p_\nu}\right)^t c_\nu, \quad \alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{a-b}{2},$$

と定めることにより，

$$F_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ even}, \\ \mathrm{Pf}(d, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ odd}, \end{cases}$$

$$G_n^t = \begin{cases} \mathrm{Pf}(d, N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ even}, \\ \mathrm{Pf}(N, N-1, N-2, \cdots, 1, 0), & N: \text{ odd}, \end{cases}$$

で与えられる．ここで複素共役条件と正則性条件のために $p_{N+\nu} = -p_\nu^*$ $(1 \le \nu \le N)$ ととり, さらに c_ν を適切にとる．c_ν の具体形は複雑である．

References

[1] S. Hirose, J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, Y. Ohta, dNLS flow on Discrete Space Curves, MI Lecture Note Vol.64 (Kyushu University, 2015), 93-102, arXiv: 1511.08076.

[2] 本学会幾何学分科会における松浦による講演.

BKP 階層の解の展開について

執行　洋子 (津田塾大学)

変数 $x = (x_1, x_3, x_5, \cdots)$, $\quad y = (y_1, y_3, y_5, \cdots)$ に対して, BKP 階層 [1] は次のような双線形方程式で与えられる.

$$\oint e^{-2\tilde{\xi}(y,k)} \tau(x - y - 2[k^{-1}]_o)\tau(x + y + 2[k^{-1}]_o) \frac{dk}{2\pi ik} = \tau(x - y)\tau(x + y) \tag{1}$$

但し,

$$[\alpha]_o = (\alpha, \frac{\alpha^3}{3}, \frac{\alpha^5}{5}, \cdots), \quad \tilde{\xi}(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} k^{2n-1}$$

とする.

任意の形式的ベキ級数 $\tau(x)$, $x = (x_1, x_3, x_5, \cdots)$ はシューアの Q 関数を用いて以下のように展開される.

$$\tau(x) = \sum_{\mu} \xi_\mu Q_\mu(\frac{x}{2}) \tag{2}$$

但し, 係数 ξ_μ は

$$\xi_\mu = 2^{-l(\mu)} Q_\mu(\tilde{\partial})\tau(x)|_{x=0} \tag{3}$$

と定義され, μ は strict partition とする.

定理 1 [4] ベキ級数 $\tau(x)$(但し, $\tau(0) \neq 0$) が *BKP* 階層の解であるための必要十分条件は, 係数 ξ_μ, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$ が

$$\xi_{(\mu_1, \cdots, \mu_n)} = \mathrm{Pf}(\xi_{(\mu'_i, \mu'_j)})_{1 \le i.j \le 2n} \tag{4}$$

を満たすことである. 但し, $\mathrm{Pf}(\xi_{(\mu_i, \mu_j)})_{1 \le i.j \le 2n}$ は $\xi_{(\mu_i, \mu_j)}$ を成分とする反対称行列のパフィアンとする. さらに, $\mu' = (\mu'_1, \cdots, \mu'_{2n})$ は *strict* な分割 μ から得られる以下のような分割とする:

$$\mu' = \begin{cases} (\mu_1, \cdots, \mu_l, 0), & \textit{if } l \textit{ is odd}, \\ (\mu_1, \cdots, \mu_l), & \textit{if } l \textit{ is even}. \end{cases}$$

今回この定理を $\tau(0) \neq 0$ であるタウ関数に拡張した.

定理 2 べき級数 $\tau(x)$ を

$$\tau(x) = Q_\lambda(\frac{x}{2}) + \sum_{\mu} \xi_\mu Q_\mu(\frac{x}{2}) \tag{5}$$

と展開したとき, $\tau(x)$ が BKP 階層の解であることと展開係数 ξ_μ が次の式を満たすこととは同値である. $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2L-1})$ のとき,

$$\begin{cases}\xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L-1)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1}\}},\\ \xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda,\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L-1)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l}\}},\end{cases}$$

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2L})$ のとき,

$$\begin{cases}\xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda,\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l-1}\}},\\ \xi_{(\mu_1,\cdots,\mu_{2l})}=\mathrm{Pf}((i,j))_{i,j\in\{\Lambda^{(1)},\cdots,\Lambda^{(2L)},\mu_1,\cdots,\mu_{2l}\}},\end{cases}$$

但し, パフィアンの成分 (i,j) は以下のように定義する:

$$(\Lambda^{(i)},\mu)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\hat{\lambda}_i,\cdots,\lambda_L,\mu)},\ (\Lambda,\mu)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_L,\mu)},$$
$$(\mu_i,\mu_j)=\xi_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_L,\mu_i,\mu_j)},\ (\Lambda,\Lambda^{(i)})=(\Lambda^{(i)},\Lambda^{(j)})=0,$$

参考文献

[1] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation group for soliton equations, Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory-, Ed. by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1983).

[2] Y.C. You, Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, in infinite dimensional Lie algebrasa and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World sci.1989, 449-466.

[3] Y. Shigyo, On addition formulae of KP, mKP and BKP hierarchies, SIGMA 9 (2013), 035, 16 pages.

[4] Y. Shigyo, Giambelli type formulae in the BKP hierarchy, arxiv:1503.07977v1.

A generalization of Jacobi inversion formulae to telescopic curves on all the strata

綾野　孝則　(大阪市立大学)*

1. はじめに

X を種数 g の超楕円曲線、$du = {}^t(du_1, \ldots, du_g)$ を X 上の正則微分形式、$S^k(X)$ を X の k 次の対称積とする $(1 \le k \le g)$。アーベル・ヤコビ写像

$$S^k(X\backslash\infty) \to \mathbb{C}^g \quad : \quad D = \sum_{i=1}^{k} P_i \to u = \sum_{i=1}^{k} \int_{\infty}^{P_i} du$$

に対して、$P_i = (x_i, y_i)$ の座標を u から表示する問題をヤコビの逆問題という。D が一般因子であれば、超楕円シグマ関数を用いて P_i の座標は u から表示できることが知られている。この結果は松谷氏らにより (n, s) 曲線の特別な場合である $y^r = f(x)$ で定義される曲線に一般化された [2]。さらに [2] では、その系として、$y^r = f(x)$ に付随するシグマ関数の零点の位数に関する性質を示している。本発表では telescopic 曲線 [3]((n, s) 曲線を含む) にまで松谷氏らの結果を一般化し、[2] で示されたシグマ関数の零点の性質が telescopic 曲線の場合でも成り立つことを報告する。

2. シグマ関数

Klein により導入された超楕円シグマ関数は、近年、Buchstaber 氏や中屋敷氏 [4] らにより (n, s) 曲線にまで一般化された。さらに、[1] では telescopic 曲線にまでシグマ関数が拡張されている。telescopic 曲線 [3] とは次のような代数曲線である。$m \ge 2$ に対して、 $A_m = (a_1, ..., a_m)$ をある条件を満たす自然数列とする。このとき、A_m から $m-1$ 個の m 変数多項式 $F_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(2 \le i \le m)$ が定まる。$X^{\rm aff}$ を F_i の共通零点の集合とする。$X^{\rm aff}$ は $\mathbb{C}^m$ のアフィン代数曲線になる。$X^{\rm aff}$ は非特異であるとし、X を $X^{\rm aff}$ に対応するコンパクトリーマン面とする。X は $X^{\rm aff}$ に唯一つの点 ∞ を付け加えたものと思える。X を $(a_1, ..., a_m)$ に付随する telescopic 曲線という。∞ にのみ極を持つ有理型関数のなすベクトル空間の基底は、A_m から定まるある集合 $B(A_m) \subset \mathbb{Z}_{\ge 0}^m$ を用いて、$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B(A_m)$ と書けるので、それを ∞ における極位数の小さい順に並べ替えたものを φ_i, $i \ge 0$ とする。$\varphi_0 = 1$ である。g を X の種数とする。[2] と同様に telescopic 曲線に対しても次の記号を定義する。$D = \sum_{i=1}^{k} P_i \in S^k(X\backslash\infty)$ に対して、

$$\psi_k^{(i)}(D) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(P_1) & \cdots & \varphi_k(P_1) \\ 1 & \varphi_1(P_2) & \cdots & \varphi_k(P_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(P_k) & \cdots & \varphi_k(P_k) \end{vmatrix}, \quad \mu_{k,i}(D) = \frac{\psi_k^{(i)}(D)}{\psi_k^{(k)}(D)}, \quad (0 \le i \le k)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14K25, 14H50
キーワード：ヤコビの逆問題、シグマ関数、Telescopic 曲線、シグマ関数の零点
* 〒558-8585　大阪市住吉区杉本3丁目3番138号　大阪市立大学　数学研究所
e-mail: tayano7150@gmail.com

とする。$\psi_k^{(i)}(D)$ の (i) は $i+1$ 番目の列を除くことを表す。種数 g の telescopic 曲線 X に対して、algebraic bilinear form $\widehat{\omega}(P,Q)$ は、∞ にのみ極を持つ第 2 種微分形式 dr_i が存在して、$\widehat{\omega}(P,Q) = d_Q\Omega(P,Q) + \sum_{i=1}^{g} du_i(P)dr_i(Q)$ と書ける [4, 1]。$P = (x_1,\ldots,x_m), Q = (y_1,\ldots,y_m) \in X$、$G = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{2\le i,j\le m}$ とする。$\Omega(P,Q)$ は $X \times X$ 上の 1-form、$du_i(P) = \frac{\varphi_{i-1}(P)}{\det G(P)}dx_1$ は X 上の正則微分形式である。さらに、$dr_g(Q) = \frac{\varphi_g(Q)}{\det G(Q)}dy_1$ ととれる。X に付随するシグマ関数 $\sigma(u) = \sigma(u_1,\ldots,u_g)$ とは、$(X, \{du_i\}, \widehat{\omega}, \infty)$ から定まる $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数である [4, 1]。$\sigma_i(u) = \frac{\partial}{\partial u_i}\sigma(u)$ とする。

3. ヤコビの逆問題の一般化

$D = \sum_{i=1}^{k} P_i \in S^k(X\backslash\infty)$ に対して、$u = \sum_{i=1}^{k}\int_\infty^{P_i} du$ とする。このとき、$y^r = f(x)$ で定義される曲線 [2] と同様に、telescopic 曲線に対しても次の定理が成り立つ。

定理 1 (1) $k = g$ のとき　　$D \in S^g(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)\sigma_g(u) - \sigma_{gi}(u)\sigma(u)}{\sigma(u)^2} = (-1)^{g-i+1}\mu_{g,i-1}(D), \quad (1 \le i \le g)$$

(2) $k = g-1$ のとき　　$D \in S^{g-1}(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)}{\sigma_g(u)} = (-1)^{g-i}\mu_{g-1,i-1}(D), \quad (1 \le i \le g)$$

(3) $k \le g-2$ のとき　　$D \in S^k(X\backslash\infty)$ が一般因子ならば、

$$\frac{\sigma_i(u)}{\sigma_{k+1}(u)} = \begin{cases} (-1)^{k-i+1}\mu_{k,i-1}(D) & (1 \le i \le k+1) \\ 0 & (k+2 \le i \le g) \end{cases}$$

また、定理 1 を用いると、[2] と同様に telescopic 曲線に対してもシグマ関数の零点の位数に関する次の性質が従う。

系 1 $\sum_{i=1}^{k-1} P_i$ を一般因子とする。$u^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k-1}\int_\infty^{P_i} du$ とする。$\mathrm{ord}_\infty(\varphi_i) = N(i)$ とする。z_k を P_k の ∞ の周りでの局所座標とする。m, n をそれぞれ $\sigma_{k+1}(u), \sigma_i(u)$ の $u = u^{(k-1)}$ での零点の位数とする $(1 \le i \le k)$。即ち、

$$\sigma_{k+1}(u^{(k-1)} + \int_\infty^{P_k} du) = C_1(u^{(k-1)})z_k^m + O(z_k^{m+1}), \quad C_1(u^{(k-1)}) \ne 0$$

$$\sigma_i(u^{(k-1)} + \int_\infty^{P_k} du) = C_2(u^{(k-1)})z_k^n + O(z_k^{n+1}), \quad C_2(u^{(k-1)}) \ne 0$$

このとき、$m = n + N(k) - N(k-1)$ が成り立つ。

参考文献

[1] T. Ayano, "Sigma functions for telescopic curves", Osaka J. Math., Volume 51, Number 2 (2014), 459-481.

[2] S. Matsutani and E. Previato, "Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$", J. Math. Soc. Japan, Volume 60, Number 4 (2008), 1009-1044.

[3] S. Miura, "Linear codes on affine algebraic curves", Trans. IEICE J81-A (1998), 1398-1421.

[4] A. Nakayashiki, "On algebraic expressions of sigma functions for (n,s) curves", Asian J. Math. 14 (2010), 175-211.

17

Ruijsenaars 作用素の双対 Cauchy 型核関数の関数等式および特殊な場合における固有関数

齋藤 洋介 (大阪市立大学数学研究所)

Ruijsenaars 模型は Calogero-Moser 系の q-変形として導入された楕円関数的な量子多体系であるが, その固有関数については不明なことが多い. ここでは, Ruijsenaars 作用素の双対 Cauchy 型核関数の関数等式に注目することで, 特殊な場合における Ruijsenaars 作用素の固有関数を構成できることについて説明する.

$q,\, t \in \mathbb{C}^\times$ を $|q|<1$, $|t^{-1}|<1$ を満たす複素数とする. $|p|<1$ なる複素数に対し $(x;p)_\infty := \prod_{n\geq 0}(1-xp^n)$ $(x\in\mathbb{C})$, $\Theta_p(x) := (p;p)_\infty(x;p)_\infty(px^{-1};p)_\infty$ $(x\in\mathbb{C}^\times)$ とおく. q-シフト作用素を $T_{q,x}f(x) := f(qx)$ とおく. 次で定義される Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ $(N\in\mathbb{Z}_{>0})$

$$H_N(q,t,p) := \sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)}T_{q,x_i}$$

の双対 Cauchy 型核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ $(M,N \in \mathbb{Z}_{>0})$ が [KNS] で導入された.

定義. (核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$) $\Psi_{MN}(x,y) := \prod_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}} \Theta_p(x_iy_j)$ とおく.

この核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ が満たす関数等式を自由場表示によって導出することを考える. 以下では, 楕円のパラメータに対応する文字 p を形式的変数とみなす.

生成元 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, $\{\overline{a}_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ と次の関係式によって生成されるボソンを用意する.

$$[a_m,a_n] = m\frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0},\quad [\overline{a}_m,\overline{a}_n] = m\frac{(1-q^{|m|})(1-p^{|m|})}{(qt^{-1}p)^{|m|}(1-t^{|m|})}\delta_{m+n,0}.$$

Ruijsenaars 作用素の自由場表示は [Sa] で構成された.

命題. (Ruijsenaars 作用素の自由場表示) $:\bullet:$ を上で定めたボソンに関する正規順序積とし, $|0\rangle$ を条件 $a_n|0\rangle = \overline{a}_n|0\rangle = 0$ $(n>0)$ を満たす真空ベクトルとする. ボソンの作用素 $\eta(p;z)$, $(\eta(p;z))_\pm$, $\phi(p;z)$ を次で定める.

$$\eta(p;z) :=: \exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}p^{|n|}\overline{a}_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{n}}{1-p^{|n|}}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right):,$$

$$(\eta(p;z))_\pm := \exp\left(-\sum_{\pm n>0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}p^{|n|}\overline{a}_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{\pm n>0}\frac{1-t^{n}}{1-p^{|n|}}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right),$$

$$\phi(p;z) := \exp\left(\sum_{n>0}\frac{(qt^{-1}p)^n(1-t^n)}{(1-q^n)(1-p^n)}\overline{a}_{-n}\frac{z^{-n}}{n}\right)\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{(1-q^n)(1-p^n)}a_{-n}\frac{z^n}{n}\right).$$

$N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\phi_N(p;x) := \prod_{j=1}^{N}\phi(p;x_j)$ とおく. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&[\eta(p;z) - t^{-N}(\eta(p;z))_-(\eta(p;p^{-1}z))_+]_1\phi_N(p;z)|0\rangle\\ &= \frac{t^{-N+1}\Theta_p(t^{-1})}{(p;p)_\infty^3}H_N(q,t,p)\phi_N(p;x)|0\rangle.\end{aligned}$$

ここで記号 $[f(z)]_1$ は z, z^{-1} の形式ベキ級数 $f(z)$ の z についての定数項を表す.

定理. ボソンの作用素 $b^\dagger(p;z)$ を次で定める.

$$b^\dagger(p;z) := \exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{p^n}{1-p^n}\overline{a}_n\frac{z^{-n}}{n}\Big)\exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{1}{1-p^n}a_n\frac{z^{-n}}{n}\Big).$$

(1) $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $b^\dagger_N(p;x) := \prod_{j=1}^N b^\dagger(p;x_j)$ とおく. このとき

$$\langle 0|b^\dagger_M(p;x)\phi_N(p;y)|0\rangle = (p;p)_\infty^{-MN}\Psi_{MN}(x,y).$$

(2) $\langle 0|b^\dagger_N(p;x)$ への $[\eta(p;z)]_1$ の作用は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\langle 0|b^\dagger_N(p;x)[\eta(p;z)-q^N(\eta(p;pz))_-(\eta(p;z))_+]_1\\&=\frac{q^{N-1}\Theta_p(q)}{(p;p)_\infty^3}H_N(t^{-1},q^{-1},p)\langle 0|b^\dagger_N(p;x).\end{aligned}$$

上の定理によって $\langle 0|b^\dagger_M(p;x)[\eta(p;z)]_1\phi_N(p;y)|0\rangle$ を計算することで次が得られる.

定理. **(核関数 $\Psi_{MN}(x,y)$ の関数等式)**

$$\begin{aligned}&\{t^{-M+1}\Theta_p(t^{-1})H_M(q,t,p)_x - q^{N-1}\Theta_p(q)H_N(t^{-1},q^{-1},p)_y\}\Psi_{MN}(x,y)\\&=(-t^{-M}+q^N)(p;p)_\infty^3 C^*_{MN}(x,y)\Psi_{MN}(x,y),\\&C^*_{MN}(x,y) := \oint_{C_1}\frac{dz}{2\pi iz}\prod_{i=1}^M\frac{\Theta_p(t^{-1}x_iz)}{\Theta_p(x_iz)}\prod_{j=1}^N\frac{\Theta_p(q^{-1}z/y_j)}{\Theta_p(z/y_j)},\\&\text{積分路 } C_1 : |z| < \min\{|x_1|^{-1},\dots,|x_M|^{-1}, q|y_1|,\dots,q|y_N|\}.\end{aligned}$$

ここで $H_M(q,t,p)_x$ は文字 $x_1,\dots,x_M$ の関数に作用する Ruijsenaars 作用素を表す.

上の関数等式は $-t^{-M}+q^N=0$ である場合には [KNS] にあるものに一致する.

定理. **($H_N(q,t,p)$ の特殊な場合の固有関数)** $e_n(p;x_1,\dots,x_N) := \oint_{C_2}\frac{dy}{2\pi iy}y^{-n}\Psi_{N1}(x,y)$ ($n\in\mathbb{Z}$) とおく. 積分路 C_2 は $|y| < \min\{|x_1|^{-1},\dots,|x_N|^{-1}\}$ ととる. このとき $t^{-N}=q$ である場合には $e_n(p;x_1,\dots,x_N)$ は $H_N(q,t,p)$ の固有関数である：

$$H_N(q,t,p)e_n(p;x_1,\dots,x_N) = t^{-n}\frac{\Theta_p(q^{-1})}{\Theta_p(t)}e_n(p;x_1,\dots,x_N).$$

$\Psi_{N1}(x,y)=\prod_{i=1}^N\Theta_p(x_iy)$ は基本対称式の生成母関数の楕円化であるとみなせるので, $e_n(p;x_1,\dots,x_N)$ は基本対称式の楕円化にあたる.

文献

[KNS] Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi. *Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications.* SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications. Volume 5 (2009) arXiv:0812.0279.

[Sa] Yosuke Saito. *Elliptic Ding-Iohara algebra and the free field realization of the elliptic Macdonald operator.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), 411-455. doi: 10.4171/PRIMS/139, arXiv:1301.4912.

Generalized pre-semiring 上の Yang-Baxter 写像

Matsumoto DiogoKendy　(早稲田大学　基幹理工学部)*

1. Generalized pre-semiring

定義 1.1 空でない集合 X と二つの二項演算 $\oplus, * : X \times X \to X$ の組 $(X, \oplus, *)$ で次の条件を満たすものを generalized pre-semiring と呼ぶ.

1. $(X, \oplus), (X, *)$ は半群,
2. $(X, \oplus, *)$ は $*$ に関して分配的

$$\begin{aligned} a * (b \oplus c) &= a * b \oplus a * c, \\ (a \oplus b) * c &= a * c \oplus b * c. \end{aligned}$$

また $m^{\oplus}, m^{*} : X \times X \to X$ を用いて二項演算 $\oplus, *$ を

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b, \ , m^{*}(a, b) = a * b$$

と表す.

例 1.2 自然数の集合 $\mathbb{N}$ は和と積に関して generalized pre-semiring となる.

例 1.3 モノイド (単位元付き半群)$(M, \cdot, e_M)$ において,

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b := a \cdot b, \ m^{*}(a, b) = a * b := e_M$$

と定めると $(M, \oplus, *)$ は generalized pre-semiring となる

例 1.4 全順序集合 X において,

$$m^{\oplus}(a, b) = a \oplus b := \min(a, b), \ m^{*}(a, b) = a * b := \max(a, b)$$

と定めると $(X, \oplus, *)$ は generalized pre-semiring となる.

2. Generalized pre-semiring 上の Yang-Baxter 写像

定義 2.1 X を空でない集合とする. 写像 $\sigma : X \times X \to X \times X$ が

$$(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)$$

を満たすとき, σ は Yang-Baxter 写像 (YB 写像) という.

例 2.2 例 1.2 の generalized pre-semiring において,

$$\sigma(a, b) = (b, a)$$

とすると σ は YB 写像となる.

キーワード：Yang-Baxter 写像, Generalized pre-semiring

* 〒169-8555　東京都新宿区大久保 3-4-1
e-mail: `diogo-swm@aoni.waseda.jp`

例 2.3 例1.3と例1.4のgeneralized pre-semiringにおいて，

$$\sigma(a,b) = (a \oplus b, a * b)$$

とするとσはYB写像となる．

本講演では，いくつかの具体的な例を通して

$$\begin{aligned} m^{\oplus} \cdot \sigma &= m^{\oplus}, & (1) \\ m^{*} \cdot \sigma &= m^{*}, & (2) \end{aligned}$$

を満たす写像$\sigma : X \times X \to X \times X$がYB写像となるための条件と，そのときのYB写像の性質について述べる．(上記の例に現れるYB写像は条件(1)，(2)を満たす．)

参考文献

[1] Bukhshtaber, V. M., Yang-Baxter mappings, Uspekhi Mat. Nauk 53 (1998), no. 6(324), 241-242; translationin Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 6, 1343-1345.

[2] Drinfel'd, V. G.: On some unsolved problems in quantum group theory, Quantum groups (Leningrad, 1990), 1-8, Lecture Notes in Math., 1510, Springer, Berlin, 1992.

[3] Matsumoto, D.K., Shibukawa, Y.:Quantum Yang-Baxter equation, braided semigroups, and dynamical Yang-Baxter maps, Tokyo J. Math. 38 (2015),227-237.

[4] Shibukawa, Y., Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43(2007), no. 4, 1157-1182.

階乗型 P 関数の構造定数について

池田岳（岡山理科大学）

1 $P_\lambda(x|t)$ の定義

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ を $\ell \leq n$ をみたす strict partition とする．ℓ を λ の *length* と呼び $\ell(\lambda)$ で表す．x を変数として一般化された階乗を $(x|t)^k = (x - t_1)\cdots(x - t_k)$ $(k \geq 1)$ と定義する．ここに $t = (t_1, t_2, \ldots)$ は無限個の不定元である．$x_1, \ldots, x_n$ を変数として各 strict partition λ に対して **factorial P-関数**を

$$P_\lambda(x|t) = \frac{1}{(n-\ell(\lambda))!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (x_i|t)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

と定義する (Ivanov による)．ここで n 次対称群 S_n の元 w は変数 $x_1, \ldots, x_n$ を置換する．

2 $\mathrm{RMST}(\lambda)$ による表示

アルファベットとして $\mathbb{P}' = \{1 < 1' < 2 < 2' < \cdots < n < n'\}$ を用いる．$a \in \mathbb{P}'$ に対してプライムを除いた文字を $|a|$ で表す．Strict partition λ を台とする *Reverse marked shifted tableau* (RMST) R とは λ の shifted diagram の各箱に $\mathbb{P}'$ の元を一つづつ入れて得られるもので

(1) 行に関して左から右に，列に関して上から下に弱い意味で減少する．

(2) 各列は各 k $(1 \leq k \leq n)$ を高々 1 個しか含まない．

(3) 各行は各 k' $(1 \leq k \leq n)$ を高々 1 個しか含まない．

(4) 対角の箱，つまり (i, i) にはプライムのない文字だけが入る．

λ を台とする RMST 全体の集合を $\mathrm{RMST}(\lambda)$ で表す．RMST R の entry a に対し $r(a)$ は文字 a の行の座標，$c(a)$ は列の座標を表す．符号 $\varepsilon(a) \in \{\pm 1\}$

を a が対角にないときは，a がプライム付きなら $+1$，プライムが無いならば -1 とし，a が対角にあるときは $(-1)^{|a|+r(a)+n}$ と定める．

3　結果

μ を strict partition とし $1 \leq \ell \leq \ell(\mu)$ とする．κ を $\kappa_i \leq \mu_i$ $(\forall i)$ をみたす strict partition とするとき skew shifted shape μ/κ 上の 1 から ℓ および $1'$ から ℓ' を entry に持つ RMST の全体を $\mathrm{RMST}_\ell(\mu/\kappa)$ で表す．和集合 $\mathrm{RS}(\mu,\ell) = \bigsqcup_{\kappa\subset\mu} \mathrm{RMST}(\mu/\kappa)$ を考え，この集合の元を μ を台とする ℓ-rim strip と呼ぶ．更に ℓ-rim strip S の entry ($\{1,\ldots,\ell,1',\ldots,\ell'\}$ の元) のいくつかにバーを付けて得られる対象を考える．例えば次のようなものである：

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 3' & 3 & 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3' & 2' & \bar{2} & 1' & 1 \\ \cline{2-6} \multicolumn{2}{c|}{} & 2 & \bar{1}' & \bar{1} \\ \cline{3-5} \end{array} \tag{3.1}$$

このような組合せ的対象を**バー付き ℓ-rim strip** と呼び，これら全体の集合を $\mathrm{BRS}(\mu,\ell)$ で表すことにする．$B \in \mathrm{BRS}(\mu,\ell)$ に対して $\omega(B) = (\omega_1(B),\ldots,\omega_n(B)) \in \mathbb{N}^n$ を

$\omega_i(B) = \#\{a \in B \mid |a| = i,\ a \text{ はバー無し}\}\ (1 \leq i \leq \ell),\ \omega_i(B) = \kappa_{i+\ell}\ (\ell < i \leq n)$

と定義する．バー付き ℓ-rim strip B に対して，そのバー付きの entry からなる集合を B^b で表す．$a \in B^b$ に対して $\mathrm{prec}(a)$ を 行番号が $r(a)$ 以上，列番号が $c(a)$ 以下であるバーの無い $k := |a|$ または k' の個数を表す．もうひとつ別に strict partition λ を与えるとき $B \in \mathrm{BRS}(\mu,\ell(\lambda))$ に対して

$$c_{\lambda,B}(t) = \prod_{b\in B^b}\left(t_{\lambda_{|a|}+1+\mathrm{prec}(a)} + \varepsilon(a)t_{c(a)-r(a)+1}\right) \tag{3.2}$$

と定義する．

定理 1. 次が成り立つ：

$$P_\lambda(x|t)P_\mu(x|t) = \sum_{B\in\mathrm{BRS}(\mu,\ell(\lambda))} c_{\lambda,B}(t)P_{\lambda+\omega(B)}(x|t). \tag{3.3}$$

右辺の $P_{\lambda+\omega(B)}(x|t)$ は一般に $\lambda+\omega(B)$ が strict partition でないものも含む．ここでは $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して $P_\alpha(x|t)$ を添え字 α に関して交代的であると理解する．したがって strict partition を添え字とするものだけの線型結合に書き直すことはできる．その結果，キャンセルが起こり，整理した時に具体的にどの項が残るのかわかることが望ましいが，まだそこまで到達していない．

古典群の double Bruhat cell 上のクラスター変数と結晶基底

金久保 有輝　(上智大学)
中島 俊樹　　(上智大学)

記号

G : $\mathbb{C}$ 上の古典的代数群, B, B_- : opposite な Borel 部分群, $H := B \cap B_-$,
N, N_- : unipotent radicals, $W = \mathrm{Norm}(H)/H$: Weyl 群, Λ_i : 基本ウエイト

1. Introduction

代数群Gをベースにした研究は, その座標環の構造を調べる大域的な研究と, リー環やその量子群を調べる局所的な研究に分かれる. 両研究は密接に関連している. 例えば, 座標環 $\mathbb{C}[N]$ と $\mathfrak{n} := \mathrm{Lie}(N)$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{n})$ は互いに双対関係にある. $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ (A 型) の場合, 「小行列式」は $\mathbb{C}[N]$ の元であるが, これは$U(\mathfrak{n})$ における**標準基底**の双対基底となる. 我々の最近の研究で, double Bruhat cell $G^{u,v}$ $(u, v \in W)$ 上の小行列式と, **結晶基底**との関係が新たにわかった. $G^{u,v} := BuB \cap B^- vB^-$ である. Exchange relation という関係式により, $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ の生成元が, 小行列式から次々と生成される [2]. このような生成元を持つ代数を**クラスター代数**と呼び, その生成元を**クラスター変数**と呼ぶ. 一方, 結晶基底は, 量子群の表現を組み合わせ論的に扱うために導入されたもので, タブローやLaurent 単項式を用いて表示される. [3] では, 小行列式を座標変換したものが, 結晶基底をLaurent 単項式で表示したものの和になることを示した. 座標環におけるクラスター変数と, 結晶基底の関係が発見されたということである. 本講演では, この結果を他のB, C, D 型古典群 ($\mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$) の場合に拡張する.

2. 座標環と generalized minor

$G_0 = N_- HN$ とおき, $x = [x]_-[x]_0[x]_+$, $[x]_- \in N_-$, $[x]_0 \in H$, $[x]_+ \in N$ と記す. 次の**generalized minor** は, $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ のときは通常の小行列式に一致する:

定義 2.1. $u \in W$, $i \in \{1, \cdots, r\}$ に対し, generalized minor $\Delta_{u\Lambda_i,\ \Lambda_i}$ は, 開部分集合uG_0 への制限が, $\Delta_{u\Lambda_i,\ \Lambda_i}(x) = ([u^{-1}x]_0)^{\Lambda_i}$ で与えられるG 上の正則関数である.

$u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ に対し, $\mathbf{i} := (i_1, \cdots, i_n)$ を u の reduced word という. $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し, $u_{\le k} := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ とおく. このとき,

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u_{\le k}\Lambda_{i_k},\ \Lambda_{i_k}}(x) \quad (1 \le k \le n)$$

とおくと, これらが座標環$\mathbb{C}[G^{u,e}]$ の元のクラスター変数となり, 他のクラスター変数も, これらから次々と生成される. 双正則同型$\phi : H \times (\mathbb{C}^\times)^n \xrightarrow{\sim} G^{u,e}$ [1] を用いて, $\Delta^G(k; \mathbf{i}) := \Delta(k; \mathbf{i}) \circ \phi$ とおく.

例 2.2. $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ (C_2 型代数群), $u = s_1 s_2 s_1 s_2 \in W$, $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2)$ に対し,

$$\Delta^G(2; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a^{(s_1 s_2 \Lambda_2)} \left(\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} + 2\frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \qquad (1)$$

3. 結晶基底と単項式表示

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ を G の Lie 環, $U_q(\mathfrak{g})$ をその量子群とする．$U_q(\mathfrak{g})$ の既約表現は, 最高ウエイト $\lambda \in P^+ := \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i$ を持つ最高ウエイト表現である．そのような表現 $V(\lambda)$ は, 結晶基底 $B(\lambda)$ を用いることで, 構造が明らかにされる．

例 3.1. $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ (C_2 型代数群) とする．$\lambda = \Lambda_2$ とする．

$$Y_{0,2} \xrightarrow{2} \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{Y_{2,2}}. \tag{2}$$

Diagram (2) は結晶基底 $B(\Lambda_2)$ の単項式表示で, $V(\Lambda_2)$ がウエイト Λ_2, $2\Lambda_1 - \Lambda_2$, 0, $\Lambda_2 - 2\Lambda_1$, $-\Lambda_2$ のウエイト空間に分解される 5 次元表現であることを表している．例 2.2 における (1) に現れる項の集合 $\{\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}}, \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$ は, 上記の結晶基底 $B(\Lambda_2)$ の単項式表示の一部で, lower Demazure crystal $B^-(\Lambda_2)_{s_1 s_2}$ と呼ばれる．

4. 主結果

各 A, B, C, D 型古典群において, 最長元の reduced word は次で与えられる：

$$\mathbf{i}_0 = \begin{cases} (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r-1}_{2\text{ nd cycle}}, \cdots, \underbrace{1,2,3}_{(r-2)\text{ th cycle}}, 1,2,1) & \text{for } A_r, \\ (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{2\text{ nd cycle}} \cdots, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{r\text{ th cycle}}) & \text{for } B_r,\ C_r, \\ (\underbrace{1,2,\cdots,r}_{1\text{ st cycle}}, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{2\text{ nd cycle}} \cdots, \underbrace{1,2,\cdots,r}_{r-1\text{ th cycle}}) & \text{for } D_r. \end{cases} \tag{3}$$

$u \in W$ を, その reduced word $\mathbf{i}$ が, (3) の $\mathbf{i}_0$ の left factor で表わされるものとする．例えば B, C, D 型なら, $\mathbf{i} = (1,\cdots,r)^{m-1}(1,\cdots,d)$ という形である．$\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \cdots, Y_{1,r}, \cdots, Y_{m-1,1}, \cdots, Y_{m-1,r}, Y_{m,1}, \cdots, Y_{m,d}) \in H \times (\mathbb{C}^\times)^n$ とおく．

定理 4.1. i_k は, $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n)$ の $(m-1)$th cycle に属するとする．このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k}\Lambda_d)} \left(\sum_{b \in B^-(\Lambda_d)_{u_{\leq k}}} c_b\ \mu(b) \right), \tag{4}$$

となる．ここに, $B^-(\Lambda_d)_{u_{\leq k}}$ は $B(\Lambda_d)$ の lower Demazure crystal, c_b はある正整数, μ は $B(\Lambda_d)$ のある単項式表示である．

参考文献

[1] A.Berenstein, A.Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. 143 No. 1, (2001).

[2] A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells. Duke Mathematical Journal vol. 126 No1,(2005).

[3] Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A. Y.Kanakubo, T.Nakashima, SIGMA 11 (2015).

Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis

木村　嘉之　(神戸大学)*

1. Introduction

$\mathfrak{g}$を対称化可能Kac-Moody Lie環として、$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$を三角分解、$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$をルート空間分解とする。$w\in W$をそのWeyl群の元に対して、正ルートを$w$に関する転倒集合$\Delta_+(\leq w):=\Delta_+\cap w(\Delta_-)$とその補集合$\Delta_+(>w):=\Delta_+\cap w(\Delta_-)$に分ける。この分解に応じて、$\mathfrak{n}_\pm(\leq w):=\bigoplus_{\pm\alpha\in\Delta_+(\leq w)}\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{n}_\pm(>w):=\bigoplus_{\pm\alpha\in\Delta_+(>w)}\mathfrak{g}_\alpha$とおくと、$\mathfrak{n}_\pm$のベクトル空間としての直和分解$\mathfrak{n}_\pm=\mathfrak{n}_\pm(\leq w)\oplus\mathfrak{n}_\pm(\leq w)$が得られる。Lie環に関するPoincare-Birkhoff-Wittの定理より、普遍展開環の線形空間としての同型

$$U(\mathfrak{n}_\pm(\leq w))\otimes U(\mathfrak{n}_\pm(>w))\xrightarrow{\sim}U(\mathfrak{n}_\pm)$$

が積写像によって与えられることが、$\mathfrak{n}_\pm(\leq w)$および$\mathfrak{n}_\pm(>w)$の基底をそれぞれ選ぶことで得られる。この同型の量子変形が、2014年に、Berenstein-Greenstein [1, Conjecture 5.5]によって予想された。

2. Quantum unipotent subgroup

$\mathfrak{g}$を対称化可能Kac-Moody Lie環として、$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$を付随するDrinfeld-神保量子包絡環とする。

Weyl群の元$w\in W$とその最短表示$\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_\ell)$に対して、付随するLusztigの組み紐群対称性$T_w=T''_{i_1,-1}\cdots T''_{i_1,-1}\in\mathrm{Aut}(\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$が定義される。

定義 1. Weyl群の元wに対して、量子包絡環の三角分解$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})\simeq\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\otimes\mathbf{U}_q^0(\mathfrak{g})\otimes\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g}),\mathbf{U}_q^{\geq 0}(\mathfrak{g}):=\mathbf{U}_q^0(\mathfrak{g})\otimes\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g})$を用いて、$U(\mathfrak{n}_\pm(\leq w))$および$U(\mathfrak{n}_\pm(>w))$の量子類似として、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$の部分代数$\mathbf{U}_q^-(\leq w):=\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T_w\mathbf{U}_q^{\geq 0}(\mathfrak{g})$および$\mathbf{U}_q^-(>w):=\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap T_w\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$を考える。まず、$\mathbf{U}_q^-(\leq w)$に関しては、$U(\mathfrak{n}_\pm(\leq w))$の量子類似として妥当であることが以下の定理により、よく知られている。

定理 2 (Lusztig[4],Beck-Chari-Pressley[2]). *Weyl*群の元wと、その最短表示$\boldsymbol{i}=(i_1,\cdots,i_\ell)$に対して、$\mathbf{U}_q^-(\leq w)$は*Poincare-Birkhoff-Witt*型基底

$$\left\{f_{i_1}^{(c_1)}T''_{i_1,-1}\left(f_{i_2}^{(c_2)}\right)\cdots\left(T''_{i_1,-1}\cdots T''_{i_{\ell-1},-1}\right)\left(f_{i_\ell}^{(c_\ell)}\right)\middle|\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_\ell)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell\right\}$$

を持つ。

本研究は、大阪市立大学数学研究所が推進するＪＳＰＳ頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム採択事業「対称性，トポロジーとモジュライの数理，数学研究所の国際研究ネットワーク展開」 の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17B37, 13F60.
キーワード：Quantum groups, dual canonical bases.
*〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学理学研究科数学専攻
e-mail: ykimura@math.kobe-u.ac.jp
web: http://researchmap.jp/ysykmr/

一方、有限型およびアフィン型を除いて、$\mathfrak{n}_{\pm}(> w)$ のルート基底及び量子類似の構成は知られておらず、$\mathbf{U}_q^-(> w)$ の Poincare-Birkhoff-Witt 型基底は知られていない。しかし、以下の非自明な "分解" が分かる。

命題 3 ([3, Proposition 3.4]). *Weyl*群の元 w と、その最短表示 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell)$ に対して、

$$\mathbf{U}_q^-(> w) = \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T''_{i_1,-1}T''_{i_2,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap \cdots \cap T''_{i_1,-1}\cdots T''_{i_\ell,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$$

が成り立つ。

3. Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis

$\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ を $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の標準基底、$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を双対標準基底とする。ここで、双対標準基底は、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の非退化内積を用いて、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の基底とみなす。

定理 4 ([2, Theorem 4.25],[3, Theorem 3.9]). $\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{U}_q^-(> w)$ は、それぞれ双対標準基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ と整合的である。すなわち、以下が成り立つ

(1) $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(\leq w)$ は、$\mathbf{U}_q^-(\leq w)$ の基底をなす。
(2) $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(> w)$ は、$\mathbf{U}_q^-(> w)$ の基底をなす。

(1) に関しては、Poincare-Birkhoff-Witt 型基底の直交性より、(正規化して定義される) "双対" Poincare-Birkhoff-Witt 型基底の $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を特徴づける対合に関する上三角性と (双対) 標準基底の特徴付けをもちいて、証明される。

(2) に関しては、Lusztig による直和分解 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \left(\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\right) \oplus f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$、$f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ との整合性から、$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T''_{i_1,-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ が $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ と整合的であることが知られており、上の命題を用いることで、右辺に関して、w に関して帰納的に証明される。

$\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(> w)$ の間の積公式を証明することで、以下の定理が得られる。

定理 5. 積写像によって、ベクトル空間としての同型 $\mathbf{U}_q^-(\leq w) \otimes \mathbf{U}_q^-(> w) \xrightarrow{\sim} \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ が得られる。また、この同型は、$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ の定める整形式に関して、自由加群としての同型が得られる。

$\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(\leq w)$ と $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(> w)$ の間の積公式は、上の分解に相当する結晶構造の分解に応じた双対標準基底の積を考えることで、もとの双対標準基底と、最短表示によって定義される前順序に関して狭義に低次の項に展開されるということが示される。

この定理は、谷崎 [5, Proposition 2.10] によっても証明されている。

参考文献

[1] Arkady Berenstein and Jacob Greenstein. Double canonical bases. arxiv preprint `http://arxiv.org/abs/1411.1391`, 2014.

[2] Yoshiyuki Kimura. Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis. *Kyoto Journal of Mathematics*, 52(2):277–331, 2012.

[3] Yoshiyuki Kimura. Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis. arXiv preprint arXiv:1506.07912, 2015.

[4] George Lusztig. *Introduction to quantum groups*, volume 110 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[5] Toshiyuki Tanisaki. Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases. arxiv preprint `http://arxiv.org/abs/1409.7973v2`, March 2015.

アフィン・リー環の極大ウェイト重複度に現れる pattern avoidance について

土岡 俊介（東大数理）, 渡部 正樹（東大数理）

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を対称化可能 GCM A に付随した Kac-Moody リー環とする。各支配的整ウェイト $\Lambda \in \mathcal{P}^+$ について、可積分最高ウェイト表現 $V(\Lambda)$ とそのウェイトの集合 $P_A(\Lambda) := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid V(\Lambda)_\mu \neq 0\}$ が定義される。$V(\Lambda)$ の可積分性から $P_A(\Lambda)$ はワイル群 $W = W(A)$ の作用を持つ。ウェイト $\mu \in P_A(\Lambda)$ について、$m_A(\Lambda, \mu) := \dim V(\Lambda)_\mu$ はウェイト重複度（weight multiplicity）と呼ばれるが、この研究は組み合わせ論的表現論の中でも特別な位置を占めている。一方で、しばしば $P_A(\Lambda)$ や $m_A(\Lambda, \mu)$ の情報が、圏論化（categorification）を通じて、一見無関係に見える代数の表現論の情報を与えることがある。

そこで $P_A(\Lambda)$ に興味があるが、A がアフィンの場合は、おおまかな構造が知られており [Kac, §12.6]、当面は支配的極大ウェイトの集合 $\max_A(\lambda) = \{\lambda \in P_A(\Lambda) \mid \lambda + \delta \notin P_A(\Lambda)\}$ に興味がある。明らかに、$\max_A(\Lambda)$ は W 不変（すなわち、$\max_A(\Lambda) = W \cdot (\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+)$）だが、実は $\max_A(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+$ は有限集合である [Kac, Proposition 12.6]。

Λ がレベル 1 の場合、先に述べた圏論化を通じた対応で現れる代数は A 型岩堀・ヘッケ環になる。X がアフィン ADE 型で Λ がレベル 1 のとき、$\max_X(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\}$ となることに注意しよう。さて、B 型岩堀・ヘッケ環の表現論の研究のためには、レベル 2 で $A = A^{(1)}_{p-1}$ の場合を考える必要が生じる。 [Tsu] において、集合 $\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda_0 + \Lambda_s) \cap \mathcal{P}^+$（ここで $0 \leq s < p$）を研究した。

定義：$p \geq 2$ を整数とする。$\ell \geq 1$ と $t, u \geq 0$ で $\ell + t < p - \ell + 1$ and $\ell < u - \ell + 1$ なるものについて、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ のルート格子の元を 2 つ、以下で定義する。

$$\lambda^p_{\ell,t} = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} \ell\alpha_1 + \cdots \ell\alpha_t \\ +(\ell-1)\alpha_{t+1} + (\ell-2)\alpha_{t+2} + \cdots + \alpha_{\ell+t-1} \\ +\alpha_{p-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{p-2} + (\ell-1)\alpha_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\mu^p_{\ell,u} = \ell\alpha_0 + \begin{pmatrix} (\ell-1)\alpha_1 + (\ell-2)\alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1} \\ +\alpha_{u-\ell+1} + \cdots + (\ell-2)\alpha_{u-2} + (\ell-1)\alpha_{u-1} \\ +\ell\alpha_u + \cdots \ell\alpha_{p-1} \end{pmatrix}$$

定理 [Tsu, Theorem 1.4]：$p \geq 2$ を整数とし、$\widehat{\mathfrak{sl}_p} = \mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$ のレベル 2 の支配的整ウェイト $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_s$ を考える（ここで $0 \leq s < p$）。このとき、以下が成立する。

1. $\max_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda) \cap \mathcal{P}^+ = \{\Lambda\} \sqcup \{\Lambda - \lambda^p_{\ell,s} \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{p-s}{2} \rfloor\} \sqcup \{\Lambda - \mu^p_{\ell,s} \mid 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor\}$.

2. $m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda, \Lambda - \lambda^p_{\ell,s}) = \mathsf{D}_{\ell,s}$, $m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda, \Lambda - \mu_{\ell,s}) = \mathsf{D}_{\ell,p-s}$.

ここで$\mathsf{D}_{n,m}$は、$(0,0)$から$(n+m,n)$へのステップ$(1,0),(0,1)$のlatticeパスであって、対角線$y=x$を超えないものの数で、$\mathsf{D}_{n,m}=\frac{m+1}{n+m+1}\binom{2n+m}{n}$となっている[St, 6.20.b]。$\mathsf{D}_{n,0}$はカタラン数（321-avoidingな$\mathfrak{S}_n$の元の個数[St, 6.19.ee]）であるという観察に基づき、Misra-Rebeccaは次の極大ウェイト重複度とpattern avoidanceの関係を予想した。
予想 [MR1, Conjecture 4.13]：$1\leq\ell\leq\lfloor p/2\rfloor$について、$m_{A^{(1)}_{p-1}}((k+1)\Lambda_0,(k+1)\Lambda_0-\lambda^p_{\ell,0})$は、$((k+2),(k+1),\cdots,2,1)$-avoidingな$\mathfrak{S}_\ell$の元の個数で与えられる。

[TW, Theorem 1.5]は、これを証明し、さらに少し一般化したものである。
定理 [TW, Theorem 1.5]：$p\geq 2$を整数とし、レベル$k+1$で$\Lambda=k\Lambda_0+\Lambda_s$の形の$\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$の支配的整ウェイトを考える（ここで$0\leq s<p$かつ$k\geq 1$）。このとき、$m_{A^{(1)}_{p-1}}(\Lambda,\Lambda-\lambda^p_{\ell,s})$は、$0^s,1,2,\cdots,\ell$（ここで$0$は$s$個ある）の並び替えであって、長さ$k+2$以上の（狭義）減少部分列を含まないものの個数で与えられる。

証明は、ヘッケ環のモジュラー表現論でKleshchev多重分割と呼ばれている（$A^{(1)}_{p-1}$型）柏原クリスタルの連結成分$B(a\Lambda_0+b\Lambda_s)\subseteq B(\Lambda_0)^{\otimes a}\otimes B(\Lambda_s)^{\otimes b}$を、特徴付ける結果[AKT, Theorem 9.5]を用いて、ウェイト重複度の計算を、適切なヤング図形の列の数え上げに帰着し、RSK対応や平面分割（ [St, §7.20]を参照）を解析することでなされる[TW, §2]。

$\widehat{\mathfrak{sl}_p}=\mathfrak{g}(A^{(1)}_{p-1})$加群における、極大ウェイト重複度とpattern avoidanceの関係は[MR1]で初めて指摘されたが、 [TW]では$A^{(2)}_{2n}$と$D^{(2)}_{n+1}$という他のアフィン型でも、同種の定理を証明した[TW, Theorem 1.7]。証明には、Dynkin図形自己同型が誘導する柏原クリスタルの固定点と、oribitリー代数の関係を記述したNaito-Sagakiの結果[NS]を用いる。これも[AKT]同様、Littelmannのパス模型の応用である。 [TW]がarXivにあがる1週間前に、 [MR2]がarXivにあがり、そこで予想が証明されている。これは定理の$s=0$の場合に相当する。 [MR1]では、極大ウェイトの集合の数$\#(\max_{A^{(1)}_{p-1}}(k\Lambda_0)\cap\mathcal{P}^+)$についての予想[MR1, Conjecture 3.9]も与えられており、 [TW, §4]ではその証明も与えた。証明には、（おそらくGaussにまで遡る）q-Lucas定理[Sag, Theorem 2.2]を用いる。

参考文献

[AKT] S. Ariki, V. Kreiman and S. Tsuchioka, *On the tensor product of two basic representations of $U_v(\mathfrak{sl}_e)$*, Adv.Math. **218** (2008), 28–86.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 1990.

[MR1] K. Misra and J. Rebecca, *On multiplicities of maximal weights of $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$-modules*, Algebr.Represent.Theory **17** (2014), 1303–1321.

[MR2] K. Misra and J. Rebecca, *Lattice Paths, Young Tableaux, and Weight Multiplicities*, arXiv:1508.06930

[NS] S. Naito and D. Sagaki, *Standard paths and standard monomials fixed by a diagram automorphism*, J.Algebra **251** (2002), 461–474.

[Sag] B. Sagan, *Congruence properties of q-analogs*, Adv.Math. **95** (1992), 127–143.

[St] P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol.2*, Cambridge University Press, 1999.

[Tsu] S. Tsuchioka, *Catalan numbers and level 2 weight structures of $A^{(1)}_{p-1}$*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B11** (2009), 145–154.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Pattern avoidance seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra representations*, arXiv:1509.01070

Weyl groupoids and representation theory of generalized quantum groups

山根　宏之　（富山大学理工学研究部（理））

Weyl groupoids の概念は以前からスーパーリー代数の研究者は知っていた。その公理化は [5] で導入された。第 1 節では Generalized root system について解説し、[5] で得られた Weyl groupoids のコクセター関係式による表示（Theorem 1.5）および松本型定理（Theorem 1.6）を述べる。第 2 節では Generalized quantum groups について解説し、その PBW 型定理（Theorem 2.4）, Universal R-matrix（Theorem 2.5）, Shapovalov 行列式（Theorem 2.6）, Harish-Chandra 型定理（Theorem 2.7）を述べる。第 3 節では Generalized quantum groups の有限次元既約表現の分類定理（Theorem 3.2）を述べる。

このたび、私に講演の機会を与えていただいた関係者の皆様に感謝します。特に細かな指示をしていただいた中西知樹氏、斎藤義久氏に感謝します。

1　Generalized root systems の新しい定義

集合 X に対して $|X|$ で X の濃度を表す。$\delta_{a,b}$ および $\delta(a,b)$ で Kronecker's delta を表わす。$a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ に対して $J_{a,b} := \{n \in \mathbb{N} | a \leq n \leq b\}$ とおく。$J_{1,\infty} = \mathbb{N}$ である。$\mathbb{Z}_{\geq 0} := J_{0,\infty}$ とおく。$\mathbb{Z}_{\leq 0} := J_{-\infty,0}$ とおく。$\mathfrak{N} \in \mathbb{N}$ とする。$I := J_{1,\mathfrak{N}}$ とおく。$\mathfrak{V}$ を $\{\alpha_i | i \in I\}$ を基底とする $\mathfrak{N}$ 次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。次の Lemma 1.1 が重要である。

Lemma 1.1. ([10]) R を $\mathfrak{V}$ の空でない部分集合とする。$0 \notin R$, $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(R) = \mathfrak{V}$ かつ $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)) = \mathfrak{N}$ を仮定する。ある $\nu \in R$ と $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$ の有限部分集合 X があって $R \subset \mathbb{Z}\nu + X$ となっているとする。$\{\gamma_i | i \in I\}$ を $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$ の $\mathbb{Z}$-基とする。$\nu \in \mathbb{Z}\gamma_{\mathfrak{N}}$ とする。このときある $g \in \mathfrak{V}^*$ で

$$(1.1) \qquad 0 < g(\gamma_1) < \min\{|g(\beta)| | \beta \in \Gamma \setminus \{\pm\gamma_1\}\}$$

となるものがある。

Proof. $k \in J_{2,\infty}$ を

$$R \subset \{ \sum_{t=1}^{\mathfrak{N}} x_t \gamma_t \,|\, x_s \in J_{-k,k}\,(s \in J_{1,\mathfrak{N}-1}),\, x_{\mathfrak{N}} \in \mathbb{Z}\}.$$

をみたすものとする。$g \in V^*$ を $g(\gamma_t) := (2k)^{t-1}$ $(t \in J_{1,|I|})$ により定義する。$g(\gamma_1) = 1 > 0$ である。$\beta = \sum_{t=1}^{|I|} x_t\gamma_t \in R \setminus \{\pm\gamma_1\}$ $(x_t \in \mathbb{Z})$ とする。$p := \max\{t \in J_{1,|I|} | x_t \neq 0\}$ とおく。このとき

$$\begin{array}{rcl} |g(\beta)| & = & |\sum_{t=1}^{p} x_t(2k)^{t-1}| \\ & \geq & |x_p(2k)^{p-1}| - |\sum_{t=1}^{p-1} x_t(2k)^{t-1}| \\ & \geq & |x_p|(2k)^{p-1} - \sum_{t=1}^{p-1} k(2k)^{t-1} \\ & = & |x_p|(2k)^{p-1} - k\cdot\frac{(2k)^{p-1}-1}{2k-1} \\ & = & \frac{(2k)^{p-1}(|x_p|(2k-1)-k)+k}{2k-1}. \end{array}$$

が成り立つ。$p = 1$ のとき $|x_p| \geq 2$ より $|g(\beta)| \geq \frac{(2(2k-1)-k)+k}{2k-1} = 2 > 1 = g(\gamma_1)$ が成り立つ。$p \geq 2$ のとき $|x_p| \geq 1$ より $|g(\beta)| \geq \frac{2k((2k-1)-k)+k}{2k-1} = k > 1 = g(\gamma_1)$. が成り立つ。 従って (1.1) が成り立つ。 $\square$

R を $\mathfrak{V}$ の空でない $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(R) = \mathfrak{V}$ となる部分集合とする。Π を R の空でない部分集合とする。$R^{\Pi,+} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi)$, $R^{\Pi,-} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}(\Pi)$ とおく。Π が次の条件 (B1)-(B3) をみたすとき『R の基底』であると言う。

(B1) Π は $\mathfrak{V}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底である。
(B2) $R = R^{\Pi,+} \cup R^{\Pi,-}$
(B3) $\forall\alpha \in \Pi$, $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$

$\tilde{\mathbb{B}}$ を R の基底全体のなす集合とする。$\mathbb{B}$ を $\tilde{\mathbb{B}}$ の空でない部分集合とする。$(R, \mathbb{B})$ が次の条件 $(*)$ をみたすとき『(set-theoretic) generalized root system』とよぶ。

$(*)$ $\forall\Pi \in \mathbb{B}$, $\forall\alpha \in \Pi$, $\exists\Pi^{(\alpha)} \in \mathbb{B}$, $R^{\Pi^{(\alpha)},+} \cap R^{\Pi,-} = \{-\alpha\}$

このとき、$N^{\Pi}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$ $(\beta \in \Pi)$ が存在して $\Pi^{(\alpha)} = \{\beta + N^{\Pi}_{\alpha,\beta}\alpha | \alpha \in \Pi\}$ となる。さらに $N^{\Pi}_{\alpha,\alpha} = -2$, $N^{\Pi}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\beta \neq \alpha)$ が成り立つ。Lemma 1.1 等によりつぎの Lemma 1.2 が成り立つ。

2

Lemma 1.2. ([10]) $(R, \mathbb{B})$ を *generalized root system* とする。$|R| < \infty$ と仮定する。

(1) $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}$ が成り立つ。
(2) 任意の $\alpha \in R$ に対して $\alpha \in \Pi$ となる $\Pi \in \mathbb{B}$ が存在する。
(3) 任意の $\lambda \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(R) \backslash \cup_{\alpha\in R}\mathbb{Z}\alpha$ に対して $\lambda \notin \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi) \cup (-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi))$ となる $\Pi \in \mathbb{B}$ が存在する。

$(R, \mathbb{B})$ を generalized root system とする。$\check{\mathbb{B}}$ を $\check{\alpha}(I) \in \mathbb{B}$ を満たす全ての写像 $\check{\alpha} : I \to R$ の集合とする。$c_{ij}^{\check{\alpha}} := -N_{\check{\alpha}(i),\check{\alpha}(j)}^{\check{\alpha}(I)}$ $(\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}},\ i,\ j \in I)$ とおく。各 $i \in I$ に対して写像 $\check{\tau}_i : \check{\mathbb{B}} \to \check{\mathbb{B}}$ を $\check{\tau}_i(\check{\alpha})(j) := \check{\alpha}(j) - c_{ij}^{\check{\alpha}}\check{\alpha}(i)$ により定義する。$\check{\tau}_i^2 = \mathrm{id}_{\check{\mathbb{B}}}$ および $c_{ij}^{\check{\tau}_i(\check{\alpha})} = c_{ij}^{\check{\alpha}}$ が成り立つ。$\check{\mathfrak{V}}$ を $\mathfrak{N}$-次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。$\{\check{v}_i | i \in I\}$ を $\check{\mathfrak{V}}$ の基底とする。$s_i^{\check{\alpha}} \in \mathrm{GL}(\check{\mathfrak{V}})$ $(\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}, i \in I)$ を $s_i^{\check{\alpha}}(\check{v}_j) := \check{v}_i - c_{ij}^{\check{\alpha}}\check{v}_j$ により定義する。$\mathbb{M}$ を $\mathbb{N}$ から I への写像のなす集合とする。$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}$ と $f \in \mathbb{M}$ に対して $\check{\alpha}_{f,0} := \check{\alpha}$ とおき、$1^{\check{\alpha}}s_{f,0} := \mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$ とおく。$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}$, $f \in \mathbb{M}$ と $t \in \mathbb{N}$, に対して let $\check{\alpha}_{f,t} := \check{\tau}_{f(t)}(\check{\alpha}_{f,t-1})$ とおき、$1^{\check{\alpha}}s_{f,t} := 1^{\check{\alpha}}s_{f,t-1} \circ s_{f(t)}^{\check{\alpha}_{f,t}}$ とおく。

$\check{\alpha}^\flat \in \check{\mathbb{B}}$ を固定する。$\check{\mathbb{B}}^b := \{\check{\alpha}_{f,t}^\flat | f \in \mathbb{M}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく。$\check{\alpha}$, $\check{\alpha}' \in \mathbb{M}$ に対して $\mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}') := \{1^{\check{\alpha}}s_{f,t} | f \in \mathbb{M}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \check{\alpha}_{f,t} = \check{\alpha}'\}$ とおく。$\check{\alpha}$, $\check{\alpha}' \in \mathbb{M}$ と $w \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}')$ に対して

$$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) := \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \exists f \in \mathbb{M}, \check{\alpha}_{f,t} = \check{\alpha}', 1^{\check{\alpha}}s_{f,t} = w\}$$

とおく。つぎの Lemma 1.3 によって $w \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}')$ は $\{\check{\alpha}'(i) | i \in I\}$ から $\{\check{\alpha}(i) | i \in I\}$ への基底変換の行列とみなせる。

Lemma 1.3. ([10]) $\check{\alpha}$, $\check{\alpha}' \in \check{\mathbb{B}}^\flat$ とする。$w \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}')$. とする。$d_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j \in I)$ を

$$w(\check{v}_j) = \sum_{i\in I} d_{ij}\check{v}_i. \tag{1.2}$$

となるものとする。このとき

$$\check{\alpha}'(j) = \sum_{i\in I} d_{ij}\check{\alpha}(i). \tag{1.3}$$

が成り立つ。とくに $|\mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}')| = 1$ が成り立つ。

Proof. $\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w)$ による帰納法を使う。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) = 0$ であるときは $\check{\alpha}' = \check{\alpha}$ および $w = \mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$ が成り立つので (1.3) が成り立つ。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) \geq 1$ とする。$p \in I$

とする。$\check{\alpha}'' := \check{\tau}_p(\check{\alpha}')$ とおき、$w' := w \circ s_p^{\check{\alpha}''} \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}'')$ とおく。$\ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}''}(w') = \ell_{\check{\alpha},\check{\alpha}'}(w) - 1$ と仮定する。$d'_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j \in I)$ を $w'(\check{v}_j) = \sum_{i\in I} d'_{ij}\check{v}_i$ により定義する。帰納法により $\check{\alpha}''(j) = \sum_{i\in I} d'_{ij}\check{\alpha}(i)$ が成り立つ。このとき $w(\check{v}_j) = w'(\check{v}_j - c_{pj}^{\check{\alpha}''}\check{v}_p) = \sum_{i\in I}(d'_{ij} - d'_{ip}c_{pj}^{\check{\alpha}''})\check{v}_i$ が成り立つ。$\check{\alpha}' = \check{\tau}_p(\check{\alpha}'')$ より $\check{\alpha}'(j) = \check{\alpha}''(j) - c_{pj}^{\check{\alpha}''}\check{\alpha}''(p) = \sum_{i\in I}(d'_{ij} - d'_{ip}c_{pj}^{\check{\alpha}''})\check{\alpha}(i)$ が成り立つ。したがって (1.3) が成り立つ。 □

$C^{\check{\alpha}} := [c_{ij}^{\check{\alpha}}]_{i,j\in I}$ とおく。$C^{\check{\alpha}}$ は [7, §1.1] での意味での generalized Cartan matrix である。データ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \check{\mathbb{B}}^\flat, (\check{\tau}_i)_{i\in I}, (C^{\check{\alpha}})_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ を考える。$\mathcal{C}$ は [3, Definition 2.1] での意味での Cartan scheme である。すなわち公理

(C1) $\check{\tau}_i^2 = \mathrm{id}_{\check{\mathbb{B}}^\flat}$,
(C2) $c_{ij}^{\check{\tau}_i(\check{\alpha})} = c_{ij}^{\check{\alpha}}$

を満たす。$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}^\flat$ に対して $\mathbb{R}$-線形同型写像 $\eta_{\check{\alpha}} : \mathfrak{V} \to \check{\mathfrak{V}}$ を $\eta_{\check{\alpha}}(\check{\alpha}(i)) := \check{v}_i$ $(i \in I)$ により定義する。$R(\check{\alpha}) := \eta_{\check{\alpha}}(R)$ とおき $R^+(\check{\alpha}) := R(\check{\alpha}) \cap \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\check{v}_i$, $R^-(\check{\alpha}) := R(\check{\alpha}) \cap \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\check{v}_i$ とおく。$s_i^{\check{\alpha}} \circ \eta_{\check{\alpha}} = \eta_{\check{\tau}_i(\check{\alpha})}$ である。データ $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R(\check{\alpha}))_{\check{\alpha}\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ を考える。$\mathcal{R}$ は [2, Definition 1.2] の意味での generalized root system の公理を満たす。それらは

(R1) $R(\check{\alpha}) = R^+(\check{\alpha}) \cup R^-(\check{\alpha})$ ($R^-(\check{\alpha}) \neq -R^+(\check{\alpha})$ でもよい),
(R2) $R(\check{\alpha}) \cap \mathbb{Z}\check{v}_i = \{\check{v}_i, -\check{v}_i\}$,
(R3) $s_i^{\check{\alpha}}(R(\check{\alpha})) = R(\check{\tau}_i(\check{\alpha}))$,
(R4) $\mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}} \in \mathcal{H}(\check{\alpha}, \check{\alpha}') \Rightarrow \check{\alpha} = \check{\alpha}'$

である。(R4) は Lemma 1.3 より従う。

$\check{\alpha} \in \check{\mathbb{B}}^\flat$ とする。 $x, y \in I$ を $x \neq y$ となるものとする。$m := |R^+(\check{\alpha}) \cap (\mathbb{Z}\check{\alpha}(x) \oplus \mathbb{Z}\check{\alpha}(y))|$ とおく。$m < \infty$ であると仮定する。$f_{xy} \in \mathbb{M}$ を $f_{xy}(2r-1) := x$, $f_{xy}(2r) := y$ $(r \in \mathbb{N})$ により定義する。[2, Lemma 1.5] より

(R4)$'$ $\check{\alpha}_{f_{xy},2m} = \check{\alpha}$ かつ $1^{\check{\alpha}}s_{f_{xy},2m} = \mathrm{id}_{\check{\mathfrak{V}}}$

が従う。特に $\mathcal{R}$ は [5, Definition 2], [3, Definition 2.2] の意味での generalized root system である。特にこれら 3 つの generalized root system の定義は同値である。

写像 $\Xi : \check{\mathbb{B}}^\flat \to \mathbb{B}$ を $\Xi(\check{\alpha}) := \check{\alpha}(I)$ により定義する。[5, Lemma 8(iii)] より

$\ell_{\check\alpha,\check\alpha'}(w)=|R^+(\check\alpha)\cap R^-(\check\alpha')|$ $(w\in\mathcal{H}(\check\alpha,\check\alpha'))$ が成り立つので Ξ は単射である。$(R,\Xi(\check{\mathbb{B}}^\flat))$ も generalized root system である。$|R|<\infty$ ならば Ξ は全単射である。

$\mathcal{R}$ を上記のものとする。[3, Section 2] ([2, Definition 1.7] も見よ) の流儀に従って（普遍な）*Weyl groupoid* $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ を category として $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}(\mathcal{R})):=\check{\mathbb{B}}^\flat$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}(\mathcal{R})}(\check\alpha,\check\alpha'):=\{(\check\alpha,w,\check\alpha')|w\in\mathcal{H}(\check\alpha,\check\alpha')\}$ および $(\check\alpha,w,\check\alpha')\circ(\check\alpha',w',\check\alpha''):=(\check\alpha,w\circ w',\check\alpha'')$ により定義する。

I を上記の集合と同じものとする。$\dot{\mathcal{A}}$ を空でない集合とする。各 $a\in\dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot C^a=[\dot c^a_{ij}]_{i,j\in I}$ を [7, §1.1] での意味での generalized Cartan matrix とする。各 $i\in I$ に対して写像 $\dot\tau_i:\dot{\mathcal{A}}\to\dot{\mathcal{A}}$ を考える。$\dot{\mathcal{C}}=\dot{\mathcal{C}}(I,\dot{\mathcal{A}},(\dot\tau_i)_{i\in I},(\dot C^a)_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を Cartan scheme とする。すなわち $\dot{\mathcal{C}}$ は上記の (C1)-(C2) と同様の性質を満たすものとする。各 $a\in\dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot{\mathfrak{V}}_a$ を $\{\dot v_{a,i}|i\in I\}$ を基底とする $\mathfrak{N}$ 次元 $\mathbb{R}$-線形空間とする。各 $a\in\dot{\mathcal{A}}$ に対して線形同型写像 $\dot s^a_i:\dot{\mathfrak{V}}_a\to\dot{\mathfrak{V}}_{\dot\tau_i(a)}$ を $\dot s^a_i(\dot v_{a,j}):=\dot v_{\dot\tau_i(a),j}-\dot c^a_{ij}\dot v_{\dot\tau_i(a),i}$ $(j\in I)$ により定義する。各 $a\in\dot{\mathcal{A}}$ に対して $\dot R(a)$ を $\dot{\mathfrak{V}}_a$ の $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\dot R(a))=\dot{\mathfrak{V}}_a$ となる部分集合とし $\dot R^+(a):=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq0}\dot v_{a,i}$, $\dot R^-(a):=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq0}\dot v_{a,i}$ とおく。データ $\dot{\mathcal{R}}=\dot{\mathcal{R}}(\dot{\mathcal{C}},(\dot R(a))_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を上記の (R1)-(R4) と同様の性質を満たすものとする。このような $\dot{\mathcal{R}}$ を categorical generalized root system という事にする。$a\in\dot{\mathcal{A}}$, $f\in\mathbb{M}$ と $t\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対して $a_{f,t}\in\dot{\mathcal{A}}$ と線形写像 $1^a\dot s_{f,t}:\dot{\mathfrak{V}}_{a_{f,t}}\to\dot{\mathfrak{V}}_a$ を上記と同様にして定義する。*Weyl groupoid* $\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})$ を category として $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})):=\dot{\mathcal{A}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})}(a,a'):=\{(a,w,a')|w\in\mathcal{H}(a,a')\}$ および $(a,w,a')\circ(a',w',a''):=(a,w\circ w',a'')$ により定義する。$a^\flat\in\dot{\mathcal{A}}$ を固定する。$\dot{\mathbb{B}}^\flat:=\{1^{a^\flat}\dot s_{f,t}(\{\dot v_{a^\flat_{f,t},i}|i\in I\})|f\in\mathbb{M},t\in\mathbb{Z}_{\geq0}\}$ とおく。$(\dot R(a^\flat),\dot{\mathbb{B}}^\flat)$ は generalized root system である。次の Lemma は容易である。

Lemma 1.4. 写像 $\check\alpha^\flat:I\to\dot R(a^\flat)$ を $\check\alpha^\flat(i):=\dot v_{i,a^\flat}$ $(i\in I)$ により定義する。$\mathcal{C}=\mathcal{C}(I,\check{\mathbb{B}}^\flat,(\check\tau_i)_{i\in I},(C^{\check\alpha})_{\check\alpha\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$, $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathcal{C},(R(\check\alpha))_{\check\alpha\in\check{\mathbb{B}}^\flat})$ および $\mathcal{W}(\mathcal{R})$ を $(\dot R(a^\flat),\dot{\mathbb{B}}^\flat)$ および $\check\alpha^\flat$ に対して上記で定義されたものとする。各 $a\in\dot{\mathcal{A}}$ に対して線形写像 $u_a:\dot{\mathfrak{V}}_a\to\check{\mathfrak{V}}$ を $u_a(\dot v_{a,i}):=\check v_i$ $(i\in I)$ により定義する。このとき Category の射 $\mathcal{F}:\mathcal{W}(\mathcal{R})\to\mathcal{W}(\dot{\mathcal{R}})$ で $\mathcal{F}(\check\alpha^\flat_{f,t})=a^\flat_{f,t}$ $(f\in\mathbb{M},t\in\mathbb{Z}_{\geq0})$ $\mathcal{F}((\check\alpha,w,\check\alpha'))=(\mathcal{F}(\check\alpha),u^{-1}_{\mathcal{F}(\check\alpha)}\circ w\circ u_{\mathcal{F}(\check\alpha')},\mathcal{F}(\check\alpha'))$ を満たすものが一意的に存在する。

$\dot{\mathcal{C}}=\dot{\mathcal{C}}(I,\dot{\mathcal{A}},(\dot\tau_i)_{i\in I},(\dot C^a)_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ を Cartan scheme とし、$\dot{\mathcal{R}}=\dot{\mathcal{R}}(\dot{\mathcal{C}},(\dot R(a))_{a\in\dot{\mathcal{A}}})$ をを categorical generalized root system とする。$\dot m_{a,i,j}:=|\dot R^+(a)\cap(\mathbb{Z}_{\geq0}\dot v_{a,i}\oplus\mathbb{Z}_{\geq0}\dot v_{a,j})|$ とおく。半群 $\mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}})$ を生成元

$$o,\, e_a,\, \sigma^a_i\quad(a\in\dot{\mathcal{A}},\, i\in I)$$

と関係式

$$xo = ox = o \ (x \in \mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}})),$$

(1.4) $$(e_a)^2 = e_a,\ e_a e_{a'} = o \ (a \neq a'),$$

$$e_{\dot{\tau}_i(a)}\sigma_i^a = \sigma_i^a e_a = \sigma_i^a,$$

(1.5) $$\sigma_i^{\dot{\tau}_i(a)}\sigma_i^a = e_a$$

(1.6) $$1^a\sigma_{f_{ij},\dot{m}_{a,i,j}} = 1^a\sigma_{f_{ji},\dot{m}_{a,i,j}} \ (a \in \dot{\mathcal{A}}, i, j \in I, i \neq j, \dot{m}_{a,i,j} < \infty)$$

により定める（ここで (1.6) の等式の記号は上記のものと同様にして定める)。

Theorem 1.5. ([5]) 各 $a \in \dot{\mathcal{A}}$ に対して $k(1^a\sigma_{f,t}) = 1^a s_{f,t}$ $(f \in \mathbb{M},\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ により定義される全単射 $k : e_a\mathfrak{W}(\dot{\mathcal{R}}) \setminus \{0\} \to \cup_{a' \in \dot{\mathcal{A}}}\mathcal{H}(a, a')$ が存在する。

$a \in \mathbb{M}$ と $w \in \cup_{a' \in \dot{\mathcal{A}}}\mathcal{H}(a, a')$ に対して

$$\ell_a(w) := \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \exists f \in \mathbb{M}, 1^a s_{f,t} = w\}$$

とおく。半群 $\tilde{\mathfrak{W}}(\dot{\mathcal{R}})$ を生成元 $\tilde{o}$, $\tilde{e}_a$, $\tilde{\sigma}_i^a$ $(a \in \dot{\mathcal{A}},\ i \in I)$ と (1.4), (1.6) と同様の関係式で定義する。

Theorem 1.6. ([5]) (1) $a \in \dot{\mathcal{A}},\ f, f' \in \mathbb{M},\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $t = \ell_a(1^a s_{f,t})$ および $1^a s_{f,t} = 1^a s_{f',t}$ を満たすものとする。このとき $1^a\tilde{\sigma}_{f,t} = 1^a\tilde{\sigma}_{f',t}$ が成り立つ。

(2) $a \in \dot{\mathcal{A}},\ f \in \mathbb{M},\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を $t > \ell_a(1^a s_{f,t})$ を満たすものとする。このときある $f' \in \mathbb{M}$ と $r \in J_{1,t-1}$ で $f'(r) = f'(r+1)$ および $1^a\tilde{\sigma}_{f,t} = 1^a\tilde{\sigma}_{f',t}$ を満たすものが存在する。

2 Generalized quantum groups

$\mathfrak{V}$ を上記のものとする。$\mathfrak{V}$ の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathfrak{A}$ を $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{V}$ かつ $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}$ となるものとする。$\mathbb{K}$ を代数閉体とする。$\mathbb{K}^{\times} := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とおく。単位元 $1 = 1_U$ を持つ結合的 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{U}^0$ を生成元 $K_\lambda,\ L_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ と定義関係式 $K_0 = L_0 = 1,\ K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu},\ L_\lambda L_\mu = L_{\lambda+\mu},\ K_\lambda L_\mu = L_\mu K_\lambda$ により定義する。特に $\{K_\lambda L_\mu | \lambda, \mu \in \mathfrak{A}\}$ は $\mathbb{U}^0$ の $\mathbb{K}$-基底である。(記号の乱用により、記号 K_λ, L_λ を下記の $\mathbb{K}$-代数 $U = U(\chi, \Pi)$ の或る元を表す為にも用いる。)

写像 $\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^{\times}$ を

(2.1) $$\chi(\lambda, \mu + \mu') = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda, \mu') \quad \text{かつ} \quad \chi(\lambda + \lambda', \mu) = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda', \mu)$$

$(\lambda,\ \lambda',\ \mu,\ \mu' \in \mathfrak{A})$ を満たすものとする。$\Pi = \{\alpha_i | i \in I\}$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathbb{Z}$-基とする。このとき次の公理 $(U1)$-$(U5)$ を満たす単位元 $1 = 1_U$ を持つ結合的 $\mathbb{K}$-代

数 $U=U(\chi,\Pi)$ が一意に存在する。(以下の $(U1)$-$(U5)$ でいくつかの記号も導入する。) $X,Y\in U$ に対して $[X,Y]:=XY-YX$ とおく。

$(U1)$ $\mathbb{K}$-代数として U は生成元 $K_\lambda\in U_0$, $L_\lambda\in U_0$ $(\lambda\in\mathfrak{A})$, $E_i\in U_{\alpha_i}$, $F_i\in U_{-\alpha_i}$ $(i\in I)$ を持つ。
$(U2)$ $\mathbb{K}$-代数の単射準同型写像 $\mathfrak{i}=\mathfrak{i}^{\chi,\Pi}:\mathbb{U}^0\to U$ で $\mathfrak{i}(K_\lambda L_\mu)=K_\lambda L_\mu$ $(\lambda,\mu\in\mathfrak{A})$ を満たすものが存在する。
$(U3)$ 等式 $K_\lambda E_i=\chi(\lambda,\alpha_i)E_iK_\lambda$, $\chi(\lambda,\alpha_i)K_\lambda F_i=F_iK_\lambda$, $\chi(\alpha_i,\lambda)L_\lambda E_i=E_iL_\lambda$, $L_\lambda F_i=\chi(\alpha_i,\lambda)F_iL_\lambda$, $[E_i,F_j]=\delta_{ij}(-K_{\alpha_i}+L_{\alpha_i})$ $(\lambda\in\mathfrak{A},\ i,j\in I)$ が成り立つ。
$(U4)$ $U^0:=\mathrm{Im}\mathfrak{i}$ とおく。U^+ を 1 と E_i $(i\in I)$ で生成される U の $\mathbb{K}$-部分代数とする。U^- を 1 と F_i $(i\in I)$ で生成される U の $\mathbb{K}$-部分代数とする。このとき $\mathbb{K}$-線形同型写像 $\mathfrak{j}:U^-\otimes_{\mathbb{K}}U^0\otimes_{\mathbb{K}}U^+\to U$ で $\mathfrak{j}(Y\otimes Z\otimes X):=YZX$ を満たすものが存在する。
$(U5)$ $\{X\in U^+|\forall i\in I,[X,F_i]=0\}=\mathbb{K}1$ および $\{Y\in U^-|\forall i\in I,[E_i,Y]=0\}=\mathbb{K}1$ が成り立つ。

$\mathfrak{A}_\Pi^+:=\mathfrak{A}\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Pi)$, $\mathfrak{A}_\Pi^-:=\mathfrak{A}\cap\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}(\Pi)$ とおく。次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2.1. U の $\mathbb{K}$-部分空間 U_λ $(\lambda\in\mathfrak{A})$ で $U^0\subset U_0$, $E_i\in U_{\alpha_i}$, $F_i\in U_{-\alpha_i}$ $(i\in I)$, $U_\lambda U_\mu\subset U_{\lambda+\mu}$, $U=\oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}}U_\lambda$ を満たすものが存在する。(すなわち U は $\mathfrak{A}$-次数付き $\mathbb{K}$-代数である。) $U_\lambda^+:=U^+\cap U_\lambda$, $U_\lambda^-:=U^-\cap U_\lambda$ $(\lambda\in\mathfrak{A})$ とおく。$U^+=\oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}_\Pi^+}U_\lambda^+$ および $U^-=\oplus_{\mu\in\mathfrak{A}_\Pi^-}U_\mu^-$ が成り立つ。

$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $x\in\mathbb{K}$ に対して $(n)_x:=\sum_{k=1}^n x^{k-1}$ とおき $(n)_x!:=\prod_{k=1}^n(k)_x$ とおく ($(0)_x=0$, $(1)_x=1$, $(0)_x!=(1)_x!=1$ である)。写像 $\mathfrak{h}:\mathfrak{A}\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ を $\mathfrak{h}(\lambda)$ $(\lambda\in\mathfrak{A})$ を $J_{1,\mathfrak{h}(\lambda)}=\{n\in\mathbb{N}|(n)_{\chi(\lambda,\lambda)}!\neq 0\}$ となるものにする事により定義する。

Theorem 2.2. (Kharchenko[8]) 次の性質 (i)-(ii) を満たす $\mathfrak{A}\setminus\{0\}$ の部分集合 $R=R(\chi)$ と写像 $\mathfrak{m}:R\to\mathbb{N}$ が一意に存在する。

(i) $R^+=R(\chi)^{\Pi,+}:=\mathfrak{A}_\Pi^+\cap R$ とおく。$R^-=R(\chi)^{\Pi,-}:=\mathfrak{A}_\Pi^-\cap R$ とおく。このとき $R=R^+\cup R^-$ および $R^-=-R^+$ が成り立つ。

(ii) 次の性質を満たす $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, 全射 $f^+:J_{1,k}\to R^+$, $f^-:J_{1,k}\to R^-$ および $E[t]\in U_{f^+(t)}^+\setminus\{0\}$, $F[t]\in U_{f^-(t)}^-\setminus\{0\}$ $(t\in J_{1,k})$ が存在する。
(ii-1) 各 $\alpha\in R^+$ に対して $|(f^+)^{-1}(\{\alpha\})|=|(f^-)^{-1}(\{-\alpha\})|=\mathfrak{m}(\alpha)=\mathfrak{m}(-\alpha)$

が成り立つ。
(ii-2) $U^+[0] := U^-[0] := \mathbb{K}1$ とおき、$U^+[t] := \sum_{x=0}^{\mathfrak{h}(f^+(t))} U^+[t-1]E[t]^x$, $U^-[t] := \sum_{y=0}^{\mathfrak{h}(f^-(t))} U^-[t-1]F[t]^y$ $(t \in J_{1,k})$ とおく。このとき $\mathbb{K}$-線形空間として $U^+ = \cup_{z=0}^{k} U^+[z]$, $U^- = \cup_{z=0}^{k} U^-[z]$ かつ $U^+[t] = \oplus_{x=0}^{\mathfrak{h}(f^+(t))} U^+[t-1]E[t]^x$, $U^-[t] = \oplus_{y=0}^{\mathfrak{h}(f^-(t))} U^-[t-1]F[t]^y$ $(t \in J_{1,k})$ が成り立つ。

Theorem 2.3. (Heckenberger[4]) $i \in I$ とし任意の $j \in I \setminus \{i\}$ に対して $x_j := |R(\chi) \cap (\alpha_i \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j| < \infty$ が成り立つと仮定する。$\Pi^{(\alpha_i)} := \{-\alpha_i\} \cup \{\alpha_j + (x_j-1)\alpha_i | j \in I \setminus \{i\}\}$ とおく。このとき $\mathbb{K}$-代数の同型写像 $T_i : U(\chi, \Pi^{(\alpha_i)}) \to U(\chi, \Pi)$ で $T_i(U(\chi, \Pi^{(\alpha_i)})_\lambda) = U(\chi, \Pi)_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ を満たすものが存在する。

Theorem 2.4. ([6]) $R = R(\chi)$ は有限集合であるとする。このとき $\mathfrak{m}(R) = \{1\}$（従って $k = |R| < \infty$ である。）であって $\Pi \in \mathbb{B}$ となる或る $\mathbb{B}$ で $(R, \mathbb{B})$ が *Generalized root system* となるものがある（従って $\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{B}}$ である。）。さらに次の性質 (i)-(iii) を満たす f^+, f^-, $E[t]$, $F[t]$ $(t \in J_{1,k})$ が存在する。

(i) $f^+ = f^-$ であり $\mathfrak{h}(f^+(t)) < \infty$ のとき $E[t]^{\mathfrak{h}(f^+(t))+1} = F[t]^{\mathfrak{h}(f^+(t))+1} = 0$ が成り立つ。

(ii) 任意の全単射 $g : J_{1,k} \to J_{1,k}$ に対して $\{E[g(1)]^{x_{g(1)}} \cdots E[g(k)]^{x_{g(k)}} | x_t \in J_{0,\mathfrak{h}(f^+(t))} (t \in J_{1,k})\}$ は U^+ の $\mathbb{K}$-基底であり，$\{F[g(1)]^{y_{g(1)}} \cdots F[g(k)]^{y_{g(k)}} | y_t \in J_{0,\mathfrak{h}(f^-(t))} (t \in J_{1,k})\}$ は U^- の $\mathbb{K}$-基底である。

(iii) $t, t' \in J_{1,k}$, $t < t'$, に対して X (resp. Y) を $E[t'']$ (resp. $F[t'']$) $(t'' \in J_{t+1,t'-1})$ で生成される U^+ (resp. U^-) の (1 を含まない)$\mathbb{K}$-部分代数とする。$E[t]E[t'] - \chi(f^+(t), f^+(t'))E[t']E[t] \in X \cap U^+_{f^+(t)+f^+(t')}$ (resp. $F[t]F[t'] - \chi(f^+(t'), f^+(t))F[t']F[t] \in Y \cap U^-_{-f^+(t)-f^+(t')}$) が成り立つ。

Theorem 2.5. ([1]) [1] に於いて上の定理の元を用いて *Universal R-matrix* を構成した。

(2.2) $\boxed{\begin{array}{l}\text{以下では } R(\chi) \text{ は有限集合であるとし} \\ \text{かつ } \chi(\alpha,\alpha) \neq 1 \ (\alpha \in R(\chi)) \text{ である事を仮定する。}\end{array}}$

($\mathbb{K}$ の標数が 0 のときはこの仮定は常に満たされる。)

$\mathbb{K}$-線形写像 $\mathfrak{S} : U \to U^0$ を $\mathfrak{S}_{|U^0} = \mathrm{id}_{U^0}$, $\mathfrak{S}(UE_i) = \mathfrak{S}(F_iU) = \{0\}$ $(i \in I)$ により定義する。$\mathfrak{P}$ を写像 $f : R(\chi) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $f(\alpha) \leq \mathfrak{h}(\alpha)$ $(\alpha \in$

$R(\chi))$ を満たすもの全体の集合とする。各 $\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+$ に対して $\mathfrak{P}_\lambda^\Pi := \{f \in \mathfrak{P} | \sum_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} f(\alpha)\alpha = \lambda\}$ とおく。Theorem 2.4 より次の等式が成り立つ。

$$(2.3) \qquad |\mathfrak{P}_\lambda^\Pi| = \dim U_\lambda^+ = \dim U_{-\lambda}^- \quad (\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+).$$

各 $\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+$, $\alpha \in R(\chi)^{\Pi,+}$, $t \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t) := \{f \in \mathfrak{P}_\lambda^\Pi | f(\alpha) \geq t\}$ とおき、$\mathfrak{p}(\lambda;\alpha) := \max(\{t \in \mathbb{N} | \mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t) \neq \emptyset\} \cup \{0\})$ とおく。Theorem 2.4 より $\mathfrak{A}_\Pi^+$ の中で次の等式が成り立つ事に注意する。

$$(2.4) \qquad (\dim U_\lambda^+)\lambda = \sum_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} \sum_{t_\alpha=1}^{\mathfrak{p}(\lambda;\alpha)} |\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t_\alpha)|\alpha \quad (\lambda \in \mathfrak{A}_\Pi^+).$$

群の準同型写像 $\hat{\rho} : \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を $\hat{\rho}(\alpha_i) := \chi(\alpha_i,\alpha_i)$ $(i \in I)$ で定義する。各 $\lambda \in \mathfrak{A}$ に対して $q_\lambda := \chi(\lambda,\lambda)$ とおく。

Theorem 2.6. ([6]) $\lambda \in \mathfrak{A}$ とし，$m := \dim U_\lambda^+$ とおく。$m \neq 0$ を仮定する。$\{X_x | x \in J_{1,m}\}$ を U_λ^+ の $\mathbb{K}$-基底とし，$\{Y_y | y \in J_{1,m}\}$ を $U_{-\lambda}^-$ の $\mathbb{K}$-基底とする。U^0 の元を成分とする $m \times m$-行列 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} := [\mathfrak{S}(X_xY_y)]_{x,y\in J_{1,m}}$ により定義する。このときある $z \in \mathbb{K}^\times$ があって U^0 の中で次の等式が成り立つ。

$$(2.5) \qquad \det \mathcal{S} = z \cdot \prod_{\alpha\in R(\chi)^{\Pi,+}} \prod_{t_\alpha=1}^{\mathfrak{p}(\lambda;\alpha)} (-\hat{\rho}(\alpha)q_\alpha^{-t_\alpha}K_\alpha + L_\alpha)^{|\mathfrak{P}_\lambda^\Pi(\alpha;t_\alpha)|}.$$

$\varpi : \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を群の準同型写像とする。

$$\mathfrak{Z}_\varpi = \mathfrak{Z}_\varpi(\chi,\Pi) := \{\, Z \in U_0 \,|\, \forall\lambda \in \mathfrak{A}, \forall X \in U_\lambda,\, ZX = \varpi(\lambda)XZ \,\}.$$

とおく。

Theorem 2.7. ([9]) $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{Z}_\varpi}$ は単射であり、$\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\varpi)$ は次の等式で等式で特徴付けられる。

$Z = \sum_{(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2} a_{(\lambda,\mu)}K_\lambda L_\mu \in U^0$ $(a_{(\lambda,\mu)} \in \mathbb{K})$ とする。このとき $Z \in \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_\varpi)$ であるための必要十分条件は各 $\beta \in R$ に対して以下の条件 $(e1)_\beta$-$(e4)_\beta$ を満たすことである。

以下では次の記号を用いる。$\hat{o}(q_\beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(n)_{q_\beta}! \neq 0$ が成り立つときは 0 とおき、そうでないときは $\min\{m \in \mathbb{N} | (m)_{q_\beta}! = 0\}$ とおく。$\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta} := \varpi(\beta)\frac{\chi(\beta,\mu)}{\chi(\lambda,\beta)}$ とおく。

$(e1)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ と $t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ に対して $q_\beta\neq 1$, $\hat{o}(q_\beta)=0$ かつ $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}=q^t_\beta$ を満たすとき等式 $a_{(\lambda+t\beta,\mu-t\beta)}=\hat{\rho}(\beta)^t\cdot a_{(\lambda,\mu)}$ が成り立つ。

$(e2)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ に対して，$\hat{o}(q_\beta)=0$ であり任意の $t\in\mathbb{Z}$ に対して $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}\neq q^t_\beta$ であるならば $a_{(\lambda,\mu)}=0$ が成り立つ。

$(e3)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$, $\beta\in R^+$ と $t\in J_{1,\hat{o}(q_\beta)-1}$ に対して，$q_\beta\neq 1$, $\hat{o}(q_\beta)\geq 2$ かつ $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}=q^t_\beta$ を満たすとき等式

$$\begin{aligned}&\sum_{x=-\infty}^{\infty}a_{(\lambda+(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta,\mu-(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-(\hat{o}(q_\beta)x+t)}\\&\quad=\sum_{y=-\infty}^{\infty}a_{(\lambda+\hat{o}(q_\beta)y\beta,\mu-\hat{o}(q_\beta)y\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-\hat{o}(q_\beta)y}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$(e4)_\beta$ $(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}^2$ と $\beta\in R^+$ に対して $\hat{o}(q_\beta)\geq 2$ であり、任意の $m\in J_{0,\hat{o}(q_\beta)-1}$ に対して $\varpi^\chi_{\lambda,\mu;\beta}\neq q^m_\beta$ が成り立つならば $\hat{o}(q_\beta)-1$ 個の等式

$$\begin{aligned}&\sum_{x=-\infty}^{\infty}a_{(\lambda+(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta,\mu-(\hat{o}(q_\beta)x+t)\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-(\hat{o}(q_\beta)x+t)}\\&\quad=\sum_{y=-\infty}^{\infty}a_{(\lambda+\hat{o}(q_\beta)y\beta,\mu-\hat{o}(q_\beta)y\beta)}\hat{\rho}(\beta)^{-\hat{o}(q_\beta)y}\quad(t\in J_{1,\hat{o}(q_\beta)-1})\end{aligned}$$

が成り立つ。

3 Weyl groupoids の最長元と Generalized quantum groups の有限次元既約表現の分類

結合的 $\mathbb{K}$-代数 $U=U(\chi,\Pi)$ を上記のものとする。$\mathrm{Ch}=\mathrm{Ch}(\chi,\Pi)$ を $\mathbb{K}$-代数の準同型写像 $\Lambda:U^0\to\mathbb{K}$ の集合とする。次の性質を満たす左 U-加群 $\mathcal{M}_\chi(\Lambda)$ が一意的に存在する。

(i) ある $\tilde{v}_\lambda\in\mathcal{M}_\chi(\Lambda)\setminus\{0\}$ で $Z\tilde{v}_\Lambda=\Lambda(Z)\tilde{v}_\Lambda$ $(Z\in U^0)$ および $E_i\tilde{v}_\Lambda=0$ $(i\in I)$ を満たすものが存在する。

10

(ii) $\mathbb{K}$-線形写像 $U^- \to \mathcal{M}_\chi(\Lambda)$, $Y \mapsto Y\tilde{v}_\Lambda$, は全単射である。

各 $\lambda \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_\lambda := U^-_\lambda \tilde{v}_\Lambda$ とおく。$\mathbb{K}$-線形空間として $\mathcal{M}_\chi(\Lambda) = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi}\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ が成り立つ。

$\mathcal{M}_\chi(\Lambda)$ の U-部分加群 $\mathcal{N} := \mathcal{N}_\chi(\Lambda)$ を $\mathcal{N} \subset \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi\setminus\{0\}}\mathcal{M}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ を満たすものの中で極大なものとする。左 U-加群 $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ を $\mathcal{L}_\chi(\Lambda) := \mathcal{M}_\chi(\Lambda)/\mathcal{N}$ により定義する。$\mathcal{L}_\chi(\Lambda) = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi}\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ および $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 = 1$ が成り立つ。

仮定 (2.2) を課している事に注意する。

Lemma 3.1. ([2]) (1) $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ は既約 U-加群である。

(2) V を有限次元既約 U-加群とする。このとき U-加群として V と $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ が同型となる $\Lambda \in \mathrm{Ch}$ が存在する。

Proof. (1) 各 $\lambda \in \mathfrak{A}^+_\Pi\setminus\{0\}$ および各 $x \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ に対して $U^+x\cap\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 = \{0\}$ ならば部分加群 Ux は $Ux = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(U^-U^0U^+)x \subset \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi\setminus\{0\}}\mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda}$ を満たすので $Ux = \{0\}$ が成り立ち $x = 0$ でなければならない。$\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ は既約ではないと仮定し T を $\{0\} \neq T \neq \mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ となる U-部分加群とする。このとき $t \in T$ で $n \in \mathbb{N}$, $t = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$, $t_0 \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 \setminus \{0\}$ であって $t_k \in \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_{-\lambda_k} \setminus \{0\}$, $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ $(k \neq k')$ となる $\lambda_k \in \mathfrak{A}^+_\Pi \setminus \{0\}$ $(k \in J_{1,n})$ が存在するものが存在する。このとき各 $k \in J_{1,n}$ に対して $U^+t_k \cap \mathcal{L}_\chi(\Lambda)_0 \neq \{0\}$ が成り立つと仮定してよい。これより $T = \mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ が成り立つので矛盾である。

(2) 各 $\Lambda \in \mathrm{Ch}$ に対して $V_\Lambda := \{v \in V | Zv = \Lambda(Z)v (Z \in U^0)\}$, $V^\Lambda := \{v \in V_\Lambda | \forall i \in I, E_iv = 0\}$ とおく。$\hat{O} := \{\Lambda \in \mathrm{Ch} | V_\Lambda \neq \{0\}\}$ とおく。$\mathbb{K}$ が代数閉体であるので $V = \oplus_{\Lambda\in\hat{O}}V_\Lambda$ が成り立つ。$\check{O} := \{\Lambda \in \hat{O} | V^\Lambda \neq \{0\}\}$ とおく。$(U^+)' := \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi\setminus\{0\}}U^+_\lambda$ とおき、$(U^-)' := \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+_\Pi\setminus\{0\}}U^-_{-\lambda}$ とおく。仮定 (2.2) より Theorem 2.4 の主張の元 $E[t]$, $E[t]$ は V にべき零に作用する。この事より再び Theorem 2.4 より次の $(*)$ および $(**)$ が成り立つ。

$(*)$ $\quad \exists r \in \mathbb{N}, \forall v \in V, \forall X_t \in (U^+)'\ (t \in J_{1,r}),\ X_1 \cdots X_tv = 0.$

$(**)$ $\quad \exists r \in \mathbb{N}, \forall v \in V, \forall Y_t \in (U^-)'\ (t \in J_{1,r}),\ Y_1 \cdots Y_tv = 0.$

$(*)$ より $\check{O} \neq \emptyset$ が成り立つ。$\Lambda \in \check{O}$ とし $v \in V^\Lambda \setminus \{0\}$ とおく。このとき U-加群の全射準同型写像 $f : \mathcal{L}_\chi(\Lambda) \to V$, $f(X\tilde{v}_\Lambda) = Xv$ $(X \in U)$ が存在する。

$\mathcal{N} \not\subset \ker f$ とする。このとき $Y \in (U^-)' \setminus \{0\}$ で $\tilde{v}_\Lambda + Y\tilde{v}_\Lambda \in \ker f$ となるものが存在する。このとき $(-Y)v = v$ が成り立つ。これは $(**)$ に矛盾する。従って $\mathcal{N} \subset \ker f$ が成り立つ。従って $\mathcal{N} = \ker f$ が成り立つ。 $\square$

以下 $\mathbb{K}$ の標数が 0 であると仮定する。[2] で Weyl groupoid の最長元を用いて U の有限次元既約表現の分類定理を得た。以下はその一部である。

Theorem 3.2. ([2]) $q \in \mathbb{K}^\times$ を 1 のべき根でないものとする。$z_{i,j} := \chi(\alpha_i, \alpha_j)$ $(i, j \in I = J_{1,\mathfrak{N}})$ とおく。$\Lambda \in \mathrm{Ch}$ とし $b_i := \Lambda(K_{\alpha_i} L_{-\alpha_i})$ $(i \in I)$ とおく。

(1)（U が $\mathrm{A}(m, n)$ 型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $m+n+1 = \mathfrak{N}$ となるものとする。$z_{i,j} z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{1,m})$, $z_{m+1,m+1} = -1$, $z_{i,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{m+2,m+n+1})$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,m})$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q$ $(i \in J_{m+1,m+n})$ とする。このとき $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty$ である必要十分条件は

$$\forall i \in I \setminus \{m+1\},\ \exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b_i = z_{i,i}^{t_i}$$

である。

(2)（U が $\mathrm{B}(m, n)$ 型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{N}$ を $m + n = \mathfrak{N}$ となるものとする。$z_{i,j} z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{i,i} = q^{-2}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = -1$, $z_{i,i} = q^2$ $(i \in J_{n+1,m+n-1})$, $z_{m+n,m+n} = q$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q^2$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q^{-2}$ $(i \in J_{n,m+n-1})$ とする。$g := b_n \cdots b_{m+n}$ とおく。このとき $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty$ である必要十分条件は次の (i)-(iii) を満たす事である。

(i) $\forall i \in I \setminus \{n\},\ \exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b_i = z_{i,i}^{t_i}$.
(ii) $\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{2c-1 | c \in J_{1,m}\},\ g = (-q)^{-k}$.
(iii) $\exists k \in J_{0,m-1},\ g = q^{-2k} \Longrightarrow \forall i \in J_{n+k+1,m+n},\ b_i = 1$.

(3)（U が $\mathrm{C}(n)$ 型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$n = \mathfrak{N}$ とおき $n \geq 3$ を仮定する。$z_{i,j} z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2)$, $z_{1,1} = -1$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = q^2$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n-1,n} z_{n,n-1} = q^{-2}$ $(i \in J_{m+1,m+n})$ とする。このとき $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty$ である必要十分条件は

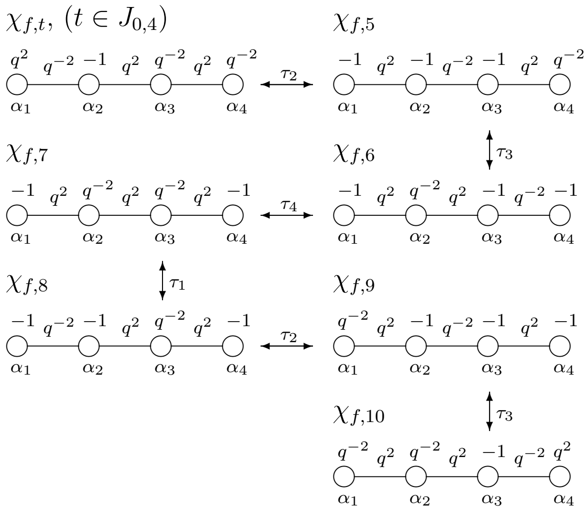
$$\forall i \in I \setminus \{1\},\ \exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b_i = z_{i,i}^{t_i}$$

である。

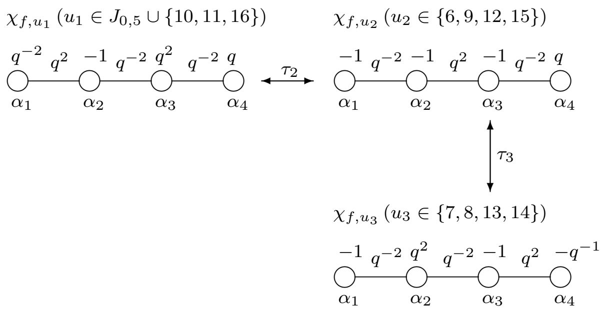
(4)（U が $\mathrm{D}(m, n)$ 型単純スーパーリー代数に付随するものであるとき）$m, n \in \mathbb{N}$ を $m \geq 2$, $m + n = \mathfrak{N}$ となるものとする。$z_{i,j} z_{j,i} = 1$ $(|i-j| \geq 2, i \in I \setminus \{m+n-1, m+n\})$, $z_{m+n-1,m+n} z_{m+n,m+n-1} = 1$, $z_{i,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{n,n} = -1$, $z_{i,i} = q$ $(i \in J_{n+1,m+n})$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q$ $(i \in J_{1,n-1})$, $z_{i,i+1} z_{i+1,i} = q^{-1}$ $(i \in J_{n,m+n-2})$, $z_{m+n-2,m+n} z_{m+n,m+n-2} = q^{-1}$ とする。$g :=$

$(b_n \cdots b_{m+n-2})^2 \cdot b_{m+n-1} b_{m+n}$ とおく。このとき $\dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty$ である必要十分条件は次の (i)-(iv) を満たす事である。

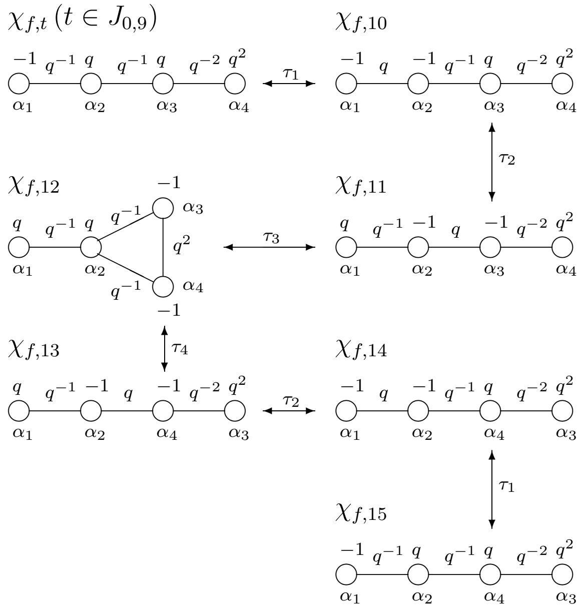
(i) $\forall i \in I \setminus \{n\}$, $\exists t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b_i = z_{i,i}^{t_i}$.
(ii) $\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $g = q^{-2k}$.
(iii) $\exists k \in J_{0,m-2}$, $g = q^{-2k} \Longrightarrow b_n \cdots b_{n+k} = q^{-k}$ かつ $\forall i \in J_{n+k+1,m+n}$, $b_i = 1$.
(iv) $g = q^{-(m-1)} \Longrightarrow b_n \cdots b_{m+n-1} = q^{-(m-1)}$.



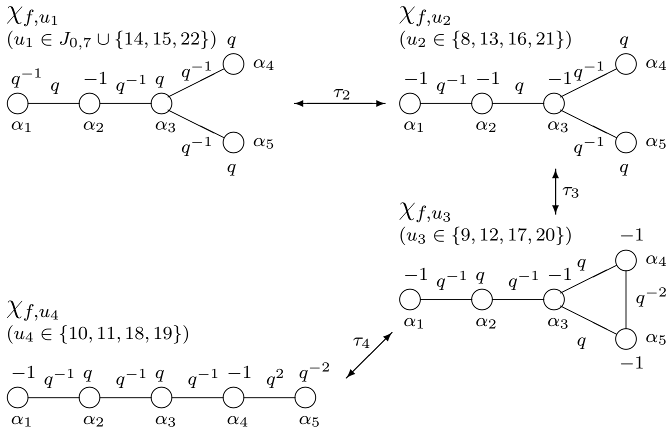
A$(1,2)$ 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_1^{\chi_{f,1}} s_3^{\chi_{f,2}} s_4^{\chi_{f,3}} s_3^{\chi_{f,4}} s_2^{\chi_{f,5}} s_3^{\chi_{f,6}} s_4^{\chi_{f,7}} s_1^{\chi_{f,8}} s_2^{\chi_{f,9}} s_3^{\chi_{f,10}}$



B$(2,2)$ 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_3^{\chi_{f,1}} s_4^{\chi_{f,2}} s_3^{\chi_{f,3}} s_4^{\chi_{f,4}} s_1^{\chi_{f,5}} s_2^{\chi_{f,6}} s_3^{\chi_{f,7}} s_4^{\chi_{f,8}} s_3^{\chi_{f,9}} s_2^{\chi_{f,10}} s_1^{\chi_{f,11}} s_2^{\chi_{f,12}} s_3^{\chi_{f,13}} s_4^{\chi_{f,14}}$ $\cdot s_3^{\chi_{f,15}} s_2^{\chi_{f,16}}$



C(4) 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_2^{\chi_{f,1}} s_3^{\chi_{f,2}} s_4^{\chi_{f,3}} s_2^{\chi_{f,4}} s_3^{\chi_{f,5}} s_4^{\chi_{f,6}} s_2^{\chi_{f,7}} s_3^{\chi_{f,8}} s_4^{\chi_{f,9}} s_1^{\chi_{f,10}} s_2^{\chi_{f,11}} s_3^{\chi_{f,12}} s_4^{\chi_{f,13}} s_2^{\chi_{f,14}} s_1^{\chi_{f,15}}$



D(3, 2) 型単純スーパーリー代数に付随する U の Dynkin 図形 ; Weyl groupoid の最長元は $s_3^{\chi_{f,1}} s_4^{\chi_{f,2}} s_5^{\chi_{f,3}} s_3^{\chi_{f,4}} s_4^{\chi_{f,5}} s_5^{\chi_{f,6}} s_1^{\chi_{f,7}} s_2^{\chi_{f,8}} s_3^{\chi_{f,9}} s_4^{\chi_{f,10}} s_5^{\chi_{f,11}} s_4^{\chi_{f,12}} s_3^{\chi_{f,13}} s_2^{\chi_{f,14}} \cdot s_1^{\chi_{f,15}} s_2^{\chi_{f,16}} s_3^{\chi_{f,17}} s_4^{\chi_{f,18}} s_5^{\chi_{f,19}} s_4^{\chi_{f,20}} s_3^{\chi_{f,21}} s_2^{\chi_{f,22}}$

References

[1] I. Angiono, H. Yamane, The R-matrix of quantum doubles of Nichols algebras of diagonal type, J. Math. Phys. 56, 021702 (2015)

[2] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **51** (2015), no. 1, 59–130.

[3] M. Cuntz and I. Heckenberger, Weyl groupoids with at most three objects, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), no. 6, 1112-1128.

[4] I. Heckenberger, Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type, J. Algebra **323** (2010), no. 8, 2130–2182.

[5] I. Heckenberger and H. Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem. Math. Z. 259 (2008), 255–276.

[6] I. Heckenberger and H. Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants, Revista de la Union Matematica Argentina, Volumen 51, no 2 (2010), 107-146.

[7] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie Algebras, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.

[8] V. Kharchenko, A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, Algebra and Logic **38** (1999), no. 4, 259–276.

[9] Punita Batra, Hiroyuki Yamane, Centers of Generalized Quantum Groups, preprint, arXiv:1309.1651 (the pdf-file of the newest version is put in http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/.)

[10] H. Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $G^{(1)}(3)$, Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, (September 2015) DOI 10.1007/s40863-015-0021-5

山根宏之
富山大学理工学研究部（理）
〒930-8555　富山市五福 3190
http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/
hiroyuki@sci.u-toyama.ac.jp,