

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2026年9月

於 神戸大学

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2026年9月

於 神戸大学

函 数 論

9月1日(火) 第V会場

9:30~11:10		(分)	頁
1	牛 島 顕 (兵庫県立大国際商経) 中 西 敏 浩 (阪公大数学研)	超理想頂点のある双曲三角形が生成する三角群のディリクレ基本多角形の決定	(10) 1
2	堀 口 俊 二	Newton-Mandelbrot set	(15) 3
3	神 本 丈 (九 大 数 理) 水 野 宏 真 (九州産大理工) 野 瀬 敏 洋 (福 岡 工 大)	Analytic continuation of local zeta functions to a slit complex plane	(15) 5
4	相 川 弘 明 (中 部 大 理 工)	Everywhere divergence of tangential parabolic limits of Gauss-Weierstrass integrals	(15) 7
5	堀 田 一 敬 (山 口 大 創 成) S. Schleißinger (Univ. of Würzburg)	スリット写像に関連する Loewner chain への埋め込み問題	(15) 9
6	松 崎 克 彦 (早 大 教 育) 陶 菲 (早 大 教 育)	Boundary characterizations of little Bloch and VMOA functions on the half-plane	(15) 11
14:20~15:20 特別講演			
	平 田 賢 太 郎 (広島大先進理工)	半線形楕円型方程式の解の特異点除去可能性と漸近挙動に関するポテンシャル解析	13
15:40~16:50			
7	志 賀 啓 成 (阪公大数学研・東京科学大*)	Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor sets (Part I)	(15) 25
8	志 賀 啓 成 (阪公大数学研・東京科学大*)	Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor set (Part II)	(15) 27
9	四之宮佳彦 (静岡大教育)	On curve graphs of hyperelliptic translation surfaces	(15) 29
10	大 野 玄 道 (京大人間環境)	Uniform perfectness of the limit sets of conformal tree iterated function systems	(15) 31

9月2日(水) 第V会場

9:30~11:10		(分)	頁
11	濱 田 英 隆 (九 州 産 大*) 本 田 竜 広 (専 修 大 商) M. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Bohr-Rogosinski radius in complex Banach spaces	(15) 33
12	綾 野 孝 則 (阪公大数学研)	双楕円的な種数2の超楕円曲線に付随するアーベル関数の退化極限	(15) 35
13	高 橋 正 (羽衣国際大現代社会)b	平面6次曲線に関する数式处理的考察	(15) 37
14	足 立 真 訓 (静 岡 大 理) Seungjae Lee (Kyungpook National Univ.) Aeryeong Seo (Kyungpook National Univ.)	ファイバー束の中間的擬凸性	(15) 39

15	小 池 貴 之 (筑波大数理物質)	Formal principle for line bundles on neighborhoods of an analytic subset of a compact Kähler manifold	(15)	41
----	-------------------	---	------	----

16	大 沢 健 夫 (名大多元数理)b	On complete Kähler Riemann domains	(15)	43
----	-------------------	------------------------------------	------	----

13:00~14:00 特別講演

厚 地 淳 (慶 大 理 工)	ケーラー多様体上の拡散過程と正則写像の値分布 —伊藤解析の視点から—	45
-----------------	------------------------------------	----

超理想頂点のある双曲三角形が生成する三角群のディリクレ基本多角形の決定

牛島 顕 (兵庫県立大学 国際商経学部)*¹

中西 敏浩 (大阪公立大学 数学研究所)*²

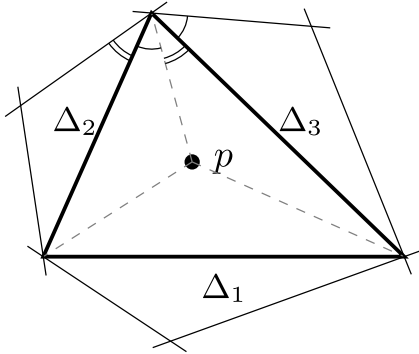
双曲平面 $(\mathbb{H}^2, \rho)$ 上の三角形 Δ に対し, 各辺 (を含む 3 本の直線) での折り返しの合成で生成される, 向きを保つ等長変換からなる群を考える. この群が離散群となるとき, これは**三角群**と呼ばれる. 元の三角形と, いずれかの辺での折り返しによる像との和集合は, この群 Γ_Δ の基本領域の 1 つであるが, ここでは三角形の頂点の像ではない点 $p \in \mathbb{H}^2$ に対して定まる**ディリクレ基本多角形**と呼ばれる基本領域を考える. これは次で定義される:

$$D_p(\Gamma_\Delta) := \bigcap_{f \in \Gamma_\Delta} H_p(f), \quad \text{ただし} \quad H_p(f) := \{q \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(q, p) \leq \rho(q, f(p))\}.$$

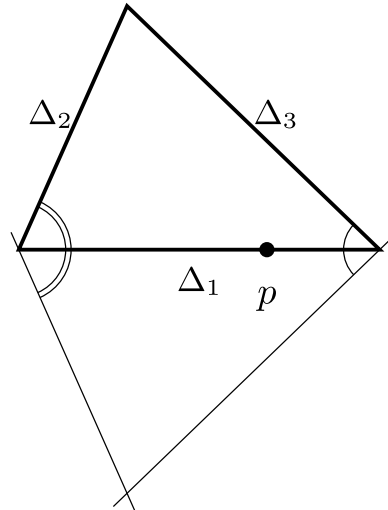
無限個の集合の共通部分からなるこの集合の具体的な形は, 辺 Δ_i での折り返しを R_i と表すとき, [1] により次の表示が得られている:

$$D_p(\Gamma_\Delta) = \begin{cases} \bigcap_{i,j=1,2,3} H_p(R_i \circ R_j), & \text{ただし, } p \text{ が } \Delta \text{ の内部にあるとき;} \\ \bigcap_{j=1,2,3} (H_p(R_i \circ R_j) \cap H_p(R_j \circ R_i)), & \text{ただし, } p \text{ が辺 } \Delta_i \text{ 上にあるとき.} \end{cases}$$

この表示に現れる二つの場合をそれぞれ図示すると以下のようなになる.



(1) p が Δ の内部にあるとき



(2) p が Δ_1 上にあるとき

*¹e-mail: ushijima@em.u-hyogo.ac.jp

*²e-mail: tosihiro@riko.shimane-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22K03309) の助成を受けたものである。

上記の表示の証明には、双曲三角形に対するチェバの定理が中心的な役割を果たす。また、上記の結果の拡張として、幾つかの頂点が双曲平面の無限遠円周 $\partial\mathbb{H}^2$ 上にある場合、つまり理想頂点 (ideal vertex) がある場合にも $D_p(\Gamma_\Delta)$ が同様の形で決定されることや、三角群の高次元化に当たる単体群に対する結果が [1, 2] で報告されている。

本稿の結果は、双曲三角形の頂点の位置をさらに一般化するものである。

定理

上記の $D_p(\Gamma_\Delta)$ の表示は、頂点の幾つかが射影円盤モデルにおけるその外側にある場合、すなわち超理想頂点 (ultraideal vertex) が双曲三角形にある場合にも成り立つ。

この定理の証明には、通常の頂点、理想頂点、超理想頂点が混在する三角形にも適用できるように拡張されたチェバの定理を用いる。その主張は以下の通りである。

命題 ([3])

辺 Δ_i に相対する頂点を通る直線を l_i とするとき、3本の直線 l_1, l_2, l_3 が Δ の内部の一点で交わることと、以下の等式が成り立つことは同値である：

$$\frac{r(l_1, \Delta_2)}{r(l_1, \Delta_3)} \frac{r(l_2, \Delta_3)}{r(l_2, \Delta_1)} \frac{r(l_3, \Delta_1)}{r(l_3, \Delta_2)} = 1.$$

ここで、例えば $r(l_1, \Delta_2)$ は、次で定義される値である：

- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が通常の頂点なら、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 との成す角を正弦関数 $\sin$ で写したものである；
- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が理想頂点なら、この点を中心とする horocycle を任意に 1 つ取り、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 とで挟まれる部分の弧長である；
- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が超理想頂点なら、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 との間の距離を双曲正弦関数 $\sinh$ で写したものである。

参考文献

- [1] 梅本 悠莉子, *On Dirichlet fundamental domains for Fuchsian groups*, 2010 年度修士論文 (大阪市立大学理学部).
- [2] 小森 洋平, 梅本 悠莉子, *On Dirichlet polyhedra for generalized simplex groups*, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会函数論分科会講演アブストラクト.
- [3] 牛島 顕, *Extensions of Ceva's and Menelaus' theorems for generalized triangles in the hyperbolic plane*, プレプリント

Newton-Mandelbrot set

Shunji HORIGUCHI

The Wasan(Japanese mathematics in the Edo period(1603-1868:national isolation)) of 1673 leads to the extension of Mandelbrot set, i.e., the Newton-Mandelbrot set(Def. 1(2)). We use the Newton-Mandelbrot set to show that the complex plane continuously transforms the Mandelbrot set and the Multibrot set(Thm. 4). This shows the originality of Japanese traditional mathematics (Wasan).

Definition 1. (1) Let $\mathbb{C}$ be the complex plane and $n(>=2)$ a natural number.

$$M_n := \{c \in \mathbb{C} \mid z_0 = 0, z_{k+1} = z_k^n + c, \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| < \infty\} \quad (1)$$

Here, M_2 is called the Mandelbrot set(1979), and $M_n(n>=3)$ the Multibrot set.

(2) Let $p(>=2)$ be a natural number and m a real number.

$$NM_p(m) := \left\{c \in \mathbb{C} \mid z_0 = 0, z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^p - c}{mz_k^{p-1} - 1}, \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| < \infty\right\} \quad (2)$$

It is called the Newton-Mandelbrot set. In particular, $NM_2(0)$ is the Mandelbrot set M_2 and $NM_p(0)(p>=3)$ is the Multibrot set M_p .

$NM_p(m)$ can be considered as a picture. This is obtained from the formula (2) when m is determined. We can obtain $NM_p(m)$ using a computer.

Theorem 2(Douady and Hubbard[2]). *The Mandelbrot set and the Multibrot set are connected and closed sets.*

Theorem 3(Mitsuhiro Shishikura[3]). *The Boundary of the Mandelbrot Set has Hausdorff dimension 2.*

Theorem 4([1]). *The complex plane $\mathbb{C}$ can be continuously transformed to Mandelbrot set M_2 or Multibrot set $M_p(p>=3)$.*

Proof. If we apply $f(z)=z^p-z+c(p>=2)$ to Newton's method, then the following is obtained.

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^p - z_k + c}{(z_k^p - z_k + c)'} = \frac{(p-1)z_k^p - c}{pz_k^{p-1} - 1}$$

In this case, let $z_0 = 0$ and $z_1 = c$. This is the formula of $NM_{p,p,c}$, and it is the following set.

$$NM_p(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{such that } z_k \text{ converges to the root of } f(z)=0 \text{ or } z_k \text{ performs various actions within } \mathbb{C} \text{ (except } z_k=(1/p)^{1/(p-1)}).\}$$

Therefore, $NM_p(p)$ is the connected set, and $\mathbb{C}$ is represented as follows.

$$\mathbb{C} = NM_p(p) \cup (1/p)^{1/(p-1)}$$

Here, if we continuously move from p to 0, then $(1/p)^{1/(p-1)} = \infty$ and $pz_k^{p-1} - 1 = -1$. Hence, $\mathbb{C}$ transforms to $(NM_p(0)=)M_p$ continuously. $\square$

Example 5. If $f(z)=z^3-z+c$ then $z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - z_k + c}{(z_k^3 - z_k + c)'} = \frac{(3-1)z_k^3 - c}{3z_k^2 - 1}$.

This is the formula of $NM_3(3)$. From $3z_k^2 - 1 = 0$, $z_k = \pm(1/3)^{1/2}$ is obtained. Then $\mathbb{C}$ is represented as follows.

$$\mathbb{C} = NM_3(3) \cup \{\pm(1/3)^{1/2}\}$$

Here, if we continuously move from 3 to 0, then $3z_k^2 - 1 = -1, |z_k| = |\pm(1/3)^{1/2}| = \infty$, and $\mathcal{C}$ transfers to $(NM_3(0) =) M_3$ continuously.

Example 6. We show $NM_2(m)$ approaching M_2 . The recurrence formula of $NM_2(m)$ is this.

$$z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^2 - c}{mz_k - 1}$$

If m continuously approaches 0, then this approaches $z_{k+1} = z_k^2 + c$. We will show the following examples. (1) $NM_2(-1)$ (2) $NM_2(0.1)$ (3) $NM_2(0.5)$ (4) $NM_2(1)$

Next, we will discuss the Fatou set, the Julia set, and Newton's map. Newton's map for $f_p(z) = z^p - z + c$ is this. Here, add the parameter m to the notation $f_p(z)$ to write it as $f_{p,m}(z)$.

$$Nf_{p,(m)p}(z) = z - \frac{z^p - z + c}{(z^p - z + c)'} = \frac{(p(m)-1)z^p - c}{p(m)z^{p-1} - 1}$$

Let $F(Nf_{p,m}(z))$, $J(Nf_{p,m}(z))$ be the Fatou set, the Julia set for $Nf_{p,m}(z)$ in the Riemann sphere, respectively. Let $c_p = z = (1/p)^{1/(p-1)}$. Then $\mathcal{C}$ is represented as follows.

$$\mathcal{C} = (F(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}), c_p \in J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}$$

$$\text{where } \infty \notin (F(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}).$$

Now, we obtain the following.

Proposition 7. If $m \rightarrow 0$, then $\mathcal{C} = (F(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C})$, continuously transformed to $\mathcal{C} = (F(Nf_{p,0}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,0}(z)) \cap \mathcal{C})$, $c_0 = \infty \notin \mathcal{C}$ where $Nf_{p,0}(z) = z^p + c$.

References

- [1] S. Horiguchi: Newton-Mandelbrot set and Murase-Mandelbrot set(ver.4), 2026-5-5
<http://arxiv.org/abs/2502.14872>
- [2] A. Douady and J. Hubbard: Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.Acad. Sci. Paris 294 (1982), 123-126.
- [3] Mitsuhiro Shishikura: The Boundary of the Mandelbrot Set Has Hausdorff Dimension 2, Astérisque 222, 389-405 (1994).
- [4] Andrew Brown: The Mandelbrot Set, mandelbrot.pdf (ubc.ca), 2008/4
- [5] Robert P. Munafo: Multibrot Set, [Multibrot Set](#), [Mu-Ency at MROB](#)
- [6] S. Horiguchi: The Formulas to Compare the Convergences of Newton's Method and the Extended Newton's Method (Tsuchikura-Horiguchi Method) and the Numerical Calculations, Applied Mathematics <http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.71004> (7) 40-60
- [7] Yoshimasu Murase: Sanpoufutsudankai, 1673 (Book in Japanese) (Readers do not need to read this old book of Japanese archaic texts.)
- [8] Takeo Suzuki : Wasan no seiritsu (Book in Japanese), KOUSEISHA KOUSEIKAKU Co., Ltd., 2007 (The three formulas derived by Murase are described in modern language. = 村瀬の導いた3つの式が現代語で記述されている.)

Shunji Horiguchi
shunhori@seagreen.ocn.ne.jp

Analytic continuation of local zeta functions to a slit complex plane

神本 丈 (九州大学)*¹

水野 宏真 (九州産業大学)*²

野瀬 敏洋 (福岡工業大学)*³

1 導入

本講演では、次の積分で定義される局所ゼータ関数について考える：

$$Z_\phi(s; f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \phi(x) dx \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

ここで、 f, ϕ は原点の開近傍 U 上で定義された実数値連続関数で ϕ の台は U に含まれるものとする。上の積分は半平面 $\operatorname{Re}(s) > -c_0(f)$ で広義一様収束するため、そこでの正則関数とみなすことができる。ここで、

$$c_0(f) := \sup\{c \geq 0 : \text{原点の近傍 } V \text{ が存在して, } |f|^{-c} \in L^1(V)\}$$

は f の log canonical threshold や extendibility exponent などと呼ばれる不変量である。多くの場合に、 $Z_\phi(s; f)$ はさらに広い領域に解析接続されることが知られており、その解析接続の様子は f の特異点論的な性質に強く影響を受ける。

f が実解析的かつ ϕ が C^∞ 級である場合には、広中の特異点解消定理の適用と部分積分により $Z_\phi(s; f)$ は全平面に有理型解析接続される。さらに、 $Z_\phi(s; f)$ の全ての極は負の実軸上に存在し、 $\phi(0) > 0, \phi(x) \geq 0$ という仮定のもとで $s = -c_0(f)$ に極を持つことがわかる ([2])。

f の仮定を C^∞ 級にまで弱めて、 $Z_\phi(s; f)$ の解析接続の様子を考察してみよう。まず論文 [1] において、実解析関数の場合と同様の解析接続が成立するための条件について、強い結果が得られている。一方で f が原点で平坦 (Taylor 級数が零) な項を持つ場合、 $Z_\phi(s; f)$ が $s = -c_0(f)$ に極ではない特異点を持つ例が知られている ([2])。したがって、 f が C^∞ 級である場合には全平面への有理型解析接続は一般に成立せず、 $Z_\phi(s; f)$ の特異点についてはいまだにわからないことが多い。これまでに知られている特異点が全て負の実軸上に現れていることから次のような問題が自然に想起される。

問題 1 $Z_\phi(s; f)$ が領域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に正則に解析接続されるための条件を求めよ。

*¹e-mail: joe@math.kyushu-u.ac.jp

*²e-mail: h.mizuno@ip.kyusan-u.ac.jp

*³e-mail: nose@fit.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:JP25K07037, JP26K06847) の助成を受けたものである。

キーワード: local zeta functions, flat functions, analytic continuation

2 主結果

本講演では前述の問題に関して $n = 1$ の場合を考える. f が原点で平坦でない場合, f が C^∞ 級であれば $Z_\phi(s; f)$ が全平面へ有理型解析接続され負の実軸上に極を持つことが容易に示される. f が原点で平坦である場合も含めて, 一般に f が原点においてある種の連続性を持つ場合, 問題 1 の解析接続が成立することが示される.

定理 2 $\delta > 0$ とする. ϕ は $(-\delta, \delta)$ 上連続であり, f が次の条件を満たすとする.

- (i) $f(x)$ は $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ 上 C^1 級かつ $f'(x) \neq 0$. (ii) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x)/f'(x)$ が存在する. このとき, $Z_\phi(s; f)$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に正則に解析接続される.

定理 2 においては f は C^∞ 級である必要はなく, かなり広いクラスの関数に対して $Z_\phi(s; f)$ の正則な解析接続が得られる. この結果は, $Z_\phi(s; f)$ の特異点が $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に存在しないことのみを示すもので, $s = -c_0(f)$ における特異点の性質や $(-\infty, -c_0(f)]$ での特異点の有無については分からない. この定理の証明は変数変換により次のような連続関数の Mellin 変換の解析接続可能性に帰着される.

定理 3 $a \in \mathbb{R}$ とする. ψ を $(0, \infty)$ 上の連続関数でコンパクトな台を持つものとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow +0} \psi(x)/x^a$ が存在すれば, Mellin 変換 $M[\psi](s) = \int_0^\infty x^{s-1} \psi(x) dx$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -a]$ に正則に解析接続される.

定理 3 はまず ψ が実解析関数の場合に証明し, Weierstrass の近似定理を用いて一般の連続関数の場合に拡張する. 定理 2 の条件 (ii) は変数変換後の被積分関数が定理 3 の条件を満たすための条件であり, f に課すべき条件として本質的に重要なものである.

条件 (ii) の妥当性について考える. 条件 (ii) は原点で平坦でない場合は常に成立し, 平坦である場合でもある種の凸性を持つ場合は成立する. 一方, [3] において条件 (i) を満たすが条件 (ii) を満たさない関数が構成されているが, その関数に関する局所ゼータ関数が問題 1 のような解析接続を持つかどうかはわかっていない. また, $Z_\phi(s; f)$ が実軸以外に特異点を持つような連続関数 f の存在も知られていない. したがって, 条件 (ii) を満たさない連続関数 f で $Z_\phi(s; f)$ が実軸以外に特異点を持つものを構成することが今後の課題である.

参考文献

- [1] J. Kamimoto and T. Nose: Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Soc. Univ. Tokyo, **23** (2016), 425-485.
- [2] J. Kamimoto and T. Nose: Non-polar singularities of local zeta functions in some smooth case, Trans. Amer. Math. Soc., **372** (2019), 661-676.
- [3] J. Kamimoto, H. Mizuno and T. Nose: Analytic continuation of local zeta functions to a slit complex plane: the one-dimensional case, submitted.

Everywhere divergence of tangential parabolic limits of Gauss-Weierstrass integrals

Hiroaki Aikawa (Chubu University)*

We investigate the initial limits of Gauss-Weierstrass integrals over the upper half space $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ with $n \geq 1$. By

$$Wf(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy.$$

we denote the Gauss-Weierstrass integral of a locally integrable function f on $\mathbb{R}^n$.

The classical Fatou theorem says that the Poisson integral of a function f on $\mathbb{R}^n$ has nontangential limit $f(\xi)$ at almost every boundary point $\xi \in \mathbb{R}^n$. See [3] for the initial paper. Watson [6, Theorem 4.1] proved the following parabolic Fatou theorem.

Theorem A. *Suppose that the Gauss-Weierstrass integral $Wf(x, t)$ of a function f on $\mathbb{R}^n$ exists. Then $Wf(x, t)$ has a parabolic limit $f(\xi)$ at almost every boundary point $\xi \in \mathbb{R}^n$, i.e.,*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ |x-\xi| < mt^{1/2}}} Wf(x, t) = f(\xi) \quad \text{for every } m > 0. \quad (1)$$

The sharpness of nontangential limits of the Poisson integral is known as the Littlewood theorem. See [4] for the initial reference. Watson [6, Theorem 4.3] gave the following sharpness of the parabolic approach in Theorem A.

Theorem B. *Let $n = 1$. Let $h(t)$ be a positive function of $t > 0$ such that $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ and $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t^{1/2} = \infty$. For each $\xi \in \mathbb{R}$ let L_ξ denote the graph $\{(x, t) : x - \xi = h(t)\}$. Then, there exists a bounded function f on $\mathbb{R}$ such that*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in L_\xi}} Wf(x, t) \text{ diverges for almost every } \xi \in \mathbb{R}.$$

We strengthen Theorem B by constructing a bounded function f for which the tangential parabolic limit of the Gauss-Weierstrass integral Wf diverges *everywhere*, rather than *almost everywhere*. We also treat various approaches more general than translated graphs.

Definition 1. Let γ be a continuum (connected compact set) in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. We say that γ is *tangentially parabolic* at $(\xi, 0)$ if the following two conditions hold:

- (i) $\gamma \cap \partial \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(\xi, 0)\}$.
- (ii) For each $m > 0$ there is $\delta > 0$ such that

$$\{(x, t) \in \gamma : 0 \leq t \leq \delta\} \subset \{(x, t) : |x - \xi| \geq mt^{1/2}\}. \quad (2)$$

*e-mail: aikawa@fsc.chubu.ac.jp

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03281.

2020 Mathematics Subject Classification: 31B35, 35K05, 42B25.

Keywords: Gauss-Weierstrass integral, parabolic Fatou theorem, tangential parabolic limits.

If the precise ξ is irrelevant, we simply say that γ is tangentially parabolic. We should, however, note that $\gamma \cap \partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ is a single point. Observe that (ii) implies that γ lies eventually outside a parabolic approach region $\{(x, t) : |x - \xi| < mt^{1/2}\}$ for any $m > 0$. By $d_p((x, t), (y, s))$ we denote the parabolic distance $|x - y| + |t - s|^{1/2}$ between (x, t) and (y, s) .

Definition 2. Let γ and γ' be continua in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. We say that γ' is *at least as tangential as* γ if there exists a continuous mapping T on γ with the properties:

- (i) $T\gamma = \gamma'$.
- (ii) T preserves the t -coordinate, i.e., T is written as $T(x, t) = (T_t x, t)$.
- (iii) T is non-contracting, i.e., there is a positive constant c_T such that

$$d_p(T(x, t), T(y, s)) \geq c_T d_p((x, t), (y, s)) \quad \text{for } (x, t), (y, s) \in \gamma. \quad (3)$$

We say that γ and γ' have equivalent tangency if γ' is at least as tangential as γ , and vice versa.

Obviously, γ and its translation $\gamma + \xi = \{(x + \xi, t) : (x, t) \in \gamma\}$ have equivalent tangency. Moreover, γ and its rotation around the t -axis have equivalent tangency. The main result of this note is the following.

Theorem 3. Let γ be a tangentially parabolic continuum in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Then there exists a bounded function f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in \gamma'}} Wf(x, t) \text{ diverges}$$

for every continuum γ' at least as tangential as γ .

Corollary 4. Let γ be a tangentially parabolic curve in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Then, there exists a bounded function f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in \gamma + \xi}} Wf(x, t) \text{ diverges for every } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The construction of f in Theorem 3 are given in the same spirit as in [1] and [2]. Nagel-Stein [5] improved the Fatou theorem so that the approach region can include a *non-nontangential* sequence. Watson [6, Theorem 4.5] proved a parabolic counterpart of Nagel-Stein's non-nontangential boundary limit theorem. We compare the tangential parabolic approach and the non-nontangential parabolic approach of Nagel-Stein type.

References

- [1] H. Aikawa, *Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 125–136.
- [2] ———, *Fatou and Littlewood theorems for Poisson integrals with respect to non-integrable kernels*, Complex Var. Theory Appl. **49** (2004), 511–528.
- [3] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta. Math. **30** (1906), 335–400.
- [4] J. E. Littlewood, *On a theorem of Fatou*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 172–176.
- [5] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.
- [6] N. A. Watson, *Parabolic equations on an infinite strip*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 127, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

スリット写像に関連する Loewner chain への埋め込み問題

堀田 一敬

(山口大学大学院創成科学研究科)

Sebastian Schleißinger (University of Würzburg)

1. 関数族 $\mathcal{S}$ を、正規化条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たす $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の正則単葉関数全体からなる関数族とする。パラメータ付き正則関数 $(f_t)_{t \geq 0}$ が

$$f_t(0) = 0, \quad e^{-t} f_t \in \mathcal{S}, \quad f_s(\mathbb{D}) \subseteq f_t(\mathbb{D}) \quad (s \leq t)$$

を満たすとき、これを正規化された radial Loewner chain という。以後、単に Loewner chain と呼ぶ。Loewner chain は、ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して Loewner の偏微分方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = z f'_t(z) p(t, z)$$

を満たす。ここで $p(t, \cdot)$ は、ほとんどすべての t に対して $\mathbb{D}$ から右半平面への正則写像であり、 $p(t, 0) = 1$ を満たす。また各 $z \in \mathbb{D}$ に対して $t \mapsto p(t, z)$ は可測である。このような関数 p は Herglotz function と呼ばれる。逆に任意の Herglotz function は一意的に Loewner chain を定める。

Loewner による元来の研究 [Löw23] はスリット写像に関するものであった。ここで $\mathbb{C}$ におけるスリットとは、ある点 $z_0 \in \mathbb{C}$ と ∞ とを結ぶジョルダン曲線である。 $f(\mathbb{D})$ がスリットの補集合であるような $f \in \mathcal{S}$ をスリット写像と呼ぶ。Loewner は、スリット写像 $f \in \mathcal{S}$ はただ一つの Loewner chain $\{f_t\}$ に埋め込めることを示した。またこのとき、 $\{f_t\}$ は t に関して C^1 級である。さらに、連続関数 $\kappa : [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{D}$ が存在して

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = z f'_t(z) \frac{\kappa(t) - z}{\kappa(t) + z} \quad (1)$$

が成り立つ。本講演では、この Loewner の定理を出発点として、スリット写像に関するいくつかの埋め込み問題を考察する。

2. $f \in \mathcal{S}$ に対して $f_0 = f$ となる Loewner chain が存在するとき、 f は Loewner chain に埋め込めるといふ。次は埋め込み問題に関して最も基本的な性質である。

定理 1 ([Pom75]). 任意の $f \in \mathcal{S}$ はある Loewner chain に埋め込むことができる。

2-1. Loewner chain (f_t) に対して、各 $z \in \mathbb{D}$ について写像 $t \mapsto f_t(z)$ がすべての $t \geq 0$ で微分可能であるとき、 (f_t) は微分可能であるということにする。そこで次のような関数族を考える。

$$\mathcal{S}_d := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は微分可能な Loewner chain に埋め込める}\}$$

前述の Loewner の結果により、すべてのスリット写像は $\mathcal{S}_d$ に属する。また $f(\mathbb{D})$ が閉 Jordan 曲線によって囲まれる領域である場合も $\mathcal{S}_d$ に属する。

次に、 $f \in \mathcal{S}$ が $\mathbb{D}$ を二つの互いに交わらないスリットの補集合へ写すとする。このとき、ある区間 $[0, T_1]$ で一つ目のスリットの一部を消し、次の区間 $(T_1, T_2]$ で二つ目のスリットの一部を消す、という操作を繰り返すことで、 f を Loewner chain に埋め込むことができる。この場合、 (f_t) は $t = T_1$ で微分可能ではない。ただ、二つのスリットを同時に消していくように構成すれば、対応する Loewner chain をすべての時刻で微分可能に取ることができる。より一般に、 $f(\mathbb{D})$ が有限個の互いに交わらないスリットの補集合であるようなものに関しても同様のことが言える ([Böh16, Theorem 2.31]).

ここで $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}$ が成り立つか、という素朴な疑問が生じる。しかし、これは偽である。

定理 2 ([HS24]). $f \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_d$ となる f が存在する.

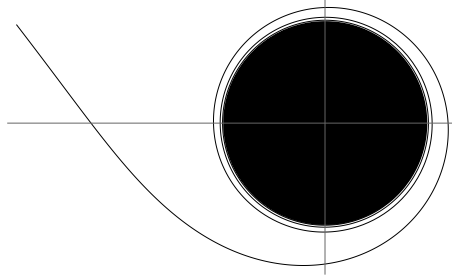
2-2. 次に

$$\mathcal{S}_u := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ はただ一つの Loewner chain に埋め込める}\}$$

と定める. すべてのスリット写像は $\mathcal{S}_u$ に属する. このことから直感的には, $f \in \mathcal{S}_u$ であるためには補集合 $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ は「薄い」ものである必要があると思える. したがって, そのような写像については

$$\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) = \partial f(\mathbb{D})$$

が成り立つ, と思うかもしれない. しかしこれは正しくない (Gehring による螺旋領域, 下図参照).



次は $f \in \mathcal{S}_u$ であるための必要条件のいくつかである.

定理 3 ([HS24]). $f \in \mathcal{S}_u$ とする. このとき $f(\mathbb{D})$ は次の性質を満たす.

- (i) $f(\mathbb{D})$ は非有界である.
- (ii) $\partial f(\mathbb{D})$ は連結である.
- (iii) もし $C_1, C_2 \subset \partial f(\mathbb{D})$ が連結・非有界・閉集合であるならば

$$C_1 \subseteq C_2 \quad \text{または} \quad C_2 \subseteq C_1$$

が成り立つ.

(iii) は「一意的な埋め込みを持つためには, 像領域の補集合・境界が一次元的で, 枝分かれのない形をしていなければならない」という事を意味している.

2-3. 最後に, Loewner 微分方程式の特別な形について考える.

$$\mathcal{S}_s^1 := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は連続な } \kappa \text{ に対する (1) に埋め込める}\}$$

$$\mathcal{S}_s^2 := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は可測な } \kappa \text{ に対する (1) に埋め込める}\}$$

これらのクラスに関しては, 近年 SLE と関連してのいくつかの研究結果がある. 時間が許せば, $\mathcal{S}_s^1$ および $\mathcal{S}_s^2$ に関する既知の結果および未解決問題について紹介する.

参考文献

- [Böh16] C. Böhm, *Loewner equations in multiply connected domains*, PhD dissertation, Würzburg, 2016.
- [HS24] I. Hotta and S. Schleißinger, *Problems related to conformal slit-mappings*, Complex Var. Elliptic Equ. **69** (2024), no. 2, 215–233.
- [Löw23] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I*, Math. Ann. **89** (1923), no. 1, 103–121.
- [Pom75] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

Boundary characterizations of little Bloch and VMOA functions on the half-plane

松崎 克彦 (早稲田大学)
陶 菲 (早稲田大学)

Pommerenke¹ gave fundamental characterizations of the boundary geometry of conformal mappings in terms of the vanishing behavior of the pre-Schwarzian derivative. If F is a conformal mapping of the unit disk $\mathbb{D}$ onto a bounded Jordan domain, then the boundary curve $\partial F(\mathbb{D})$ is asymptotically conformal if and only if $\log F'$ belongs to the little Bloch space $B_0(\mathbb{D})$. He also proved the rectifiable analogue: the boundary curve is asymptotically smooth if and only if $\log F'$ belongs to $\text{VMOA}(\mathbb{D})$, the space of analytic functions of vanishing mean oscillation.

The purpose of this work is to extend these results to conformal mappings of the upper half-plane onto unbounded quasidisks. Let $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ and let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be a conformal mapping onto an unbounded quasidisk $\Omega \subset \mathbb{C}$ such that $G(\infty) = \infty$. We denote by $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ the boundary extension of G . Since Ω is a quasidisk, the map G extends to a quasiconformal self-homeomorphism of the plane, and hence g is a quasisymmetric embedding of $\mathbb{R}$ onto the quasicircle Γ .

For a conformal mapping G on $\mathbb{H}$, the derivative of logarithm $\log G'$ is a Bloch function: $\sup_{z \in \mathbb{H}} (\text{Im } z) |(\log G')'(z)| < \infty$. We say that a Bloch function $\log G'$ belongs to the little Bloch space $B_0(\mathbb{H})$ if $\lim_{\text{Im } z \rightarrow 0} (\text{Im } z) |(\log G')'(z)| = 0$ uniformly in $\text{Re } z \in \mathbb{R}$. We also consider $\text{VMOA}(\mathbb{H})$, which may be characterized by the condition that the boundary values of the function belong to $\text{VMO}(\mathbb{R})$, or equivalently by the vanishing Carleson measure condition for $(\text{Im } z) |(\log G')'(z)|^2 dx dy$.

A difficulty in the half-plane case is the non-compactness of the boundary $\mathbb{R}$. In the disk case, smallness on the parameter circle and smallness on the boundary curve are uniformly comparable. In the present setting, however, intervals may escape to infinity, and the boundary map g need not be uniformly continuous. Thus the usual definition of asymptotic conformality is not sufficient for a global theorem on $\mathbb{H}$. To overcome this difficulty, we use relative versions of asymptotic conformality and asymptotic smoothness with respect to the boundary parametrization g .

We say that Γ is asymptotically conformal relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ if

$$\sup_{0 < x_2 - x_1 \leq t} \left(\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \frac{|g(x_1) - g(x)| + |g(x) - g(x_2)|}{|g(x_1) - g(x_2)|} \right) \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0).$$

We also use the infinitesimal form of quasisymmetry. A quasisymmetric embedding $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is called asymptotically symmetric if, for every $\varepsilon > 0$ and every $t > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\frac{|x - a|}{|x - b|} \leq t \implies \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x) - g(b)|} \leq (1 + \varepsilon)t$$

whenever $x, a, b \in \mathbb{R}$ lie in an interval of length δ .

Our first result is the following half-plane analogue of Pommerenke's little Bloch characterization.

Theorem 1. *Let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be a conformal mapping with $G(\infty) = \infty$, and let $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ be its boundary extension. Then the following conditions are equivalent:*

¹ On univalent functions, Bloch functions and VMOA, Math. Ann. **236** (1978), 199–208.

1. $\log G' \in B_0(\mathbb{H})$;
2. Γ is an asymptotically conformal quasicircle relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$;
3. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is an asymptotically symmetric embedding with image Γ .

This theorem shows that three different notions are identical in the upper half-plane setting: the analytic vanishing of the pre-Schwarzian derivative, the relative asymptotic flatness of the boundary curve, and the asymptotic symmetry of the boundary parametrization. The relative formulation is essential in the non-compact case. Without it, one has to impose additional uniform continuity assumptions on g or on g^{-1} in order to pass between small parameter intervals on $\mathbb{R}$ and small arcs on Γ .

We next consider the VMOA version. Recall that a locally rectifiable Jordan curve Γ is chord-arc if $\ell(\widehat{ab}) \leq C|a - b|$ for all distinct points $a, b \in \Gamma$, where $\ell(\widehat{ab})$ denotes the length of the subarc between a and b . It is asymptotically smooth if the chord-arc constant tends to 1 at small scales. For the half-plane theorem we again use a relative version: Γ is asymptotically smooth relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ if

$$\sup_{0 < x_2 - x_1 \leq t} \frac{\ell(\widehat{g(x_1)g(x_2)})}{|g(x_1) - g(x_2)|} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0).$$

For the boundary parametrization $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$, this means that the curve becomes chord-arc with constant tending to 1 uniformly over all sufficiently small intervals of the parameter line.

We also say that an embedding $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ with the image Γ being a chord-arc curve is asymptotically smooth if, for every $\varepsilon > 0$ and every $t > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\frac{|x - a|}{|x - b|} \leq t \implies \frac{\ell(\widehat{g(x)g(a)})}{|g(x) - g(b)|} \leq (1 + \varepsilon)t$$

whenever $x, a, b \in \mathbb{R}$ lie in an interval of length δ .

The second result is the VMOA analogue of Theorem 1.

Theorem 2. *Let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be as above, and let $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ be its boundary extension. Then the following conditions are equivalent:*

1. $\log G' \in \text{VMOA}(\mathbb{H})$;
2. Γ is an asymptotically smooth chord-arc curve relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$;
3. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is an asymptotically smooth embedding with image Γ .

The implication from $\text{VMOA}(\mathbb{H})$ to asymptotic smoothness uses the boundary values of $\log G'$. If u denotes the boundary value of $\log G'$, then $u \in \text{VMO}(\mathbb{R})$. The John–Nirenberg inequality gives exponential integrability with constants improving on small intervals. Since the boundary derivative satisfies $g' = e^u$ almost everywhere, this yields sharp estimates for the length of $g([a, b])$ relative to the chord $|g(a) - g(b)|$ when $|a - b|$ is small.

Conversely, relative asymptotic smoothness implies the VMOA condition by localizing the problem on small intervals of $\mathbb{R}$ and reducing it to the disk case. The relative formulation guarantees that the vanishing estimates are uniform even for intervals escaping to infinity. In this way Theorem 2 gives the half-plane analogue of Pommerenke’s characterization of asymptotically smooth boundary curves by VMOA.

Together, these two theorems show that the disk results remain valid for the half-plane once the correct relative geometric notions are used. We note that the relative formulation of curves is equivalent to the original one for the disk, so our results can be regarded as the generalization of Pommerenke’s.

半線形楕円型方程式の解の特異点除去可能性と漸近挙動に関するポテンシャル解析

平田 賢太郎 (広島大学)*

概 要

本講演は、冪乗型の湧出項または吸収項をもつ半線形楕円型方程式の解の特異点の除去可能性と漸近挙動に関するものである。孤立点や $n-3$ 次元以下のコンパクト C^∞ 級多様体上にある特異点の除去可能性に関する先行研究を紹介し、Ahlfors 正則条件と一様 Minkowski 条件を満たす $n-2$ 次元以下の特異点集合の除去可能性と荷重付き非接極限の存在 (漸近挙動) に関する研究成果を報告する。

1 関連研究の歴史的背景

1851 年の Riemann の学位論文の中で調和関数や正則関数の孤立特異点の除去可能性が論じられて以降、特異点の分類 (特異点の除去可能性および漸近挙動) は様々な分野において関心の高い研究対象の一つとされている。本講演では、半線形楕円型方程式

$$-\Delta u(x) = V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) \quad (1.1)$$

を考える。ただし、 Δ は $\mathbb{R}^n$ 上の Laplace 作用素、 V は適当な条件を満たす可測関数、 p は正定数である。方程式 (1.1) は、星の内部構造を記述する Lane–Emden 方程式、原子核まわりの電子密度に関わる Thomas–Fermi 方程式、非線形 Schrödinger 方程式の定在波解、化学反応や生物現象を記述する反応拡散方程式の定常状態、 $p = \frac{n+2}{n-2}$ のときは幾何学の山辺問題に関する共形スカラー方程式の特別な場合でもある。本講演では、 $\mathbb{R}^n$ 内の正の次元をもつ閉集合の除去可能性に関心があるため、空間次元は $n \geq 3$ とする。

1.1 孤立特異点の除去可能性と孤立特異点付近での挙動

$|x|^{2-n}$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で調和であり、**基本調和関数**とよばれる。 $\mathbb{R}^n$ の単位開球を $\mathbb{B}$ で表す。

定理 A (Bôcher [6]) $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の正值調和関数 h に対して、 $\mathbb{B}$ 上の調和関数 h_0 と定数 $c_0 \geq 0$ が存在して

$$h(x) = c_0|x|^{2-n} + h_0(x) \quad (x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}) \quad (1.2)$$

と表される。特に、次が成り立つ。

- (1) **極限の存在**： $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2}h(x) = c_0$ である。
- (2) **除去可能性**： $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2}h(x) = 0$ ならば、点 0 は h の除去可能な特異点である。

*e-mail: hiratake@hiroshima-u.ac.jp

本研究は、JSPS 科研費 JP23K03149 の助成を受けたものです。

2020 Mathematics Subject Classification: 35J91, 31B05, 31B10, 31B25, 35A01, 35A21, 35B40, 35B60.

キーワード：特異点の除去可能性、漸近挙動、半線形楕円型方程式、特異解、優調和、劣調和、Ahlfors 正則条件、一様 Minkowski 条件

非線形項をもつ方程式 (1.1) に対して (1.2) のような解の具体的表示を得ることは難しいが, 孤立特異点の分類に関する研究は数多くある. ここでは, $V \equiv \pm 1$ とした方程式

$$-\Delta u(x) = u(x)^p, \quad u(x) > 0, \quad (1.3)$$

$$\Delta u(x) = u(x)^p, \quad u(x) > 0 \quad (1.4)$$

のそれぞれに関する先行研究を紹介する. 方程式を満たす C^2 級関数を解とよぶ.

定理 B (Lions [26]) $1 < p < \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次が成り立つ.

- (1) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) \in [0, +\infty)$ が存在する.
- (2) 除去可能性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) = 0$ ならば, 点 0 は u の除去可能な特異点である (つまり, $u \in C^2(\mathbb{B})$ かつ $\mathbb{B}$ 全体で (1.3) を満たすように拡張可能である).

ポテンシャル論的方法による正值特異解の存在証明は [35] を参照. $p > \frac{n}{n-2}$ のときは

$$c_{p,n} := \left(\frac{2\{p(n-2) - n\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

とすれば, $u(x) = c_{p,n}|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で (1.3) を満たすことに注意する.

定理 C (Gidas & Spruck [19]) $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{2}{p-1}} u(x) = c_{p,n}$ である.

点 0 に特異点をもつ無限個の正值球対称解の存在に関しては [17] を参照.

定理 D (Aviles [3, 4]) $p = \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^{\frac{n-2}{2}} u(x) = \left(\frac{n-2}{\sqrt{2}} \right)^{n-2}$ である.

定理 E (Dancer & Du & Guo [11]) $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u が

$$u(x) \leq c|x|^{-\frac{2}{p-1}} \quad (x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}) \quad (1.5)$$

を満たすならば, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\xi \in \mathbb{S}$ に関して一様に $\lim_{r \rightarrow 0+} r^{\frac{2}{p-1}} u(r\xi) = \omega(\xi)$ である. ただし, ω は単位球面 $\mathbb{S}$ 上の Laplace–Beltrami 作用素 $\Delta_{\mathbb{S}}$ に関する半線形楕円型方程式

$$\Delta_{\mathbb{S}} \omega - c_{p,n}^{p-1} \omega + \omega^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{S} \quad (1.6)$$

の正值解である.

$p > \frac{n+2}{n-2}$ かつ正值球対称解に限れば, 条件 (1.5) は不要である ([27] を参照). $n \geq 4$ かつ $\frac{n+1}{n-3} < p < p_{\text{JL}}(n-1)$ (Joseph–Lundgren 指数) のとき, (1.6) は非定数な正值解をもち, それを用いて (1.3) の非球対称な解を構成できるため ([12] を参照), 極限は ξ に依る.

Laplacian が異符号の場合は少し様相が異なる.

定理 F (Véron [33], Vázquez & Véron [32]) $1 < p < \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.4) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 弱特異性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) \in (0, +\infty)$ が存在する.
- (3) 強特異性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{2}{p-1}} u(x) = \left(\frac{2\{n-p(n-2)\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ である.

上記 p の範囲において, $n-2 < \frac{2}{p-1}$ であることに注意する.

定理 G (Brézis & Véron [9]) $p \geq \frac{n}{n-2}$ ならば, $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.4) のすべての解 u に対して, 点 0 は除去可能な特異点である.

1.2 極集合の除去可能性

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする. $u: \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ が優調和であるとは, $u \neq +\infty$, Ω で下半連続, Ω で球面平均値の不等式 (u の球面平均より中心における u の値の方が大きい) を満たすときをいう. $-u$ が Ω で優調和であるとき, u は Ω で劣調和であるという. $E \subset \mathbb{R}^n$ が極集合であるとは, E 上で $u = +\infty$ となる $\mathbb{R}^n$ 上の優調和関数 u が存在するときをいう. 極集合の Hausdorff 次元は高々 $n-2$ である. コンパクト極集合が有界調和関数に対して除去可能であることは Bouligand (1926) により示されたが, より一般に次が成り立つ.

定理 H (Brelot [8]) $E \subset \Omega$ を相対的に閉な極集合とし, u を $\Omega \setminus E$ 上の優調和関数とする. u が E の近くで下に有界であるならば, u は Ω 上の優調和関数に拡張できる.

点 $x \in \mathbb{R}^n$ から有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ までの最短距離を $d(x, E)$ で表す. $r > 0$ に対して

$$E(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < r\} \quad (1.7)$$

とし, その n 次元 Lebesgue 測度を $|E(r)|$ で表す. E の m 次元上 Minkowski 容量は

$$\mathcal{M}^m(E) := \limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{|E(r)|}{r^{n-m}}$$

で定義される. 一般に, m 次元 Hausdorff 外測度との関係は $\mathcal{H}^m(E) \leq c \mathcal{M}^m(E)$ である. 従って, $\mathcal{M}^{n-2}(E) < +\infty$ ならば, E は極集合である.

定理 I (Bochner [7], Harvey & Polking [21]) $m \in [0, n-2]$ とし, $E \subset \Omega$ は相対的に閉

かつ $\mathcal{M}^m(E) < +\infty$ であるとする. $\Omega \setminus E$ 上の調和関数 h が

$$\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{n-2-m} h(x) = 0 \quad (y \in E \text{ に関して一様に}) \quad (1.8)$$

を満たすならば, h は Ω 上の調和関数に拡張できる.

$n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ のとき, $h(x_1, \dots, x_{n-m}, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_{n-m}^2)^{-\frac{n-2-m}{2}}$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = \dots = x_{n-m} = 0\}$ で調和であるから, 増大条件 (1.8) のオーダーは最良である.

定理 J (Gardiner [18], Riihenta [30]) $m \in [0, n-2]$ とし, $E \subset \Omega$ は相対的閉かつ $\mathcal{M}^m(E) < +\infty$ であるとする. $\Omega \setminus E$ 上の劣調和関数 u に対して, $u^+ := \max\{u, 0\}$ が増大条件 (1.8) を満たすならば, u は Ω 上の劣調和関数に拡張できる.

注意 $m = n-2$ のとき, u^+ に対する条件 (1.8) は u が E の近くで上に有界であることを意味し, 定理 H に含まれる. 条件の緩和については言及されていない.

定理 K $n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ とし, $E \subset \Omega$ を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. $\Omega \setminus E$ 上の (1.4) の解 u に対して次が成り立つ.

- (1) (Véron [34], Grillo [20]) $p \geq \frac{n-m}{n-2-m}$ ならば, u は Ω 全体で (1.4) の C^2 級解になるように拡張できる.
- (2) (Finn & McOwen [15], Finn [16]) $1 < p < \frac{n-m}{n-2-m}$ とする. u が E の各点で同等の増大度をもつならば, 次のいずれかが任意の $y \in E$ に対して成り立つ.
 - (i) $\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{\frac{2}{p-1}} u(x) = \left(\frac{2\{n-m-p(n-2-m)\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ である.
 - (ii) $\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y$ のとき, $d(x, E)^{n-2-m} u(x) = O(1)$ である.

さらに, $m = n-2$ のときも, (ii) を $\frac{u(x)}{-\log d(x, E)} = O(1)$ に取り換えて成り立つ.

上記 (1) の Sobolev 容量を用いた一般化は [5] を参照. 方程式 (1.3) に対しても同様の結果 [2] が得られたが, 解の拡張は超関数レベルであり, 孤立特異点のときと同様に特異性が除去されるわけではない. 実際, 方程式 (1.3) に対して以下のことが知られている.

定理 L (Rébaï [29], Fakhi [14]) $n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ とし, $E \subset \Omega$ を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. $p > \frac{n-m}{n-2-m}$ ならば, 次が成り立つ.

- (1) E に特異点をもち, 超関数の意味で Ω 全体で (1.3) を満たす解 $u \in C^2(\Omega \setminus E) \cap L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ が存在する. すなわち, Ω 上で $u > 0$ であり

$$\int_{\Omega} u(x)(-\Delta \phi(x)) dx = \int_{\Omega} u(x)^p \phi(x) dx \quad (\phi \in C_c^\infty(\Omega)).$$

- (2) $p < \frac{n+2-m}{n-2-m}$ ならば, 上記の解 u に対して, 定数 $c > 1$ が存在して E の近くで

$$c^{-1} d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}} \leq u(x) \leq c d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}.$$

$p > \frac{n-m}{n-2-m}$ のとき, 特異性 $d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}$ は正值調和関数の特異性 $d(x, E)^{-(n-2-m)}$ より弱いことに注意する.

定理 M (Adams [1]) $p \geq \frac{n}{n-2}$ とする. Ω 上の (1.3) の超関数解 $u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ に対して, 相対的閉集合 $E \subset \Omega$ が存在して $u \in C^2(\Omega \setminus E)$ かつ E の Hausdorff 次元は高々 $\frac{p(n-2)-n}{p-1}$ である.

この定理から次がわかる: $p > 1$ かつ $m \leq n-2$ のとき

$$p < \frac{n-m}{n-2-m} \iff m > \frac{p(n-2)-n}{p-1}$$

より, p が小さい場合, 特異点集合 E の次元 m は大きくなる. 従って, 無条件では, 超関数レベルでも Ω 全体で (1.3) を満たすように解を拡張することはできない. この場合の特異点集合の除去可能性に関して講演者と小野 (2014) による結果があるが次節で紹介する.

2 主結果

中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の $\mathbb{R}^n$ 内の開球を $B(x, r)$ で表す. 文字 c で一般の正定数を表す (登場の度, 値は異なるかもしれない). 他と区別する必要がある場合は添え字を付して $c_1, c_2, \dots$ などで表す. 2つの正值関数 f, g に対して, 変数 x に無関係な定数 $c > 1$ が存在して $c^{-1}g(x) \leq f(x) \leq cg(x)$ が成り立つとき, $f \approx g$ で表し, c を比較定数という.

2.1 特異点集合に対する条件と例

2.1 節において, $E \subset \mathbb{R}^n$, $m \in [0, n]$ とする. $\mathcal{H}^m$ で m 次元 Hausdorff 外測度を表す.

定義 2.1 (1) E が m 次元 **Ahlfors 正則条件** を満たすとは, 定数 $r_1 > 0$, $c_1 > 1$ が存在して

$$c_1^{-1}r^m \leq \mathcal{H}^m(E \cap B(x, r)) \leq c_1r^m \quad (x \in E, r \in (0, r_1))$$

が成り立つときをいう.

(2) E が m 次元一様 **Minkowski 条件** を満たすとは, 定数 $r_1 > 0$, $c_1 > 1$ が存在して

$$|E(r) \cap B(x, R)| \leq c_1r^{n-m}R^m \quad (x \in E, r, R \in (0, r_1))$$

が成り立つときをいう. ただし, $E(r)$ は (1.7) で与えられる集合である.

例 2.2 (1) $m \in \{1, \dots, n-1\}$ とする. $E \subset \mathbb{R}^n$ が Lipschitz 多様体であるとは, 定数 $r_2 > 0$ が存在して任意の $x \in E$ に対して双 Lipschitz 写像 $\psi: B(x, r_2) \rightarrow \psi(B(x, r_2)) \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\psi(E \cap B(x, r_2)) = \mathbb{R}_0^m \cap \psi(B(x, r_2))$ であるときをいう. ただし, $\mathbb{R}_0^m := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$ である. m 次元 Lipschitz 多様体は, m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の縮小率 $c \in (0, 1)$ の相似変換の組 $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ は開集合条件を満たすとし, $m := \frac{\log N}{-\log c}$ とする. このとき, Ψ によって生成される自己相似集合は, m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす ([23, Section 7] を参照).

m 次元有界閉集合 E の除去可能性, E を特異点集合とする正值解の存在, E における荷重付き非接極限の存在等は, 次の関数をもとに議論される.

例 2.3 $m \in [0, n-2]$ とする. 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ が $0 < \mathcal{H}^m(E) < +\infty$ を満たすならば

$$\rho_E(x) := \int_E |x-y|^{2-n} d\mathcal{H}^m(y) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

は $\mathbb{R}^n$ 上の正值優調和関数であり, $\mathbb{R}^n \setminus E$ で調和である. さらに, E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば

$$\rho_E(x) \approx \begin{cases} d(x, E)^{-(n-2-m)} & (m < n-2) \\ \log \frac{2}{d(x, E)} & (m = n-2) \end{cases} \quad (x \in E(1) \setminus E) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

E における非接極限の定義および特異点除去可能性の証明において次の補題を用いる.

補題 2.4 ([13]) E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば, 定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $y \in E$, $r \in (0, r_1/10)$ に対して, $d(y_r, E) \geq cr$ を満たす $y_r \in B(y, r)$ が存在する.

定義 2.5 $y \in E$, $\theta \geq 1$ に対して, 点 y における E に非接な集合を

$$\mathcal{A}_\theta(y) := \{x \in \Omega \setminus E : |x-y| < \theta d(x, E)\}$$

で表す. E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば, 補題 2.4 より, $\theta_E \geq 1$ が存在して任意の $y \in E$, $\theta \geq \theta_E$ に対して $\mathcal{A}_\theta(y) \neq \emptyset$ かつ $y \in \overline{\mathcal{A}_\theta(y)}$ である. $\Omega \setminus E$ 上の関数 u が $y \in E$ で非接極限 ℓ をもつとは, 任意の $\theta \geq \theta_E$ に対して $\lim_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} u(x) = \ell$ となることをいう.

2.2 定理の主張

以下において, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) を有界領域, $E \subset \Omega$ を相対的閉集合, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を Borel 可測関数とする. Ω の開部分集合 D において方程式

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad (2.2)$$

を考える. 実数値関数 u が D における (2.2) の解であるとは, $u, f(\cdot, u) \in L^1_{\text{loc}}(D)$ であり

$$\int_D u(x)(-\Delta \phi(x)) dx = \int_D f(x, u(x))\phi(x) dx \quad (\phi \in C_c^\infty(D))$$

を満たすことをいう. 次の定理において解の符号が制限されないことに注意する.

定理 2.6 (H & Ono [22], H [25]) $m \in [0, n-2]$ とし, E は m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たすとする. また, 定数 $c_2 > 0$ と

$$p > 0, \quad \alpha < \min\{2, n-m-p(n-2-m)\}$$

が存在して

$$|f(x, t)| \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} |t|^p \quad (x \in \Omega, t \in \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

を満たすとする。このとき、 $\Omega \setminus E$ における (2.2) の C^1 級解 u が増大条件

$$\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{\rho_E(x)} = 0 \quad (y \in E) \quad (2.4)$$

を満たすならば、 u は Ω 全体で (2.2) を満たす連続解に拡張できる。さらに、 $\alpha < 1$ ならば、 u は Ω 全体で (2.2) を満たす C^1 級解に拡張できる。

この定理の証明の要点を次節で説明する。連続拡張を得るためには条件 $\alpha < 2$ が必要である。増大条件 (2.4) が最良であることは次の定理からわかる。

定理 2.7 (H & Ono [22], H [25]) $\partial\Omega$ は $C^{1,1}$ 級であるとする。 $m \in [0, n-2]$ とし、 E を m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす有界閉集合とする。また、定数 $c_2 > 0$ と

$$0 < p \neq 1, \quad \alpha < n - m - p(n - 2 - m), \quad \beta < p + 1$$

が存在して

$$|f(x, t)| \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} d(x, \partial\Omega)^{-\beta} |t|^p \quad (x \in \Omega, t \in \mathbb{R})$$

を満たすとする。このとき、Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & (x \in \Omega \setminus E), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

の正値解 $u \in C^1(\Omega \setminus E) \cap C(\overline{\Omega} \setminus E)$ で

$$u(x) \approx \rho_E(x) d(x, \partial\Omega) \quad (x \in \Omega \setminus E)$$

を満たすものが存在する。

この定理の証明は、Green 関数評価を用いた一般化加藤族の議論と Schauder の不動点定理に基づく。

定理 2.8 (H [24]) $m \in [0, n-2]$ とし、 E は m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすとする。 u は $\Omega \setminus E$ 上の正値優調和関数で超関数 Laplacian が $-\Delta u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \setminus E)$ であるとする。さらに、定数 $c_2 > 0$, $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、次のいずれかを満たすとする：

(A1) $p \in (0, \frac{n}{n-2})$, $\alpha < n - m - p(n - 2 - m)$ のとき

$$-\Delta u(x) \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} u(x)^p \quad (x \in \Omega \setminus E). \quad (2.6)$$

(A2) $p \geq \frac{n}{n-2}$, $\alpha < 2$ のとき、(2.6) と $\limsup_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{\frac{2-\alpha}{p-1}} u(x) < +\infty$ ($y \in E, \theta \geq \theta_E$).

このとき, $\frac{u}{\rho_E}$ は E 上の $\mathcal{H}^m$ -a.e. で有限の非接極限をもつ. 特に

$$\mathcal{H}^m\left(\left\{y \in E : \exists \theta \geq \theta_E \text{ s.t. } \limsup_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{\rho_E(x)} = +\infty\right\}\right) = 0$$

である.

この定理の証明は, 極小細極限に関する Fatou–Naïm–Doob の定理と「Green ポテンシャルの荷重付き非接極限の存在とその密度関数の増大度との関係」および「非接集合上の u の増大評価 $u(x) \leq c\rho_E(x)$ 」に基づく.

注意 $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ のとき, $\Omega \setminus E$ 上の $-\Delta u = u^p$ のすべての正值解 $u \in C^2(\Omega \setminus E)$ に対して $u(x) \leq cd(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}$ が成り立つ ([10, 28, 31] を参照). $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ の場合は未解決である. (A2) の追加条件に関して, $p > 1$ のとき $n-2-m < \frac{2-\alpha}{p-1}$ であることに注意する.

3 定理 2.6 の証明において鍵となる補題と次元による証明方法の差異

D を $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす任意の有界開集合とし, D の Dirichlet–Laplacian に関する Green 関数を G_D で表す. 鍵となった補題は次である.

補題 3.1 定理 2.6 の仮定のもとで, D 上の調和関数 h が存在して

$$u(x) = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.1)$$

と表される.

一旦, 補題 3.1 を認めれば, 次のようにして $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ が示され, 定理 2.6 が得られる.

- $m < n-2$ の場合, f の条件 (2.3) と増大条件 (2.4)+(2.1) および $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega \setminus E)$ より

$$|f(y, u(y))| \leq cd(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)} \quad (y \in D \setminus E) \quad (3.2)$$

であり, (3.1) とポテンシャル評価: 任意の $\lambda < n-m$, $x \in \Omega$ に対して

$$\int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) d(y, E)^{-\lambda} dy \leq c \int_{\Omega} |x-y|^{2-n} d(y, E)^{-\lambda} dy \leq \begin{cases} cd(x, E)^{2-\lambda} & (\lambda > 2), \\ c & (\lambda < 2), \end{cases} \quad (3.3)$$

を用いた反復法により, $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ を得ることができる.

- $m = n-2$ の場合, ポテンシャル評価: 任意の $\alpha < 2$, $p > 0$, $x \in D$ に対して

$$\int_D |x-y|^{2-n} d(y, E)^{-\alpha} \left(\log \frac{r_D}{d(y, E)} \right)^p dy \leq c, \quad (3.4)$$

が成り立つので, (3.1) より $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ であることが直ちに従う.

3.1 $m < n-2$ の場合の補題 3.1 の証明の要点

$\varepsilon > 0$ を任意にとる. (3.2) より $|f(y, u(y))| \leq c_3 d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)}$ ($y \in D \setminus E$) であるので

$$v(x) := c_3 \int_{D \setminus E} G_D(x, y) d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)} dy \quad (x \in D)$$

とし

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + v(x) + \varepsilon \rho_E(x) \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.5)$$

を考える. u_ε は $D \setminus E$ 上の下に有界な優調和関数であるから, 定理 H より D 上の優調和関数 $\bar{u}_\varepsilon$ に拡張される. Riesz の分解定理より, D 上の調和関数 h_ε が存在して

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) + \int_D G_D(x, y) d\mu_\varepsilon(y) \quad (x \in D) \quad (3.6)$$

と表される. ただし, μ_ε は $\bar{u}_\varepsilon$ に対する D 上の Riesz 測度であり, $D \setminus E$ 上では

$$d\mu_\varepsilon(y) = \{f(y, u(y)) + c_3 d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)}\} dy$$

である. 重要なのは $\mu_\varepsilon(E \cap D) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) となるかであり, 次のようにして証明された. $z \in E \cap \bar{D}$ を任意にとり, $\phi \in C_c^\infty(B(z, 2r))$ を $\chi_{B(z, r)} \leq \phi \leq 1$ と $|\Delta \phi| \leq cr^{-2}$ を満たすようにとれば, m 次元一様 Minkowski 条件を用いて

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(B(z, r)) &\leq \int_{B(z, 2r)} \phi d\mu_\varepsilon = \int_{B(z, 2r)} (-\Delta \phi) \bar{u}_\varepsilon dy \leq \frac{c}{r^2} \int_{B(z, 2r) \setminus E} |u_\varepsilon| dy \\ &\leq \begin{cases} c(\varepsilon r^m + r^{n-\alpha-p(n-2-m)}) & (\alpha + p(n-2-m) > 2) \\ c(\varepsilon r^m + r^{n-2}) & (\alpha + p(n-2-m) < 2) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. さらに, m 次元一様 Minkowski 条件より, 高々 cr^{-m} 個の球 $B(z_j, r)$ (ただし, $z_j \in E \cap \bar{D}$) をとって $E \cap D$ を被覆できるので

$$\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq \begin{cases} c(\varepsilon + r^{n-\alpha-m-p(n-2-m)}) & (\alpha + p(n-2-m) > 2) \\ c(\varepsilon + r^{n-2-m}) & (\alpha + p(n-2-m) < 2) \end{cases} \quad (3.7)$$

が従う. $r \rightarrow 0$ として $\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq \varepsilon$ を得る. これから

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \cap D} G_D(x, y) d\mu_\varepsilon(y) = 0 \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.8)$$

が従うので, (3.5) と (3.6) において $\varepsilon \rightarrow 0$ として

$$u(x) + v(x) = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f(y, u(y)) dy + v(x) \quad (x \in D \setminus E)$$

を満たす D 上の調和関数 h が存在することがわかる.

注意 $m = n-2$ のとき, (3.7) は $\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq c(\varepsilon + 1)$ となり, (3.8) を得ることはできない.

3.2 $m = n - 2$ の場合の補題 3.1 の証明の要点

補題 3.2 u を Ω 上の優調和関数とし, その Riesz 測度を μ_u とする. u が増大条件 (2.4) を満たすならば, $\mu_u(E) = 0$ である.

証明の要点 集合 L と A を下記のように定義すれば, 増大条件 (2.4) と補題 2.4 より $E \subset L$ であり, 局所 Riesz 分解と背理法により μ_u の Newton ポテンシャルを下から評価して $L \subset A$ を示すことができる. ただし

$$L := \left\{ y \in E : \liminf_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{-\log|x-y|} = 0 \right\}, \quad A := \left\{ y \in E : \liminf_{r \rightarrow 0+} \frac{\mu_u(E \cap B(y, r))}{r^{n-2}} = 0 \right\}$$

である. Vitali の被覆定理を用いて $\mu_u(A) \leq \varepsilon \mathcal{H}^{n-2}(A) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0+$) が示される. $\square$

補題 3.3 $r_0 > 0$ とする. $\phi : (0, r_0/3) \rightarrow [0, +\infty)$ が $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\log(r_0/t)} = 0$ を満たすならば, 単調増加な凹関数 $\Psi : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ で

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\Psi(\log(r_0/t))} = 0 \quad (3.9)$$

を満たすものが存在する. さらに, 任意の $c > 0$ に対して $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\Psi(c \log(r_0/t))} = 0$ となる.

上記補題を用いて補題 3.1 は次のように示された. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 増大条件 (2.4) と補題 3.3 より, $r_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|u(x)| \leq \varepsilon (\Psi \circ \rho_E)(x) \quad (x \in (E(r_\varepsilon) \cap D) \setminus E)$$

が成り立つ. そこで, $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$ とし

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^-(y, u(y)) dy + \varepsilon (\Psi \circ \rho_E)(x) \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.10)$$

を考える. $\Psi \circ \rho_E$ は D で優調和であるから, u_ε は $D \setminus E$ 上の下に有界な優調和関数である. 定理 H より, u_ε は D 上の優調和関数 $\bar{u}_\varepsilon$ に拡張される. $\bar{u}_\varepsilon$ と $\Psi \circ \rho_E$ に対する D 上の Riesz 測度をそれぞれ μ_ε と $\mu_{\Psi \circ \rho_E}$ とすれば, $D \setminus E$ 上では

$$d\mu_\varepsilon(y) = f^+(y, u(y)) dy + \varepsilon d\mu_{\Psi \circ \rho_E}(y)$$

である. さらに, 増大条件 (2.4)+(2.1) とポテンシャル評価 (3.4) および (3.9) より

$$\lim_{D \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{\bar{u}_\varepsilon(x)}{-\log d(y, E \cap D)} = 0 \quad (y \in E \cap D)$$

を満たすので, 補題 3.2 より $\mu_\varepsilon(E \cap D) = 0$ である. 従って, Riesz の分解定理より

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^+(y, u(y)) dy + \varepsilon \int_{D \setminus E} G_D(x, y) d\mu_{\Psi \circ \rho_E}(y) \quad (x \in D) \quad (3.11)$$

を満たす D 上の調和関数 h_ε が存在する. (3.10) と (3.11) において $\varepsilon \rightarrow 0+$ として

$$u(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^-(y, u(y)) dy = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^+(y, u(y)) dy \quad (D \setminus E)$$

を満たす D 上の調和関数 h の存在がわかる.

参考文献

- [1] Adams, D. R., *On Pacard's regularity for the equation $-\Delta u = u^p$* , Electron. J. Differential Equations (2012), No. 125, 6.
- [2] Adams, D. R. and Pierre, M., *Capacitary strong type estimates in semilinear problems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **41** (1991), no. 1, 117–135.
- [3] Aviles, P., *On isolated singularities in some nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 5, 773–791.
- [4] Aviles, P., *Local behavior of solutions of some elliptic equations*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 2, 177–192.
- [5] Baras, P. and Pierre, M., *Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), no. 1, 185–206.
- [6] Bôcher, M., *Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type*, Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1903), no. 9, 455–465.
- [7] Bochner, S., *Weak solutions of linear partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **35** (1956), 193–202.
- [8] Brelot, M., *Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques*, Bull. Sci. Math. (2) **65** (1941), 72–98.
- [9] Brézis, H. and Véron, L., *Removable singularities for some nonlinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **75** (1980/81), no. 1, 1–6.
- [10] Dancer, E. N., *Superlinear problems on domains with holes of asymptotic shape and exterior problems*, Math. Z. **229** (1998), no. 3, 475–491.
- [11] Dancer, E. N., Du, Y. and Guo, Z., *Finite Morse index solutions of an elliptic equation with supercritical exponent*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 8, 3281–3310.
- [12] Dancer, E. N., Guo, Z. and Wei, J., *Non-radial singular solutions of the Lane-Emden equation in $\mathbb{R}^N$* , Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 5, 1971–1996.
- [13] David, G., Feneuil, J. and Mayboroda, S., *Elliptic theory for sets with higher co-dimensional boundaries*, Mem. Amer. Math. Soc. **274**, 2021.
- [14] Fakhi, S., *Positive solutions of $\Delta u + u^p = 0$ whose singular set is a manifold with boundary*, Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), no. 2, 179–197.
- [15] Finn, D. L., *Behavior of positive solutions to $\Delta_g u = u^q + Su$ with prescribed singularities*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 1, 177–219.
- [16] Finn, D. L. and McOwen, R. C., *Singularities and asymptotics for the equation $\Delta_g u - u^q = Su$* , Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 4, 1487–1523.
- [17] Fujishima, Y. and Ioku, N., *Multiplicity of singular solutions for semilinear elliptic equations with superlinear source terms*, Calc. Var. Partial Differential Equations **65** (2026), no. 3, Paper No. 75, 28.
- [18] Gardiner, S. J., *Removable singularities for subharmonic functions*, Pacific J. Math. **147** (1991), no. 1, 71–80.
- [19] Gidas, B. and Spruck, J., *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 4, 525–598.
- [20] Grillot, M., *Solutions of some nonlinear elliptic problems, which are singular on a submanifold*,

- J. Math. Pures Appl. (9) **76** (1997), no. 9, 757–776.
- [21] Harvey, R. and Polking, J., *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations*, Acta Math. **125** (1970), 39–56.
 - [22] Hirata, K. and Ono, T., *Removable singularities and singular solutions of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. **105** (2014), 10–23.
 - [23] Hirata, K. and Ono, T., *Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations with nonlinear source or absorption terms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **197** (2018), no. 1, 41–59.
 - [24] Hirata, K., *Weighted nontangential limits on a polar set of superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality*, Anal. Math. Phys. **16** (2026), no. 1, Paper No. 4, 19.
 - [25] Hirata, K., *Logarithmic singularities on $(N - 2)$ -dimensional sets for semilinear elliptic equations*, preprint.
 - [26] Lions, P. L., *Isolated singularities in semilinear problems*, J. Differential Equations **38** (1980), no. 3, 441–450.
 - [27] Miyamoto, Y. and Naito, Y., *Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **202** (2023), no. 1, 341–366.
 - [28] Poláčik, P., Quittner, P. and Souplet, P., *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. I. Elliptic equations and systems*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 3, 555–579.
 - [29] Rébaï, Y., *Weak solutions of nonlinear elliptic equations with prescribed singular set*, J. Differential Equations **127** (1996), no. 2, 439–453.
 - [30] Riihenta, J., *Removable sets for subharmonic functions*, Pacific J. Math. **194** (2000), no. 1, 199–208.
 - [31] Serrin, J. and Zou, H., *Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*, Acta Math. **189** (2002), no. 1, 79–142.
 - [32] Vázquez, J. L. and Véron, L., *Isolated singularities of some semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **60** (1985), no. 3, 301–321.
 - [33] Véron, L., *Singular solutions of some nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. **5** (1981), no. 3, 225–242.
 - [34] Véron, L., *Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires*, J. Differential Equations **41** (1981), no. 1, 87–95.
 - [35] Zhang, Q. S. and Zhao, Z., *Singular solutions of semilinear elliptic and parabolic equations*, Math. Ann. **310** (1998), no. 4, 777–794.

Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor sets (Part I)

志賀 啓成 (大阪公立大学 数学研究所)*

1 Introduction

Thompson's groups—通常 F, T and V と記される 3つの群—は R. Thompson によって導入され、以来数学の様々な分野と関わりがあることが知られている。本講演では、Thompson's groups F, T および V が一般化された Cantor 集合の Teichmüller 空間に作用する Teichmüller modular groups の部分群として表現されることを報告する。さらに Teichmüller 空間への作用についても考える。Thompson's group と Teichmüller 空間の研究は E. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey([2]) によるものがある。彼らは Thompson's group F を通常の Cantor 集合の漸近的 Teichmüller 空間、漸近的に等角な Teichmüller modular 群で研究している。我々の研究は彼らのものを通常の Teichmüller 空間で考え、さらに広い Thompson's groups について研究したものである。Part I の講演では、Thompson's groups を Teichmüller modular 群に実現する方法について述べる。

2 Main results

Thompson's groups とは $[0, 1]$ 区間からそれ自身への区分的に 1 次式で表されるある種の bijections を元とする群で、その制限から F, T, V の 3つの群が定義される。Thompson's groups に含まれる写像は、ある条件を満たす 2つの binary trees の組でも表現され、このことから Cantor 集合との関連性が推察され、本講演で述べる擬等角幾何的、双曲幾何的考察が可能になる。

数列 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty \in \Omega := (0, 1)^\mathbb{N}$ が the *bounded rate divergence* (BRD) 条件を満たすとは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ であり、かつ

$$\left| \log \frac{1 - q_n}{1 - q_{n+1}} \right| < M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

がある定数 $M < \infty$ について成り立つときを言う。また、 $\omega \in \Omega$ に対して、 ω により $[0, 1]$ 上で定義される一般化された Cantor 集合を $E(\omega)$ 、その補集合 $\mathbb{C} \setminus E(\omega)$ を $X(\omega)$ と書く。このとき、 $X(\omega)$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ の Teichmüller modular 群 $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群、 $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}}$, $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}}$, $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}}$ (定義は講演中に述べる) から Thompson's groups F, T, V への準同型写像 Θ が存在して次が成り立つ。

*e-mail: shiga.hiroshige.i35@kyoto-u.jp

本研究は科研費 (課題番号:26K06849) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 30F60, 20F65

キーワード: Thompson's group, Teichmüller modular group, quasiconformal mapping

Theorem 1 $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, 準同型写像 Θ で次の exact sequences を満たすものが存在する.

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}} \xrightarrow{\Theta} F \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}} \xrightarrow{\Theta} T \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

and

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}} \xrightarrow{\Theta} V \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

ここで $\text{Mod}(X(\omega))_0 = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega)) \mid \varphi|_{E(\omega)} = \text{id.}\}$, ι は包含写像である.

上記の部分空間及び準同型写像 Θ の構成は擬等角幾何的であり, じっさい以下の二つの事実がキーとなる.

Proposition 2.1 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty$ が $\inf_{n \in \mathbb{N}} q_n > 0$ を満たせば, $X(\omega)$ 上の擬等角写像は $\mathbb{C}$ 全体に擬等角写像として拡張される.

Proposition 2.2 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ であるとする, このとき, 与えられた $K \geq 1$ に対して, K のみに依存する $d(K) \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす.

任意の K -擬等角写像 $\varphi : X(\omega) \rightarrow X(\omega)$ は $\text{depth } d \geq d(K)$ の pants curve を pants curve に写す.

Cantor 集合 $E(\omega)$ の構成は標準 Cantor 集合と同様の構成法を用い, 各 Step k で 2^k の同じ長さの閉区間を持つ $E_k(\omega)$ を作り, $E(\omega) = \bigcap E_k(\omega)$ で定義される. この構成法から自然に $X(\omega)$ の pants 分解が定まる. 上で言う pants curve とはその pants 分解の pants の境界曲線とホモトピックな単純閉曲線を指す. また, 各 Step k で生じる 2^k 本の pants curves を $\text{depth } k$ の pants curve という.

参考文献

- [1] J. W. Cannon, W. J. Floyd and W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups, *L'Eneignement Mathématique*, t. 42 (1996), 215–256.
- [2] B. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey, Thompson's Group as a Teichmüller Mapping Class Group, *Conptemporary Math.* **355**, 165–185.
- [3] H. Shiga, On the quasiconformal equivalence of Dynamical Cantor sets, *J. d'Analyse Math.* **147** (2022), 1–22.
- [4] H. Shiga, Structures of moduli spaces of generalized Cantor sets in $(0, 1)^\mathbb{N}$, to appear in *J. d'Analyse Math.*
- [5] S. Wolpert, The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces, *Ann. of Math.* **109** (1979), 323–351.

Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor sets (Part II)

志賀 啓成 (大阪公立大学 数学研究所)*

1 Introduction

Part I では, BRD 条件を満たす ω から得られる一般化された Cantor 集合 $E(\omega)$ とその補集合 $X(\omega)$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ に作用する Teichmüller modular 群 $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群としての Thompson's groups について論じた. Part II ではこれらの群の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用について考える.

2 Main results

まず, $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群で Thompson's groups F, T and V それぞれと Θ によって同型となる部分群を構成する.

$J(z) = \bar{z}$ を複素共役とする. $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群, $\text{Mod}(X(\omega))_F$, $\text{Mod}(X(\omega))_T$ and $\text{Mod}(X(\omega))_V$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\text{Mod}(X(\omega))_F &= \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}, \\ \text{Mod}(X(\omega))_T &= \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}\end{aligned}$$

及び

$$\text{Mod}(X(\omega))_V = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}.$$

このとき, 次が成り立つ.

Theorem I $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, $G = F, T$ or V に対して Θ は $\text{Mod}(X(\omega))_G$ と G の同型を与える.

次に, これらの部分群の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用を見る.

Theorem II $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, $\text{Mod}(X(\omega))_F$ 及び $\text{Mod}(X(\omega))_T$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用は真性不連続である, 一方, $\text{Mod}(X(\omega))_V$ の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用は真性不連続ではない.

Theorem II の不連続性の証明には, 次の Proposition を用いる.

*e-mail: shiga.hiroshige.i35@kyoto-u.jp

本研究は科研費 (課題番号:26K06849) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 30F60, 20F65

キーワード: Thompson's group, Teichmüller modular group

Proposition 2.1 $K \geq 1$ に対して,

$$\Delta(K) = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))_T \mid K([\varphi]) < K\}$$

とおく. このとき, $\#\Delta(K) < \infty$ である. ただし, $K([\varphi]) = \inf_{\psi \in [\varphi]} K(\psi)$.

Theorem I から, $\text{Mod}(X(\omega))_F$, $\text{Mod}(X(\omega))_T$ 及び $\text{Mod}(X(\omega))_V$ は, それぞれ Θ によって Thompson's groups F, T, V と同型である. したがって, この意味で Thompson's groups F, T は Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ に真性不連続に作用し, V はそうでないと思なせる. では, このような群が作用する Teichmüller 空間はどれほどあるのかというのを考える. 換言すれば, BRD 条件を満たす ω 達からどれだけ豊富な Teichmüller 空間が生み出せるのかということである. これに関して, 一般化された Cantor 集合についての結果 [4] を用いて次を得る.

Theorem III BRD 条件を満たす ω で, $X(\omega)$ が擬等角同値でないものが無限個存在する. したがって, Thompson's groups F, V は無限個の異なる Teichmüller 空間に真性不連続に作用する.

Theorem III は実際に ω を与えて示される.

参考文献

- [1] J. W. Cannon, W. J. Floyd and W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups, *L'Enseignement Mathématique*, t. 42 (1996), 215–256.
- [2] B. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey, Thompson's Group as a Teichmüller Mapping Class Group, *Contemporary Math.* **355**, 165–185.
- [3] H. Shiga, On the quasiconformal equivalence of Dynamical Cantor sets, *J. d'Analyse Math.* **147** (2022), 1–22.
- [4] H. Shiga, Structures of moduli spaces of generalized Cantor sets in $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, to appear in *J. d'Analyse Math.*
- [5] S. Wolpert, The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces, *Ann. of Math.* **109** (1979), 323–351.

On curve graphs of hyperelliptic translation surfaces

四之宮 佳彦 (静岡大学)*

1 Introduction

A *translation surface* is a pair (X, ω) consisting of a compact Riemann surface X and a nonzero holomorphic 1-form ω on X . The local coordinates $z = \int_{p_0}^p \omega$ have transition maps of the form $z \mapsto z + c$, and hence induce a Euclidean geometry on (X, ω) .

Let X be a compact Riemann surface of genus $g \geq 2$. A hyperelliptic involution is an automorphism τ of order 2 having $2g + 2$ fixed points. In this article, we consider hyperelliptic translation surfaces belonging to $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2)$ or $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1)$, namely translation surfaces admitting a hyperelliptic involution τ satisfying $\tau^*\omega = -\omega$. Let

$$\mathcal{H}_g^{\text{hyp}} = \mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2) \cup \mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1).$$

A regular closed geodesic on (X, ω) is a simple closed geodesic avoiding the zeros of ω . For such a geodesic γ , the union of all regular closed geodesics homotopic to γ forms a maximal Euclidean cylinder, denoted by $[\gamma]$.

The curve graph $\mathcal{C}(S)$ of a closed surface $S = S_g$ is the graph whose vertices are homotopy classes of simple closed curves and whose edges correspond to disjointness. It is known that $\mathcal{C}(S)$ is connected [1], has infinite diameter and is Gromov hyperbolic [3], and has clique number $3g - 3$ (pants curve).

Nguyen [4] introduced an analogue of the curve graph for translation surfaces.

Definition 1 Let (X, ω) be a translation surface. The *curve graph* $\mathcal{C}(X, \omega)$ is the graph whose vertices are maximal cylinders $[\gamma]$ arising from regular closed geodesics. Two vertices $[\gamma]$ and $[\delta]$ are joined by an edge if $i([\gamma], [\delta]) = 0$, where $i(\cdot, \cdot)$ denotes the geometric intersection number.

Unlike the classical curve graph, $\mathcal{C}(X, \omega)$ is not always connected. To remedy this phenomenon, we introduce degenerate cylinders.

Definition 2 Let $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$ and let τ be its hyperelliptic involution. A *degenerate cylinder* is a union $[\gamma] = s_1 \cup s_2$ of two saddle connections such that

- each s_i is invariant under τ ,

* 〒422-8529 静岡市駿河区大谷 836 静岡大学学術院 教育学領域 数学教育系列

e-mail: shinomiya.yoshihiko@shizuoka.ac.jp

キーワード : Translation surfaces, Curve graph

- At each endpoint of s_1 and s_2 , one of the angles between s_1 and s_2 is equal to π .

For cylinders and degenerate cylinders, define $i([\gamma], [\delta])$ as the number of transverse intersection points counted with multiplicity.

Definition 3 The *extended curve graph* $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ is the graph whose vertices are cylinders and degenerate cylinders. Two vertices are connected by an edge if their intersection number is zero.

2 Main Results

Our first result concerns the geometry of the extended curve graph. Nguyen [4] proved the genus two case. For higher genus, we use the quotient by the hyperelliptic involution to prove the result.

Main Result 1. For any $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$ and any vertices $[\gamma], [\delta] \in \widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$,

$$d([\gamma], [\delta]) \leq 3i([\gamma], [\delta]) + 6$$

holds. As a consequence, the extended curve graph is connected.

Corollary 1 For every $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$, the graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ is connected.

Combining this with Nguyen's argument, we obtain the following.

Corollary 2 For every $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$, the graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ has infinite diameter.

Finally, let $\text{Aff}^+(X, \omega)$ be the affine automorphism group of (X, ω) and $\text{SL}(X, \omega)$ the Veech group of (X, ω) . Nguyen proved that, in genus two, the lattice property of the Veech group is equivalent to the finiteness of the quotient graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)/\text{Aff}^+(X, \omega)$. We generalize this criterion as follows. Here, a simple cylinder is a maximal cylinder each of whose boundary components is a saddle connection.

Main Result 2. Let $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$. The following are equivalent:

1. $\text{SL}(X, \omega)$ is a lattice in $\text{SL}(2, \mathbb{R})$;
2. $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)/\text{Aff}^+(X, \omega)$ has finitely many vertices;
3. the quotient graph has finitely many vertices corresponding to simple cylinders.

参考文献

- [1] W. J. Harvey, Geometric structure of surface mapping class groups, 1978.
- [2] N. V. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, 1997.
- [3] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves I, 1999.
- [4] D.-M. Nguyen, Curve graphs for translation surfaces, 2017.

Uniform perfectness of the limit sets of conformal tree iterated function systems

大野 玄道 (京都大学 大学院 人間・環境学研究科)*

A compact set $C \subset \mathbb{C}$ is said to be uniformly perfect if there exists L such that for any ring domain B separating C (i.e. there exist non-empty C_1 and C_2 such that $C_1 \cup C_2 = C$ and B separates C_1 and C_2), module $M(B)$ of B satisfies $M(B) \leq L$. Uniformly perfect sets were introduced by A. F. Beardon and C. Pommerenke in 1978 in [1]. Uniform perfectness means that C is not so sparse at any point.

Uniform perfectness of the limit sets of autonomous IFSs were shown by R. Stanke-witz in [3]. In [2], it was shown that uniform perfectness of the limit set of a non-autonomous IFS follows from the condition $|\phi'| \geq \eta > 0$ for all ϕ and some other conditions.

In this talk, we consider tree iterated function systems, which are generalizations of non-autonomous IFSs. For such systems, we show that the limit sets are uniformly perfect if the similar conditions to non-autonomous cases hold.

The definition of tree iterated function systems is as follows.

Definition 1. We say a partially ordered set $(T, \preceq)$ is a rooted tree if T has a minimum element $\emptyset$ named root and for any $\tau \in T$, $\{\tau' \in T \mid \tau' \preceq \tau\}$ is isomorphic to a partially ordered set $(\{0, \dots, n\}, \leq)$ for some $n \geq 0$.

For $\tau \in T$, the height $|\tau|$ of τ is the unique number n such that $\{\tau' \in T \mid \tau' \preceq \tau\}$ is isomorphic to $(\{0, \dots, n\}, \leq)$. We write $I_\tau = \{\omega \in T \mid \omega \succ \tau, |\omega| = |\tau| + 1\}$. Let ∂T be the set of all simple paths with infinite length starting from $\emptyset$.

Definition 2. Let (X, d) be a compact connected metric space and let $(T, \preceq)$ be a rooted tree with $1 \leq \#I_\tau < \infty$ for all τ . We say that $\{\phi_\tau : X \rightarrow X\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ is a Tree Iterated Function System (for short, TIFS) if it satisfies the following condition:

- There exists $s \in (0, 1)$ such that, for all $\tau \in T \setminus \{\emptyset\}$ and all $x, y \in X$,

$$d(\phi_\tau(x), \phi_\tau(y)) \leq sd(x, y).$$

For a TIFS $\{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ and $\tau \in T$, we write $\Phi_\tau = \phi_{\tau_1} \circ \dots \circ \phi_{\tau_n}$, where $(\emptyset, \tau_1, \dots, \tau_n)$ is the unique simple path connecting $\emptyset$ and τ . (If $\tau = \emptyset$, we set $\Phi_\emptyset = \text{Id}_X$.)

For each $\tau \in \partial T$, $\{\Phi_{\tau|_n}(X)\}_{n=1}^\infty$ are decreasing compact sets, therefore $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X)$ is a non-empty compact set. By the uniform contractivity,

$$\text{diam}(\Phi_{\tau|_n}(X)) \leq s^n \text{diam}(X). \quad (1)$$

Therefore, $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X)$ is a one-point set. Hence, we can give the following definition.

Definition 3. Let $\mathcal{S} = \{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ be a TIFS. The coding map $\pi_{\mathcal{S}} : \partial T \rightarrow X$ is defined as the map satisfying the following.

$$\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X) = \{\pi_{\mathcal{S}}(\tau)\}.$$

The limit set $J_{\mathcal{S}}$ of $\mathcal{S}$ is defined by $J_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}}(\partial T)$.

* 〒 606-8501 京都市左京区吉田二本松町 京都大学大学院人間・環境学研究科
e-mail: ono.hiromichi.58c@st.kyoto-u.ac.jp

With these preparations, we can state the main theorem.

Theorem. *Let V be an open set with $X \subset V \subset \mathbb{C}$. Let $m > 0$. We assume that a TIFS $\mathcal{S} = \{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ on X satisfies the following conditions.*

1. $\#I_\tau \geq 2$ for all $\tau \in T$.
2. (Conformality) Each ϕ_τ can be extended to conformal diffeomorphism on V into V .
3. (Open Set Condition) $\text{Int}(X) \neq \emptyset$ and for each $\tau \in T$ and $a, b \in I_\tau$,

$$\phi_a(\text{Int}(X)) \cap \phi_b(\text{Int}(X)) = \emptyset. \quad (2)$$

4. For all $\tau \in T \setminus \{\emptyset\}$,

$$\min_{x \in X} |\phi'_\tau(x)| \geq m. \quad (3)$$

Then, the limit set $J_\mathcal{S}$ is uniformly perfect.

References

- [1] A. F. Beardon and Ch. Pommerenke. The Poincaré metric of plane domains. *J. London Math. Soc. (2)*, 18(3):475–483, 1978.
- [2] Mark Comerford, Kurt Falk, Rich Stankewitz, and Hiroki Sumi. Uniformly perfect and hereditarily non uniformly perfect analytic and conformal non-autonomous attractor sets. *Dyn. Syst.*, 36(4):631–655, 2021.
- [3] Rich Stankewitz. Uniformly perfect analytic and conformal attractor sets. *Bull. London Math. Soc.*, 33(3):320–330, 2001.

Bohr-Rogosinski radius in complex Banach spaces

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*¹
 Tatsuhiro HONDA (Senshu University, Japan)*²
 Mirela Kohr (Babeş -Bolyai University, Romania)

This is an announcement of [11]. Let $f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j$ be a holomorphic function on $\mathbb{U}$, where $\mathbb{U}$ is the unit disc in $\mathbb{C}$. Classical Bohr's theorem states that if $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then the series $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| r^j$ is less than or equal to 1 for all ζ with $|\zeta| = r \leq 1/3$. The constant $1/3$ is sharp and called the *Bohr radius* (see e.g. [3], [18], [19]).

There is also the notion of Rogosinski radius [17] which is as follows. Let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers. If $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then we have $|S_N^f(\zeta)| \leq 1$ for $|\zeta| \leq 1/2$ for every $N \in \mathbb{N}$, where $S_N^f(\zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \zeta^j$. The constant $1/2$ is sharp and called the *Rogosinski radius*.

Motivated by this result, I.R. Kayumov, D.M. Khammatova and S. Ponnusamy [13] introduced the Bohr-Rogosinski radius which is as follows. If $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then we have $R_N^f(\zeta) \leq 1$ for $|\zeta| \leq R_N$ for every $N \in \mathbb{N}$, where

$$R_N^f(\zeta) = |f(\zeta)| + \sum_{j=N}^{\infty} |a_j| r^j, \quad |\zeta| = r,$$

and R_N is the positive root of the equation

$$2(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0.$$

The constant R_N is sharp and called the *Bohr-Rogosinski radius*.

Actually,

$$|S_N^f(\zeta)| = \left| f(\zeta) - \sum_{n=N}^{\infty} a_n \zeta^n \right| \leq R_N^f(\zeta).$$

Let B_X and B_Y be the unit balls of the complex Banach spaces X and Y , respectively. A holomorphic mapping $v : B_X \rightarrow B_Y$ with $v(0) = 0$ is called a *Schwarz mapping*. Let $F : B_X \rightarrow Y$ be a holomorphic mapping. For $k \in \mathbb{N}$, we say that $z = 0$ is a *zero of order k of F* if $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$, $\dots$, $D^{k-1}F(0) = 0$, but $D^k F(0) \neq 0$. We note that if v is a Schwarz mapping such that $z = 0$ is a zero of order k of v , then the following estimation holds:

$$\|v(z)\|_Y \leq \|z\|_X^k, \quad z \in B_X. \quad (1)$$

For $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, let $\|z\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |z_i|$ denote the maximum norm and let $\mathbb{U}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \|z\|_{\infty} < 1\}$ denote the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$.

H. Hamada was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K03363. T. Honda was supported by a Senshu University Research Grant in 2026.

*¹ e-mail: hi.hamada01@gmail.com

*² e-mail: honda@isc.senshu-u.ac.jp

In this talk, we investigate the Bohr-Rogosinski radius for holomorphic mappings on the unit ball of a complex Banach space with values in a higher dimensional complex Banach space. The classical Schwarz lemma states that every holomorphic mapping f of the unit disc $\mathbb{U}$ into itself with $f(0) = 0$ satisfies $|f(\zeta)| \leq |\zeta|$ for all $\zeta \in \mathbb{U}$. Lindelöf removed the assumption “origin is a fixed point” and improved the classical Schwarz lemma of holomorphic mappings. Chen, Hamada et al. [4] generalized Lindelöf’s result to holomorphic mappings between the unit balls of complex Banach spaces, which plays an important role in the proof of the Bohr-Rogosinski phenomena. Our results give extensions and improvements of the results in [9, 10, 13]. For recent results on Bohr radius in several complex variables, see [2, 7, 8, 9, 12, 15] and the references therein.

References

- [1] Y. Abu Muhanna, Bohr’s phenomenon in subordination and bounded harmonic classes, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55 (2010), 1071–1078.
- [2] M.B. Ahamed, S. Ahammed, H. Hamada, Refined Bohr inequalities and a refined Bohr-Rogosinski inequality on complex Banach spaces, *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)*, 46, 19–38 (2026).
- [3] H. Bohr, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* (2) 13 (1914), 1–5.
- [4] S. L. Chen, H. Hamada, S. Ponnusamy, R. Vijayakumar, Schwarz type lemmas and their applications in Banach spaces, *J. Anal. Math.*, 152 (2024), 181–216.
- [5] C. H. Chu, Bounded symmetric domains in Banach spaces. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021.
- [6] H. Hamada, Bohr phenomenon for analytic functions subordinate to starlike or convex functions, *J. Math. Anal. Appl.* 499 (2021), 125019.
- [7] H. Hamada, Bohr’s inequality for holomorphic and pluriharmonic mappings with values in complex Hilbert spaces, *Math. Nachr.* 296 (2023), 2795–2808.
- [8] H. Hamada, T. Honda, Bohr radius for pluriharmonic mappings in separable complex Hilbert spaces, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 47 (2024), 47.
- [9] H. Hamada, T. Honda, Bohr phenomena for holomorphic mappings with values in several complex variables, *Results Math.* 79 (2024), 239.
- [10] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Bohr’s theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls, *Israel J. Math.* 173 (2009), 177–187.
- [11] H. Hamada, T. Honda, M. Kohr, Bohr-Rogosinski radius for holomorphic mappings with values in higher dimensional complex Banach spaces, *Anal. Math. Phys.*, Volume 15, article number 64, (2025), 19 pp.
- [12] H. Hamada, T. Honda, Y. Mizota, Bohr phenomenon on the unit ball of a complex Banach space, *Math. Inequal. Appl.* 23 (2020), 1325–1341.
- [13] I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, S. Ponnusamy, Bohr-Rogosinski phenomenon for analytic functions and Cesáro operators, *J. Math. Anal. Appl.* 496 (2021), no. 2, 124824, 17 pp.
- [14] I. R. Kayumov, S. Ponnusamy, On a powered Bohr inequality, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 44 (2019), 301–310.
- [15] M. S. Liu, S. Ponnusamy, Multidimensional analogues of refined Bohr’s inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 149 (2021), no.5, 2133–2146.
- [16] S. Ponnusamy, R. Vijayakumar, K.-J. Wirths, Improved Bohr’s phenomenon in quasi-subordination classes, *J. Math. Anal. Appl.* 506 (2022), no.1, Paper No. 125645, 10 pp.
- [17] W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, *Math. Z.* 17 (1923), 260–276.
- [18] S. Sidon, Über einen Satz von Herrn Bohr, *Math. Z.* 26 (1927), 731–732.
- [19] M. Tomić, Sur un théorème de H. Bohr, *Math. Scand.* 11 (1962), 103–106.

双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随する アーベル関数の退化極限

綾野孝則 (阪公大数学研)*

微分方程式のテータ関数解やシグマ関数解を退化させて指数関数などの初等関数による解が得られるため、テータ関数やシグマ関数の退化が可積分系などで活発に研究されている。[3] では、シグマ関数の特徴付ける熱方程式の理論を用いて、種数 2 の超楯円曲線に付随するシグマ関数の退化極限が計算された。[2] では、佐藤理論を用いて、種数 g の超楯円曲線に付随するシグマ関数の退化極限が計算された。楯円曲線への次数 2 の射が存在する代数曲線は双楯円的であるという。本発表では、[1] で導出された双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随するアーベル関数を楯円関数で記述する公式を用いて、双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随するアーベル関数の退化極限を計算する。

$\mathcal{X}$ を種数 g の超楯円曲線、 $\sigma_{\mathcal{X}}(u)$, $u = {}^t(u_1, u_3, \dots, u_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$, を $\mathcal{X}$ に付随するシグマ関数、 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}} = -\partial_{u_j} \partial_{u_i} \log \sigma_{\mathcal{X}}$ とする。 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X}$ のヤコビ多様体上の有理型関数である。また、 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}}$ は KdV 階層、sine-Gordon 方程式、KP 方程式などの解である。 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して、 V を $y^2 = x(x-1)(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\alpha^2\beta^2)$ で定義される種数 2 の超楯円曲線とする。種数 2 の超楯円曲線が双楯円的であることと、 V の形の超楯円曲線と同型であることは同値になることが知られている。

Theorem 1 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して、次が成り立つ。

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,1}^V(u) = \mathcal{D}_1^{-2} \mathcal{F}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,3}^V(u) = -\beta^2 \mathcal{D}_1^{-2} \mathcal{D}_2^2.$$

ここで、 $\mathbf{t}_1 = \tanh((\beta-1)(u_1 + \beta u_3)/2)$, $\mathbf{t}_2 = \tanh(-(\beta+1)(u_1 - \beta u_3)/2)$,

$$\mathcal{D}_1 = \beta(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 - 1) + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + 1),$$

$$\mathcal{D}_2 = \beta(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + 1) + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 - 1),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \beta^4(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)^2 + 2\beta^3(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)(\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - 1) + 2\beta^2(\mathbf{t}_1^2 + \mathbf{t}_2^2 - 2)(2\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2 - \mathbf{t}_2^2) \\ & + 2\beta(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)(\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - 1) + (\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)^2. \end{aligned}$$

Corollary 2 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1} \wp_{1,1}^V(u) &= 2 \frac{(u_1 + u_3)^2(\mathbf{p}^2 - 1)^2 + \mathbf{p}^2(2\mathbf{p}^2 - 1)}{\{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) - \mathbf{p}\}^2}, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1} \wp_{1,3}^V(u) &= - \left\{ \frac{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) + \mathbf{p}}{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) - \mathbf{p}} \right\}^2, \quad \mathbf{p} = \tanh(u_3 - u_1). \end{aligned}$$

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪公立大学 数学研究所

e-mail: ayano@omu.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/ayano75/>

本研究は科研費(課題番号:26K06850)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14K25, 14H70

キーワード: アーベル関数, 楯円関数, シグマ関数, 退化

Corollary 3 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0} \wp_{1,1}^V(u) = 4\mathfrak{q} \frac{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q} + (u_3 - u_1)^2 \mathfrak{q}}{\{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q}\}^2},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0} \wp_{1,3}^V(u) = -\left\{ \frac{2\mathfrak{q}}{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q}} \right\}^2, \quad \mathfrak{q} = \tanh(u_1/2).$$

$\beta^2 \neq -1$ とする. $\mathfrak{A}$ を次で定義される楕円曲線とする.

$$\mathfrak{A} : Y^2 = X(X-1) \left(X - \frac{4\beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \right).$$

$\wp_{1,1}^{\mathfrak{A}}$ を $\wp_{\mathfrak{A}}$ と表す. $\wp'_{\mathfrak{A}} = d\wp_{\mathfrak{A}}/du$ とする. $v, w \in \mathbb{C}$ に対して, 次の関数を考える.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1(v, w) &= (\beta^2 + 1) \tan(v) \wp'_{\mathfrak{A}}(w) - 2(\beta^2 - 1) \wp_{\mathfrak{A}}(w), \\ \mathfrak{D}_2(v, w) &= (\beta^2 + 1) \tan(v) \wp'_{\mathfrak{A}}(w) + 2(\beta^2 - 1) \wp_{\mathfrak{A}}(w), \\ \mathfrak{F}(v, w) &= (\beta^2 + 1)^2 \tan^2(v) \wp_{\mathfrak{A}}(w)^2 - (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3) \tan^2(v) \wp_{\mathfrak{A}}(w) \\ &\quad - (\beta^2 - 1)^2 \wp_{\mathfrak{A}}(w) + 2(\beta^4 + 1) \tan^2(v) + 2(\beta^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Theorem 4 $\beta^2 \neq -1$ とする. $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,1}^V(u) = 8\wp_{\mathfrak{A}}(w) \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{F}(v, w), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,3}^V(u) = -\mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{D}_2(v, w)^2.$$

ここで, $v = (\beta^2 - 1)(u_1 + u_3)/(2\beta)$, $w = (\beta^2 + 1)(u_3 - u_1)/(2\beta)$ とした.

Theorem 5 $\beta^2 \neq -1$ とする. $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,1}^V(u) = 8\beta^2 \wp_{\mathfrak{A}}(w) \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{F}(v, w), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,3}^V(u) = -\beta^4 \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{D}_2(v, w)^2.$$

ここで, $v = (1 - \beta^2)(u_1 + \beta^2 u_3)/2$, $w = (1 + \beta^2)(u_1 - \beta^2 u_3)/2$ とした.

Remark 6. $\beta^2 = -1$ とする. $u \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,i}^V(u) = \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,i}^V(u) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,i}^V(u), \quad i = 1, 3.$$

この極限は Theorem 1 より求めることができる.

[2] と [3] で導出されたシグマ関数の退化極限を用いて計算できるアーベル関数の退化極限と本研究で得られたアーベル関数の退化極限を比較することは今後の課題である.

参考文献

- [1] T. Ayano and V. M. Buchstaber, Relationships Between Hyperelliptic Functions of Genus 2 and Elliptic Functions, SIGMA **18** (2022), 30 pages.
- [2] J. Bernatska, V. Enolski, and A. Nakayashiki, Sato Grassmannian and Degenerate Sigma Function, Commun. Math. Phys. **374** (2020), 627–660.
- [3] J. Bernatska and D. Leykin, On Degenerate Sigma-Functions in Genus Two, Glasg. Math. J. **61** (2019), 169–193.

平面6次曲線に関する数式处理的考察

- A computer algebraic study on plane sextic curves -
 ～二重曲線の例と吉原定義式のPuisseux級数～

高橋 正 (羽衣国際大学)*¹

概 要

先の講演では2次元複素射影空間における吉原の定義式 (A_{19} 特異点をもつ平面6次曲線) を導出する方法を数式处理的に示した。本講演では、吉原の定義式を得る過程において得た二重曲線の例と Puisseux 級数を計算することによって、吉原の定義式を媒介変数表示を用いて、その特徴を数式处理的に捉えることを報告する。

1 特異点の位相型が定まらない二重曲線の例

A_n 型特異点をもつパラメータを有する特異点定義式に対しては、局所座標変換 (変数変換) $z = z' + y^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) を実行し、定義式の係数 (パラメータ) がどのような条件の下で、原点における特異点のミルナー数がどのように変化するかを判定することができる。その際、係数の関係を同時に満たす条件を見出す方法として、グレブナー基底を計算する方法と2つの多項式 (係数のパラメータを変数とする多項式) の終結式を計算する方法がある。グレブナー基底を計算する方法は、計算が大規模になるが複数の条件を同時に見出すことに有効である。それに対し2つの多項式の共通解を求める際には終結式を計算する方法が有効である。

吉原の定義式 ([1]) の導出過程においてパラメータ間の関係設定を簡素化すると奇妙な例 (特異点の位相型が決定できない例) を得た。具体的には、

$$(4xy^2 + 4x^2z + 4y^2z + z^3)^2 = 0$$

がその一例である。

この例は、 $[1, 0, 0]$ で考えるので、 $x = 1$ とおき $z = z' - y^2$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 8$) の項が現れる。次に $z = z' + y^4$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 12$) の項が現れる。次に $z = z' - \frac{3}{4}y^6$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 20$) の項が現れる。

この座標変換の繰り返しは続く。この現象は、式の変形過程 (座標変換の過程) をニュートン境界で考えれば仕組みは明らかである。

2 Puisseux級数を用いて吉原定義式の特徴を数式处理的に捉える

曲線上の点の座標を媒介変数で表示して調べることは古くから行われており1点の近傍において媒介変数表示を通して曲線の微視的な特徴を捉えることができる。Puisseux 級数は冪指数に負の数や分数を許してローラン展開を拡張したもので、代数曲線の分岐を定義できる。ベキ級数で考えることは、幾何学的には着目している点の近傍を拡大して観察することに対応している ([2])。

2010 Mathematics Subject Classification: 32G05

キーワード: Sextic curves, Singularity

*¹ 〒592-8344 大阪府堺市西区浜寺南町1-89-1 羽衣国際大学 現代社会学部

e-mail: ttakahashi@hagoromo.ac.jp

吉原の定義式のPuisseux級数を計算すると、以下ようになる。

$$z \rightarrow y^2 + \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})y^5 + \frac{1}{32}(-3 - \sqrt{5})y^7 + \frac{1}{64}(25 + 9\sqrt{5})y^8 + \frac{1}{28}(1 + \sqrt{5})y^9 + \frac{1}{512}(-217 - 105\sqrt{5} - i\sqrt{3(1686 + 754\sqrt{5})})y^{10} + \dots$$

2.1 Puisseux級数を計算することで何が分かるのか？

上記のPuisseux級数における y^n の係数は、定義式の変形過程（座標変換の過程）において現れた $z = z' - Cy^n$ ($2 \leq n \leq 9$) の C と等しいが $z = z' - Cy^{10}$ の C とは異なる。このことは、吉原の定義式が局所的な座標変換によって、 y^{2n} ($2 \leq n \leq 9$) と zy^n ($2 \leq n \leq 9$) が同時に消去される（項の係数の値が0となる）ことに対応している。

そして、吉原の定義式のPuisseux級数における y^{10} の係数

$$\frac{1}{512}(-217 - 105\sqrt{5} - i\sqrt{3(1686 + 754\sqrt{5})})$$

は、座標変換で y^{20} の係数を 0 にする $z = z' + Cy^{10}$ の C であることが分かる（このとき、 zy^{10} の係数は 0 にはならない）。Puisseux級数を用いることにより、吉原の定義式の特徴が明らかになる。

2.2 Puisseux級数を使うことで見えてくる事

以上のような分析により、Puisseux級数を用いた漸近展開は、座標変換で表せば、 $z = z' - Cy^n$ ($2 \leq n$) の変換によって y^{2n} の項を消去することを繰り返すことに対応している。これは、Newton-Puisseux アルゴリズム ([3]) の逐次実行である（式を変形して行く行為（局所的な座標変換）は級数展開を求めることである）。局所的な座標変換によって求めた特異点の定義式をPuisseux級数で確認することができる。

3 今後の課題

上記の奇妙な例（特異点の位相型が決定できない例）は3次式の二重曲線であり、この現象は、blow-upではどのような現象に対応しているかについて分析したい。

また以前から計算しているが、吉原の定義式（6次曲線で A_{19} を持つ定義式）は、19個のパラメータを有しているが、自由に設定できるものが4つある。その4つを定義式の変形（線形変換）で消去した定義式（15個のパラメータを有する6次曲線で A_{19} を持つ定義式）を得て、そのPuisseux級数を求め、その定義式の特徴を確認したい。

参考文献

- [1] H. Yoshihara. On plane rational curves. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 55(4):152–155, 1979.
- [2] 酒井文雄 (2012), 平面代数曲線, 共立出版.
- [3] Manfred Buchacher (2026), The Newton-Puisseux algorithm and effective algebraic series, Journal of Algebra, Vol. 688, pp. 284-306.

ファイバー束の中間的擬凸性

足立 真訓 (静岡大・理)*¹

Seungjae Lee (Kyungpook National Univ.)*²

Aeryeong Seo (Kyungpook National Univ.)*³

概 要

種数 2 以上の閉 Riemann 面上の複素 n 次元球体 $\mathbb{B}^n$ をファイバーとする正則ファイバー束を考える. この正則 $\mathbb{B}^n$ 束が (同変写像と見て正則点を持つという意味で) 非退化な調和切断を持つ場合に, 正則 $\mathbb{B}^n$ 束の 1 凸性と, 正則 $\mathbb{B}^n$ 束を付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束に埋め込んだ時の補集合の n 凸性を証明した [1] ので, これを報告する.

1 ファイバー束の擬凸性

1980 年代初頭に, コンパクト複素多様体上の正則円板束 (単位円板をファイバーとする (局所自明な) 正則ファイバー束) の全空間の擬凸性が研究され, 全空間が Stein になる例 [6], 擬凸領域による exhaustion を持たない例 [4] が見出された. Diederich–大沢 [5] は, コンパクト Kähler 多様体上の正則円板束の全空間は, 常に弱 1 完備 (複素 Hessian が常に半正定値となるような滑らかな exhaustion が存在) であることを調和写像の理論・Hodge 理論を用いて証明した. 特に, 底空間がコンパクト Riemann 面の場合, 全空間が 1 凸 (複素 Hessian がコンパクト集合を除いて正定値となるような滑らかな exhaustion が存在) になることと正則円板束が局所定数切断を持たないことは同値である. Diederich–大沢 [5] により研究された正則円板束は, Levi 平坦面・正則葉層の不変集合の研究において重要な具体例として扱われている (cf. [2]).

近年, これら正則円板束に関する結果の, 他のファイバー束への拡張に興味を持たれている [3, 7]. 特に, Seo [7] は, 有界対称領域をファイバーとする正則ファイバー束が調和切断を持つとき, その全空間が弱 1 完備であることを証明した. この精密化・一般化を次の形で問う.

問題. コンパクト複素多様体上の, 有界対称領域をファイバーとする正則ファイバー束の全空間が 1 凸となるのはどのような場合か. 1 凸とならない場合は, どのような擬凸性・中間的擬凸性を持つか. また, この正則ファイバー束をコンパクトなファイバー束に自然に埋め込んだ時, その補集合はどのような中間的擬凸性を持つか.

*¹e-mail: adachi.masanori@shizuoka.ac.jp

*²e-mail: seungjae@knu.ac.kr

*³e-mail: aeryeong.seo@knu.ac.kr

本研究は科研費 (課題番号: 24K06776, 25K21994) および韓国国立研究財団 (課題番号: RS-2024-00339854, RS-2025-00561084) からの助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32L05, Secondary 32E10, 32F10, 32V15.

2 主結果の主張と証明のアイデア

我々の主結果は、コンパクト Riemann 面上の正則球体束に関して、この問いに部分的な解答を与える。

主結果. Σ を種数 2 以上のコンパクト Riemann 面、 E を Σ 上の正則 $\mathbb{B}^n$ 束とし、 E に付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束 $\hat{E}$ に E を埋め込んで考える。 E が (同変写像と見て) 正則点を持つ調和切断を許容すると仮定する。このとき、境界 ∂E の CR 法線束 $\mathcal{N} := (T_{\hat{E}}^{1,0}|_{\partial E})/T_{\partial E}^{1,0}$ の滑らかな Hermite 計量であって、 ∂E の水平葉層に沿って正曲率を持つものが存在する。

この $\mathcal{N}$ の Hermite 計量は、Diederich–大沢 [5], Seo [7] で用いられた正則ファイバー束上の exhaustion の構成に倣い、調和切断を基準に標準的な計量を各ファイバー上に並べて構成される。Brunella [2] の議論の拡張により、CR 法線束 $\mathcal{N}$ の Hermite 計量から $\hat{E} \setminus \partial E$ 上の exhaustion を構成できる。この exhaustion は期待される凸性を持つ：

系. 主結果の仮定の下で、 E は 1 凸である。また、 $\hat{E} \setminus \overline{E}$ は n 凸 (複素 Hessian がコンパクト集合を除き正固有値を常に 2 つ持つような滑らかな exhaustion が存在) である。

3 予想

我々の主結果では、底空間は 1 次元に限定されている。底空間の次元が高い場合も、調和切断を元に $\mathcal{N}$ の Hermite 計量を同様に構成できるが、その曲率は一般には半正であることしか分からない。他の部分的な結果も勘案した上で、以下の予想を提案する。

予想. コンパクト Kähler 多様体 M 上の正則 $\mathbb{B}^n$ 束 E を考える。 $n < \dim M$ であれば、 E は 1 凸でなく、付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束 $\hat{E}$ における補集合 $\hat{E} \setminus \overline{E}$ も n 凸でないであろう。

参考文献

- [1] M. Adachi, S. Lee and A. Seo, *Intermediate pseudoconvexity of fiber bundles*, Preprint available at arXiv:2606.15533.
- [2] M. Brunella, *On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 7, 3101–3113.
- [3] F. S. Deng and J. E. Fornæss, *Flat bundles over some compact complex manifolds*, J. Geom. Anal. **30** (2020), no. 4, 3484–3497.
- [4] K. Diederich and J. E. Fornæss, *A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion*, Manuscripta Math. **39** (1982), no. 1, 119–123.
- [5] K. Diederich and T. Ohsawa, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 4, 819–833.
- [6] T. Ohsawa, *A Stein domain with smooth boundary which has a product structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 3, 1185–1186.
- [7] A. Seo, *Weakly 1-completeness of holomorphic fiber bundles over compact Kähler manifolds*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **106** (2022), no. 3, 2305–2341.

Formal principle for line bundles on neighborhoods of an analytic subset of a compact Kähler manifold

小池 貴之 (筑波大学)*

複素多様体 X 上の正則直線束 L を考える. ここでは, L が**正** (又は**半正**) であるとは, L の C^∞ エルミート計量 h であって, 各点で $\sqrt{-1}\Theta_h > 0$ (又は $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$) なるものが存在するときということとしよう (ここで $\sqrt{-1}\Theta_h$ は h の Chern 曲率形式である). 小平の埋め込み定理によれば, L が正であれば, それにより X の射影空間への埋め込みが与えられる. では L が半正であるときには, X にはどのような幾何構造が現れるべきであろうか? 本講演の動機は, 特に L があるコンパクト部分集合 $Y \subset X$ に沿ってある種の平坦性を持つような場合についての, 次の予想にある:

予想 1 ([4, 5], 部分的な成果については [6, 8] も参照のこと) 複素多様体 X 上の正則直線束 L について, L が半正であり, かつ, X のある被約でコンパクトな複素解析的部分集合 $Y \subset X$ について, 制限 $L|_Y$ がユニタリ平坦であったと仮定する. このとき, Y のある近傍 V が存在して, 制限 $L|_V$ もユニタリ平坦であろう.

尚ここでは, 正則直線束が**ユニタリ平坦**であるとは, その正則な局所自明化を適切に選ぶことによって, 全ての変換関数を $U(1) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ に値をもつ局所定数関数とできるという意味でいっている. 例えば L が, X のある有効因子であって Y に台を持つようなものに対応する直線束である場合, Y のある近傍 V に於ける L の平坦性は, V 上でのある種の正則葉層の存在や, $V \setminus Y$ に於けるレビ平坦超曲面族の存在を含意する.

上記予想, 及びより本質的には, コンパクト超曲面 $Y \subset X$ が非特異で法線束がユニタリ平坦である場合についての, Y の近傍の上田による多変数関数論的分類理論 [10] を動機として, 本講演では Y 近傍でのユニタリ平坦束と L の制限との比較を行うために, ある種の形式化原理 (直線束についての形式化原理, Formal Principle for Line Bundles. 以下 **FPLB** と略すこととする) について, プレプリント [7] に基づいて議論したい.

以下, X を複素多様体, $Y \subset X$ を X の被約なコンパクト解析的部分集合とする. また, $\mathcal{O}_X$ で X 上の正則関数の芽の層, 開集合 $V \subset X$ と正則直線束 $L \rightarrow V$ に対して $\mathcal{O}_V(L)$ で V 上の L の正則切断の芽の層, $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ で Y の定義イデアル層を表すこととする. Y のある近傍 $V \subset X$ 上の正則直線 L が Y の近傍上で正則に自明であるためには, 任意の非負整数 μ に対して, Y_μ 上の可逆層 $i_\mu^* \mathcal{O}_V(L)$ が自明でなければならない. ここで

$$Y_\mu := (Y, \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^{\mu+1})$$

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 数理物質系 数学域

e-mail: tkoike@math.tsukuba.ac.jp

web: <https://tkoike.com/>

本研究は科研費 (基盤研究 (C), 課題番号:23K03119) の助成を受けたものである。

は Y の μ 次の無限小近傍, $i_\mu: Y_\mu \rightarrow V$ は自然な射である. より精密な必要条件は, Y に沿った X の完備化を用いて記述できる: つまり, [2] の意味での形式的複素空間

$$Y_\infty = (Y, \varprojlim_\mu \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{\mu+1})$$

を用いれば, $\mathcal{O}_{Y_\infty}$ で層 $\varprojlim_\mu \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{\mu+1}$ を, また $i_\infty: Y_\infty \rightarrow V$ で自然な射を表すこととして, 次は簡単に分かる: L が Y のある近傍上で正則に自明であるならば, $i_\infty^* \mathcal{O}_V(L)$ も自明である. この逆がを問うこと, すなわち次の意味で, X における Y の近傍上で FPLB 問題を問うのは自然といえるであろう:

定義 1 上の設定で, Y の任意の近傍 V と, V 上の任意の正則直線束 L について, $i_\infty^* \mathcal{O}_V(L)$ が自明ならば L が Y のある近傍上で正則に自明なるとき, X における Y の近傍上で FPLB が成り立つという.

FPLB が成り立つための十分条件については Griffiths や Peternell による結果が知られていた [3, 9]. 本講演では, それらと比較しつつ, [7] で X がコンパクトケーラー多様体である場合に新たに得られた十分条件とその応用について述べる. また, Arnol'd や上田により, 特に Y が非特異超曲面でその法線束がユニタリ平坦な場合について, FPLB が不成立となるような例が知られている [1, 10]. これに関連し, 複素構造の変形により, パラメータに激しく依存して FPLB の成否が切り替わるような具体例についても報告したい.

参考文献

- [1] V. I. ARNOL'D, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional. Anal. i Prilozhen., 10-4 (1976), 1–12.
- [2] J. BINGENER, Über formale komplexe Räume, Manuscr. math. **24** (1978), 253–293.
- [3] P. GRIFFITHS, The Extension Problem in Complex Analysis II; Embeddings with Positive Normal Bundle, Amer. J. Math. **88**, 2 (1966), 366–446.
- [4] T. Koike, Linearization of transition functions of a semi-positive line bundle along a certain submanifold, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **71** (2021) no. 5, 2237–2271.
- [5] T. Koike, Hermitian metrics on the anti-canonical bundle of the blow-up of the projective plane at nine points, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, Serie 6, **32** (2023) no. 2, pp. 231–285.
- [6] T. Koike, Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one, J. Differential Geom. **127**, 3 (2024), 1207–1243.
- [7] T. Koike, Formal principle for line bundles on neighborhoods of an analytic subset of a compact Kähler manifold, arXiv:2409.20367.
- [8] T. Koike, Pluripotential geometry on semi-positive effective divisors of numerical dimension one, arXiv:2511.13903.
- [9] TH. PETERNELL, Vektorraumbündel in der Nähe von kompakten komplexen Unterräumen., Math. Ann. **257** (1981), 111–134.
- [10] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1982/1983), 583–607.

ON COMPLETE KÄHLER RIEMANN DOMAINS

TAKEO OHSAWA

A basic result in several complex variables says that a Riemann domain $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$ is equivalent to a domain of holomorphy, a connected component of the total space of the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, if and only if $\mathcal{D}$ is holomorphically convex, by a Theorem of Oka. The point is that every locally pseudoconvex Riemann domain over $\mathbb{C}^n$ carries a plurisubharmonic exhaustion function. It turned out by a work of Fornaess [F] that Oka's theorem cannot be generalized to Riemann domains with ramification points. Namely, it was shown in [F] that there exists a holomorphically nonconvex complex manifold Ω with a holomorphic map $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ with finite fibers which is locally pseudoconvex in the sense that every point of $\mathbb{C}^2$ has a neighborhood U such that connected components of $p^{-1}(U)$ are holomorphically convex.

In [O-1], by slightly modifying the construction in [F], the following was shown.

Theorem 1. *Let $\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{-\mu} \log |z - 2^{-\mu}|$, where $z \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, and let $\Omega'_{\varphi} = \{(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}; e^{\varphi(z)} < |w| < e\}$. Then, Ω'_{φ} is biholomorphically equivalent to a dense open subset of a holomorphically nonconvex locally closed submanifold Σ of $\mathbb{C}^3$ such that the inclusion map $\Omega'_{\varphi} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ is continuously extended to Σ , by this correspondence, as a locally pseudoconvex map $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfying $p^{-1}((2^{-\mu}, 0)) \cong \mathbb{D}$ for all μ .*

By generically projecting the embedded manifold to $\mathbb{C}^2$, one has the following.

Corollary. *There exists a locally pseudoconvex but holomorphically nonconvex Riemann domain over $\mathbb{C}^2$ which is embeddable into $\mathbb{C}^3$ as a locally closed and locally pseudoconvex complex submanifold.*

In [O-2], the following extension theorem was proved as a generalization of what has been used in the proof of Theorem 1.

Theorem 2. *Let M be a complex manifold of dimension n and let $S \subset M$ be a closed complex analytic set whose complement has a complete Kähler metric. Assume that there exist a holomorphic n -form ω on M which has no zeros on $M \setminus S$ and a plurisubharmonic function*

Φ on M satisfying the following conditions i) $\sim$ iii).

$$i) \Phi^{-1}(-\infty) = S.$$

$$ii) \Phi \text{ is } C^\infty \text{ on } M \setminus S.$$

iii) $e^{-\Phi}\omega$ is not locally square integrable on any open subset of M which intersects with S .

Then, for any $c \in \mathbb{R}$ and for any holomorphic function f on $\Phi^{-1}([-\infty, c))$ satisfying

$$i^{n^2} \int_{\Phi < c} |f|^2 \omega \wedge \bar{\omega} < \infty,$$

there exists a holomorphic function $\tilde{f}$ on M such that $\tilde{f}|_S = f$.

As a supplementary remark to these, we shall show the following.

Theorem 3. *Let $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ be a Riemann domain such that, for any point $z \in \mathbb{C}^n$, for any neighborhood $U \ni z$ and for any connected component V of $p^{-1}(U)$, there exist a closed nonsingular complex curve C in $\mathbb{C}^n$ satisfying $p^{-1}(C) \cap V \neq \emptyset$ and a holomorphic extension $\tilde{p} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ of $p|_{p^{-1}(C) \cap V}$ to a Riemann surface $\tilde{C} \supset p^{-1}(C) \cap V$ satisfying $\tilde{C} \setminus \overline{p^{-1}(C) \cap V} \neq \emptyset$. Then Ω is holomorphically convex if and only if it admits a complete Kähler metric.*

Corollary. ([D-P]) *A domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ with $\overline{\Omega}^\circ = \Omega$ is holomorphically convex if and only if Ω admits a complete Kähler metric.*

REFERENCES

- [D-P] Diederich, K. and Pflug, P., *Über Gebiete mit vollständiger Kählermetrik*, Math. Ann. **257** (1981), 191-198.
- [F] Forneaess, J. E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$* , Math. Ann. **234** (1978), 275-277.
- [O-1] Ohsawa, T., *Constructing a holomorphically nonconvex surface which is locally pseudoconvex as a submanifold of $\mathbb{C}^3$* , submitted for publication.
- [O-2] —, *An extension of holomorphic functions from analytic complements of complete Kähler domains and application to holomorphic separability*, preprint.

ケーラー多様体上の拡散過程と正則写像の値分布

— 伊藤解析の視点から —

厚地 淳 (慶應義塾大学理工学部)*

2026 年 9 月 2 日

1 序

本講演では、ある種の確率過程とその解析手法である伊藤解析 (stochastic calculus) と、関数論の値分布論に関する親和性について説明したいと思う。我々は関数 f の定義域 $\mathcal{M}$ 上の連続な経路のサンプル (標本路) $X_t(\omega)$ を取り、それと関数の合成 $f(X_t(\omega))$ の時間発展を調べることにより、 f や $\mathcal{M}$ の性質を見出そうと考えている。このような時間発展に対する解析の基本的手法が、伊藤解析である。この時間発展は確率測度の法則に支配されるが、適切なものを考えれば何がしかの結果に結びつくのではないかと期待できる。後述するように、時間発展の考え方は値分布論のその黎明期から続く研究手法に内在するものと考えている。これが前述した親和性に自然につながる理由の一つと思われる。

この予稿では本講演において使用される基本的用語や概念について説明する。後半はそれらを用いて得られた値分布論に関係する最近の結果について述べる。

2 拡散過程、マルチンゲール、ブラウン運動の基礎

本講演の題目にある拡散過程とは、連続な標本路を持つ強マルコフ過程のことである。まず、これらの基本事項を準備する。詳細については、[20], [24], [30] 等の入門書を参照していただきたい。また関数論との関係では、[9], 拙著 [5] 等がある。

2.1 マルコフ過程、拡散過程

$\mathcal{M}$ を可分な距離空間とし、局所コンパクトであると仮定する。 $\mathcal{M}$ 上の $t \geq 0$ を時間パラメータとする連続な経路空間 Ω に確率測度 $\{P_x\}_{x \in \mathcal{M}}$ を導入する。 $X_t : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ ($t \geq 0$) を $X_t(\omega) := \omega(t)$ ($\omega \in \Omega$) とする。各 P_x は Ω の自然なボレル集合上で定義されており、 $P_x(X_0 = x) = 1$ である。すなわち、 P_x は x から出発する経路全体の上に台を持ち、 x から出発する確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ の法則である。ここで、 $P_x(\{\omega \in \Omega \mid X_t \in A\}) = P(X_t \in A)$ と略記している。また、確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ を単に X とも記す。 E_x で P_x による積分 (期待値) を表す。例えば、 $f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ 上の有界

*e-mail: atsuji@math.keio.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:21K03299, 25K07052) の助成を受けたものである。

ボレル可測関数全体) に対し、

$$E_x[f(X_t)] := \int_{\Omega} f(X_t(\omega))dP(\omega).$$

(X_t, P_x) がマルコフ過程とは、任意の $f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$, $t, s \geq 0$, $x \in \mathcal{M}$ に対し、

$$E_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = E[E_{X_t}[f(X_s)]] \quad (1)$$

が成り立つことである。ここで、 $\mathcal{F}_t$ は X_s ($0 \leq s \leq t$) を可測にするような集合をすべて含む「良い」 σ -加法族 (自然なフィルトレーションという) であり、可積分な確率変数 Y に対し、 $E_x[Y|\mathcal{F}_t]$ は $\mathcal{F}_t$ に関する条件付き期待値である。なお、 $E_x[Y|\mathcal{F}_t] = Z$ という等式は、 P_x -a.e. ω について成立しており (a.s と記す)、

$$\int_A Y(\omega)dP(\omega) = \int_A Z(\omega)dP(\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_t)$$

と同値である。 $\mathcal{F}_t$ は t について増大系であり、このような性質を満たす σ -加法族の族をフィルトレーションと呼ぶ。推移作用素 $P_t: \mathcal{B}_b(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$ を

$$P_t f(x) = E_x[f(X_t)] \quad (f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M}))$$

によって定義すれば、マルコフ性から $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ が従う。 $\theta_t: \Omega \rightarrow \Omega$ を $(\theta_t \omega)(s) := \omega(t+s)$ によって定義する。 $\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ と置く。(1) は次のように拡張される。

Definition 1 (マルコフ性) Y を 任意の $\mathcal{F}_{\infty}$ 可測な有界確率変数に対し、

$$E_x[Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[Y] \quad (2)$$

が成り立つとき、 X はマルコフ性を持つという。

ランダムな時刻 T が 停止時刻 (stopping time) とは、任意の $t \geq 0$ に対し、

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

を満たすことを言う。停止時刻の代表例として、 D, U を $\mathcal{M}$ のボレル集合とすると、

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\} \quad D \text{ からの脱出時間}, \quad \sigma_U = \inf\{t > 0 : X_t \in U\} \quad U \text{ への最小到達時間}$$

を挙げておく。ただし、 $\inf \emptyset = \infty$ とする。マルコフ性は non-random な時間について (2) が成り立つことを要請するが、それをさらに強く、停止時刻についても (2) が成り立つとき、確率過程は**強マルコフ性**を持つという。

連続な標本路を持つ強マルコフ過程を**拡散過程**という。以降、連続な標本路を持つ確率過程を単に、連続な確率過程と呼ぶ。

2.2 マルチンゲール

マルコフ過程と並んで重要な確率過程のクラスとしてマルチンゲールがある。今、一般的なフィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の連続な確率過程 M を考える。

Definition 2 実数値 P -可積分確率過程 M_t がマルチンゲールであるとは、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に対し、

i) 各 $t \geq 0$ について M_t は $\mathcal{F}_t$ -可測 ($\mathcal{F}_t$ -適合という),

ii) 任意の $t \geq s \geq 0$ に対し、

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad a.s. \quad (3)$$

が成立することである。

また、マルチンゲールの定義 Definition 2 において、(3) の代わりに、

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s \quad (\text{resp. } \leq M_s) \quad a.s.$$

が成り立つとき、 M を 劣マルチンゲール (resp. 優マルチンゲール) と呼ぶ。

Definition 3 連続な確率過程 M に対し、 $T_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) a.s. を満たす停止時刻の列 $\{T_n\}$ が存在し、 $\{M_{t \wedge T_n}\}_{t \geq 0}$ がマルチンゲールとなるとき、 M を局所マルチンゲールと呼ぶ。但し、 $s \wedge t := \min\{s, t\}$ 。

局所優マルチンゲール、局所劣マルチンゲールも同様に定義する。局所劣マルチンゲールの差で書ける連続確率過程をセミマルチンゲールと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{調和関数} \\ \text{劣マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{劣調和関数} \\ \text{優マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{優調和関数} \end{aligned}$$

という対応がある。後述するように、この対応は形式的なものだけでなく、ブラウン運動を通じて実現できるものである。次の分解定理からは、劣調和関数の Riesz 分解が想起されるだろう。

Theorem 4 (Doob-Meyer 分解) X を劣マルチンゲールとする。このとき、マルチンゲール M と増加過程 A (i.e. $t \mapsto A_t(\omega)$ が非減少関数) が一意に存在して、

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M_0 = A_0 = 0$$

と分解できる。

局所劣マルチンゲールに対しても Doob-Meyer 分解は成立し、この場合は局所マルチンゲールと増加過程の和に一意に分解できる。セミマルチンゲールは局所マルチンゲールと有界変動過程の和に分解できる。

イェンセンの不等式より、 M が (局所) マルチンゲールならば、 M^2 は (局所) 劣マルチンゲールとなることがわかる。 M^2 に Doob-Meyer 分解を適用して得られる増加過程を $\langle M \rangle_t$ と書き、 M の 2 次変分過程と呼ぶ。 M, N が局所マルチンゲールのとき、 MN はセミマルチンゲールとなる。この有界変動部分を $\langle M, N \rangle_t$ と書く。

さて、拡散過程の場合に戻ろう。 $\mathcal{M}$ が微分構造を持つ場合、特に滑らかな多様体である場合には、拡散過程は生成作用素と呼ばれる非正の 2 階の微分作用素によって特徴づけられる。特に、 L が X の生成作用素であることは、 $f \in C^2(M)$ に対し、

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \text{ は局所マルチンゲール}$$

という性質によって特徴づけられる。すなわち、 $f(X_t)$ はセミマルチンゲールであり、その分解の有界変動部分は $\int_0^t Lf(X_s)ds$ で与えられる。

Example 5 $M = \mathbb{R}$ とする。 $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ を生成作用素とする拡散過程 (B_t, P_x) を $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動、または、1 次元ブラウン運動という。推移作用素 P_t を $P_t f(x) := E_x[f(B_t)]$ とすれば、

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) f(y) dy, \quad p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

と書ける。また、 B は自然なフィルトレーションに関しマルチンゲールであり、 $\langle B \rangle_t = t$ 。

Theorem 6 (1 次元ブラウン運動に対する伊藤の公式) $f \in C^2(\mathbb{R})$ とする。このとき、

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (t \geq 0)$$

が成り立つ。

右辺の第 1 項は確率積分 (伊藤積分) であり、局所マルチンゲールとなることが知られている。すなわち、 $f(B_t)$ はセミマルチンゲールとなり、局所マルチンゲール部分 $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ と有界変動過程 $\frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$ に分解できることを示している。

$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ ($B_t^1, \dots, B_t^d$ は独立な 1 次元ブラウン運動) の形で書ける連続確率過程を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動、または、 d 次元ブラウン運動という。伊藤の公式は多次元ブラウン運動に対しても成立する。

Theorem 7 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対し、

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) ds.$$

ここで、 $dB_s = (dB_s^1, \dots, dB_s^d)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ は $\mathbb{R}^d$ のラプラシアンである。

B は生成作用素 $\frac{1}{2} \Delta$ を持つ拡散過程であることがわかる。また、伊藤の公式については、多次元セミマルチンゲールに対しても類似の公式が成立することも注意しておく。

マルチンゲールとブラウン運動には密接な関係がある。

Theorem 8 (Dambis, Dubins-Schwarz cf. [24], [30]) M_t を局所マルチンゲールとする。 M が定義されているフィルトレーション付き確率空間を含む適当な確率空間が存在して、その上の適当な 1 次元ブラウン運動 B を用いて、

$$M_t = B(\langle M \rangle_t)$$

と書ける。

この事実から、 M は B の時間変更過程とみることができる。マルチンゲール M を調べるにあたっては、ブラウン運動と $\langle M \rangle_t$ を調べることの重要性がわかる。

次に問題となるのは、拡散過程はいかに構成されるか、という問題である。しばしば用いられる確率論的方法については大きく 2 つの方法が知られている。

- 1) 確率微分方程式による方法。cf. [20], [19], [32],
- 2) ディリクレ形式による方法。cf. [13]

本講演では主に 2) の方法を基礎とする。

2.3 リーマン多様体上のブラウン運動

以降、多様体というときには常に連結性を仮定する。 $\mathcal{M}$ をリーマン多様体とし、そのリーマン計量から定まるラプラス-ベルトラミ作用素 $\Delta_{\mathcal{M}}$ を考える。

Definition 9 $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$ を生成作用素とする $\mathcal{M}$ 上の拡散過程 (X_t, P_x) を $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動という。

任意の $u, v \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ に対し、

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(x) v(x) dV(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV(x)$$

が成り立つ。ここで、 dV はリーマン計量より定まる体積測度である。右辺の双線形対称形式を $\mathcal{E}(u, v)$ と置く。 $C_0^\infty(\mathcal{M})$ を $\|u\|^2 := \mathcal{E}(u, u) + \|u\|_{L^2(dV)}^2$ で定義されるノルム $\|\cdot\|$ で完備化したもの $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を考えると、この上に $\mathcal{E}$ は自然に拡張できる。 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $L^2(dV)$ 上の強局所・正則ディリクレ形式となる (cf.[13])。強局所・正則ディリクレ形式には拡散過程が一意に対応することが知られており (cf. [13])、 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ には $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$ を生成作用素とする $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動 (X_t, P_x) が対応する。推移作用素 P_t は $L^2(dV)$ 上に拡張でき、測度 dV に関し対称性を持つ。これにより、 $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動は dV に関し対称拡散過程であるという。

Lemma 10 X を $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動、 $f \in C^2(\mathcal{M})$ とする。

$$f(X_t) - f(X_0) = M_t + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} f(X_s) ds, \quad M_t: \text{局所マルチンゲール}$$

と分解でき、

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\nabla f|^2(X_s) ds.$$

特に、 u が $\mathcal{M}$ 上の調和関数ならば、 $u(X)$ は局所マルチンゲールであり、劣調和関数 (resp. 優調和関数) ならば、 $u(X)$ は局所劣マルチンゲール (resp. 局所優マルチンゲール) である。後者の関係は、 u に滑らかさがない場合も成立する。

滑らかなリーマン多様体上のブラウン運動の推移作用素 P_t は dV に関し、密度 $p(t, x, y)$ を持つ。これは次の熱方程式の基本解となることが知られている。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta_M u(t, x), \quad u(0, x) = \phi(x) \in C_b(\mathcal{M}). \quad (4)$$

このほかの解析学的諸量との関係について記す。後述するネヴァンリンナ理論では重要な役割を果たす。 $D \subset \mathcal{M}$ を ∂D が滑らかな領域とする。 $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$, $\phi \in C_b(\mathcal{M})$ とする。

[調和測度 ω_x]

$$E_x[\phi(X_{\tau_D})] = \int_{\partial D} \phi(y) d\omega_x(y).$$

[グリーン関数 G_D]

$$E_x\left[\int_0^{\tau_D} \phi(X_s) ds\right] = \int_D \phi(y) G_D(x, y) dV(y).$$

$D = \mathcal{M}$ の時は、後述する過渡的多様体では $\mathcal{M}$ のグリーン関数となり、

$$G_M(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y) dt.$$

3 ケーラー多様体上のブラウン運動

3.1 複素ブラウン運動と等角マルチンゲール

Definition 11 x_t, y_t を独立な $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動とする。 $Z_t := x_t + y_t (i = \sqrt{-1})$ と書ける確率過程を $\mathbb{C}$ 上のブラウン運動、または、複素ブラウン運動という。

Gettoor-Sharpe[15] はこれを拡張して等角マルチンゲールの概念を導入した。

Definition 12 $Z_t = X_t + iY_t$ を複素数値マルチンゲールとする。すなわち、 X, Y は $\mathbb{R}$ 上の局所マルチンゲールとする。

$$\langle X \rangle_t = \langle Y \rangle_t, \quad \langle X, Y \rangle_t = 0 \quad (\forall t \geq 0)$$

を満たすとき、 Z を等角マルチンゲールと呼ぶ。

Theorem 8 を用いれば、等角マルチンゲールは、複素ブラウン運動を時間変更したものとなることがわかる。すなわち、複素ブラウン運動 $\tilde{Z}$ が存在して、

$$Z_t = \tilde{Z}(\langle X \rangle_t).$$

等角マルチンゲールの例として重要なものは正則関数による複素ブラウン運動の像である。

Theorem 13 (ブラウン運動の等角不変性) $D \subset \mathbb{C}$: 領域 とし、 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数、 Z を複素ブラウン運動で $Z_0 = z \in D$ とする。 $\tau_D = \inf\{t > 0 : Z_t \notin D\}$ と置く。このとき、 $f(Z)$ は等角マルチンゲールとなり、 $\mathbb{C}$ 上の複素ブラウン運動 $\tilde{Z}$ が存在して、

$$f(Z_t) = \tilde{Z}(\rho_t) \quad (0 \leq t < \tau_D). \quad \text{ここで、} \rho_t = \int_0^t |f'(Z_s)|^2 ds.$$

3.2 ケーラー多様体上のブラウン運動と正則拡散過程

$d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$, $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$, $g_{\mathcal{M}} = (g_{\alpha,\bar{\beta}})$: 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のケーラー計量, $\omega = g_{\alpha,\bar{\beta}} idz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}$ とする。

Definition 14

$$L = 2 \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha,\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}}, \quad (g^{\alpha,\bar{\beta}}) = (g_{\alpha,\bar{\beta}})^{-1} \quad (5)$$

とするとき、 L を生成作用素に持つ拡散過程 (X_t, P_x) をケーラー多様体 $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ 上のブラウン運動という。

(X_t, P_x) はディリクレ形式

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\mathcal{M}} du \wedge d^c v \wedge \omega^{n-1} \quad (u, v \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})) \quad (6)$$

に対応している。(cf. Fukushima-Okada[11], Kaneko[21], [22], Kaneko-Taniguchi[23]). $dm = c_n \omega^n$ と置く。 $L^2(dm)$ 上で前述のように $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を定義すれば、 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $L^2(dm)$ 上の強局所正則ディリクレ形式となる。

$$\mathcal{E}(u, v) = - \int_{\mathcal{M}} u dd^c v \wedge \omega^{n-1} \quad (u, v \in C_0^{\infty}(\mathcal{M}))$$

となるから、次元 n のみによる定数 c_n を適当にとれば、

$$Lu = \frac{dd^c u \wedge \omega^{n-1}}{dm} \quad (u \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})).$$

とできる。この L の形から、次が直ちにわかる。

Lemma 15 $g_{\mathcal{M}}$ がケーラーならば、開集合 $U \subset \mathcal{M}$ 上の正則関数 f に対し、 Ref は L -調和である。これより、 U 内を出発する L を生成作用素とする X に対し、 $f(X_t)$ ($0 \leq t < \tau_U$) は等角マルチンゲールとなる。

一般のエルミート計量に対する (リーマン多様体としての) ラプラシアンでは、上述の性質は成り立つとは限らない。

[11], [12] においては多重劣調和関数を用いてディリクレ形式を定義し、より広範な拡散過程のクラスを考え、多重ポテンシャル論との関係を論じている。上述の先行研究では次のような拡散過程のクラスが導入された。

Definition 16 (X_t, P_x) が $\mathcal{M}$ 上の正則拡散過程 (holomorphic diffusion) とは、任意の開集合 $U \subset \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ と、 $X_t \in U$ ($t \in [S, T]$) となる確率区間 $[S, T]$ に対し、 $\{f(X_{(t \vee S) \wedge T})\}_{t \geq 0}$ が等角マルチンゲールとなることである。 ($s \vee t := \max\{s, t\}$.)

ケーラー多様体上のブラウン運動は対称正則拡散過程である。

Theorem 17 ([11]) 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の対称正則拡散過程に対して、そのディリクレ形式は、ある $(n-1, n-1)$ 正閉カレント θ と多重劣調和関数 φ が存在して、 $L^2(dm)$ 上で

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_D du \wedge d^c v \wedge \theta \quad (u, v \in C_0^\infty(D)), \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 $dm = dd^c \varphi \wedge \theta$ 。

3.3 大域的性質

この節では $\mathcal{M}$ は境界を持たない連結なリーマン多様体とし、 $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動 $X = (X_t, P_x)$ の大域的性質について述べる。これを正則拡散過程に置き換える際は若干の注意が必要であるが、概ね同様なことが成立する。

仮定より、 X は既約となる。今の場合、任意の $x, y \in \mathcal{M}$ に対し、 $p(t, x, y) > 0$ ($t > 0$)。

3.3.1 保存性・確率的完備性

Definition 18 $\zeta := \inf\{t > 0 : X_t \notin \mathcal{M}\}$ を X の生存時間 (life time) という。 $P_x(\zeta = \infty) = 1$ ($\forall \exists x \in \mathcal{M}$) の時、 X は保存的であるといい、この時、 $\mathcal{M}$ は確率的完備であるという。

Remark 19 確率的完備性とリーマン計量の完備性とは関係がない。

例. 1. $\mathcal{M} = \mathbb{C} \setminus \{o\}$ は、ユークリッド計量に関して確率的完備であるが、完備ではない。
2. 完備なリーマン多様体で $\mathcal{M}$ の断面曲率が $-d(x_0, x)^{2+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) のオーダーで発散し、確率的完備でないものを作ることができる。但し、 $d(x, y)$ は $\mathcal{M}$ のリーマン距離、 x_0 は参照点である。

次ような特徴づけが知られている。

Proposition 20 (cf.[17]) 確率的完備性は 次の各性質と同値である。

i)

$$\int_{\mathcal{M}} p(t, x, y) dV(y) = 1 \quad (\forall \exists x \neq y \in \mathcal{M}).$$

ii) 熱方程式の初期値問題 (4) の有界な解は一意。

iii) $\lambda > 0$ に対し、 $\Delta_{\mathcal{M}} u = \lambda u$ を満たす有界な u は $u = 0$ に限る。

判定条件としては次が良く知られている。

Theorem 21 (Grigoryan[17]) $\mathcal{M}$ は完備とする。ある点を中心とする半径 $r > 0$ の測地球の体積を $v(r)$ とおく。 $\int_1^\infty \frac{r dr}{\log v(r)} = \infty$ ならば、 $\mathcal{M}$ は確率的完備である。特に、

あるコンパクト集合 $K \subset \mathcal{M}$ と定数 $C > 0$ 、参照点 $x_0 \in M$ に対して、

$$\text{Ric}_x \geq -Cd(x_0, x)^2 \quad (x \in \mathcal{M} \setminus K)$$

ならば、 $\mathcal{M}$ は確率的完備である。

3.3.2 再帰性・過渡性

Definition 22 i) 任意の空でない開集合 $U \subset \mathcal{M}$ に対し、

$$P_x(\sigma_U < \infty) = 1 \quad (\forall/\exists x \in \mathcal{M})$$

の時、 X は再帰的 (recurrent) という。ただし、 $\sigma_U := \inf\{t > 0 : X_t \in U\}$.

ii) X が再帰的でないとき、過渡的 (transient) という。

Remark 23 i) 既約性により、リーマン多様体 $\mathcal{M}$ に対し、 X の再帰性・過渡性はいずれかに定まる。

ii) X が再帰的であれば、保存的である。すなわち、保存的でないときは過渡的である。

上の注意により、 X が再帰的 (resp. 過渡的) なとき、リーマン多様体を再帰的 (resp. 過渡的) ということにする。

Proposition 24 X が過渡的であることと、次の各条件は同値である。

i)

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)ds\right] < \infty \quad (\forall/\exists f \in L_+^1(dV), \int_M f dV > 0, \zeta : \text{life time}).$$

ii) グリーン関数が存在する。すなわち、

$$G_{\mathcal{M}}(x, y) := \int_0^\infty p(t, x, y)dt < \infty \quad (\forall/\exists x \neq y \in \mathcal{M})$$

iii) $\mathcal{M}$ 上に非定数有界な劣調和関数が存在する。

iv) $\mathcal{M}$ 上に非定数非負優調和関数が存在する。

$\mathcal{M}$ が過渡的なときは、前に見たように、 $f \in L^1(dV)$ に対し、

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)ds\right] = \int_{\mathcal{M}} G_{\mathcal{M}}(x, y)f(y)dV(y).$$

Proposition 25 X が再帰的であることと、次の各条件は同値である。

i) 任意の空でない開集合 $U \subset \mathcal{M}$ に対し、

$$\int_0^\infty 1_U(X_t)dt = \infty \quad P_x\text{-a.s.}$$

ii) [ロイデンの条件] $\phi_n \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ が存在して、

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla \phi_n|^2(x)dV(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

iii) グリーン関数が存在しない。すなわち、

$$\int_1^\infty p(t, x, y) dt = \infty \quad (\forall \exists x, y \in \mathcal{M}).$$

iv) $\mathcal{M}$ 上の有界な劣調和関数は定数に限る。

v) $\mathcal{M}$ 上の非負優調和関数は定数に限る。

Theorem 26 (Grigor'yan[17]) $\mathcal{M}$ は完備とする。 $\int_1^\infty \frac{r dr}{v(r)} = \infty$ ならば、 X は再帰的である。

3.4 ケーラー多様体における例

まず 1 次元の場合を見てみよう。

例 1. $\mathbb{C}$ は計量にかかわらず、再帰的である。

例 2. $D \subset \mathbb{C}$ を単位円板とする。 D にユークリッド計量を入れたものは、確率的非完備である。一方、 D に双曲計量 (ポアンカレ計量) を入れたものは確率的完備であり、過渡的である。

リーマン面 (1 次元複素多様体) には適当な等角計量が入っており、ケーラー多様体とみなすことにする。1 次元の場合には、再帰性・過渡性は等角不変であることに注意する。

例 2. 開リーマン面 $\mathcal{M}$ が再帰的になる必要十分条件は、 $\mathcal{M}$ がリーマン面のクラス O_G に属することである。

例 3. $\mathbb{C}^n$ にユークリッド計量を入れたものは過渡的で確率的完備である。

例 4. $\mathbb{C}^n$ の有界領域は計量にかかわらず、過渡的である。確率的完備性は計量による。

ケーラー多様体に対しては、前節でみたようにケーラー計量に応じて再帰性・過渡性を定義することができる。一方、複素多様体一般では計量によって再帰的であったり、過渡的であったりすることもある。そこで次のような分類を与えてみる。

Definition 27 i) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のすべての非退化対称正則拡散過程が再帰的なとき、 $\mathcal{M}$ を強再帰的という。

ii) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上に再帰的な非退化対称正則拡散過程が存在するとき、 $\mathcal{M}$ を弱再帰的という。

iii) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のすべての非退化対称正則拡散過程が過渡的なとき、 $\mathcal{M}$ を強過渡的という。

例 5. コンパクト複素多様体は強再帰的である。

例 6. リーマン面は強再帰的か、強過渡的のいずれかである。開リーマン面が強再帰的であるための必要十分条件は O_G に属することである。

例 7. $\mathbb{C}^n$ の有界領域は強過渡的である。

例 8. Stoll の意味で parabolic な多様体 ([31], cf. [16]) は弱再帰的である ([22])。

4 再帰的ケーラー多様体と放物的ネヴァンリンナ理論

4.1 定性的性質

Definition 28 (Liouville 定理) 複素多様体 M が有界な多重劣調和関数は定数以外許容しないとき、 $\mathcal{M}$ は有界多重劣調和関数に関して Liouville 性を持つという。

Proposition 29 $\mathcal{M}$: 弱再帰的 $\Rightarrow \mathcal{M}$: 多重劣調和関数に関して Liouville 性を持つ。

問題 (open): 上の Proposition の逆は成り立つか?

Proposition 30 (Casorati-Weierstrass の定理) M が弱再帰的、 f が $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数ならば、 f の除外点の集合は対数容量零である。

4.2 放物型ネヴァンリンナ理論

再帰的な場合以外でも以下の設定は可能である。今、ケーラー多様体 $(\mathcal{M}, g)$ は確率的完備とする。 $[w, a] : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の球面距離 (弦距離), $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 正則写像 (i.e. 有理型関数), $e_f := \text{tr}_M(f^*g_{FS})$, $g_{FS} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の Fubini-Study 計量, $dV : (\mathcal{M}, g)$ の体積要素とする。 $f(x) \neq a$ のとき、次の量を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{m}_x(t, a) &= E_x[\log[f(X_t), a]^{-2}], \\ \tilde{N}_x(t, a) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \log[f(X_s), a]^{-2} > \lambda\right), \\ \tilde{T}_x(t) &= E_x\left[\int_0^t e_f(X_s) ds\right].\end{aligned}$$

Proposition 31 (第 1 主定理) $f(x) \neq a$ かつ $\tilde{T}_x(t) < \infty$ ならば、

$$\tilde{m}_x(t, a) - \log[f(x), a]^{-2} + \tilde{N}_x(t, a) = \tilde{T}_x(t).$$

$$R(x) := \inf_{|\xi|=1, \xi \in T_x \mathcal{M}} \text{Ric}(\xi, \xi) \quad (8)$$

と置く。 $r(x) := d(x_0, x)$ を参照点 $x_0 \in \mathcal{M}$ からの距離関数とする。

Lemma 32 ある定数 $C > 0$ があって、

$$R(x) \geq -Cr(x)^2 - C \quad (9)$$

とする。 f が $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を除外するならば、 $\tilde{N}_x(t, a) = 0$ ($\forall t > 0$), a.e. x .

今、 f として

$$\tilde{T}_x(t) < \infty \quad (\forall t > 0), \text{ a.e. } x \quad (10)$$

となる有理型関数を考える。 f がエネルギー有限, i.e. $\int_{\mathcal{M}} e_f(x) dV(x) < \infty$ ならば、(10) は満たされる。

Theorem 33 ([2], [3]) $\mathcal{M}$ を完備ケーラー多様体とし、そのリッチ曲率は (9) を満たすとする。 f は (10) を満たす $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数であり、 $a_1, a_2, \dots, a_q$ を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の異なる点とする。 $x \in \mathcal{M}$ は $f(x) \neq a_j$ ($j = 1, \dots, q$) とし、 $\tilde{T}_x(t) \uparrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^q \tilde{m}_x(t, a_i) + \tilde{N}_1(t, x) \leq 2\tilde{T}_x(t) + \tilde{N}_x(t, \text{Ric}) + O(\log \tilde{T}_x(t))$$

がルベーグ測度有限な集合を除いた $t \in (0, \infty)$ について成立する。ここで、

$$\tilde{N}_x(t, \text{Ric}) = -E_x\left[\int_0^t R(X_s)ds\right].$$

今、

$$\int_{\mathcal{M}} |R(x)| dV(x) < \infty$$

を仮定する。これは、1次元のときは再帰性の十分条件である。

$$\alpha := - \int_{\mathcal{M}} R(x) dV(x) / \int_{\mathcal{M}} e_f(x) dV(x)$$

と置く。

Theorem 34 上の設定の下、 $(\mathcal{M}, g)$ が再帰的ケーラー多様体ならば、

$$\sum_{i=1}^q \tilde{\delta}_x(a_i) \leq 2 + \alpha.$$

ここで、

$$\tilde{\delta}_x(a) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{m}_x(t, a)}{\tilde{T}_x(t)}.$$

特に、 f の除外点の個数 $\leq 2 + \alpha$.

証明は 再帰的拡散過程のエルゴード定理から従う。

5 過渡的ケーラー多様体上の有理型関数の値分布論

5.1 シュヴァルツの補題とピカル型定理

この節では写像の的が負曲率多様体の場合を想定する。

$(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$: 完備ケーラー多様体、 $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$: エルミート多様体、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ 正則写像、 $\mathcal{B}(r) : \mathcal{M}$ の半径 $r > 0$ の測地球、 $K(y) : y \in \mathcal{N}$ における $\mathcal{N}$ の正則双断面曲率の上界とする。 $R(x)$ を (8) で定義した $\mathcal{M}$ のリッチ曲率の下限とし、 $R_-(x) := \max\{0, -R(x)\}$ と置く。まず次が基本的である。

Theorem 35 (一般化されたシュヴァルツの補題 [33]) 定数 $K_1, K_2 > 0$ が存在して、 $\sup_{y \in \mathcal{N}} K(y) \leq -K_1$, $\sup_{x \in \mathcal{M}} R_-(x) \leq K_2$ ならば、 $f^*g_{\mathcal{N}} \leq \frac{K_2}{K_1} g_{\mathcal{M}}$.

Corollary 36 $R(x) \geq 0$ ($x \in \mathcal{M}$) であり、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{3 \text{ 点}\}$ が正則写像ならば、 f は定数。

この $R(x)$ の下限の条件を可積分条件に置き換えたものが考えられている。

Theorem 37 ([4](2021)) ケーラー多様体 $\mathcal{M}$ は過渡的とし、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ を正則写像とする。非負連続非増加関数 ρ で $\int_1^\infty \sqrt{\rho(t)} dt = \infty$ を満たすものが存在し、 $\mathcal{M}$ の或るコンパクト集合の外で $K(f(x)) \leq -\rho(r(x))$ が成り立つとする。

$$\int_{\mathcal{M}} R_-(x) dV(x) < \infty \quad \text{かつ} \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(r)^2} \log \text{vol}(\mathcal{B}(r)) < \infty,$$

ならば、 f は定数。ここで、 $\Phi(r) = \int_1^r \sqrt{\rho(t)} dt$ 。

Remark 38 Li-Yau [27](1990) は ρ が定数のとき、さらに、Pigola-Rigoli-Setti [29](2008) は $\rho(t) = ct^{-b}$ ($b < 2$) の時に同様な結果を示している。

Corollary 39 ケーラー多様体 $\mathcal{M}$ は過渡的とする。 $\int_{\mathcal{M}} R_-(x) dV(x) < \infty$ かつ

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \log \text{vol}(\mathcal{B}(r)) < \infty,$$

ならば、 $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数の除外点の個数は高々 2 個。

Remark 40 1) 1 次元のときを考えればわかるように、上の結果で過渡性の条件は外せない。

2) 上の体積の増大条件は、ある正則拡散過程の保存性に関する条件である。

5.2 無限遠で正則なケーラー多様体

$(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$: 過渡的ケーラー多様体とし、 $G_{\mathcal{M}}(y, x)$ をグリーン関数とする。 $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ 。

Definition 41 $D_r \uparrow \mathcal{M}$ ($r \uparrow \infty$) をエグゾースションとする。任意の固定された $x_0 \in \mathcal{M}$ に対し、

$$\sup_{x \in \mathcal{M} \setminus D_r} G_{\mathcal{M}}(x_0, x) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

を満たすとき、 $(\mathcal{M}, g)$ は無限遠で正則 (regular at infinity) ということにする。

$(\mathcal{M}, g)$ が完備なときは、 $G_{\mathcal{M}}(x_0, x) \rightarrow 0$ ($d(x_0, x) \rightarrow \infty$) を満たすことである。

例 1. $n \geq 2$ とする。 $\mathcal{M}$ がリーマン多様体としてカルタン・アダマール多様体 (単連結、断面曲率が非正) ならば、無限遠で正則な過渡的多様体である。

2. $\mathcal{M}$ のリッチ曲率が非負で過渡的ならば、無限遠で正則な多様体である。

3. $\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ とし、双曲計量を考えると、曲率有界、完備過渡的であるが、無限遠で正則ではない。

無限遠で正則な過渡的多様体で関数論的に重要な例としては、次が挙げられる。

- プロパーに埋め込まれた $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体 (2 次元以上, $\mathbb{C}^n$ から誘導された計量に関して. cf. [1]).
- affine algebraic varieties $\dim \geq 2$ (cf. [14]).
- $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) の超凸領域、特に、有界強擬凸領域 (cf. [28]).
- $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) のディリクレ問題の意味で正則な有界領域.

$\mathcal{M}$ が無限遠を正則とする場合は、 $x_0 \in \mathcal{M}$ を任意に参照点として取り、 $\phi(x) := -\log G_{\mathcal{M}}(x_0, x)$ によって、 $\mathcal{M}$ のエグゾースション関数を定義することができる。

5.3 過渡的多様体のネヴァンlinna理論

$X: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ 上のブラウン運動, $B(r) := \{x \in \mathcal{M} : \phi(x) < r\}$ とし、その他前節と同じ記号を用いる。 $a > 0$ に対し、 $\log^- a = \max\{-\log a, 0\}$ と書く。

Definition 42 (Nevanlinna functions) $x \in \mathcal{M}$, $\tau_r = \inf\{t > 0 : \phi(X_t) \geq r\}$ とする。 $f(x) \neq a$ なる $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と $r > 0$ に対し、次の量を定義する。

$$\begin{aligned} T_x(r) &= E_x\left[\int_0^{\tau_r} e_f(X_s) ds\right] \quad (\text{characteristic function}), \\ N_x(r, a) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x\left(\sup_{0 \leq s \leq \tau_r} \log[f(X_s), a]^{-2} > \lambda\right) \quad (\text{counting function}), \\ m_x(r, a) &= E_x[\log[f(X_{\tau_r}), a]^{-2}] \quad (\text{proximity function}), \\ N_1(r, x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x\left(\sup_{0 \leq s \leq \tau_r} \log^- e_f(X_s) > \lambda\right). \end{aligned}$$

Definition 43

$$N_x(r, \text{Ric}) := -E_x\left[\int_0^{\tau_r} R(X_s) ds\right], \quad N_G(r, x) := E_x[\log |\nabla \phi|^2(X_{\tau_r})]$$

と置く。

$N_G(r, x_0) < \infty$ a.e. $r > 0$ である。また、 $\mathcal{M}$ が完備ケーラー多様体でリッチ曲率が下に有界ならば、S.T.Yau の勾配評価より $N_G(r, x_0)$ は有界となることがわかる。

Theorem 44 (第1主定理) $f(x_0) \neq a$ とする。

$$m_{x_0}(r, a) + N_{x_0}(r, a) = T_{x_0}(r) + \log[f(x_0), a]^{-2} \quad (r > 0).$$

Theorem 45 (第2主定理, A.2025+) $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を異なる点とし、 $x_0 \in \mathcal{M}$ は $f(x_0) \notin \{a_1, \dots, a_q\}$, $e_f(x_0) \neq 0$ を満たすとする。 $T_{x_0}(r) \uparrow \infty$ ($r \uparrow \infty$) ならば、ある対数測度有限な集合 $E \subset (0, \infty)$ があって

$$\sum_{k=1}^q m_{x_0}(r, a_k) + N_1(r, x_0) \leq 2T_{x_0}(r) + N_{x_0}(r, \text{Ric}) + N_G(r, x_0) + O(\log T_{x_0}(r)) \quad (r \notin E).$$

$E \subset [0, \infty)$ が対数測度有限とは、 $\int_E \frac{dr}{\max\{r, 1\}} < \infty$ を満たすことである。

5.4 除外指数関係式

Definition 46 $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{x_0}(r) = \infty$ のとき, $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し、

$$\delta_f(a) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_{x_0}(r, a)}{T_{x_0}(r)}, \quad \alpha_f := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{x_0}(r, \text{Ric})}{T_{x_0}(r)}$$

と置く。

第 2 主定理より、次が得られる。

Corollary 47 無限遠で正則な完備ケーラー多様体 M のリッチ曲率は下に有界とし、 $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{x_0}(r) = \infty$ とする。 $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し、

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2 + \alpha_f.$$

$$\eta_f := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{V_f(r)}{V(r)}, \quad \left(V_f(r) := \int_{B(r)} e_f(x) dV(x), \quad V(r) := \text{Vol}(B(r)) \right)$$

と置く。

Corollary 48 $\mathcal{M}$ を無限遠で正則な完備ケーラー多様体, $R(x) \rightarrow 0$ ($d(x_0, x) \rightarrow \infty$) とする。 $\eta_f > 0$ ならば、

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2.$$

$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) < 0\}$ は $\mathbb{C}^n$ の有界強擬凸領域とする。ただし、 p は $\bar{\mathcal{M}}$ の近傍上の滑らかな狭義多重劣調和関数とし、 $dp \neq 0$ (∂D 上) とする。 $q := -\log(-p)$ とし、ケーラー計量 $ds^2 = i\partial\bar{\partial}q$ を考える。

Corollary 49 $T_{z_0}(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) とする。

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2 + \frac{n+1}{\eta_f}.$$

6 離散の場合

前節までの確率論的方法は、伊藤解析の基本的事項と拡散過程の基本的な性質しか用いていないので、考察対象となる写像の定義域に適切な確率過程を構成することができれば、同様に議論を進めることができると期待される。そのような例として、筆者らは最近、離散空間における古典的関数論の離散類似について検討している。

近年のトロピカル幾何学の研究の流れの中で、古典的関数論の離散類似とその応用が研究されるようになった。値分布論に関連するものとしては、Halburd-Southall[18], Laine-Tohge[26] らによるトロピカルネヴァンリンナ理論がある。[25] にその一連の研究

成果とその応用がまとめられている。金子と筆者は確率論的考察を通して、このトロピカルネヴァンリンナ理論が対象とする関数のクラスとその定義域の拡張を試みた ([6])。また、Baker-Norine [8] によって有限グラフ間の調和射に対するリーマン-フルウィッツの定理の類似が得られているが、金子と筆者はこれを前述した確率論的方法をもとに考察し、強い再帰性を持つ無限グラフ間の調和射に対してネヴァンリンナ理論の類似を示し、Baker らのリーマン-フルウィッツの定理の拡張を試みている ([7])。

参考文献

- [1] A. Atsui, A second main theorem of Nevanlinna theory for meromorphic functions on complex submanifolds in $\mathbb{C}^n$, *Potential Anal.* 29 (2008), 119—138.
- [2] A. Atsui, On the number of omitted values by a meromorphic function of finite energy and heat diffusions, *J. Geom. Anal.* 20 (2010), no. 4, 1008–1025.
- [3] A. Atsui, Nevanlinna-type theorems for meromorphic functions on non-positively curved Kähler manifolds, *Forum Math.* 30 (2017), 171–189.
- [4] A. Atsui, Default functions and Liouville type theorems based on symmetric diffusion, *J. Math. Soc. Japan*, 73 (2021), 525—551.
- [5] 厚地 淳, 確率論と関数論, SGC ライブラリ 176, サイエンス社, 2022.
- [6] A. Atsui and H. Kaneko, Nevanlinna Theory on Infinite Graphs, *Comput. Methods Funct. Theory* 25(2025), 363–391.
- [7] A. Atsui and H. Kaneko, Nevanlinna theory for harmonic morphisms between graphs, 準備中.
- [8] M. Baker and S. Norine, Harmonic Morphisms and Hyperelliptic Graphs, *International Mathematics Research Notices*, Vol. 2009, No. 15 (2009), 2914—2955.
- [9] R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*. Springer, 1995.
- [10] T. K. Carne, Brownian motion and Nevanlinna theory. *Proc. London Math. Soc.* 52(1986), 349–368.
- [11] M. Fukushima and M. Okada, On conformal martingale diffusions and pluripolar sets, *Jour. Funct. Anal.* 55 (1984), 377–388.
- [12] M. Fukushima and M. Okada, On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions. *Acta Math.* 159 (1987), 171–213.
- [13] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd Edition, Walter de Gruyter (2010).
- [14] B. Gaveau and J. Vauthier, Répartition des zéros des fonctions de type exponentiel sur une variété algébrique affine lisse, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 283(1976), 635–638.
- [15] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe, Conformal martingales, *Invent. Math.*, 16 (1972), 271–308.
- [16] P. Griffiths and J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.* 130 (1973), 145–220.
- [17] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36 (1999) 135–

- [18] R. G. Halburd and N. J. Southall, Tropical Nevanlinna theory and ultra-discrete equations. *International Mathematics Research Notices* 2009 (2009), 887–911.
- [19] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, AMS, 2001.
- [20] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed. North Holland, 1992.
- [21] 金子 宏, 多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程, *数学* 41(1989), 345–375.
- [22] H. Kaneko, A stochastic approach to a Liouville property for plurisubharmonic functions, *J. Math. Soc. Japan* 41 (1989), No. 2, 291–299.
- [23] H. Kaneko and S. Taniguchi, A stochastic approach to the Šilov boundary, *Jour. Func. Anal.* 74 (1987), 415–429.
- [24] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Graduate Texts in Mathematics), 2nd ed. Springer, 1998.
- [25] R. Korhonen, I. Laine, and K. Tohge, *Tropical Value Distribution Theory and Ultra-Discrete Equations*, World Scientific, Singapore 2015.
- [26] I. Laine and K. Tohge, Tropical Nevanlinna theory and second main theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society* 102(5) (2009), 883–922.
- [27] P. Li and S. T. Yau, Curvature and holomorphic mappings of complete Kähler manifolds, *Comp. Math.* 73 (1990), 125–144.
- [28] P. Malliavin, Fonctions de Green d’un ouvert strictement pseudo-covexe et classe de Nevanlinna, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 278 (1974), Série A, 141–144.
- [29] S. Pigola, M. Rigoli and A. G. Setti, *Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis*, Birkhäuser, 2008.
- [30] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed, Springer, New York, 2004.
- [31] W. Stoll, The Ahlfors-Weyl theorem of meromorphic maps on parabolic manifolds, *Lecture Notes in Math.*, 981, Springer, 1983.
- [32] 谷口説男, 確率幾何解析 (朝倉数学大系 15), 朝倉書店, 2021.
- [33] S. T. Yau, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, 100 (1978), 197–203.