

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

(1日目／9月1日)

2026年9月

於 神戸大学

超理想頂点のある双曲三角形が生成する三角群のディリクレ基本多角形の決定

牛島 顕 (兵庫県立大学 国際商経学部)*¹

中西 敏浩 (大阪公立大学 数学研究所)*²

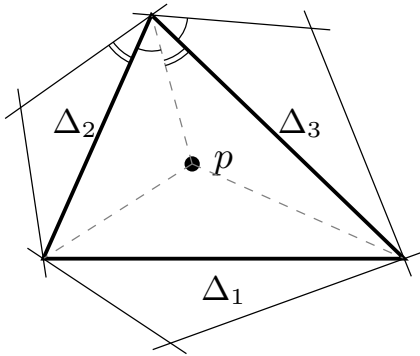
双曲平面 $(\mathbb{H}^2, \rho)$ 上の三角形 Δ に対し, 各辺 (を含む 3 本の直線) での折り返しの合成で生成される, 向きを保つ等長変換からなる群を考える. この群が離散群となるとき, これは**三角群**と呼ばれる. 元の三角形と, いずれかの辺での折り返しによる像との和集合は, この群 Γ_Δ の基本領域の 1 つであるが, ここでは三角形の頂点の像ではない点 $p \in \mathbb{H}^2$ に対して定まる**ディリクレ基本多角形**と呼ばれる基本領域を考える. これは次で定義される:

$$D_p(\Gamma_\Delta) := \bigcap_{f \in \Gamma_\Delta} H_p(f), \quad \text{ただし} \quad H_p(f) := \{q \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(q, p) \leq \rho(q, f(p))\}.$$

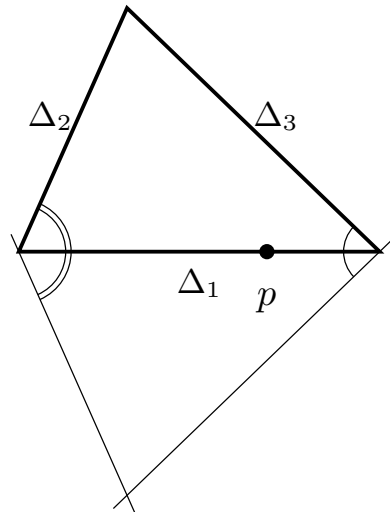
無限個の集合の共通部分からなるこの集合の具体的な形は, 辺 Δ_i での折り返しを R_i と表すとき, [1] により次の表示が得られている:

$$D_p(\Gamma_\Delta) = \begin{cases} \bigcap_{i,j=1,2,3} H_p(R_i \circ R_j), & \text{ただし, } p \text{ が } \Delta \text{ の内部にあるとき;} \\ \bigcap_{j=1,2,3} (H_p(R_i \circ R_j) \cap H_p(R_j \circ R_i)), & \text{ただし, } p \text{ が辺 } \Delta_i \text{ 上にあるとき.} \end{cases}$$

この表示に現れる二つの場合をそれぞれ図示すると以下のようなになる.



(1) p が Δ の内部にあるとき



(2) p が Δ_1 上にあるとき

*¹ e-mail: ushijima@em.u-hyogo.ac.jp

*² e-mail: tosihiro@riko.shimane-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22K03309) の助成を受けたものである。

上記の表示の証明には、双曲三角形に対するチェバの定理が中心的な役割を果たす。また、上記の結果の拡張として、幾つかの頂点が双曲平面の無限遠円周 $\partial\mathbb{H}^2$ 上にある場合、つまり理想頂点 (ideal vertex) がある場合にも $D_p(\Gamma_\Delta)$ が同様の形で決定されることや、三角群の高次元化に当たる単体群に対する結果が [1, 2] で報告されている。

本稿の結果は、双曲三角形の頂点の位置をさらに一般化するものである。

定理

上記の $D_p(\Gamma_\Delta)$ の表示は、頂点の幾つかが射影円盤モデルにおけるその外側にある場合、すなわち超理想頂点 (ultraideal vertex) が双曲三角形にある場合にも成り立つ。

この定理の証明には、通常の頂点、理想頂点、超理想頂点が混在する三角形にも適用できるように拡張されたチェバの定理を用いる。その主張は以下の通りである。

命題 ([3])

辺 Δ_i に相対する頂点を通る直線を l_i とするとき、3本の直線 l_1, l_2, l_3 が Δ の内部の一点で交わることは、以下の等式が成り立つこととは同値である：

$$\frac{r(l_1, \Delta_2)}{r(l_1, \Delta_3)} \frac{r(l_2, \Delta_3)}{r(l_2, \Delta_1)} \frac{r(l_3, \Delta_1)}{r(l_3, \Delta_2)} = 1.$$

ここで、例えば $r(l_1, \Delta_2)$ は、次で定義される値である：

- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が通常の頂点なら、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 との成す角を正弦関数 $\sin$ で写したものである；
- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が理想頂点なら、この点を中心とする horocycle を任意に 1 つ取り、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 とで挟まれる部分の弧長である；
- 頂点 $\Delta_2 \cap \Delta_3$ が超理想頂点なら、 $r(l_1, \Delta_2)$ は辺 Δ_2 を含む直線と l_1 との間の距離を双曲正弦関数 $\sinh$ で写したものである。

参考文献

- [1] 梅本 悠莉子, *On Dirichlet fundamental domains for Fuchsian groups*, 2010 年度修士論文 (大阪市立大学理学部).
- [2] 小森 洋平, 梅本 悠莉子, *On Dirichlet polyhedra for generalized simplex groups*, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会函数論分科会講演アブストラクト.
- [3] 牛島 顕, *Extensions of Ceva's and Menelaus' theorems for generalized triangles in the hyperbolic plane*, プレプリント

Newton-Mandelbrot set

Shunji HORIGUCHI

The Wasan(Japanese mathematics in the Edo period(1603-1868:national isolation)) of 1673 leads to the extension of Mandelbrot set, i.e., the Newton-Mandelbrot set(Def. 1(2)). We use the Newton-Mandelbrot set to show that the complex plane continuously transforms the Mandelbrot set and the Multibrot set(Thm. 4). This shows the originality of Japanese traditional mathematics (Wasan).

Definition 1. (1) Let $\mathbb{C}$ be the complex plane and $n(>=2)$ a natural number.

$$M_n := \{c \in \mathbb{C} \mid z_0 = 0, z_{k+1} = z_k^n + c, \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| < \infty\} \quad (1)$$

Here, M_2 is called the Mandelbrot set(1979), and $M_n(n>=3)$ the Multibrot set.

(2) Let $p(>=2)$ be a natural number and m a real number.

$$NM_p(m) := \left\{c \in \mathbb{C} \mid z_0 = 0, z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^p - c}{mz_k^{p-1} - 1}, \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| < \infty\right\} \quad (2)$$

It is called the Newton-Mandelbrot set. In particular, $NM_2(0)$ is the Mandelbrot set M_2 and $NM_p(0)(p>=3)$ is the Multibrot set M_p .

$NM_p(m)$ can be considered as a picture. This is obtained from the formula (2) when m is determined. We can obtain $NM_p(m)$ using a computer.

Theorem 2(Douady and Hubbard[2]). *The Mandelbrot set and the Multibrot set are connected and closed sets.*

Theorem 3(Mitsuhiro Shishikura[3]). *The Boundary of the Mandelbrot Set has Hausdorff dimension 2.*

Theorem 4([1]). *The complex plane $\mathbb{C}$ can be continuously transformed to Mandelbrot set M_2 or Multibrot set $M_p(p>=3)$.*

Proof. If we apply $f(z)=z^p-z+c(p>=2)$ to Newton's method, then the following is obtained.

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^p - z_k + c}{(z_k^p - z_k + c)'} = \frac{(p-1)z_k^p - c}{pz_k^{p-1} - 1}$$

In this case, let $z_0 = 0$ and $z_1 = c$. This is the formula of $NM_{p,p,c}$, and it is the following set.

$$NM_p(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{such that } z_k \text{ converges to the root of } f(z)=0 \text{ or } z_k \text{ performs various actions within } \mathbb{C} \text{ (except } z_k=(1/p)^{1/(p-1)}).\}$$

Therefore, $NM_p(p)$ is the connected set, and $\mathbb{C}$ is represented as follows.

$$\mathbb{C} = NM_p(p) \cup (1/p)^{1/(p-1)}$$

Here, if we continuously move from p to 0, then $(1/p)^{1/(p-1)} = \infty$ and $pz_k^{p-1} - 1 = -1$. Hence, $\mathbb{C}$ transforms to $(NM_p(0)=)M_p$ continuously. $\square$

Example 5. If $f(z)=z^3-z+c$ then $z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - z_k + c}{(z_k^3 - z_k + c)'} = \frac{(3-1)z_k^3 - c}{3z_k^2 - 1}$.

This is the formula of $NM_3(3)$. From $3z_k^2 - 1 = 0$, $z_k = \pm(1/3)^{1/2}$ is obtained. Then $\mathbb{C}$ is represented as follows.

$$\mathbb{C} = NM_3(3) \cup \{\pm(1/3)^{1/2}\}$$

Here, if we continuously move from 3 to 0, then $3z_k^2-1=-1, |z_k|=|\pm(1/3)^{1/2}|=\infty$, and $\mathcal{C}$ transfers to $(NM_3(0)=)M_3$ continuously.

Example 6. We show $NM_2(m)$ approaching M_2 . The recurrence formula of $NM_2(m)$ is this.

$$z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^2 - c}{mz_k - 1}$$

If m continuously approaches 0, then this approaches $z_{k+1}=z_k^2+c$. We will show the following examples. (1) $NM_2(-1)$ (2) $NM_2(0.1)$ (3) $NM_2(0.5)$ (4) $NM_2(1)$

Next, we will discuss the Fatou set, the Julia set, and Newton's map. Newton's map for $f_p(z)=z^p-z+c$ is this. Here, add the parameter m to the notation $f_p(z)$ to write it as $f_{p,m}(z)$.

$$Nf_{p,(m)=p}(z) = z - \frac{z^p - z + c}{(z^p - z + c)'} = \frac{(p(m)-1)z^p - c}{p(m)z^{p-1} - 1}$$

Let $F(Nf_{p,m}(z))$, $J(Nf_{p,m}(z))$ be the Fatou set, the Julia set for $Nf_{p,m}(z)$ in the Riemann sphere, respectively. Let $c_p=z=(1/p)^{1/(p-1)}$. Then $\mathcal{C}$ is represented as follows.

$$\mathcal{C}=(F(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}), c_p \in J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}$$

$$\text{where } \infty \notin (F(Nf_p(z,m)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_p(z,m)) \cap \mathcal{C}).$$

Now, we obtain the following.

Proposition 7. If $m \rightarrow 0$, then $\mathcal{C}=(F(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,m}(z)) \cap \mathcal{C})$, continuously transformed to $\mathcal{C}=(F(Nf_{p,0}(z)) \cap \mathcal{C}) \cup (J(Nf_{p,0}(z)) \cap \mathcal{C})$, $c_0=\infty \notin \mathcal{C}$ where $Nf_{p,0}(z)=z^p+c$.

References

- [1] S. Horiguchi: Newton-Mandelbrot set and Murase-Mandelbrot set(ver.4), 2026-5-5
<http://arxiv.org/abs/2502.14872>
- [2] A. Douady and J. Hubbard: Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.Acad. Sci. Paris 294 (1982), 123-126.
- [3] Mitsuhiro Shishikura: The Boundary of the Mandelbrot Set Has Hausdorff Dimension 2, Astérisque 222, 389-405 (1994).
- [4] Andrew Brown: The Mandelbrot Set, mandelbrot.pdf (ubc.ca), 2008/4
- [5] Robert P. Munafo: Multibrot Set, [Multibrot Set](#), [Mu-Ency at MROB](#)
- [6] S. Horiguchi: The Formulas to Compare the Convergences of Newton's Method and the Extended Newton's Method (Tsuchikura-Horiguchi Method) and the Numerical Calculations, Applied Mathematics <http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.71004> (7) 40-60
- [7] Yoshimasu Murase: Sanpoufutsudankai, 1673(Book in Japanese)(Readers do not need to read this old book of Japanese archaic texts.)
- [8] Takeo Suzuki : Wasan no seiritsu(Book in Japanese), KOUSEISHA KOUSEIKAKU Co., Ltd., 2007(The three formulas derived by Murase are described in modern language.=村瀬の導いた3つの式が現代語で記述されている.)

Shunji Horiguchi
shunhori@seagreen.ocn.ne.jp

Analytic continuation of local zeta functions to a slit complex plane

神本 丈 (九州大学)*¹

水野 宏真 (九州産業大学)*²

野瀬 敏洋 (福岡工業大学)*³

1 導入

本講演では、次の積分で定義される局所ゼータ関数について考える：

$$Z_\phi(s; f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \phi(x) dx \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

ここで、 f, ϕ は原点の開近傍 U 上で定義された実数値連続関数で ϕ の台は U に含まれるものとする。上の積分は半平面 $\operatorname{Re}(s) > -c_0(f)$ で広義一様収束するため、そこでの正則関数とみなすことができる。ここで、

$$c_0(f) := \sup\{c \geq 0 : \text{原点の近傍 } V \text{ が存在して, } |f|^{-c} \in L^1(V)\}$$

は f の log canonical threshold や extendibility exponent などと呼ばれる不変量である。多くの場合に、 $Z_\phi(s; f)$ はさらに広い領域に解析接続されることが知られており、その解析接続の様子は f の特異点論的な性質に強く影響を受ける。

f が実解析的かつ ϕ が C^∞ 級である場合には、広中の特異点解消定理の適用と部分積分により $Z_\phi(s; f)$ は全平面に有理型解析接続される。さらに、 $Z_\phi(s; f)$ の全ての極は負の実軸上に存在し、 $\phi(0) > 0, \phi(x) \geq 0$ という仮定のもとで $s = -c_0(f)$ に極を持つことがわかる ([2])。

f の仮定を C^∞ 級にまで弱めて、 $Z_\phi(s; f)$ の解析接続の様子を考察してみよう。まず論文 [1] において、実解析関数の場合と同様の解析接続が成立するための条件について、強い結果が得られている。一方で f が原点で平坦 (Taylor 級数が零) な項を持つ場合、 $Z_\phi(s; f)$ が $s = -c_0(f)$ に極ではない特異点を持つ例が知られている ([2])。したがって、 f が C^∞ 級である場合には全平面への有理型解析接続は一般に成立せず、 $Z_\phi(s; f)$ の特異点についてはいまだにわからないことが多い。これまでに知られている特異点が全て負の実軸上に現れていることから次のような問題が自然に想起される。

問題 1 $Z_\phi(s; f)$ が領域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に正則に解析接続されるための条件を求めよ。

*¹e-mail: joe@math.kyushu-u.ac.jp

*²e-mail: h.mizuno@ip.kyusan-u.ac.jp

*³e-mail: nose@fit.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:JP25K07037, JP26K06847) の助成を受けたものである。

キーワード: local zeta functions, flat functions, analytic continuation

2 主結果

本講演では前述の問題に関して $n = 1$ の場合を考える. f が原点で平坦でない場合, f が C^∞ 級であれば $Z_\phi(s; f)$ が全平面へ有理型解析接続され負の実軸上に極を持つことが容易に示される. f が原点で平坦である場合も含めて, 一般に f が原点においてある種の連続性を持つ場合, 問題 1 の解析接続が成立することが示される.

定理 2 $\delta > 0$ とする. ϕ は $(-\delta, \delta)$ 上連続であり, f が次の条件を満たすとする.

- (i) $f(x)$ は $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ 上 C^1 級かつ $f'(x) \neq 0$. (ii) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x)/f'(x)$ が存在する. このとき, $Z_\phi(s; f)$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に正則に解析接続される.

定理 2 においては f は C^∞ 級である必要はなく, かなり広いクラスの関数に対して $Z_\phi(s; f)$ の正則な解析接続が得られる. この結果は, $Z_\phi(s; f)$ の特異点が $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -c_0(f)]$ に存在しないことのみを示すもので, $s = -c_0(f)$ における特異点の性質や $(-\infty, -c_0(f)]$ での特異点の有無については分からない. この定理の証明は変数変換により次のような連続関数の Mellin 変換の解析接続可能性に帰着される.

定理 3 $a \in \mathbb{R}$ とする. ψ を $(0, \infty)$ 上の連続関数でコンパクトな台を持つものとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow +0} \psi(x)/x^a$ が存在すれば, Mellin 変換 $M[\psi](s) = \int_0^\infty x^{s-1} \psi(x) dx$ は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -a]$ に正則に解析接続される.

定理 3 はまず ψ が実解析関数の場合に証明し, Weierstrass の近似定理を用いて一般の連続関数の場合に拡張する. 定理 2 の条件 (ii) は変数変換後の被積分関数が定理 3 の条件を満たすための条件であり, f に課すべき条件として本質的に重要なものである.

条件 (ii) の妥当性について考える. 条件 (ii) は原点で平坦でない場合は常に成立し, 平坦である場合でもある種の凸性を持つ場合は成立する. 一方, [3] において条件 (i) を満たすが条件 (ii) を満たさない関数が構成されているが, その関数に関する局所ゼータ関数が問題 1 のような解析接続を持つかどうかはわかっていない. また, $Z_\phi(s; f)$ が実軸以外に特異点を持つような連続関数 f の存在も知られていない. したがって, 条件 (ii) を満たさない連続関数 f で $Z_\phi(s; f)$ が実軸以外に特異点を持つものを構成することが今後の課題である.

参考文献

- [1] J. Kamimoto and T. Nose: Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Soc. Univ. Tokyo, **23** (2016), 425-485.
- [2] J. Kamimoto and T. Nose: Non-polar singularities of local zeta functions in some smooth case, Trans. Amer. Math. Soc., **372** (2019), 661-676.
- [3] J. Kamimoto, H. Mizuno and T. Nose: Analytic continuation of local zeta functions to a slit complex plane: the one-dimensional case, submitted.

Everywhere divergence of tangential parabolic limits of Gauss-Weierstrass integrals

Hiroaki Aikawa (Chubu University)*

We investigate the initial limits of Gauss-Weierstrass integrals over the upper half space $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ with $n \geq 1$. By

$$Wf(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy.$$

we denote the Gauss-Weierstrass integral of a locally integrable function f on $\mathbb{R}^n$.

The classical Fatou theorem says that the Poisson integral of a function f on $\mathbb{R}^n$ has nontangential limit $f(\xi)$ at almost every boundary point $\xi \in \mathbb{R}^n$. See [3] for the initial paper. Watson [6, Theorem 4.1] proved the following parabolic Fatou theorem.

Theorem A. *Suppose that the Gauss-Weierstrass integral $Wf(x, t)$ of a function f on $\mathbb{R}^n$ exists. Then $Wf(x, t)$ has a parabolic limit $f(\xi)$ at almost every boundary point $\xi \in \mathbb{R}^n$, i.e.,*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ |x-\xi| < mt^{1/2}}} Wf(x, t) = f(\xi) \quad \text{for every } m > 0. \quad (1)$$

The sharpness of nontangential limits of the Poisson integral is known as the Littlewood theorem. See [4] for the initial reference. Watson [6, Theorem 4.3] gave the following sharpness of the parabolic approach in Theorem A.

Theorem B. *Let $n = 1$. Let $h(t)$ be a positive function of $t > 0$ such that $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ and $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t^{1/2} = \infty$. For each $\xi \in \mathbb{R}$ let L_ξ denote the graph $\{(x, t) : x - \xi = h(t)\}$. Then, there exists a bounded function f on $\mathbb{R}$ such that*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in L_\xi}} Wf(x, t) \text{ diverges for almost every } \xi \in \mathbb{R}.$$

We strengthen Theorem B by constructing a bounded function f for which the tangential parabolic limit of the Gauss-Weierstrass integral Wf diverges *everywhere*, rather than *almost everywhere*. We also treat various approaches more general than translated graphs.

Definition 1. Let γ be a continuum (connected compact set) in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. We say that γ is *tangentially parabolic* at $(\xi, 0)$ if the following two conditions hold:

- (i) $\gamma \cap \partial \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(\xi, 0)\}$.
- (ii) For each $m > 0$ there is $\delta > 0$ such that

$$\{(x, t) \in \gamma : 0 \leq t \leq \delta\} \subset \{(x, t) : |x - \xi| \geq mt^{1/2}\}. \quad (2)$$

*e-mail: aikawa@fsc.chubu.ac.jp

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03281.

2020 Mathematics Subject Classification: 31B35, 35K05, 42B25.

Keywords: Gauss-Weierstrass integral, parabolic Fatou theorem, tangential parabolic limits.

If the precise ξ is irrelevant, we simply say that γ is tangentially parabolic. We should, however, note that $\gamma \cap \partial\mathbb{R}_+^{n+1}$ is a single point. Observe that (ii) implies that γ lies eventually outside a parabolic approach region $\{(x, t) : |x - \xi| < mt^{1/2}\}$ for any $m > 0$. By $d_p((x, t), (y, s))$ we denote the parabolic distance $|x - y| + |t - s|^{1/2}$ between (x, t) and (y, s) .

Definition 2. Let γ and γ' be continua in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. We say that γ' is *at least as tangential as* γ if there exists a continuous mapping T on γ with the properties:

- (i) $T\gamma = \gamma'$.
- (ii) T preserves the t -coordinate, i.e., T is written as $T(x, t) = (T_t x, t)$.
- (iii) T is non-contracting, i.e., there is a positive constant c_T such that

$$d_p(T(x, t), T(y, s)) \geq c_T d_p((x, t), (y, s)) \quad \text{for } (x, t), (y, s) \in \gamma. \quad (3)$$

We say that γ and γ' have equivalent tangency if γ' is at least as tangential as γ , and vice versa.

Obviously, γ and its translation $\gamma + \xi = \{(x + \xi, t) : (x, t) \in \gamma\}$ have equivalent tangency. Moreover, γ and its rotation around the t -axis have equivalent tangency. The main result of this note is the following.

Theorem 3. Let γ be a tangentially parabolic continuum in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Then there exists a bounded function f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in \gamma'}} Wf(x, t) \text{ diverges}$$

for every continuum γ' at least as tangential as γ .

Corollary 4. Let γ be a tangentially parabolic curve in the closure of $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Then, there exists a bounded function f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (x, t) \in \gamma + \xi}} Wf(x, t) \text{ diverges for every } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The construction of f in Theorem 3 are given in the same spirit as in [1] and [2]. Nagel-Stein [5] improved the Fatou theorem so that the approach region can include a *non-nontangential* sequence. Watson [6, Theorem 4.5] proved a parabolic counterpart of Nagel-Stein's non-nontangential boundary limit theorem. We compare the tangential parabolic approach and the non-nontangential parabolic approach of Nagel-Stein type.

References

- [1] H. Aikawa, *Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 125–136.
- [2] ———, *Fatou and Littlewood theorems for Poisson integrals with respect to non-integrable kernels*, Complex Var. Theory Appl. **49** (2004), 511–528.
- [3] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta. Math. **30** (1906), 335–400.
- [4] J. E. Littlewood, *On a theorem of Fatou*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 172–176.
- [5] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.
- [6] N. A. Watson, *Parabolic equations on an infinite strip*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 127, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

スリット写像に関連する Loewner chain への埋め込み問題

堀田 一敬

(山口大学大学院創成科学研究科)

Sebastian Schleißinger (University of Würzburg)

1. 関数族 $\mathcal{S}$ を、正規化条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たす $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の正則単葉関数全体からなる関数族とする。パラメータ付き正則関数 $(f_t)_{t \geq 0}$ が

$$f_t(0) = 0, \quad e^{-t} f_t \in \mathcal{S}, \quad f_s(\mathbb{D}) \subseteq f_t(\mathbb{D}) \quad (s \leq t)$$

を満たすとき、これを正規化された radial Loewner chain という。以後、単に Loewner chain と呼ぶ。Loewner chain は、ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して Loewner の偏微分方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = z f_t'(z) p(t, z)$$

を満たす。ここで $p(t, \cdot)$ は、ほとんどすべての t に対して $\mathbb{D}$ から右半平面への正則写像であり、 $p(t, 0) = 1$ を満たす。また各 $z \in \mathbb{D}$ に対して $t \mapsto p(t, z)$ は可測である。このような関数 p は Herglotz function と呼ばれる。逆に任意の Herglotz function は一意的に Loewner chain を定める。

Loewner による元来の研究 [Löw23] はスリット写像に関するものであった。ここで $\mathbb{C}$ におけるスリットとは、ある点 $z_0 \in \mathbb{C}$ と ∞ とを結ぶジョルダン曲線である。 $f(\mathbb{D})$ がスリットの補集合であるような $f \in \mathcal{S}$ をスリット写像と呼ぶ。Loewner は、スリット写像 $f \in \mathcal{S}$ はただ一つの Loewner chain $\{f_t\}$ に埋め込めることを示した。またこのとき、 $\{f_t\}$ は t に関して C^1 級である。さらに、連続関数 $\kappa : [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{D}$ が存在して

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = z f_t'(z) \frac{\kappa(t) - z}{\kappa(t) + z} \quad (1)$$

が成り立つ。本講演では、この Loewner の定理を出発点として、スリット写像に関するいくつかの埋め込み問題を考察する。

2. $f \in \mathcal{S}$ に対して $f_0 = f$ となる Loewner chain が存在するとき、 f は Loewner chain に埋め込めるといふ。次は埋め込み問題に関して最も基本的な性質である。

定理 1 ([Pom75]). 任意の $f \in \mathcal{S}$ はある Loewner chain に埋め込むことができる。

2-1. Loewner chain (f_t) に対して、各 $z \in \mathbb{D}$ について写像 $t \mapsto f_t(z)$ がすべての $t \geq 0$ で微分可能であるとき、 (f_t) は微分可能であるということにする。そこで次のような関数族を考える。

$$\mathcal{S}_d := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は微分可能な Loewner chain に埋め込める}\}$$

前述の Loewner の結果により、すべてのスリット写像は $\mathcal{S}_d$ に属する。また $f(\mathbb{D})$ が閉 Jordan 曲線によって囲まれる領域である場合も $\mathcal{S}_d$ に属する。

次に、 $f \in \mathcal{S}$ が $\mathbb{D}$ を二つの互いに交わらないスリットの補集合へ写すとする。このとき、ある区間 $[0, T_1]$ で一つ目のスリットの一部を消し、次の区間 $(T_1, T_2]$ で二つ目のスリットの一部を消す、という操作を繰り返すことで、 f を Loewner chain に埋め込むことができる。この場合、 (f_t) は $t = T_1$ で微分可能ではない。ただ、二つのスリットを同時に消していくように構成すれば、対応する Loewner chain をすべての時刻で微分可能に取ることができる。より一般に、 $f(\mathbb{D})$ が有限個の互いに交わらないスリットの補集合であるようなものに関しても同様のことが言える ([Böh16, Theorem 2.31]).

ここで $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}$ が成り立つか、という素朴な疑問が生じる。しかし、これは偽である。

定理 2 ([HS24]). $f \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_d$ となる f が存在する.

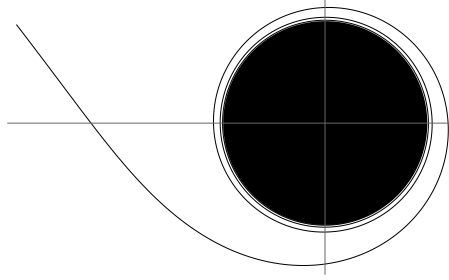
2-2. 次に

$$\mathcal{S}_u := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ はただ一つの Loewner chain に埋め込める}\}$$

と定める. すべてのスリット写像は $\mathcal{S}_u$ に属する. このことから直感的には, $f \in \mathcal{S}_u$ であるためには補集合 $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ は「薄い」ものである必要があると思える. したがって, そのような写像については

$$\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) = \partial f(\mathbb{D})$$

が成り立つ, と思うかもしれない. しかしこれは正しくない (Gehring による螺旋領域, 下図参照).



次は $f \in \mathcal{S}_u$ であるための必要条件のいくつかである.

定理 3 ([HS24]). $f \in \mathcal{S}_u$ とする. このとき $f(\mathbb{D})$ は次の性質を満たす.

- (i) $f(\mathbb{D})$ は非有界である.
- (ii) $\partial f(\mathbb{D})$ は連結である.
- (iii) もし $C_1, C_2 \subset \partial f(\mathbb{D})$ が連結・非有界・閉集合であるならば

$$C_1 \subseteq C_2 \quad \text{または} \quad C_2 \subseteq C_1$$

が成り立つ.

(iii) は「一意的な埋め込みを持つためには, 像領域の補集合・境界が一次元的で, 枝分かれのない形をしていなければならない」という事を意味している.

2-3. 最後に, Loewner 微分方程式の特別な形について考える.

$$\mathcal{S}_s^1 := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は連続な } \kappa \text{ に対する (1) に埋め込める}\}$$

$$\mathcal{S}_s^2 := \{f \in \mathcal{S} : f \text{ は可測な } \kappa \text{ に対する (1) に埋め込める}\}$$

これらのクラスに関しては, 近年 SLE と関連してのいくつかの研究結果がある. 時間が許せば, $\mathcal{S}_s^1$ および $\mathcal{S}_s^2$ に関する既知の結果および未解決問題について紹介する.

参考文献

- [Böh16] C. Böhm, *Loewner equations in multiply connected domains*, PhD dissertation, Würzburg, 2016.
- [HS24] I. Hotta and S. Schleißinger, *Problems related to conformal slit-mappings*, Complex Var. Elliptic Equ. **69** (2024), no. 2, 215–233.
- [Löw23] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I*, Math. Ann. **89** (1923), no. 1, 103–121.
- [Pom75] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

Boundary characterizations of little Bloch and VMOA functions on the half-plane

松崎 克彦 (早稲田大学)
陶 菲 (早稲田大学)

Pommerenke¹ gave fundamental characterizations of the boundary geometry of conformal mappings in terms of the vanishing behavior of the pre-Schwarzian derivative. If F is a conformal mapping of the unit disk $\mathbb{D}$ onto a bounded Jordan domain, then the boundary curve $\partial F(\mathbb{D})$ is asymptotically conformal if and only if $\log F'$ belongs to the little Bloch space $B_0(\mathbb{D})$. He also proved the rectifiable analogue: the boundary curve is asymptotically smooth if and only if $\log F'$ belongs to $\text{VMOA}(\mathbb{D})$, the space of analytic functions of vanishing mean oscillation.

The purpose of this work is to extend these results to conformal mappings of the upper half-plane onto unbounded quasidisks. Let $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ and let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be a conformal mapping onto an unbounded quasidisk $\Omega \subset \mathbb{C}$ such that $G(\infty) = \infty$. We denote by $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ the boundary extension of G . Since Ω is a quasidisk, the map G extends to a quasiconformal self-homeomorphism of the plane, and hence g is a quasisymmetric embedding of $\mathbb{R}$ onto the quasicircle Γ .

For a conformal mapping G on $\mathbb{H}$, the derivative of logarithm $\log G'$ is a Bloch function: $\sup_{z \in \mathbb{H}} (\text{Im } z) |(\log G')'(z)| < \infty$. We say that a Bloch function $\log G'$ belongs to the little Bloch space $B_0(\mathbb{H})$ if $\lim_{\text{Im } z \rightarrow 0} (\text{Im } z) |(\log G')'(z)| = 0$ uniformly in $\text{Re } z \in \mathbb{R}$. We also consider $\text{VMOA}(\mathbb{H})$, which may be characterized by the condition that the boundary values of the function belong to $\text{VMO}(\mathbb{R})$, or equivalently by the vanishing Carleson measure condition for $(\text{Im } z) |(\log G')'(z)|^2 dx dy$.

A difficulty in the half-plane case is the non-compactness of the boundary $\mathbb{R}$. In the disk case, smallness on the parameter circle and smallness on the boundary curve are uniformly comparable. In the present setting, however, intervals may escape to infinity, and the boundary map g need not be uniformly continuous. Thus the usual definition of asymptotic conformality is not sufficient for a global theorem on $\mathbb{H}$. To overcome this difficulty, we use relative versions of asymptotic conformality and asymptotic smoothness with respect to the boundary parametrization g .

We say that Γ is asymptotically conformal relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ if

$$\sup_{0 < x_2 - x_1 \leq t} \left(\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \frac{|g(x_1) - g(x)| + |g(x) - g(x_2)|}{|g(x_1) - g(x_2)|} \right) \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0).$$

We also use the infinitesimal form of quasisymmetry. A quasisymmetric embedding $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is called asymptotically symmetric if, for every $\varepsilon > 0$ and every $t > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\frac{|x - a|}{|x - b|} \leq t \implies \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x) - g(b)|} \leq (1 + \varepsilon)t$$

whenever $x, a, b \in \mathbb{R}$ lie in an interval of length δ .

Our first result is the following half-plane analogue of Pommerenke's little Bloch characterization.

Theorem 1. *Let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be a conformal mapping with $G(\infty) = \infty$, and let $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ be its boundary extension. Then the following conditions are equivalent:*

¹ On univalent functions, Bloch functions and VMOA, Math. Ann. **236** (1978), 199–208.

1. $\log G' \in B_0(\mathbb{H})$;
2. Γ is an asymptotically conformal quasicircle relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$;
3. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is an asymptotically symmetric embedding with image Γ .

This theorem shows that three different notions are identical in the upper half-plane setting: the analytic vanishing of the pre-Schwarzian derivative, the relative asymptotic flatness of the boundary curve, and the asymptotic symmetry of the boundary parametrization. The relative formulation is essential in the non-compact case. Without it, one has to impose additional uniform continuity assumptions on g or on g^{-1} in order to pass between small parameter intervals on $\mathbb{R}$ and small arcs on Γ .

We next consider the VMOA version. Recall that a locally rectifiable Jordan curve Γ is chord-arc if $\ell(\widehat{ab}) \leq C|a - b|$ for all distinct points $a, b \in \Gamma$, where $\ell(\widehat{ab})$ denotes the length of the subarc between a and b . It is asymptotically smooth if the chord-arc constant tends to 1 at small scales. For the half-plane theorem we again use a relative version: Γ is asymptotically smooth relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ if

$$\sup_{0 < x_2 - x_1 \leq t} \frac{\ell(\widehat{g(x_1)g(x_2)})}{|g(x_1) - g(x_2)|} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0).$$

For the boundary parametrization $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$, this means that the curve becomes chord-arc with constant tending to 1 uniformly over all sufficiently small intervals of the parameter line.

We also say that an embedding $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ with the image Γ being a chord-arc curve is asymptotically smooth if, for every $\varepsilon > 0$ and every $t > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\frac{|x - a|}{|x - b|} \leq t \implies \frac{\ell(\widehat{g(x)g(a)})}{|g(x) - g(b)|} \leq (1 + \varepsilon)t$$

whenever $x, a, b \in \mathbb{R}$ lie in an interval of length δ .

The second result is the VMOA analogue of Theorem 1.

Theorem 2. *Let $G : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ be as above, and let $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega$ be its boundary extension. Then the following conditions are equivalent:*

1. $\log G' \in \text{VMOA}(\mathbb{H})$;
2. Γ is an asymptotically smooth chord-arc curve relative to $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$;
3. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is an asymptotically smooth embedding with image Γ .

The implication from $\text{VMOA}(\mathbb{H})$ to asymptotic smoothness uses the boundary values of $\log G'$. If u denotes the boundary value of $\log G'$, then $u \in \text{VMO}(\mathbb{R})$. The John–Nirenberg inequality gives exponential integrability with constants improving on small intervals. Since the boundary derivative satisfies $g' = e^u$ almost everywhere, this yields sharp estimates for the length of $g([a, b])$ relative to the chord $|g(a) - g(b)|$ when $|a - b|$ is small.

Conversely, relative asymptotic smoothness implies the VMOA condition by localizing the problem on small intervals of $\mathbb{R}$ and reducing it to the disk case. The relative formulation guarantees that the vanishing estimates are uniform even for intervals escaping to infinity. In this way Theorem 2 gives the half-plane analogue of Pommerenke’s characterization of asymptotically smooth boundary curves by VMOA.

Together, these two theorems show that the disk results remain valid for the half-plane once the correct relative geometric notions are used. We note that the relative formulation of curves is equivalent to the original one for the disk, so our results can be regarded as the generalization of Pommerenke’s.

半線形楕円型方程式の解の特異点除去可能性と漸近挙動に関するポテンシャル解析

平田 賢太郎 (広島大学)*

概要

本講演は、冪乗型の湧出項または吸収項をもつ半線形楕円型方程式の解の特異点の除去可能性と漸近挙動に関するものである。孤立点や $n-3$ 次元以下のコンパクト C^∞ 級多様体上にある特異点の除去可能性に関する先行研究を紹介し、Ahlfors 正則条件と一様 Minkowski 条件を満たす $n-2$ 次元以下の特異点集合の除去可能性と荷重付き非接極限の存在 (漸近挙動) に関する研究成果を報告する。

1 関連研究の歴史的背景

1851 年の Riemann の学位論文の中で調和関数や正則関数の孤立特異点の除去可能性が論じられて以降、特異点の分類 (特異点の除去可能性および漸近挙動) は様々な分野において関心の高い研究対象の一つとされている。本講演では、半線形楕円型方程式

$$-\Delta u(x) = V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) \quad (1.1)$$

を考える。ただし、 Δ は $\mathbb{R}^n$ 上の Laplace 作用素、 V は適当な条件を満たす可測関数、 p は正定数である。方程式 (1.1) は、星の内部構造を記述する Lane–Emden 方程式、原子核まわりの電子密度に関わる Thomas–Fermi 方程式、非線形 Schrödinger 方程式の定在波解、化学反応や生物現象を記述する反応拡散方程式の定常状態、 $p = \frac{n+2}{n-2}$ のときは幾何学の山辺問題に関する共形スカラー方程式の特別な場合でもある。本講演では、 $\mathbb{R}^n$ 内の正の次元をもつ閉集合の除去可能性に関心があるため、空間次元は $n \geq 3$ とする。

1.1 孤立特異点の除去可能性と孤立特異点付近での挙動

$|x|^{2-n}$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で調和であり、**基本調和関数**とよばれる。 $\mathbb{R}^n$ の単位開球を $\mathbb{B}$ で表す。

定理 A (Bôcher [6]) $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の正值調和関数 h に対して、 $\mathbb{B}$ 上の調和関数 h_0 と定数 $c_0 \geq 0$ が存在して

$$h(x) = c_0|x|^{2-n} + h_0(x) \quad (x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}) \quad (1.2)$$

と表される。特に、次が成り立つ。

- (1) **極限の存在**： $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2}h(x) = c_0$ である。
- (2) **除去可能性**： $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2}h(x) = 0$ ならば、点 0 は h の除去可能な特異点である。

*e-mail: hiratake@hiroshima-u.ac.jp

本研究は、JSPS 科研費 JP23K03149 の助成を受けたものです。

2020 Mathematics Subject Classification: 35J91, 31B05, 31B10, 31B25, 35A01, 35A21, 35B40, 35B60.

キーワード：特異点の除去可能性、漸近挙動、半線形楕円型方程式、特異解、優調和、劣調和、Ahlfors 正則条件、一様 Minkowski 条件

非線形項をもつ方程式 (1.1) に対して (1.2) のような解の具体的表示を得ることは難しいが, 孤立特異点の分類に関する研究は数多くある. ここでは, $V \equiv \pm 1$ とした方程式

$$-\Delta u(x) = u(x)^p, \quad u(x) > 0, \quad (1.3)$$

$$\Delta u(x) = u(x)^p, \quad u(x) > 0 \quad (1.4)$$

のそれぞれに関する先行研究を紹介する. 方程式を満たす C^2 級関数を解とよぶ.

定理 B (Lions [26]) $1 < p < \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次が成り立つ.

- (1) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) \in [0, +\infty)$ が存在する.
- (2) 除去可能性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) = 0$ ならば, 点 0 は u の除去可能な特異点である (つまり, $u \in C^2(\mathbb{B})$ かつ $\mathbb{B}$ 全体で (1.3) を満たすように拡張可能である).

ポテンシャル論的方法による正值特異解の存在証明は [35] を参照. $p > \frac{n}{n-2}$ のときは

$$c_{p,n} := \left(\frac{2\{p(n-2) - n\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

とすれば, $u(x) = c_{p,n}|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で (1.3) を満たすことに注意する.

定理 C (Gidas & Spruck [19]) $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{2}{p-1}} u(x) = c_{p,n}$ である.

点 0 に特異点をもつ無限個の正值球対称解の存在に関しては [17] を参照.

定理 D (Aviles [3, 4]) $p = \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^{\frac{n-2}{2}} u(x) = \left(\frac{n-2}{\sqrt{2}} \right)^{n-2}$ である.

定理 E (Dancer & Du & Guo [11]) $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.3) の解 u が

$$u(x) \leq c|x|^{-\frac{2}{p-1}} \quad (x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}) \quad (1.5)$$

を満たすならば, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 極限の存在: $\xi \in \mathbb{S}$ に関して一様に $\lim_{r \rightarrow 0+} r^{\frac{2}{p-1}} u(r\xi) = \omega(\xi)$ である. ただし, ω は単位球面 $\mathbb{S}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta_{\mathbb{S}}$ に関する半線形楕円型方程式

$$\Delta_{\mathbb{S}} \omega - c_{p,n}^{p-1} \omega + \omega^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{S} \quad (1.6)$$

の正值解である.

$p > \frac{n+2}{n-2}$ かつ正值球対称解に限れば, 条件 (1.5) は不要である ([27] を参照). $n \geq 4$ かつ $\frac{n+1}{n-3} < p < p_{\text{JL}}(n-1)$ (Joseph–Lundgren 指数) のとき, (1.6) は非定数な正值解をもち, それを用いて (1.3) の非球対称な解を構成できるため ([12] を参照), 極限は ξ に依る.

Laplacian が異符号の場合は少し様相が異なる.

定理 F (Véron [33], Vázquez & Véron [32]) $1 < p < \frac{n}{n-2}$ とする. $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.4) の解 u に対して次のいずれかが成り立つ.

- (1) 除去可能性: 点 0 は u の除去可能な特異点である.
- (2) 弱特異性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) \in (0, +\infty)$ が存在する.
- (3) 強特異性: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{2}{p-1}} u(x) = \left(\frac{2\{n-p(n-2)\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ である.

上記 p の範囲において, $n-2 < \frac{2}{p-1}$ であることに注意する.

定理 G (Brézis & Véron [9]) $p \geq \frac{n}{n-2}$ ならば, $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ 上の (1.4) のすべての解 u に対して, 点 0 は除去可能な特異点である.

1.2 極集合の除去可能性

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする. $u: \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ が優調和であるとは, $u \neq +\infty$, Ω で下半連続, Ω で球面平均値の不等式 (u の球面平均より中心における u の値の方が大きい) を満たすときをいう. $-u$ が Ω で優調和であるとき, u は Ω で劣調和であるという. $E \subset \mathbb{R}^n$ が極集合であるとは, E 上で $u = +\infty$ となる $\mathbb{R}^n$ 上の優調和関数 u が存在するときをいう. 極集合の Hausdorff 次元は高々 $n-2$ である. コンパクト極集合が有界調和関数に対して除去可能であることは Bouligand (1926) により示されたが, より一般に次が成り立つ.

定理 H (Brelot [8]) $E \subset \Omega$ を相対的閉な極集合とし, u を $\Omega \setminus E$ 上の優調和関数とする. u が E の近くで下に有界であるならば, u は Ω 上の優調和関数に拡張できる.

点 $x \in \mathbb{R}^n$ から有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ までの最短距離を $d(x, E)$ で表す. $r > 0$ に対して

$$E(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < r\} \quad (1.7)$$

とし, その n 次元 Lebesgue 測度を $|E(r)|$ で表す. E の m 次元上 Minkowski 容量は

$$\mathcal{M}^m(E) := \limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{|E(r)|}{r^{n-m}}$$

で定義される. 一般に, m 次元 Hausdorff 外測度との関係は $\mathcal{H}^m(E) \leq c \mathcal{M}^m(E)$ である. 従って, $\mathcal{M}^{n-2}(E) < +\infty$ ならば, E は極集合である.

定理 I (Bochner [7], Harvey & Polking [21]) $m \in [0, n-2]$ とし, $E \subset \Omega$ は相対的閉

かつ $\mathcal{M}^m(E) < +\infty$ であるとする. $\Omega \setminus E$ 上の調和関数 h が

$$\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{n-2-m} h(x) = 0 \quad (y \in E \text{ に関して一様に}) \quad (1.8)$$

を満たすならば, h は Ω 上の調和関数に拡張できる.

$n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ のとき, $h(x_1, \dots, x_{n-m}, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_{n-m}^2)^{-\frac{n-2-m}{2}}$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = \dots = x_{n-m} = 0\}$ で調和であるから, 増大条件 (1.8) のオーダーは最良である.

定理 J (Gardiner [18], Riihenta [30]) $m \in [0, n-2]$ とし, $E \subset \Omega$ は相対的閉かつ $\mathcal{M}^m(E) < +\infty$ であるとする. $\Omega \setminus E$ 上の劣調和関数 u に対して, $u^+ := \max\{u, 0\}$ が増大条件 (1.8) を満たすならば, u は Ω 上の劣調和関数に拡張できる.

注意 $m = n-2$ のとき, u^+ に対する条件 (1.8) は u が E の近くで上に有界であることを意味し, 定理 H に含まれる. 条件の緩和については言及されていない.

定理 K $n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ とし, $E \subset \Omega$ を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. $\Omega \setminus E$ 上の (1.4) の解 u に対して次が成り立つ.

- (1) (Véron [34], Grillo [20]) $p \geq \frac{n-m}{n-2-m}$ ならば, u は Ω 全体で (1.4) の C^2 級解になるように拡張できる.
- (2) (Finn & McOwen [15], Finn [16]) $1 < p < \frac{n-m}{n-2-m}$ とする. u が E の各点で同等の増大度をもつならば, 次のいずれかが任意の $y \in E$ に対して成り立つ.
 - (i) $\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{\frac{2}{p-1}} u(x) = \left(\frac{2\{n-m-p(n-2-m)\}}{(p-1)^2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ である.
 - (ii) $\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y$ のとき, $d(x, E)^{n-2-m} u(x) = O(1)$ である.

さらに, $m = n-2$ のときも, (ii) を $\frac{u(x)}{-\log d(x, E)} = O(1)$ に取り換えて成り立つ.

上記 (1) の Sobolev 容量を用いた一般化は [5] を参照. 方程式 (1.3) に対しても同様の結果 [2] が得られたが, 解の拡張は超関数レベルであり, 孤立特異点のときと同様に特異性が除去されるわけではない. 実際, 方程式 (1.3) に対して以下のことが知られている.

定理 L (Rébaï [29], Fakhi [14]) $n \geq 4$ かつ $m \in \{1, \dots, n-3\}$ とし, $E \subset \Omega$ を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. $p > \frac{n-m}{n-2-m}$ ならば, 次が成り立つ.

- (1) E に特異点をもち, 超関数の意味で Ω 全体で (1.3) を満たす解 $u \in C^2(\Omega \setminus E) \cap L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ が存在する. すなわち, Ω 上で $u > 0$ であり

$$\int_{\Omega} u(x)(-\Delta \phi(x)) dx = \int_{\Omega} u(x)^p \phi(x) dx \quad (\phi \in C_c^\infty(\Omega)).$$

- (2) $p < \frac{n+2-m}{n-2-m}$ ならば, 上記の解 u に対して, 定数 $c > 1$ が存在して E の近くで

$$c^{-1} d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}} \leq u(x) \leq c d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}.$$

$p > \frac{n-m}{n-2-m}$ のとき, 特異性 $d(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}$ は正值調和関数の特異性 $d(x, E)^{-(n-2-m)}$ より弱いことに注意する.

定理 M (Adams [1]) $p \geq \frac{n}{n-2}$ とする. Ω 上の (1.3) の超関数解 $u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ に対して, 相対的閉集合 $E \subset \Omega$ が存在して $u \in C^2(\Omega \setminus E)$ かつ E の Hausdorff 次元は高々 $\frac{p(n-2)-n}{p-1}$ である.

この定理から次がわかる: $p > 1$ かつ $m \leq n-2$ のとき

$$p < \frac{n-m}{n-2-m} \iff m > \frac{p(n-2)-n}{p-1}$$

より, p が小さい場合, 特異点集合 E の次元 m は大きくなる. 従って, 無条件では, 超関数レベルでも Ω 全体で (1.3) を満たすように解を拡張することはできない. この場合の特異点集合の除去可能性に関して講演者と小野 (2014) による結果があるが次節で紹介する.

2 主結果

中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の $\mathbb{R}^n$ 内の開球を $B(x, r)$ で表す. 文字 c で一般の正定数を表す (登場の度, 値は異なるかもしれない). 他と区別する必要がある場合は添え字を付して $c_1, c_2, \dots$ などで表す. 2つの正值関数 f, g に対して, 変数 x に無関係な定数 $c > 1$ が存在して $c^{-1}g(x) \leq f(x) \leq cg(x)$ が成り立つとき, $f \approx g$ で表し, c を比較定数という.

2.1 特異点集合に対する条件と例

2.1 節において, $E \subset \mathbb{R}^n$, $m \in [0, n]$ とする. $\mathcal{H}^m$ で m 次元 Hausdorff 外測度を表す.

定義 2.1 (1) E が m 次元 **Ahlfors 正則条件** を満たすとは, 定数 $r_1 > 0$, $c_1 > 1$ が存在して

$$c_1^{-1}r^m \leq \mathcal{H}^m(E \cap B(x, r)) \leq c_1r^m \quad (x \in E, r \in (0, r_1))$$

が成り立つときをいう.

(2) E が m 次元一様 **Minkowski 条件** を満たすとは, 定数 $r_1 > 0$, $c_1 > 1$ が存在して

$$|E(r) \cap B(x, R)| \leq c_1r^{n-m}R^m \quad (x \in E, r, R \in (0, r_1))$$

が成り立つときをいう. ただし, $E(r)$ は (1.7) で与えられる集合である.

例 2.2 (1) $m \in \{1, \dots, n-1\}$ とする. $E \subset \mathbb{R}^n$ が Lipschitz 多様体であるとは, 定数 $r_2 > 0$ が存在して任意の $x \in E$ に対して双 Lipschitz 写像 $\psi: B(x, r_2) \rightarrow \psi(B(x, r_2)) \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\psi(E \cap B(x, r_2)) = \mathbb{R}_0^m \cap \psi(B(x, r_2))$ であるときをいう. ただし, $\mathbb{R}_0^m := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$ である. m 次元 Lipschitz 多様体は, m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の縮小率 $c \in (0, 1)$ の相似変換の組 $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ は開集合条件を満たすとし, $m := \frac{\log N}{-\log c}$ とする. このとき, Ψ によって生成される自己相似集合は, m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす ([23, Section 7] を参照).

m 次元有界閉集合 E の除去可能性, E を特異点集合とする正值解の存在, E における荷重付き非接極限の存在等は, 次の関数をもとに議論される.

例 2.3 $m \in [0, n-2]$ とする. 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ が $0 < \mathcal{H}^m(E) < +\infty$ を満たすならば

$$\rho_E(x) := \int_E |x-y|^{2-n} d\mathcal{H}^m(y) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

は $\mathbb{R}^n$ 上の正值優調和関数であり, $\mathbb{R}^n \setminus E$ で調和である. さらに, E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば

$$\rho_E(x) \approx \begin{cases} d(x, E)^{-(n-2-m)} & (m < n-2) \\ \log \frac{2}{d(x, E)} & (m = n-2) \end{cases} \quad (x \in E(1) \setminus E) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

E における非接極限の定義および特異点除去可能性の証明において次の補題を用いる.

補題 2.4 ([13]) E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば, 定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $y \in E$, $r \in (0, r_1/10)$ に対して, $d(y_r, E) \geq cr$ を満たす $y_r \in B(y, r)$ が存在する.

定義 2.5 $y \in E$, $\theta \geq 1$ に対して, 点 y における E に非接な集合を

$$\mathcal{A}_\theta(y) := \{x \in \Omega \setminus E : |x-y| < \theta d(x, E)\}$$

で表す. E が m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすならば, 補題 2.4 より, $\theta_E \geq 1$ が存在して任意の $y \in E$, $\theta \geq \theta_E$ に対して $\mathcal{A}_\theta(y) \neq \emptyset$ かつ $y \in \overline{\mathcal{A}_\theta(y)}$ である. $\Omega \setminus E$ 上の関数 u が $y \in E$ で非接極限 ℓ をもつとは, 任意の $\theta \geq \theta_E$ に対して $\lim_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} u(x) = \ell$ となることをいう.

2.2 定理の主張

以下において, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) を有界領域, $E \subset \Omega$ を相対的閉集合, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を Borel 可測関数とする. Ω の開部分集合 D において方程式

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad (2.2)$$

を考える. 実数値関数 u が D における (2.2) の解であるとは, $u, f(\cdot, u) \in L^1_{\text{loc}}(D)$ であり

$$\int_D u(x)(-\Delta \phi(x)) dx = \int_D f(x, u(x))\phi(x) dx \quad (\phi \in C_c^\infty(D))$$

を満たすことをいう. 次の定理において解の符号が制限されないことに注意する.

定理 2.6 (H & Ono [22], H [25]) $m \in [0, n-2]$ とし, E は m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たすとする. また, 定数 $c_2 > 0$ と

$$p > 0, \quad \alpha < \min\{2, n-m-p(n-2-m)\}$$

が存在して

$$|f(x, t)| \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} |t|^p \quad (x \in \Omega, t \in \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

を満たすとする。このとき、 $\Omega \setminus E$ における (2.2) の C^1 級解 u が増大条件

$$\lim_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{\rho_E(x)} = 0 \quad (y \in E) \quad (2.4)$$

を満たすならば、 u は Ω 全体で (2.2) を満たす連続解に拡張できる。さらに、 $\alpha < 1$ ならば、 u は Ω 全体で (2.2) を満たす C^1 級解に拡張できる。

この定理の証明の要点を次節で説明する。連続拡張を得るためには条件 $\alpha < 2$ が必要である。増大条件 (2.4) が最良であることは次の定理からわかる。

定理 2.7 (H & Ono [22], H [25]) $\partial\Omega$ は $C^{1,1}$ 級であるとする。 $m \in [0, n-2]$ とし、 E を m 次元 Ahlfors 正則条件と m 次元一様 Minkowski 条件を満たす有界閉集合とする。また、定数 $c_2 > 0$ と

$$0 < p \neq 1, \quad \alpha < n - m - p(n - 2 - m), \quad \beta < p + 1$$

が存在して

$$|f(x, t)| \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} d(x, \partial\Omega)^{-\beta} |t|^p \quad (x \in \Omega, t \in \mathbb{R})$$

を満たすとする。このとき、Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & (x \in \Omega \setminus E), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

の正值解 $u \in C^1(\Omega \setminus E) \cap C(\overline{\Omega} \setminus E)$ で

$$u(x) \approx \rho_E(x) d(x, \partial\Omega) \quad (x \in \Omega \setminus E)$$

を満たすものが存在する。

この定理の証明は、Green 関数評価を用いた一般化加藤族の議論と Schauder の不動点定理に基づく。

定理 2.8 (H [24]) $m \in [0, n-2]$ とし、 E は m 次元 Ahlfors 正則条件を満たすとする。 u は $\Omega \setminus E$ 上の正值優調和関数で超関数 Laplacian が $-\Delta u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \setminus E)$ であるとする。さらに、定数 $c_2 > 0$, $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、次のいずれかを満たすとする：

(A1) $p \in (0, \frac{n}{n-2})$, $\alpha < n - m - p(n - 2 - m)$ のとき

$$-\Delta u(x) \leq c_2 d(x, E)^{-\alpha} u(x)^p \quad (x \in \Omega \setminus E). \quad (2.6)$$

(A2) $p \geq \frac{n}{n-2}$, $\alpha < 2$ のとき、(2.6) と $\limsup_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} d(x, E)^{\frac{2-\alpha}{p-1}} u(x) < +\infty$ ($y \in E, \theta \geq \theta_E$).

このとき, $\frac{u}{\rho_E}$ は E 上の $\mathcal{H}^m$ -a.e. で有限の非接極限をもつ. 特に

$$\mathcal{H}^m\left(\left\{y \in E : \exists \theta \geq \theta_E \text{ s.t. } \limsup_{\mathcal{A}_\theta(y) \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{\rho_E(x)} = +\infty\right\}\right) = 0$$

である.

この定理の証明は, 極小細極限に関する Fatou–Naïm–Doob の定理と「Green ポテンシャルの荷重付き非接極限の存在とその密度関数の増大度との関係」および「非接集合上の u の増大評価 $u(x) \leq c\rho_E(x)$ 」に基づく.

注意 $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ のとき, $\Omega \setminus E$ 上の $-\Delta u = u^p$ のすべての正値解 $u \in C^2(\Omega \setminus E)$ に対して $u(x) \leq cd(x, E)^{-\frac{2}{p-1}}$ が成り立つ ([10, 28, 31] を参照). $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ の場合は未解決である. (A2) の追加条件に関して, $p > 1$ のとき $n-2-m < \frac{2-\alpha}{p-1}$ であることに注意する.

3 定理 2.6 の証明において鍵となる補題と次元による証明方法の差異

D を $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす任意の有界開集合とし, D の Dirichlet–Laplacian に関する Green 関数を G_D で表す. 鍵となった補題は次である.

補題 3.1 定理 2.6 の仮定のもとで, D 上の調和関数 h が存在して

$$u(x) = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.1)$$

と表される.

一旦, 補題 3.1 を認めれば, 次のようにして $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ が示され, 定理 2.6 が得られる.

- $m < n-2$ の場合, f の条件 (2.3) と増大条件 (2.4)+(2.1) および $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega \setminus E)$ より

$$|f(y, u(y))| \leq cd(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)} \quad (y \in D \setminus E) \quad (3.2)$$

であり, (3.1) とポテンシャル評価: 任意の $\lambda < n-m$, $x \in \Omega$ に対して

$$\int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) d(y, E)^{-\lambda} dy \leq c \int_{\Omega} |x-y|^{2-n} d(y, E)^{-\lambda} dy \leq \begin{cases} cd(x, E)^{2-\lambda} & (\lambda > 2), \\ c & (\lambda < 2), \end{cases} \quad (3.3)$$

を用いた反復法により, $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ を得ることができる.

- $m = n-2$ の場合, ポテンシャル評価: 任意の $\alpha < 2$, $p > 0$, $x \in D$ に対して

$$\int_D |x-y|^{2-n} d(y, E)^{-\alpha} \left(\log \frac{r_D}{d(y, E)} \right)^p dy \leq c, \quad (3.4)$$

が成り立つので, (3.1) より $u \in L_{\text{loc}}^\infty(D)$ であることが直ちに従う.

3.1 $m < n-2$ の場合の補題 3.1 の証明の要点

$\varepsilon > 0$ を任意にとる. (3.2) より $|f(y, u(y))| \leq c_3 d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)}$ ($y \in D \setminus E$) であるので

$$v(x) := c_3 \int_{D \setminus E} G_D(x, y) d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)} dy \quad (x \in D)$$

とし

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + v(x) + \varepsilon \rho_E(x) \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.5)$$

を考える. u_ε は $D \setminus E$ 上の下に有界な優調和関数であるから, 定理 H より D 上の優調和関数 $\bar{u}_\varepsilon$ に拡張される. Riesz の分解定理より, D 上の調和関数 h_ε が存在して

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) + \int_D G_D(x, y) d\mu_\varepsilon(y) \quad (x \in D) \quad (3.6)$$

と表される. ただし, μ_ε は $\bar{u}_\varepsilon$ に対する D 上の Riesz 測度であり, $D \setminus E$ 上では

$$d\mu_\varepsilon(y) = \{f(y, u(y)) + c_3 d(y, E)^{-\alpha-p(n-2-m)}\} dy$$

である. 重要なのは $\mu_\varepsilon(E \cap D) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) となるかであり, 次のようにして証明された. $z \in E \cap \bar{D}$ を任意にとり, $\phi \in C_c^\infty(B(z, 2r))$ を $\chi_{B(z, r)} \leq \phi \leq 1$ と $|\Delta \phi| \leq cr^{-2}$ を満たすようにとれば, m 次元一様 Minkowski 条件を用いて

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(B(z, r)) &\leq \int_{B(z, 2r)} \phi d\mu_\varepsilon = \int_{B(z, 2r)} (-\Delta \phi) \bar{u}_\varepsilon dy \leq \frac{c}{r^2} \int_{B(z, 2r) \setminus E} |u_\varepsilon| dy \\ &\leq \begin{cases} c(\varepsilon r^m + r^{n-\alpha-p(n-2-m)}) & (\alpha + p(n-2-m) > 2) \\ c(\varepsilon r^m + r^{n-2}) & (\alpha + p(n-2-m) < 2) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. さらに, m 次元一様 Minkowski 条件より, 高々 cr^{-m} 個の球 $B(z_j, r)$ (ただし, $z_j \in E \cap \bar{D}$) をとって $E \cap D$ を被覆できるので

$$\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq \begin{cases} c(\varepsilon + r^{n-\alpha-m-p(n-2-m)}) & (\alpha + p(n-2-m) > 2) \\ c(\varepsilon + r^{n-2-m}) & (\alpha + p(n-2-m) < 2) \end{cases} \quad (3.7)$$

が従う. $r \rightarrow 0$ として $\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq \varepsilon$ を得る. これから

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \cap D} G_D(x, y) d\mu_\varepsilon(y) = 0 \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.8)$$

が従うので, (3.5) と (3.6) において $\varepsilon \rightarrow 0$ として

$$u(x) + v(x) = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f(y, u(y)) dy + v(x) \quad (x \in D \setminus E)$$

を満たす D 上の調和関数 h が存在することがわかる.

注意 $m = n-2$ のとき, (3.7) は $\mu_\varepsilon(E \cap D) \leq c(\varepsilon + 1)$ となり, (3.8) を得ることはできない.

3.2 $m = n - 2$ の場合の補題 3.1 の証明の要点

補題 3.2 u を Ω 上の優調和関数とし, その Riesz 測度を μ_u とする. u が増大条件 (2.4) を満たすならば, $\mu_u(E) = 0$ である.

証明の要点 集合 L と A を下記のように定義すれば, 増大条件 (2.4) と補題 2.4 より $E \subset L$ であり, 局所 Riesz 分解と背理法により μ_u の Newton ポテンシャルを下から評価して $L \subset A$ を示すことができる. ただし

$$L := \left\{ y \in E : \liminf_{\Omega \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{u(x)}{-\log|x-y|} = 0 \right\}, \quad A := \left\{ y \in E : \liminf_{r \rightarrow 0+} \frac{\mu_u(E \cap B(y, r))}{r^{n-2}} = 0 \right\}$$

である. Vitali の被覆定理を用いて $\mu_u(A) \leq \varepsilon \mathcal{H}^{n-2}(A) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0+$) が示される. $\square$

補題 3.3 $r_0 > 0$ とする. $\phi : (0, r_0/3) \rightarrow [0, +\infty)$ が $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\log(r_0/t)} = 0$ を満たすならば, 単調増加な凹関数 $\Psi : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ で

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\Psi(\log(r_0/t))} = 0 \quad (3.9)$$

を満たすものが存在する. さらに, 任意の $c > 0$ に対して $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\phi(t)}{\Psi(c \log(r_0/t))} = 0$ となる.

上記補題を用いて補題 3.1 は次のように示された. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 増大条件 (2.4) と補題 3.3 より, $r_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|u(x)| \leq \varepsilon (\Psi \circ \rho_E)(x) \quad (x \in (E(r_\varepsilon) \cap D) \setminus E)$$

が成り立つ. そこで, $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$ とし

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^-(y, u(y)) dy + \varepsilon (\Psi \circ \rho_E)(x) \quad (x \in D \setminus E) \quad (3.10)$$

を考える. $\Psi \circ \rho_E$ は D で優調和であるから, u_ε は $D \setminus E$ 上の下に有界な優調和関数である. 定理 H より, u_ε は D 上の優調和関数 $\bar{u}_\varepsilon$ に拡張される. $\bar{u}_\varepsilon$ と $\Psi \circ \rho_E$ に対する D 上の Riesz 測度をそれぞれ μ_ε と $\mu_{\Psi \circ \rho_E}$ とすれば, $D \setminus E$ 上では

$$d\mu_\varepsilon(y) = f^+(y, u(y)) dy + \varepsilon d\mu_{\Psi \circ \rho_E}(y)$$

である. さらに, 増大条件 (2.4)+(2.1) とポテンシャル評価 (3.4) および (3.9) より

$$\lim_{D \setminus E \ni x \rightarrow y} \frac{\bar{u}_\varepsilon(x)}{-\log d(y, E \cap D)} = 0 \quad (y \in E \cap D)$$

を満たすので, 補題 3.2 より $\mu_\varepsilon(E \cap D) = 0$ である. 従って, Riesz の分解定理より

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^+(y, u(y)) dy + \varepsilon \int_{D \setminus E} G_D(x, y) d\mu_{\Psi \circ \rho_E}(y) \quad (x \in D) \quad (3.11)$$

を満たす D 上の調和関数 h_ε が存在する. (3.10) と (3.11) において $\varepsilon \rightarrow 0+$ として

$$u(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^-(y, u(y)) dy = h(x) + \int_{D \setminus E} G_D(x, y) f^+(y, u(y)) dy \quad (D \setminus E)$$

を満たす D 上の調和関数 h の存在がわかる.

参考文献

- [1] Adams, D. R., *On Pacard's regularity for the equation $-\Delta u = u^p$* , Electron. J. Differential Equations (2012), No. 125, 6.
- [2] Adams, D. R. and Pierre, M., *Capacitary strong type estimates in semilinear problems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **41** (1991), no. 1, 117–135.
- [3] Aviles, P., *On isolated singularities in some nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 5, 773–791.
- [4] Aviles, P., *Local behavior of solutions of some elliptic equations*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 2, 177–192.
- [5] Baras, P. and Pierre, M., *Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), no. 1, 185–206.
- [6] Bôcher, M., *Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type*, Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1903), no. 9, 455–465.
- [7] Bochner, S., *Weak solutions of linear partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **35** (1956), 193–202.
- [8] Brelot, M., *Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques*, Bull. Sci. Math. (2) **65** (1941), 72–98.
- [9] Brézis, H. and Véron, L., *Removable singularities for some nonlinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **75** (1980/81), no. 1, 1–6.
- [10] Dancer, E. N., *Superlinear problems on domains with holes of asymptotic shape and exterior problems*, Math. Z. **229** (1998), no. 3, 475–491.
- [11] Dancer, E. N., Du, Y. and Guo, Z., *Finite Morse index solutions of an elliptic equation with supercritical exponent*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 8, 3281–3310.
- [12] Dancer, E. N., Guo, Z. and Wei, J., *Non-radial singular solutions of the Lane-Emden equation in $\mathbb{R}^N$* , Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 5, 1971–1996.
- [13] David, G., Feneuil, J. and Mayboroda, S., *Elliptic theory for sets with higher co-dimensional boundaries*, Mem. Amer. Math. Soc. **274**, 2021.
- [14] Fakhi, S., *Positive solutions of $\Delta u + u^p = 0$ whose singular set is a manifold with boundary*, Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), no. 2, 179–197.
- [15] Finn, D. L., *Behavior of positive solutions to $\Delta_g u = u^q + Su$ with prescribed singularities*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 1, 177–219.
- [16] Finn, D. L. and McOwen, R. C., *Singularities and asymptotics for the equation $\Delta_g u - u^q = Su$* , Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 4, 1487–1523.
- [17] Fujishima, Y. and Ioku, N., *Multiplicity of singular solutions for semilinear elliptic equations with superlinear source terms*, Calc. Var. Partial Differential Equations **65** (2026), no. 3, Paper No. 75, 28.
- [18] Gardiner, S. J., *Removable singularities for subharmonic functions*, Pacific J. Math. **147** (1991), no. 1, 71–80.
- [19] Gidas, B. and Spruck, J., *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 4, 525–598.
- [20] Grillot, M., *Solutions of some nonlinear elliptic problems, which are singular on a submanifold*,

- J. Math. Pures Appl. (9) **76** (1997), no. 9, 757–776.
- [21] Harvey, R. and Polking, J., *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations*, Acta Math. **125** (1970), 39–56.
 - [22] Hirata, K. and Ono, T., *Removable singularities and singular solutions of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. **105** (2014), 10–23.
 - [23] Hirata, K. and Ono, T., *Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations with nonlinear source or absorption terms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **197** (2018), no. 1, 41–59.
 - [24] Hirata, K., *Weighted nontangential limits on a polar set of superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality*, Anal. Math. Phys. **16** (2026), no. 1, Paper No. 4, 19.
 - [25] Hirata, K., *Logarithmic singularities on $(N - 2)$ -dimensional sets for semilinear elliptic equations*, preprint.
 - [26] Lions, P. L., *Isolated singularities in semilinear problems*, J. Differential Equations **38** (1980), no. 3, 441–450.
 - [27] Miyamoto, Y. and Naito, Y., *Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **202** (2023), no. 1, 341–366.
 - [28] Poláčik, P., Quittner, P. and Souplet, P., *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. I. Elliptic equations and systems*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 3, 555–579.
 - [29] Rébaï, Y., *Weak solutions of nonlinear elliptic equations with prescribed singular set*, J. Differential Equations **127** (1996), no. 2, 439–453.
 - [30] Riihenta, J., *Removable sets for subharmonic functions*, Pacific J. Math. **194** (2000), no. 1, 199–208.
 - [31] Serrin, J. and Zou, H., *Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*, Acta Math. **189** (2002), no. 1, 79–142.
 - [32] Vázquez, J. L. and Véron, L., *Isolated singularities of some semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **60** (1985), no. 3, 301–321.
 - [33] Véron, L., *Singular solutions of some nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. **5** (1981), no. 3, 225–242.
 - [34] Véron, L., *Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires*, J. Differential Equations **41** (1981), no. 1, 87–95.
 - [35] Zhang, Q. S. and Zhao, Z., *Singular solutions of semilinear elliptic and parabolic equations*, Math. Ann. **310** (1998), no. 4, 777–794.

Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor sets (Part I)

志賀 啓成 (大阪公立大学 数学研究所)*

1 Introduction

Thompson's groups—通常 F, T and V と記される 3つの群—は R. Thompson によって導入され、以来数学の様々な分野と関わりがあることが知られている。本講演では、Thompson's groups F, T および V が一般化された Cantor 集合の Teichmüller 空間に作用する Teichmüller modular groups の部分群として表現されることを報告する。さらに Teichmüller 空間への作用についても考える。Thompson's group と Teichmüller 空間の研究は E. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey([2]) によるものがある。彼らは Thompson's group F を通常の Cantor 集合の漸近的 Teichmüller 空間、漸近的に等角な Teichmüller modular 群で研究している。我々の研究は彼らのものを通常の Teichmüller 空間で考え、さらに広い Thompson's groups について研究したものである。Part I の講演では、Thompson's groups を Teichmüller modular 群に実現する方法について述べる。

2 Main results

Thompson's groups とは $[0, 1]$ 区間からそれ自身への区分的に 1 次式で表されるある種の bijections を元とする群で、その制限から F, T, V の 3つの群が定義される。Thompson's groups に含まれる写像は、ある条件を満たす 2つの binary trees の組でも表現され、このことから Cantor 集合との関連性が推察され、本講演で述べる擬等角幾何的、双曲幾何的考察が可能になる。

数列 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty \in \Omega := (0, 1)^\mathbb{N}$ が the *bounded rate divergence* (BRD) 条件を満たすとは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ であり、かつ

$$\left| \log \frac{1 - q_n}{1 - q_{n+1}} \right| < M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

がある定数 $M < \infty$ について成り立つときを言う。また、 $\omega \in \Omega$ に対して、 ω により $[0, 1]$ 上で定義される一般化された Cantor 集合を $E(\omega)$ 、その補集合 $\mathbb{C} \setminus E(\omega)$ を $X(\omega)$ と書く。このとき、 $X(\omega)$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ の Teichmüller modular 群 $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群、 $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}}$, $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}}$, $\text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}}$ (定義は講演中に述べる) から Thompson's groups F, T, V への準同型写像 Θ が存在して次が成り立つ。

*e-mail: shiga.hiroshige.i35@kyoto-u.jp

本研究は科研費 (課題番号:26K06849) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 30F60, 20F65

キーワード: Thompson's group, Teichmüller modular group, quasiconformal mapping

Theorem 1 $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, 準同型写像 Θ で次の exact sequences を満たすものが存在する.

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}} \xrightarrow{\Theta} F \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}} \xrightarrow{\Theta} T \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

and

$$0 \rightarrow \text{Mod}(X(\omega))_0 \xrightarrow{\iota} \text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}} \xrightarrow{\Theta} V \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

ここで $\text{Mod}(X(\omega))_0 = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega)) \mid \varphi|_{E(\omega)} = \text{id.}\}$, ι は包含写像である.

上記の部分空間及び準同型写像 Θ の構成は擬等角幾何的であり, じっさい以下の二つの事実がキーとなる.

Proposition 2.1 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty$ が $\inf_{n \in \mathbb{N}} q_n > 0$ を満たせば, $X(\omega)$ 上の擬等角写像は $\mathbb{C}$ 全体に擬等角写像として拡張される.

Proposition 2.2 $\omega = (q_n)_{n=1}^\infty$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ であるとする, このとき, 与えられた $K \geq 1$ に対して, K のみに依存する $d(K) \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす.

任意の K -擬等角写像 $\varphi : X(\omega) \rightarrow X(\omega)$ は depth $d \geq d(K)$ の pants curve を pants curve に写す.

Cantor 集合 $E(\omega)$ の構成は標準 Cantor 集合と同様の構成法を用い, 各 Step k で 2^k の同じ長さの閉区間を持つ $E_k(\omega)$ を作り, $E(\omega) = \bigcap E_k(\omega)$ で定義される. この構成法から自然に $X(\omega)$ の pants 分解が定まる. 上で言う pants curve とはその pants 分解の pants の境界曲線とホモトピックな単純閉曲線を指す. また, 各 Step k で生じる 2^k 本の pants curves を depth k の pants curve という.

参考文献

- [1] J. W. Cannon, W. J. Floyd and W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups, *L'Eneignement Mathématique*, t. 42 (1996), 215–256.
- [2] B. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey, Thompson's Group as a Teichmüller Mapping Class Group, *Conptemporary Math.* **355**, 165–185.
- [3] H. Shiga, On the quasiconformal equivalence of Dynamical Cantor sets, *J. d'Analyse Math.* **147** (2022), 1–22.
- [4] H. Shiga, Structures of moduli spaces of generalized Cantor sets in $(0, 1)^\mathbb{N}$, to appear in *J. d'Analyse Math.*
- [5] S. Wolpert, The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces, *Ann. of Math.* **109** (1979), 323–351.

Thompson's groups and Teichmüller modular groups of generalized Cantor sets (Part II)

志賀 啓成 (大阪公立大学 数学研究所)*

1 Introduction

Part I では, BRD 条件を満たす ω から得られる一般化された Cantor 集合 $E(\omega)$ とその補集合 $X(\omega)$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ に作用する Teichmüller modular 群 $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群としての Thompson's groups について論じた. Part II ではこれらの群の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用について考える.

2 Main results

まず, $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群で Thompson's groups F, T and V それぞれと Θ によって同型となる部分群を構成する.

$J(z) = \bar{z}$ を複素共役とする. $\text{Mod}(X(\omega))$ の部分群, $\text{Mod}(X(\omega))_F$, $\text{Mod}(X(\omega))_T$ and $\text{Mod}(X(\omega))_V$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\text{Mod}(X(\omega))_F &= \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{OP}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}, \\ \text{Mod}(X(\omega))_T &= \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{PO}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}\end{aligned}$$

及び

$$\text{Mod}(X(\omega))_V = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))^{\text{POP}} \mid J \circ \varphi \text{ is homotopic to } \varphi \circ J\}.$$

このとき, 次が成り立つ.

Theorem I $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, $G = F, T$ or V に対して Θ は $\text{Mod}(X(\omega))_G$ と G の同型を与える.

次に, これらの部分群の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用を見る.

Theorem II $\omega \in \Omega$ は BRD 条件を満たすとする. このとき, $\text{Mod}(X(\omega))_F$ 及び $\text{Mod}(X(\omega))_T$ の Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用は真性不連続である, 一方, $\text{Mod}(X(\omega))_V$ の $\text{Teich}(X(\omega))$ への作用は真性不連続ではない.

Theorem II の不連続性の証明には, 次の Proposition を用いる.

*e-mail: shiga.hiroshige.i35@kyoto-u.jp

本研究は科研費 (課題番号:26K06849) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 30F60, 20F65

キーワード: Thompson's group, Teichmüller modular group

Proposition 2.1 $K \geq 1$ に対して,

$$\Delta(K) = \{[\varphi] \in \text{Mod}(X(\omega))_T \mid K([\varphi]) < K\}$$

とおく. このとき, $\#\Delta(K) < \infty$ である. ただし, $K([\varphi]) = \inf_{\psi \in [\varphi]} K(\psi)$.

Theorem I から, $\text{Mod}(X(\omega))_F$, $\text{Mod}(X(\omega))_T$ 及び $\text{Mod}(X(\omega))_V$ は, それぞれ Θ によって Thompson's groups F, T, V と同型である. したがって, この意味で Thompson's groups F, T は Teichmüller 空間 $\text{Teich}(X(\omega))$ に真性不連続に作用し, V はそうでないと思なせる. では, このような群が作用する Teichmüller 空間はどれほどあるのかというのを考える. 換言すれば, BRD 条件を満たす ω 達からどれだけ豊富な Teichmüller 空間が生み出せるのかということである. これに関して, 一般化された Cantor 集合についての結果 [4] を用いて次を得る.

Theorem III BRD 条件を満たす ω で, $X(\omega)$ が擬等角同値でないものが無限個存在する. したがって, Thompson's groups F, V は無限個の異なる Teichmüller 空間に真性不連続に作用する.

Theorem III は実際に ω を与えて示される.

参考文献

- [1] J. W. Cannon, W. J. Floyd and W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups, *L'Enseignement Mathématique*, t. 42 (1996), 215–256.
- [2] B. de Faria, F. P. Gardiner and W. J. Harvey, Thompson's Group as a Teichmüller Mapping Class Group, *Contemporary Math.* **355**, 165–185.
- [3] H. Shiga, On the quasiconformal equivalence of Dynamical Cantor sets, *J. d'Analyse Math.* **147** (2022), 1–22.
- [4] H. Shiga, Structures of moduli spaces of generalized Cantor sets in $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, to appear in *J. d'Analyse Math.*
- [5] S. Wolpert, The length spectrum as moduli for compact Riemann surfaces, *Ann. of Math.* **109** (1979), 323–351.

On curve graphs of hyperelliptic translation surfaces

四之宮 佳彦 (静岡大学)*

1 Introduction

A *translation surface* is a pair (X, ω) consisting of a compact Riemann surface X and a nonzero holomorphic 1-form ω on X . The local coordinates $z = \int_{p_0}^p \omega$ have transition maps of the form $z \mapsto z + c$, and hence induce a Euclidean geometry on (X, ω) .

Let X be a compact Riemann surface of genus $g \geq 2$. A hyperelliptic involution is an automorphism τ of order 2 having $2g + 2$ fixed points. In this article, we consider hyperelliptic translation surfaces belonging to $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2)$ or $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1)$, namely translation surfaces admitting a hyperelliptic involution τ satisfying $\tau^*\omega = -\omega$. Let

$$\mathcal{H}_g^{\text{hyp}} = \mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2) \cup \mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1).$$

A regular closed geodesic on (X, ω) is a simple closed geodesic avoiding the zeros of ω . For such a geodesic γ , the union of all regular closed geodesics homotopic to γ forms a maximal Euclidean cylinder, denoted by $[\gamma]$.

The curve graph $\mathcal{C}(S)$ of a closed surface $S = S_g$ is the graph whose vertices are homotopy classes of simple closed curves and whose edges correspond to disjointness. It is known that $\mathcal{C}(S)$ is connected [1], has infinite diameter and is Gromov hyperbolic [3], and has clique number $3g - 3$ (pants curve).

Nguyen [4] introduced an analogue of the curve graph for translation surfaces.

Definition 1 Let (X, ω) be a translation surface. The *curve graph* $\mathcal{C}(X, \omega)$ is the graph whose vertices are maximal cylinders $[\gamma]$ arising from regular closed geodesics. Two vertices $[\gamma]$ and $[\delta]$ are joined by an edge if $i([\gamma], [\delta]) = 0$, where $i(\cdot, \cdot)$ denotes the geometric intersection number.

Unlike the classical curve graph, $\mathcal{C}(X, \omega)$ is not always connected. To remedy this phenomenon, we introduce degenerate cylinders.

Definition 2 Let $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$ and let τ be its hyperelliptic involution. A *degenerate cylinder* is a union $[\gamma] = s_1 \cup s_2$ of two saddle connections such that

- each s_i is invariant under τ ,

* 〒422-8529 静岡市駿河区大谷 836 静岡大学学術院 教育学領域 数学教育系列

e-mail: shinomiya.yoshihiko@shizuoka.ac.jp

キーワード : Translation surfaces, Curve graph

- At each endpoint of s_1 and s_2 , one of the angles between s_1 and s_2 is equal to π .

For cylinders and degenerate cylinders, define $i([\gamma], [\delta])$ as the number of transverse intersection points counted with multiplicity.

Definition 3 The *extended curve graph* $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ is the graph whose vertices are cylinders and degenerate cylinders. Two vertices are connected by an edge if their intersection number is zero.

2 Main Results

Our first result concerns the geometry of the extended curve graph. Nguyen [4] proved the genus two case. For higher genus, we use the quotient by the hyperelliptic involution to prove the result.

Main Result 1. For any $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$ and any vertices $[\gamma], [\delta] \in \widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$,

$$d([\gamma], [\delta]) \leq 3i([\gamma], [\delta]) + 6$$

holds. As a consequence, the extended curve graph is connected.

Corollary 1 For every $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$, the graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ is connected.

Combining this with Nguyen's argument, we obtain the following.

Corollary 2 For every $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$, the graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)$ has infinite diameter.

Finally, let $\text{Aff}^+(X, \omega)$ be the affine automorphism group of (X, ω) and $\text{SL}(X, \omega)$ the Veech group of (X, ω) . Nguyen proved that, in genus two, the lattice property of the Veech group is equivalent to the finiteness of the quotient graph $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)/\text{Aff}^+(X, \omega)$. We generalize this criterion as follows. Here, a simple cylinder is a maximal cylinder each of whose boundary components is a saddle connection.

Main Result 2. Let $(X, \omega) \in \mathcal{H}_g^{\text{hyp}}$. The following are equivalent:

1. $\text{SL}(X, \omega)$ is a lattice in $\text{SL}(2, \mathbb{R})$;
2. $\widehat{\mathcal{C}}(X, \omega)/\text{Aff}^+(X, \omega)$ has finitely many vertices;
3. the quotient graph has finitely many vertices corresponding to simple cylinders.

参考文献

- [1] W. J. Harvey, Geometric structure of surface mapping class groups, 1978.
- [2] N. V. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, 1997.
- [3] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves I, 1999.
- [4] D.-M. Nguyen, Curve graphs for translation surfaces, 2017.

Uniform perfectness of the limit sets of conformal tree iterated function systems

大野 玄道 (京都大学 大学院 人間・環境学研究科)*

A compact set $C \subset \mathbb{C}$ is said to be uniformly perfect if there exists L such that for any ring domain B separating C (i.e. there exist non-empty C_1 and C_2 such that $C_1 \cup C_2 = C$ and B separates C_1 and C_2), module $M(B)$ of B satisfies $M(B) \leq L$. Uniformly perfect sets were introduced by A. F. Beardon and C. Pommerenke in 1978 in [1]. Uniform perfectness means that C is not so sparse at any point.

Uniform perfectness of the limit sets of autonomous IFSs were shown by R. Stanke-witz in [3]. In [2], it was shown that uniform perfectness of the limit set of a non-autonomous IFS follows from the condition $|\phi'| \geq \eta > 0$ for all ϕ and some other conditions.

In this talk, we consider tree iterated function systems, which are generalizations of non-autonomous IFSs. For such systems, we show that the limit sets are uniformly perfect if the similar conditions to non-autonomous cases hold.

The definition of tree iterated function systems is as follows.

Definition 1. We say a partially ordered set $(T, \preceq)$ is a rooted tree if T has a minimum element $\emptyset$ named root and for any $\tau \in T$, $\{\tau' \in T \mid \tau' \preceq \tau\}$ is isomorphic to a partially ordered set $(\{0, \dots, n\}, \leq)$ for some $n \geq 0$.

For $\tau \in T$, the height $|\tau|$ of τ is the unique number n such that $\{\tau' \in T \mid \tau' \preceq \tau\}$ is isomorphic to $(\{0, \dots, n\}, \leq)$. We write $I_\tau = \{\omega \in T \mid \omega \succ \tau, |\omega| = |\tau| + 1\}$. Let ∂T be the set of all simple paths with infinite length starting from $\emptyset$.

Definition 2. Let (X, d) be a compact connected metric space and let $(T, \preceq)$ be a rooted tree with $1 \leq \#I_\tau < \infty$ for all τ . We say that $\{\phi_\tau : X \rightarrow X\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ is a Tree Iterated Function System (for short, TIFS) if it satisfies the following condition:

- There exists $s \in (0, 1)$ such that, for all $\tau \in T \setminus \{\emptyset\}$ and all $x, y \in X$,

$$d(\phi_\tau(x), \phi_\tau(y)) \leq sd(x, y).$$

For a TIFS $\{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ and $\tau \in T$, we write $\Phi_\tau = \phi_{\tau_1} \circ \dots \circ \phi_{\tau_n}$, where $(\emptyset, \tau_1, \dots, \tau_n)$ is the unique simple path connecting $\emptyset$ and τ . (If $\tau = \emptyset$, we set $\Phi_\emptyset = \text{Id}_X$.)

For each $\tau \in \partial T$, $\{\Phi_{\tau|_n}(X)\}_{n=1}^\infty$ are decreasing compact sets, therefore $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X)$ is a non-empty compact set. By the uniform contractivity,

$$\text{diam}(\Phi_{\tau|_n}(X)) \leq s^n \text{diam}(X). \quad (1)$$

Therefore, $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X)$ is a one-point set. Hence, we can give the following definition.

Definition 3. Let $\mathcal{S} = \{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ be a TIFS. The coding map $\pi_{\mathcal{S}} : \partial T \rightarrow X$ is defined as the map satisfying the following.

$$\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_{\tau|_n}(X) = \{\pi_{\mathcal{S}}(\tau)\}.$$

The limit set $J_{\mathcal{S}}$ of $\mathcal{S}$ is defined by $J_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}}(\partial T)$.

* 〒 606-8501 京都市左京区吉田二本松町 京都大学大学院人間・環境学研究科
e-mail: ono.hiromichi.58c@st.kyoto-u.ac.jp

With these preparations, we can state the main theorem.

Theorem. *Let V be an open set with $X \subset V \subset \mathbb{C}$. Let $m > 0$. We assume that a TIFS $\mathcal{S} = \{\phi_\tau\}_{\tau \in T \setminus \{\emptyset\}}$ on X satisfies the following conditions.*

1. $\#I_\tau \geq 2$ for all $\tau \in T$.
2. (Conformality) Each ϕ_τ can be extended to conformal diffeomorphism on V into V .
3. (Open Set Condition) $\text{Int}(X) \neq \emptyset$ and for each $\tau \in T$ and $a, b \in I_\tau$,

$$\phi_a(\text{Int}(X)) \cap \phi_b(\text{Int}(X)) = \emptyset. \quad (2)$$

4. For all $\tau \in T \setminus \{\emptyset\}$,

$$\min_{x \in X} |\phi'_\tau(x)| \geq m. \quad (3)$$

Then, the limit set $J_\mathcal{S}$ is uniformly perfect.

References

- [1] A. F. Beardon and Ch. Pommerenke. The Poincaré metric of plane domains. *J. London Math. Soc. (2)*, 18(3):475–483, 1978.
- [2] Mark Comerford, Kurt Falk, Rich Stankewitz, and Hiroki Sumi. Uniformly perfect and hereditarily non uniformly perfect analytic and conformal non-autonomous attractor sets. *Dyn. Syst.*, 36(4):631–655, 2021.
- [3] Rich Stankewitz. Uniformly perfect analytic and conformal attractor sets. *Bull. London Math. Soc.*, 33(3):320–330, 2001.