

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

(2日目／9月2日)

2026年9月

於 神戸大学

Bohr-Rogosinski radius in complex Banach spaces

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*¹
 Tatsuhiro HONDA (Senshu University, Japan)*²
 Mirela Kohr (Babeş -Bolyai University, Romania)

This is an announcement of [11]. Let $f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j$ be a holomorphic function on $\mathbb{U}$, where $\mathbb{U}$ is the unit disc in $\mathbb{C}$. Classical Bohr's theorem states that if $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then the series $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| r^j$ is less than or equal to 1 for all ζ with $|\zeta| = r \leq 1/3$. The constant $1/3$ is sharp and called the *Bohr radius* (see e.g. [3], [18], [19]).

There is also the notion of Rogosinski radius [17] which is as follows. Let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers. If $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then we have $|S_N^f(\zeta)| \leq 1$ for $|\zeta| \leq 1/2$ for every $N \in \mathbb{N}$, where $S_N^f(\zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \zeta^j$. The constant $1/2$ is sharp and called the *Rogosinski radius*.

Motivated by this result, I.R. Kayumov, D.M. Khammatova and S. Ponnusamy [13] introduced the Bohr-Rogosinski radius which is as follows. If $|f(\zeta)| \leq 1$ on $\mathbb{U}$, then we have $R_N^f(\zeta) \leq 1$ for $|\zeta| \leq R_N$ for every $N \in \mathbb{N}$, where

$$R_N^f(\zeta) = |f(\zeta)| + \sum_{j=N}^{\infty} |a_j| r^j, \quad |\zeta| = r,$$

and R_N is the positive root of the equation

$$2(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0.$$

The constant R_N is sharp and called the *Bohr-Rogosinski radius*.

Actually,

$$|S_N^f(\zeta)| = \left| f(\zeta) - \sum_{n=N}^{\infty} a_n \zeta^n \right| \leq R_N^f(\zeta).$$

Let B_X and B_Y be the unit balls of the complex Banach spaces X and Y , respectively. A holomorphic mapping $v : B_X \rightarrow B_Y$ with $v(0) = 0$ is called a *Schwarz mapping*. Let $F : B_X \rightarrow Y$ be a holomorphic mapping. For $k \in \mathbb{N}$, we say that $z = 0$ is a *zero of order k of F* if $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$, $\dots$, $D^{k-1}F(0) = 0$, but $D^k F(0) \neq 0$. We note that if v is a Schwarz mapping such that $z = 0$ is a zero of order k of v , then the following estimation holds:

$$\|v(z)\|_Y \leq \|z\|_X^k, \quad z \in B_X. \quad (1)$$

For $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, let $\|z\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |z_i|$ denote the maximum norm and let $\mathbb{U}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \|z\|_{\infty} < 1\}$ denote the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$.

H. Hamada was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K03363. T. Honda was supported by a Senshu University Research Grant in 2026.

*¹ e-mail: hi.hamada01@gmail.com

*² e-mail: honda@isc.senshu-u.ac.jp

In this talk, we investigate the Bohr-Rogosinski radius for holomorphic mappings on the unit ball of a complex Banach space with values in a higher dimensional complex Banach space. The classical Schwarz lemma states that every holomorphic mapping f of the unit disc $\mathbb{U}$ into itself with $f(0) = 0$ satisfies $|f(\zeta)| \leq |\zeta|$ for all $\zeta \in \mathbb{U}$. Lindelöf removed the assumption “origin is a fixed point” and improved the classical Schwarz lemma of holomorphic mappings. Chen, Hamada et al. [4] generalized Lindelöf’s result to holomorphic mappings between the unit balls of complex Banach spaces, which plays an important role in the proof of the Bohr-Rogosinski phenomena. Our results give extensions and improvements of the results in [9, 10, 13]. For recent results on Bohr radius in several complex variables, see [2, 7, 8, 9, 12, 15] and the references therein.

References

- [1] Y. Abu Muhanna, Bohr’s phenomenon in subordination and bounded harmonic classes, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55 (2010), 1071–1078.
- [2] M.B. Ahamed, S. Ahammed, H. Hamada, Refined Bohr inequalities and a refined Bohr-Rogosinski inequality on complex Banach spaces, *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)*, 46, 19–38 (2026).
- [3] H. Bohr, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* (2) 13 (1914), 1–5.
- [4] S. L. Chen, H. Hamada, S. Ponnusamy, R. Vijayakumar, Schwarz type lemmas and their applications in Banach spaces, *J. Anal. Math.*, 152 (2024), 181–216.
- [5] C. H. Chu, Bounded symmetric domains in Banach spaces. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021.
- [6] H. Hamada, Bohr phenomenon for analytic functions subordinate to starlike or convex functions, *J. Math. Anal. Appl.* 499 (2021), 125019.
- [7] H. Hamada, Bohr’s inequality for holomorphic and pluriharmonic mappings with values in complex Hilbert spaces, *Math. Nachr.* 296 (2023), 2795–2808.
- [8] H. Hamada, T. Honda, Bohr radius for pluriharmonic mappings in separable complex Hilbert spaces, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 47 (2024), 47.
- [9] H. Hamada, T. Honda, Bohr phenomena for holomorphic mappings with values in several complex variables, *Results Math.* 79 (2024), 239.
- [10] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Bohr’s theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls, *Israel J. Math.* 173 (2009), 177–187.
- [11] H. Hamada, T. Honda, M. Kohr, Bohr-Rogosinski radius for holomorphic mappings with values in higher dimensional complex Banach spaces, *Anal. Math. Phys.*, Volume 15, article number 64, (2025), 19 pp.
- [12] H. Hamada, T. Honda, Y. Mizota, Bohr phenomenon on the unit ball of a complex Banach space, *Math. Inequal. Appl.* 23 (2020), 1325–1341.
- [13] I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, S. Ponnusamy, Bohr-Rogosinski phenomenon for analytic functions and Cesáro operators, *J. Math. Anal. Appl.* 496 (2021), no. 2, 124824, 17 pp.
- [14] I. R. Kayumov, S. Ponnusamy, On a powered Bohr inequality, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 44 (2019), 301–310.
- [15] M. S. Liu, S. Ponnusamy, Multidimensional analogues of refined Bohr’s inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 149 (2021), no.5, 2133–2146.
- [16] S. Ponnusamy, R. Vijayakumar, K.-J. Wirths, Improved Bohr’s phenomenon in quasi-subordination classes, *J. Math. Anal. Appl.* 506 (2022), no.1, Paper No. 125645, 10 pp.
- [17] W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, *Math. Z.* 17 (1923), 260–276.
- [18] S. Sidon, Über einen Satz von Herrn Bohr, *Math. Z.* 26 (1927), 731–732.
- [19] M. Tomić, Sur un théorème de H. Bohr, *Math. Scand.* 11 (1962), 103–106.

双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随する アーベル関数の退化極限

綾野孝則 (阪公大数学研)*

微分方程式のテータ関数解やシグマ関数解を退化させて指数関数などの初等関数による解が得られるため、テータ関数やシグマ関数の退化が可積分系などで活発に研究されている。[3] では、シグマ関数を特徴付ける熱方程式の理論を用いて、種数 2 の超楯円曲線に付随するシグマ関数の退化極限が計算された。[2] では、佐藤理論を用いて、種数 g の超楯円曲線に付随するシグマ関数の退化極限が計算された。楯円曲線への次数 2 の射が存在する代数曲線は双楯円的であるという。本発表では、[1] で導出された双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随するアーベル関数を楯円関数で記述する公式を用いて、双楯円的な種数 2 の超楯円曲線に付随するアーベル関数の退化極限を計算する。

$\mathcal{X}$ を種数 g の超楯円曲線、 $\sigma_{\mathcal{X}}(u)$, $u = {}^t(u_1, u_3, \dots, u_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$, を $\mathcal{X}$ に付随するシグマ関数、 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}} = -\partial_{u_j} \partial_{u_i} \log \sigma_{\mathcal{X}}$ とする。 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X}$ のヤコビ多様体上の有理型関数である。また、 $\wp_{i,j}^{\mathcal{X}}$ は KdV 階層、sine-Gordon 方程式、KP 方程式などの解である。 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して、 V を $y^2 = x(x-1)(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\alpha^2\beta^2)$ で定義される種数 2 の超楯円曲線とする。種数 2 の超楯円曲線が双楯円的であることと、 V の形の超楯円曲線と同型であることは同値になることが知られている。

Theorem 1 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して、次が成り立つ。

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,1}^V(u) = \mathcal{D}_1^{-2} \mathcal{F}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,3}^V(u) = -\beta^2 \mathcal{D}_1^{-2} \mathcal{D}_2^2.$$

ここで、 $\mathbf{t}_1 = \tanh((\beta-1)(u_1 + \beta u_3)/2)$, $\mathbf{t}_2 = \tanh(-(\beta+1)(u_1 - \beta u_3)/2)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \beta(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 - 1) + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + 1), \\ \mathcal{D}_2 &= \beta(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 + 1) + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 - 1), \\ \mathcal{F} &= \beta^4(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)^2 + 2\beta^3(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)(\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - 1) + 2\beta^2(\mathbf{t}_1^2 + \mathbf{t}_2^2 - 2)(2\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2 - \mathbf{t}_2^2) \\ &\quad + 2\beta(\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)(\mathbf{t}_1^2 \mathbf{t}_2^2 - 1) + (\mathbf{t}_2^2 - \mathbf{t}_1^2)^2. \end{aligned}$$

Corollary 2 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1} \wp_{1,1}^V(u) &= 2 \frac{(u_1 + u_3)^2(\mathbf{p}^2 - 1)^2 + \mathbf{p}^2(2\mathbf{p}^2 - 1)}{\{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) - \mathbf{p}\}^2}, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1} \wp_{1,3}^V(u) &= - \left\{ \frac{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) + \mathbf{p}}{(u_1 + u_3)(\mathbf{p}^2 - 1) - \mathbf{p}} \right\}^2, \quad \mathbf{p} = \tanh(u_3 - u_1). \end{aligned}$$

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪公立大学 数学研究所
e-mail: ayano@omu.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/ayano75/>

本研究は科研費(課題番号:26K06850)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14K25, 14H70

キーワード: アーベル関数, 楯円関数, シグマ関数, 退化

Corollary 3 $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0} \wp_{1,1}^V(u) = 4\mathfrak{q} \frac{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q} + (u_3 - u_1)^2 \mathfrak{q}}{\{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q}\}^2},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0} \wp_{1,3}^V(u) = -\left\{ \frac{2\mathfrak{q}}{(u_3 - u_1)(1 + \mathfrak{q}^2) + 2\mathfrak{q}} \right\}^2, \quad \mathfrak{q} = \tanh(u_1/2).$$

$\beta^2 \neq -1$ とする. $\mathfrak{A}$ を次で定義される楕円曲線とする.

$$\mathfrak{A} : Y^2 = X(X-1) \left(X - \frac{4\beta^2}{(\beta^2 + 1)^2} \right).$$

$\wp_{1,1}^{\mathfrak{A}}$ を $\wp_{\mathfrak{A}}$ と表す. $\wp'_{\mathfrak{A}} = d\wp_{\mathfrak{A}}/du$ とする. $v, w \in \mathbb{C}$ に対して, 次の関数を考える.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1(v, w) &= (\beta^2 + 1) \tan(v) \wp'_{\mathfrak{A}}(w) - 2(\beta^2 - 1) \wp_{\mathfrak{A}}(w), \\ \mathfrak{D}_2(v, w) &= (\beta^2 + 1) \tan(v) \wp'_{\mathfrak{A}}(w) + 2(\beta^2 - 1) \wp_{\mathfrak{A}}(w), \\ \mathfrak{F}(v, w) &= (\beta^2 + 1)^2 \tan^2(v) \wp_{\mathfrak{A}}(w)^2 - (3\beta^4 + 2\beta^2 + 3) \tan^2(v) \wp_{\mathfrak{A}}(w) \\ &\quad - (\beta^2 - 1)^2 \wp_{\mathfrak{A}}(w) + 2(\beta^4 + 1) \tan^2(v) + 2(\beta^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Theorem 4 $\beta^2 \neq -1$ とする. $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,1}^V(u) = 8\wp_{\mathfrak{A}}(w) \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{F}(v, w), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,3}^V(u) = -\mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{D}_2(v, w)^2.$$

ここで, $v = (\beta^2 - 1)(u_1 + u_3)/(2\beta)$, $w = (\beta^2 + 1)(u_3 - u_1)/(2\beta)$ とした.

Theorem 5 $\beta^2 \neq -1$ とする. $u = {}^t(u_1, u_3) \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,1}^V(u) = 8\beta^2 \wp_{\mathfrak{A}}(w) \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{F}(v, w), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,3}^V(u) = -\beta^4 \mathfrak{D}_1(v, w)^{-2} \mathfrak{D}_2(v, w)^2.$$

ここで, $v = (1 - \beta^2)(u_1 + \beta^2 u_3)/2$, $w = (1 + \beta^2)(u_1 - \beta^2 u_3)/2$ とした.

Remark 6. $\beta^2 = -1$ とする. $u \in \mathbb{C}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta^{-1}} \wp_{1,i}^V(u) = \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \wp_{1,i}^V(u) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \wp_{1,i}^V(u), \quad i = 1, 3.$$

この極限は Theorem 1 より求めることができる.

[2] と [3] で導出されたシグマ関数の退化極限を用いて計算できるアーベル関数の退化極限と本研究で得られたアーベル関数の退化極限を比較することは今後の課題である.

参考文献

- [1] T. Ayano and V. M. Buchstaber, Relationships Between Hyperelliptic Functions of Genus 2 and Elliptic Functions, *SIGMA* **18** (2022), 30 pages.
- [2] J. Bernatska, V. Enolski, and A. Nakayashiki, Sato Grassmannian and Degenerate Sigma Function, *Commun. Math. Phys.* **374** (2020), 627–660.
- [3] J. Bernatska and D. Leykin, On Degenerate Sigma-Functions in Genus Two, *Glasg. Math. J.* **61** (2019), 169–193.

平面6次曲線に関する数式处理的考察

- A computer algebraic study on plane sextic curves -
 ～二重曲線の例と吉原定義式のPuisseux級数～

高橋 正 (羽衣国際大学)*¹

概 要

先の講演では2次元複素射影空間における吉原の定義式 (A_{19} 特異点をもつ平面6次曲線) を導出する方法を数式处理的に示した。本講演では、吉原の定義式を得る過程において得た二重曲線の例と Puisseux 級数を計算することによって、吉原の定義式を媒介変数表示を用いて、その特徴を数式处理的に捉えることを報告する。

1 特異点の位相型が定まらない二重曲線の例

A_n 型特異点をもつパラメータを有する特異点定義式に対しては、局所座標変換 (変数変換) $z = z' + y^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) を実行し、定義式の係数 (パラメータ) がどのような条件の下で、原点における特異点のミルナー数がどのように変化するかを判定することができる。その際、係数の関係を同時に満たす条件を見出す方法として、グレブナー基底を計算する方法と2つの多項式 (係数のパラメータを変数とする多項式) の終結式を計算する方法がある。グレブナー基底を計算する方法は、計算が大規模になるが複数の条件を同時に見出すことに有効である。それに対し2つの多項式の共通解を求める際には終結式を計算する方法が有効である。

吉原の定義式 ([1]) の導出過程においてパラメータ間の関係設定を簡素化すると奇妙な例 (特異点の位相型が決定できない例) を得た。具体的には、

$$(4xy^2 + 4x^2z + 4y^2z + z^3)^2 = 0$$

がその一例である。

この例は、 $[1, 0, 0]$ で考えるので、 $x = 1$ とおき $z = z' - y^2$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 8$) の項が現れる。次に $z = z' + y^4$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 12$) の項が現れる。次に $z = z' - \frac{3}{4}y^6$ と座標変換すると、 y^n ($n \geq 20$) の項が現れる。

この座標変換の繰り返しは続く。この現象は、式の変形過程 (座標変換の過程) をニュートン境界で考えれば仕組みは明らかである。

2 Puisseux級数を用いて吉原定義式の特徴を数式处理的に捉える

曲線上の点の座標を媒介変数で表示して調べることは古くから行われており1点の近傍において媒介変数表示を通して曲線の微視的な特徴を捉えることができる。Puisseux 級数は冪指数に負の数や分数を許してローラン展開を拡張したもので、代数曲線の分岐を定義できる。ベキ級数で考えることは、幾何学的には着目している点の近傍を拡大して観察することに対応している ([2])。

2010 Mathematics Subject Classification: 32G05

キーワード: Sextic curves, Singularity

*¹ 〒592-8344 大阪府堺市西区浜寺南町1-89-1 羽衣国際大学 現代社会学部

e-mail: ttakahashi@hagoromo.ac.jp

吉原の定義式のPuisseux級数を計算すると、以下ようになる。

$$z \rightarrow y^2 + \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})y^5 + \frac{1}{32}(-3 - \sqrt{5})y^7 + \frac{1}{64}(25 + 9\sqrt{5})y^8 + \frac{1}{28}(1 + \sqrt{5})y^9 + \frac{1}{512}(-217 - 105\sqrt{5} - i\sqrt{3(1686 + 754\sqrt{5})})y^{10} + \dots$$

2.1 Puisseux級数を計算することで何が分かるのか？

上記のPuisseux級数における y^n の係数は、定義式の変形過程（座標変換の過程）において現れた $z = z' - Cy^n$ ($2 \leq n \leq 9$) の C と等しいが $z = z' - Cy^{10}$ の C とは異なる。このことは、吉原の定義式が局所的な座標変換によって、 y^{2n} ($2 \leq n \leq 9$) と zy^n ($2 \leq n \leq 9$) が同時に消去される（項の係数の値が0となる）ことに対応している。

そして、吉原の定義式のPuisseux級数における y^{10} の係数

$$\frac{1}{512}(-217 - 105\sqrt{5} - i\sqrt{3(1686 + 754\sqrt{5})})$$

は、座標変換で y^{20} の係数を 0 にする $z = z' + Cy^{10}$ の C であることが分かる（このとき、 zy^{10} の係数は 0 にはならない）。Puisseux級数を用いることにより、吉原の定義式の特徴が明らかになる。

2.2 Puisseux級数を使うことで見えてくる事

以上のような分析により、Puisseux級数を用いた漸近展開は、座標変換で表せば、 $z = z' - Cy^n$ ($2 \leq n$) の変換によって y^{2n} の項を消去することを繰り返すことに対応している。これは、Newton-Puisseux アルゴリズム ([3]) の逐次実行である（式を変形して行く行為（局所的な座標変換）は級数展開を求めることである）。局所的な座標変換によって求めた特異点の定義式をPuisseux級数で確認することができる。

3 今後の課題

上記の奇妙な例（特異点の位相型が決定できない例）は3次式の二重曲線であり、この現象は、blow-upではどのような現象に対応しているかについて分析したい。

また以前から計算しているが、吉原の定義式（6次曲線で A_{19} を持つ定義式）は、19個のパラメータを有しているが、自由に設定できるものが4つある。その4つを定義式の変形（線形変換）で消去した定義式（15個のパラメータを有する6次曲線で A_{19} を持つ定義式）を得て、そのPuisseux級数を求め、その定義式の特徴を確認したい。

参考文献

- [1] H. Yoshihara. On plane rational curves. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 55(4):152–155, 1979.
- [2] 酒井文雄 (2012), 平面代数曲線, 共立出版.
- [3] Manfred Buchacher (2026), The Newton-Puisseux algorithm and effective algebraic series, Journal of Algebra, Vol. 688, pp. 284-306.

ファイバー束の中間的擬凸性

足立 真訓 (静岡大・理)*¹

Seungjae Lee (Kyungpook National Univ.)*²

Aeryeong Seo (Kyungpook National Univ.)*³

概 要

種数 2 以上の閉 Riemann 面上の複素 n 次元球体 $\mathbb{B}^n$ をファイバーとする正則ファイバー束を考える. この正則 $\mathbb{B}^n$ 束が (同変写像と見て正則点を持つという意味で) 非退化な調和切断を持つ場合に, 正則 $\mathbb{B}^n$ 束の 1 凸性と, 正則 $\mathbb{B}^n$ 束を付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束に埋め込んだ時の補集合の n 凸性を証明した [1] ので, これを報告する.

1 ファイバー束の擬凸性

1980 年代初頭に, コンパクト複素多様体上の正則円板束 (単位円板をファイバーとする (局所自明な) 正則ファイバー束) の全空間の擬凸性が研究され, 全空間が Stein になる例 [6], 擬凸領域による exhaustion を持たない例 [4] が見出された. Diederich–大沢 [5] は, コンパクト Kähler 多様体上の正則円板束の全空間は, 常に弱 1 完備 (複素 Hessian が常に半正定値となるような滑らかな exhaustion が存在) であることを調和写像の理論・Hodge 理論を用いて証明した. 特に, 底空間がコンパクト Riemann 面の場合, 全空間が 1 凸 (複素 Hessian がコンパクト集合を除いて正定値となるような滑らかな exhaustion が存在) になることと正則円板束が局所定数切断を持たないことは同値である. Diederich–大沢 [5] により研究された正則円板束は, Levi 平坦面・正則葉層の不変集合の研究において重要な具体例として扱われている (cf. [2]).

近年, これら正則円板束に関する結果の, 他のファイバー束への拡張に興味を持たれている [3, 7]. 特に, Seo [7] は, 有界対称領域をファイバーとする正則ファイバー束が調和切断を持つとき, その全空間が弱 1 完備であることを証明した. この精密化・一般化を次の形で問う.

問題. コンパクト複素多様体上の, 有界対称領域をファイバーとする正則ファイバー束の全空間が 1 凸となるのはどのような場合か. 1 凸とならない場合は, どのような擬凸性・中間的擬凸性を持つか. また, この正則ファイバー束をコンパクトなファイバー束に自然に埋め込んだ時, その補集合はどのような中間的擬凸性を持つか.

*¹e-mail: adachi.masanori@shizuoka.ac.jp

*²e-mail: seungjae@knu.ac.kr

*³e-mail: aeryeong.seo@knu.ac.kr

本研究は科研費 (課題番号: 24K06776, 25K21994) および韓国国立研究財団 (課題番号: RS-2024-00339854, RS-2025-00561084) からの助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32L05, Secondary 32E10, 32F10, 32V15.

2 主結果の主張と証明のアイデア

我々の主結果は、コンパクト Riemann 面上の正則球体束に関して、この問いに部分的な解答を与える。

主結果. Σ を種数 2 以上のコンパクト Riemann 面、 E を Σ 上の正則 $\mathbb{B}^n$ 束とし、 E に付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束 $\hat{E}$ に E を埋め込んで考える。 E が (同変写像と見て) 正則点を持つ調和切断を許容すると仮定する。このとき、境界 ∂E の CR 法線束 $\mathcal{N} := (T_{\hat{E}}^{1,0}|_{\partial E})/T_{\partial E}^{1,0}$ の滑らかな Hermite 計量であって、 ∂E の水平葉層に沿って正曲率を持つものが存在する。

この $\mathcal{N}$ の Hermite 計量は、Diederich–大沢 [5], Seo [7] で用いられた正則ファイバー束上の exhaustion の構成に倣い、調和切断を基準に標準的な計量を各ファイバー上に並べて構成される。Brunella [2] の議論の拡張により、CR 法線束 $\mathcal{N}$ の Hermite 計量から $\hat{E} \setminus \partial E$ 上の exhaustion を構成できる。この exhaustion は期待される凸性を持つ：

系. 主結果の仮定の下で、 E は 1 凸である。また、 $\hat{E} \setminus \overline{E}$ は n 凸 (複素 Hessian がコンパクト集合を除き正固有値を常に 2 つ持つような滑らかな exhaustion が存在) である。

3 予想

我々の主結果では、底空間は 1 次元に限定されている。底空間の次元が高い場合も、調和切断を元に $\mathcal{N}$ の Hermite 計量を同様に構成できるが、その曲率は一般には半正であることしか分からない。他の部分的な結果も勘案した上で、以下の予想を提案する。

予想. コンパクト Kähler 多様体 M 上の正則 $\mathbb{B}^n$ 束 E を考える。 $n < \dim M$ であれば、 E は 1 凸でなく、付随する正則 $\mathbb{CP}^n$ 束 $\hat{E}$ における補集合 $\hat{E} \setminus \overline{E}$ も n 凸でないであろう。

参考文献

- [1] M. Adachi, S. Lee and A. Seo, *Intermediate pseudoconvexity of fiber bundles*, Preprint available at arXiv:2606.15533.
- [2] M. Brunella, *On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 7, 3101–3113.
- [3] F. S. Deng and J. E. Fornæss, *Flat bundles over some compact complex manifolds*, J. Geom. Anal. **30** (2020), no. 4, 3484–3497.
- [4] K. Diederich and J. E. Fornæss, *A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion*, Manuscripta Math. **39** (1982), no. 1, 119–123.
- [5] K. Diederich and T. Ohsawa, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 4, 819–833.
- [6] T. Ohsawa, *A Stein domain with smooth boundary which has a product structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 3, 1185–1186.
- [7] A. Seo, *Weakly 1-completeness of holomorphic fiber bundles over compact Kähler manifolds*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **106** (2022), no. 3, 2305–2341.

Formal principle for line bundles on neighborhoods of an analytic subset of a compact Kähler manifold

小池 貴之 (筑波大学)*

複素多様体 X 上の正則直線束 L を考える. ここでは, L が**正** (又は**半正**) であるとは, L の C^∞ エルミート計量 h であって, 各点で $\sqrt{-1}\Theta_h > 0$ (又は $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$) なるものが存在するときということとしよう (ここで $\sqrt{-1}\Theta_h$ は h の Chern 曲率形式である). 小平の埋め込み定理によれば, L が正であれば, それにより X の射影空間への埋め込みが与えられる. では L が半正であるときには, X にはどのような幾何構造が現れるべきであろうか? 本講演の動機は, 特に L があるコンパクト部分集合 $Y \subset X$ に沿ってある種の平坦性を持つような場合についての, 次の予想にある:

予想 1 ([4, 5], 部分的な成果については [6, 8] も参照のこと) 複素多様体 X 上の正則直線束 L について, L が半正であり, かつ, X のある被約でコンパクトな複素解析的部分集合 $Y \subset X$ について, 制限 $L|_Y$ がユニタリ平坦であったと仮定する. このとき, Y のある近傍 V が存在して, 制限 $L|_V$ もユニタリ平坦であろう.

尚ここでは, 正則直線束が**ユニタリ平坦**であるとは, その正則な局所自明化を適切に選ぶことによって, 全ての変換関数を $U(1) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ に値をもつ局所定数関数とできるという意味でいっている. 例えば L が, X のある有効因子であって Y に台を持つようなものに対応する直線束である場合, Y のある近傍 V に於ける L の平坦性は, V 上でのある種の正則葉層の存在や, $V \setminus Y$ に於けるレビ平坦超曲面族の存在を含意する.

上記予想, 及びより本質的には, コンパクト超曲面 $Y \subset X$ が非特異で法線束がユニタリ平坦である場合についての, Y の近傍の上田による多変数関数論的分類理論 [10] を動機として, 本講演では Y 近傍でのユニタリ平坦束と L の制限との比較を行うために, ある種の形式化原理 (直線束についての形式化原理, Formal Principle for Line Bundles. 以下 **FPLB** と略することとする) について, プレプリント [7] に基づいて議論したい.

以下, X を複素多様体, $Y \subset X$ を X の被約なコンパクト解析的部分集合とする. また, $\mathcal{O}_X$ で X 上の正則関数の芽の層, 開集合 $V \subset X$ と正則直線束 $L \rightarrow V$ に対して $\mathcal{O}_V(L)$ で V 上の L の正則切断の芽の層, $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ で Y の定義イデアル層を表すこととする. Y のある近傍 $V \subset X$ 上の正則直線 L が Y の近傍上で正則に自明であるためには, 任意の非負整数 μ に対して, Y_μ 上の可逆層 $i_\mu^* \mathcal{O}_V(L)$ が自明でなければならない. ここで

$$Y_\mu := (Y, \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^{\mu+1})$$

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 数理物質系 数学域

e-mail: tkoike@math.tsukuba.ac.jp

web: <https://tkoike.com/>

本研究は科研費 (基盤研究 (C), 課題番号:23K03119) の助成を受けたものである。

は Y の μ 次の無限小近傍, $i_\mu: Y_\mu \rightarrow V$ は自然な射である. より精密な必要条件は, Y に沿った X の完備化を用いて記述できる: つまり, [2] の意味での形式的複素空間

$$Y_\infty = (Y, \varprojlim_\mu \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^{\mu+1})$$

を用いれば, $\mathcal{O}_{Y_\infty}$ で層 $\varprojlim_\mu \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^{\mu+1}$ を, また $i_\infty: Y_\infty \rightarrow V$ で自然な射を表すこととして, 次は簡単に分かる: L が Y のある近傍上で正則に自明であるならば, $i_\infty^* \mathcal{O}_V(L)$ も自明である. この逆がを問うこと, すなわち次の意味で, X における Y の近傍上で FPLB 問題を問うのは自然といえるであろう:

定義 1 上の設定で, Y の任意の近傍 V と, V 上の任意の正則直線束 L について, $i_\infty^* \mathcal{O}_V(L)$ が自明ならば L が Y のある近傍上で正則に自明なるとき, X における Y の近傍上で FPLB が成り立つという.

FPLB が成り立つための十分条件については Griffiths や Peternell による結果が知られていた [3, 9]. 本講演では, それらと比較しつつ, [7] で X がコンパクトケーラー多様体である場合に新たに得られた十分条件とその応用について述べる. また, Arnol'd や上田により, 特に Y が非特異超曲面でその法線束がユニタリ平坦な場合について, FPLB が不成立となるような例が知られている [1, 10]. これに関連し, 複素構造の変形により, パラメータに激しく依存して FPLB の成否が切り替わるような具体例についても報告したい.

参考文献

- [1] V. I. ARNOL'D, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional. Anal. i Priložen., 10-4 (1976), 1–12.
- [2] J. BINGENER, Über formale komplexe Räume, Manuscr. math. **24** (1978), 253–293.
- [3] P. GRIFFITHS, The Extension Problem in Complex Analysis II; Embeddings with Positive Normal Bundle, Amer. J. Math. **88**, 2 (1966), 366–446.
- [4] T. Koike, Linearization of transition functions of a semi-positive line bundle along a certain submanifold, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **71** (2021) no. 5, 2237–2271.
- [5] T. Koike, Hermitian metrics on the anti-canonical bundle of the blow-up of the projective plane at nine points, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, Serie 6, **32** (2023) no. 2, pp. 231–285.
- [6] T. Koike, Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one, J. Differential Geom. **127**, 3 (2024), 1207–1243.
- [7] T. Koike, Formal principle for line bundles on neighborhoods of an analytic subset of a compact Kähler manifold, arXiv:2409.20367.
- [8] T. Koike, Pluripotential geometry on semi-positive effective divisors of numerical dimension one, arXiv:2511.13903.
- [9] TH. PETERNELL, Vektorraumbündel in der Nähe von kompakten komplexen Unterräumen., Math. Ann. **257** (1981), 111–134.
- [10] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1982/1983), 583–607.

ON COMPLETE KÄHLER RIEMANN DOMAINS

TAKEO OHSAWA

A basic result in several complex variables says that a Riemann domain $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$ is equivalent to a domain of holomorphy, a connected component of the total space of the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, if and only if $\mathcal{D}$ is holomorphically convex, by a Theorem of Oka. The point is that every locally pseudoconvex Riemann domain over $\mathbb{C}^n$ carries a plurisubharmonic exhaustion function. It turned out by a work of Fornaess [F] that Oka's theorem cannot be generalized to Riemann domains with ramification points. Namely, it was shown in [F] that there exists a holomorphically nonconvex complex manifold Ω with a holomorphic map $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ with finite fibers which is locally pseudoconvex in the sense that every point of $\mathbb{C}^2$ has a neighborhood U such that connected components of $p^{-1}(U)$ are holomorphically convex.

In [O-1], by slightly modifying the construction in [F], the following was shown.

Theorem 1. *Let $\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{-\mu} \log |z - 2^{-\mu}|$, where $z \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, and let $\Omega'_{\varphi} = \{(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}; e^{\varphi(z)} < |w| < e\}$. Then, Ω'_{φ} is biholomorphically equivalent to a dense open subset of a holomorphically nonconvex locally closed submanifold Σ of $\mathbb{C}^3$ such that the inclusion map $\Omega'_{\varphi} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ is continuously extended to Σ , by this correspondence, as a locally pseudoconvex map $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfying $p^{-1}((2^{-\mu}, 0)) \cong \mathbb{D}$ for all μ .*

By generically projecting the embedded manifold to $\mathbb{C}^2$, one has the following.

Corollary. *There exists a locally pseudoconvex but holomorphically nonconvex Riemann domain over $\mathbb{C}^2$ which is embeddable into $\mathbb{C}^3$ as a locally closed and locally pseudoconvex complex submanifold.*

In [O-2], the following extension theorem was proved as a generalization of what has been used in the proof of Theorem 1.

Theorem 2. *Let M be a complex manifold of dimension n and let $S \subset M$ be a closed complex analytic set whose complement has a complete Kähler metric. Assume that there exist a holomorphic n -form ω on M which has no zeros on $M \setminus S$ and a plurisubharmonic function*

Φ on M satisfying the following conditions i) $\sim$ iii).

$$i) \Phi^{-1}(-\infty) = S.$$

$$ii) \Phi \text{ is } C^\infty \text{ on } M \setminus S.$$

iii) $e^{-\Phi}\omega$ is not locally square integrable on any open subset of M which intersects with S .

Then, for any $c \in \mathbb{R}$ and for any holomorphic function f on $\Phi^{-1}([-\infty, c))$ satisfying

$$i^{n^2} \int_{\Phi < c} |f|^2 \omega \wedge \bar{\omega} < \infty,$$

there exists a holomorphic function $\tilde{f}$ on M such that $\tilde{f}|_S = f$.

As a supplementary remark to these, we shall show the following.

Theorem 3. *Let $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ be a Riemann domain such that, for any point $z \in \mathbb{C}^n$, for any neighborhood $U \ni z$ and for any connected component V of $p^{-1}(U)$, there exist a closed nonsingular complex curve C in $\mathbb{C}^n$ satisfying $p^{-1}(C) \cap V \neq \emptyset$ and a holomorphic extension $\tilde{p} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ of $p|_{p^{-1}(C) \cap V}$ to a Riemann surface $\tilde{C} \supset p^{-1}(C) \cap V$ satisfying $\tilde{C} \setminus \overline{p^{-1}(C) \cap V} \neq \emptyset$. Then Ω is holomorphically convex if and only if it admits a complete Kähler metric.*

Corollary. ([D-P]) *A domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ with $\overline{\Omega}^\circ = \Omega$ is holomorphically convex if and only if Ω admits a complete Kähler metric.*

REFERENCES

- [D-P] Diederich, K. and Pflug, P., *Über Gebiete mit vollständiger Kählermetrik*, Math. Ann. **257** (1981), 191-198.
- [F] Forneaess, J. E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$* , Math. Ann. **234** (1978), 275-277.
- [O-1] Ohsawa, T., *Constructing a holomorphically nonconvex surface which is locally pseudoconvex as a submanifold of $\mathbb{C}^3$* , submitted for publication.
- [O-2] ———, *An extension of holomorphic functions from analytic complements of complete Kähler domains and application to holomorphic separability*, preprint.

ケーラー多様体上の拡散過程と正則写像の値分布

— 伊藤解析の視点から —

厚地 淳 (慶應義塾大学理工学部)*

2026 年 9 月 2 日

1 序

本講演では、ある種の確率過程とその解析手法である伊藤解析 (stochastic calculus) と、関数論の値分布論に関する親和性について説明したいと思う。我々は関数 f の定義域 $\mathcal{M}$ 上の連続な経路のサンプル (標本路) $X_t(\omega)$ を取り、それと関数の合成 $f(X_t(\omega))$ の時間発展を調べることにより、 f や $\mathcal{M}$ の性質を見出そうと考えている。このような時間発展に対する解析の基本的手法が、伊藤解析である。この時間発展は確率測度の法則に支配されるが、適切なものを考えれば何がしかの結果に結びつくのではないかと期待できる。後述するように、時間発展の考え方は値分布論のその黎明期から続く研究手法に内在するものと考えている。これが前述した親和性に自然につながる理由の一つと思われる。

この予稿では本講演において使用される基本的用語や概念について説明する。後半はそれらを用いて得られた値分布論に関係する最近の結果について述べる。

2 拡散過程、マルチンゲール、ブラウン運動の基礎

本講演の題目にある拡散過程とは、連続な標本路を持つ強マルコフ過程のことである。まず、これらの基本事項を準備する。詳細については、[20], [24], [30] 等の入門書を参照していただきたい。また関数論との関係では、[9], 拙著 [5] 等がある。

2.1 マルコフ過程、拡散過程

$\mathcal{M}$ を可分な距離空間とし、局所コンパクトであると仮定する。 $\mathcal{M}$ 上の $t \geq 0$ を時間パラメータとする連続な経路空間 Ω に確率測度 $\{P_x\}_{x \in \mathcal{M}}$ を導入する。 $X_t : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ ($t \geq 0$) を $X_t(\omega) := \omega(t)$ ($\omega \in \Omega$) とする。各 P_x は Ω の自然なボレル集合上で定義されており、 $P_x(X_0 = x) = 1$ である。すなわち、 P_x は x から出発する経路全体の上に台を持ち、 x から出発する確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ の法則である。ここで、 $P_x(\{\omega \in \Omega \mid X_t \in A\}) = P(X_t \in A)$ と略記している。また、確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ を単に X と記す。 E_x で P_x による積分 (期待値) を表す。例えば、 $f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ 上の有界

*e-mail: atsuji@math.keio.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:21K03299, 25K07052) の助成を受けたものである。

ボレル可測関数全体) に対し、

$$E_x[f(X_t)] := \int_{\Omega} f(X_t(\omega))dP(\omega).$$

(X_t, P_x) がマルコフ過程とは、任意の $f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$, $t, s \geq 0$, $x \in \mathcal{M}$ に対し、

$$E_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = E[E_{X_t}[f(X_s)]] \quad (1)$$

が成り立つことである。ここで、 $\mathcal{F}_t$ は X_s ($0 \leq s \leq t$) を可測にするような集合をすべて含む「良い」 σ -加法族 (自然なフィルトレーションという) であり、可積分な確率変数 Y に対し、 $E_x[Y|\mathcal{F}_t]$ は $\mathcal{F}_t$ に関する条件付き期待値である。なお、 $E_x[Y|\mathcal{F}_t] = Z$ という等式は、 P_x -a.e. ω について成立しており (a.s と記す)、

$$\int_A Y(\omega)dP(\omega) = \int_A Z(\omega)dP(\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_t)$$

と同値である。 $\mathcal{F}_t$ は t について増大系であり、このような性質を満たす σ -加法族の族をフィルトレーションと呼ぶ。推移作用素 $P_t: \mathcal{B}_b(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{B}_b(\mathcal{M})$ を

$$P_t f(x) = E_x[f(X_t)] \quad (f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{M}))$$

によって定義すれば、マルコフ性から $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ が従う。 $\theta_t: \Omega \rightarrow \Omega$ を $(\theta_t \omega)(s) := \omega(t+s)$ によって定義する。 $\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ と置く。(1) は次のように拡張される。

Definition 1 (マルコフ性) Y を 任意の $\mathcal{F}_{\infty}$ 可測な有界確率変数に対し、

$$E_x[Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[Y] \quad (2)$$

が成り立つとき、 X はマルコフ性を持つという。

ランダムな時刻 T が 停止時刻 (stopping time) とは、任意の $t \geq 0$ に対し、

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

を満たすことを言う。停止時刻の代表例として、 D, U を $\mathcal{M}$ のボレル集合とすると、

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\} \quad D \text{ からの脱出時間}, \quad \sigma_U = \inf\{t > 0 : X_t \in U\} \quad U \text{ への最小到達時間}$$

を挙げておく。ただし、 $\inf \emptyset = \infty$ とする。マルコフ性は non-random な時間について (2) が成り立つことを要請するが、それをさらに強く、停止時刻についても (2) が成り立つとき、確率過程は**強マルコフ性**を持つという。

連続な標本路を持つ強マルコフ過程を**拡散過程**という。以降、連続な標本路を持つ確率過程を単に、連続な確率過程と呼ぶ。

2.2 マルチンゲール

マルコフ過程と並んで重要な確率過程のクラスとしてマルチンゲールがある。今、一般的なフィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ 上の連続な確率過程 M を考える。

Definition 2 実数値 P -可積分確率過程 M_t がマルチンゲールであるとは、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に対し、

i) 各 $t \geq 0$ について M_t は $\mathcal{F}_t$ -可測 ($\mathcal{F}_t$ -適合という),

ii) 任意の $t \geq s \geq 0$ に対し、

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad a.s. \quad (3)$$

が成立することである。

また、マルチンゲールの定義 Definition 2 において、(3) の代わりに、

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s \quad (\text{resp. } \leq M_s) \quad a.s.$$

が成り立つとき、 M を 劣マルチンゲール (resp. 優マルチンゲール) と呼ぶ。

Definition 3 連続な確率過程 M に対し、 $T_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) a.s. を満たす停止時刻の列 $\{T_n\}$ が存在し、 $\{M_{t \wedge T_n}\}_{t \geq 0}$ がマルチンゲールとなるとき、 M を局所マルチンゲールと呼ぶ。但し、 $s \wedge t := \min\{s, t\}$ 。

局所優マルチンゲール、局所劣マルチンゲールも同様に定義する。局所劣マルチンゲールの差で書ける連続確率過程をセミマルチンゲールと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{調和関数} \\ \text{劣マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{劣調和関数} \\ \text{優マルチンゲール} &\leftrightarrow \text{優調和関数} \end{aligned}$$

という対応がある。後述するように、この対応は形式的なものだけでなく、ブラウン運動を通じて実現できるものである。次の分解定理からは、劣調和関数の Riesz 分解が想起されるだろう。

Theorem 4 (Doob-Meyer 分解) X を劣マルチンゲールとする。このとき、マルチンゲール M と増加過程 A (i.e. $t \mapsto A_t(\omega)$ が非減少関数) が一意に存在して、

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M_0 = A_0 = 0$$

と分解できる。

局所劣マルチンゲールに対しても Doob-Meyer 分解は成立し、この場合は局所マルチンゲールと増加過程の和に一意に分解できる。セミマルチンゲールは局所マルチンゲールと有界変動過程の和に分解できる。

イェンセンの不等式より、 M が (局所) マルチンゲールならば、 M^2 は (局所) 劣マルチンゲールとなることがわかる。 M^2 に Doob-Meyer 分解を適用して得られる増加過程を $\langle M \rangle_t$ と書き、 M の 2 次変分過程と呼ぶ。 M, N が局所マルチンゲールのとき、 MN はセミマルチンゲールとなる。この有界変動部分を $\langle M, N \rangle_t$ と書く。

さて、拡散過程の場合に戻ろう。 M が微分構造を持つ場合、特に滑らかな多様体である場合には、拡散過程は生成作用素と呼ばれる非正の 2 階の微分作用素によって特徴づけられる。特に、 L が X の生成作用素であることは、 $f \in C^2(M)$ に対し、

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \text{ は局所マルチンゲール}$$

という性質によって特徴づけられる。すなわち、 $f(X_t)$ はセミマルチンゲールであり、その分解の有界変動部分は $\int_0^t Lf(X_s)ds$ で与えられる。

Example 5 $M = \mathbb{R}$ とする。 $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ を生成作用素とする拡散過程 (B_t, P_x) を $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動、または、1 次元ブラウン運動という。推移作用素 P_t を $P_t f(x) := E_x[f(B_t)]$ とすれば、

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) f(y) dy, \quad p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

と書ける。また、 B は自然なフィルトレーションに関しマルチンゲールであり、 $\langle B \rangle_t = t$ 。

Theorem 6 (1 次元ブラウン運動に対する伊藤の公式) $f \in C^2(\mathbb{R})$ とする。このとき、

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds \quad (t \geq 0)$$

が成り立つ。

右辺の第 1 項は確率積分 (伊藤積分) であり、局所マルチンゲールとなることが知られている。すなわち、 $f(B_t)$ はセミマルチンゲールとなり、局所マルチンゲール部分 $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ と有界変動過程 $\frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds$ に分解できることを示している。

$B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ ($B_t^1, \dots, B_t^d$ は独立な 1 次元ブラウン運動) の形で書ける連続確率過程を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動、または、 d 次元ブラウン運動という。伊藤の公式は多次元ブラウン運動に対しても成立する。

Theorem 7 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対し、

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s)ds.$$

ここで、 $dB_s = (dB_s^1, \dots, dB_s^d)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ は $\mathbb{R}^d$ のラプラシアンである。

B は生成作用素 $\frac{1}{2}\Delta$ を持つ拡散過程であることがわかる。また、伊藤の公式については、多次元セミマルチンゲールに対しても類似の公式が成立することも注意しておく。

マルチンゲールとブラウン運動には密接な関係がある。

Theorem 8 (Dambis, Dubins-Schwarz cf. [24], [30]) M_t を局所マルチンゲールとする。 M が定義されているフィルトレーション付き確率空間を含む適当な確率空間が存在して、その上の適当な 1 次元ブラウン運動 B を用いて、

$$M_t = B(\langle M \rangle_t)$$

と書ける。

この事実から、 M は B の時間変更過程とみることができる。マルチンゲール M を調べるにあたっては、ブラウン運動と $\langle M \rangle_t$ を調べることの重要性がわかる。

次に問題となるのは、拡散過程はいかに構成されるか、という問題である。しばしば用いられる確率論的方法については大きく 2 つの方法が知られている。

- 1) 確率微分方程式による方法。cf. [20], [19], [32],
- 2) ディリクレ形式による方法。cf. [13]

本講演では主に 2) の方法を基礎とする。

2.3 リーマン多様体上のブラウン運動

以降、多様体というときには常に連結性を仮定する。 $\mathcal{M}$ をリーマン多様体とし、そのリーマン計量から定まるラプラス-ベルトラミ作用素 $\Delta_{\mathcal{M}}$ を考える。

Definition 9 $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$ を生成作用素とする $\mathcal{M}$ 上の拡散過程 (X_t, P_x) を $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動という。

任意の $u, v \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ に対し、

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(x) v(x) dV(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV(x)$$

が成り立つ。ここで、 dV はリーマン計量より定まる体積測度である。右辺の双線形対称形式を $\mathcal{E}(u, v)$ と置く。 $C_0^\infty(\mathcal{M})$ を $\|u\|^2 := \mathcal{E}(u, u) + \|u\|_{L^2(dV)}^2$ で定義されるノルム $\|\cdot\|$ で完備化したもの $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を考えると、この上に $\mathcal{E}$ は自然に拡張できる。 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $L^2(dV)$ 上の強局所・正則ディリクレ形式となる (cf. [13])。強局所・正則ディリクレ形式には拡散過程が一意に対応することが知られており (cf. [13])、 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ には $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$ を生成作用素とする $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動 (X_t, P_x) が対応する。推移作用素 P_t は $L^2(dV)$ 上に拡張でき、測度 dV に関し対称性を持つ。これにより、 $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動は dV に関し対称拡散過程であるという。

Lemma 10 X を $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動、 $f \in C^2(\mathcal{M})$ とする。

$$f(X_t) - f(X_0) = M_t + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} f(X_s) ds, \quad M_t: \text{局所マルチンゲール}$$

と分解でき、

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\nabla f|^2(X_s) ds.$$

特に、 u が $\mathcal{M}$ 上の調和関数ならば、 $u(X)$ は局所マルチンゲールであり、劣調和関数 (resp. 優調和関数) ならば、 $u(X)$ は局所劣マルチンゲール (resp. 局所優マルチンゲール) である。後者の関係は、 u に滑らかさがない場合も成立する。

滑らかなリーマン多様体上のブラウン運動の推移作用素 P_t は dV に関し、密度 $p(t, x, y)$ を持つ。これは次の熱方程式の基本解となることが知られている。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta_M u(t, x), \quad u(0, x) = \phi(x) \in C_b(\mathcal{M}). \quad (4)$$

このほかの解析学的諸量との関係について記す。後述するネヴァンリンナ理論では重要な役割を果たす。 $D \subset \mathcal{M}$ を ∂D が滑らかな領域とする。 $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$, $\phi \in C_b(\mathcal{M})$ とする。

[調和測度 ω_x]

$$E_x[\phi(X_{\tau_D})] = \int_{\partial D} \phi(y) d\omega_x(y).$$

[グリーン関数 G_D]

$$E_x\left[\int_0^{\tau_D} \phi(X_s) ds\right] = \int_D \phi(y) G_D(x, y) dV(y).$$

$D = \mathcal{M}$ の時は、後述する過渡的多様体では $\mathcal{M}$ のグリーン関数となり、

$$G_M(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y) dt.$$

3 ケーラー多様体上のブラウン運動

3.1 複素ブラウン運動と等角マルチンゲール

Definition 11 x_t, y_t を独立な $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動とする。 $Z_t := x_t + iy_t$ ($i = \sqrt{-1}$) と書ける確率過程を $\mathbb{C}$ 上のブラウン運動、または、複素ブラウン運動という。

Gettoor-Sharpe[15] はこれを拡張して等角マルチンゲールの概念を導入した。

Definition 12 $Z_t = X_t + iY_t$ を複素数値マルチンゲールとする。すなわち、 X, Y は $\mathbb{R}$ 上の局所マルチンゲールとする。

$$\langle X \rangle_t = \langle Y \rangle_t, \quad \langle X, Y \rangle_t = 0 \quad (\forall t \geq 0)$$

を満たすとき、 Z を等角マルチンゲールと呼ぶ。

Theorem 8 を用いれば、等角マルチンゲールは、複素ブラウン運動を時間変更したものとなることがわかる。すなわち、複素ブラウン運動 $\tilde{Z}$ が存在して、

$$Z_t = \tilde{Z}(\langle X \rangle_t).$$

等角マルチンゲールの例として重要なものは正則関数による複素ブラウン運動の像である。

Theorem 13 (ブラウン運動の等角不変性) $D \subset \mathbb{C}$: 領域 とし、 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数、 Z を複素ブラウン運動で $Z_0 = z \in D$ とする。 $\tau_D = \inf\{t > 0 : Z_t \notin D\}$ と置く。このとき、 $f(Z)$ は等角マルチンゲールとなり、 $\mathbb{C}$ 上の複素ブラウン運動 $\tilde{Z}$ が存在して、

$$f(Z_t) = \tilde{Z}(\rho_t) \quad (0 \leq t < \tau_D). \quad \text{ここで、} \rho_t = \int_0^t |f'(Z_s)|^2 ds.$$

3.2 ケーラー多様体上のブラウン運動と正則拡散過程

$d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$, $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$, $g_{\mathcal{M}} = (g_{\alpha,\bar{\beta}})$: 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のケーラー計量, $\omega = g_{\alpha,\bar{\beta}} idz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}$ とする。

Definition 14

$$L = 2 \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha,\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}}, \quad (g^{\alpha,\bar{\beta}}) = (g_{\alpha,\bar{\beta}})^{-1} \quad (5)$$

とするとき、 L を生成作用素に持つ拡散過程 (X_t, P_x) をケーラー多様体 $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ 上のブラウン運動という。

(X_t, P_x) はディリクレ形式

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\mathcal{M}} du \wedge d^c v \wedge \omega^{n-1} \quad (u, v \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})) \quad (6)$$

に対応している。(cf. Fukushima-Okada[11], Kaneko[21], [22], Kaneko-Taniguchi[23]). $dm = c_n \omega^n$ と置く。 $L^2(dm)$ 上で前述のように $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を定義すれば、 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $L^2(dm)$ 上の強局所正則ディリクレ形式となる。

$$\mathcal{E}(u, v) = - \int_{\mathcal{M}} u dd^c v \wedge \omega^{n-1} \quad (u, v \in C_0^{\infty}(\mathcal{M}))$$

となるから、次元 n のみによる定数 c_n を適当にとれば、

$$Lu = \frac{dd^c u \wedge \omega^{n-1}}{dm} \quad (u \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})).$$

とできる。この L の形から、次が直ちにわかる。

Lemma 15 $g_{\mathcal{M}}$ がケーラーならば、開集合 $U \subset \mathcal{M}$ 上の正則関数 f に対し、 Ref は L -調和である。これより、 U 内を出発する L を生成作用素とする X に対し、 $f(X_t)$ ($0 \leq t < \tau_U$) は等角マルチンゲールとなる。

一般のエルミート計量に対する (リーマン多様体としての) ラプラシアンでは、上述の性質は成り立つとは限らない。

[11], [12] においては多重劣調和関数を用いてディリクレ形式を定義し、より広範な拡散過程のクラスを考え、多重ポテンシャル論との関係を論じている。上述の先行研究では次のような拡散過程のクラスが導入された。

Definition 16 (X_t, P_x) が $\mathcal{M}$ 上の正則拡散過程 (holomorphic diffusion) とは、任意の開集合 $U \subset \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ と、 $X_t \in U$ ($t \in [S, T]$) となる確率区間 $[S, T]$ に対し、 $\{f(X_{(t \vee S) \wedge T})\}_{t \geq 0}$ が等角マルチンゲールとなることである。 ($s \vee t := \max\{s, t\}$.)

ケーラー多様体上のブラウン運動は対称正則拡散過程である。

Theorem 17 ([11]) 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の対称正則拡散過程に対して、そのディリクレ形式は、ある $(n-1, n-1)$ 正閉カレント θ と多重劣調和関数 φ が存在して、 $L^2(dm)$ 上で

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_D du \wedge d^c v \wedge \theta \quad (u, v \in C_0^\infty(D)), \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 $dm = dd^c \varphi \wedge \theta$ 。

3.3 大域的性質

この節では $\mathcal{M}$ は境界を持たない連結なリーマン多様体とし、 $\mathcal{M}$ 上のブラウン運動 $X = (X_t, P_x)$ の大域的性質について述べる。これを正則拡散過程に置き換える際は若干の注意が必要であるが、概ね同様なことが成立する。

仮定より、 X は既約となる。今の場合、任意の $x, y \in \mathcal{M}$ に対し、 $p(t, x, y) > 0$ ($t > 0$)。

3.3.1 保存性・確率的完備性

Definition 18 $\zeta := \inf\{t > 0 : X_t \notin \mathcal{M}\}$ を X の生存時間 (life time) という。 $P_x(\zeta = \infty) = 1$ ($\forall \exists x \in \mathcal{M}$) の時、 X は保存的であるといい、この時、 $\mathcal{M}$ は確率的完備であるという。

Remark 19 確率的完備性とリーマン計量の完備性は関係がない。

例. 1. $\mathcal{M} = \mathbb{C} \setminus \{o\}$ は、ユークリッド計量に関して確率的完備であるが、完備ではない。
2. 完備なリーマン多様体で $\mathcal{M}$ の断面曲率が $-d(x_0, x)^{2+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) のオーダーで発散し、確率的完備でないものを作ることができる。但し、 $d(x, y)$ は $\mathcal{M}$ のリーマン距離、 x_0 は参照点である。

次ような特徴づけが知られている。

Proposition 20 (cf.[17]) 確率的完備性は 次の各性質と同値である。

i)

$$\int_{\mathcal{M}} p(t, x, y) dV(y) = 1 \quad (\forall \exists x \neq y \in \mathcal{M}).$$

ii) 熱方程式の初期値問題 (4) の有界な解は一意。

iii) $\lambda > 0$ に対し、 $\Delta_{\mathcal{M}} u = \lambda u$ を満たす有界な u は $u = 0$ に限る。

判定条件としては次が良く知られている。

Theorem 21 (Grigoryan[17]) $\mathcal{M}$ は完備とする。ある点を中心とする半径 $r > 0$ の測地球の体積を $v(r)$ とおく。 $\int_1^\infty \frac{r dr}{\log v(r)} = \infty$ ならば、 $\mathcal{M}$ は確率的完備である。特に、

あるコンパクト集合 $K \subset \mathcal{M}$ と定数 $C > 0$ 、参照点 $x_0 \in M$ に対して、

$$\text{Ric}_x \geq -Cd(x_0, x)^2 \quad (x \in \mathcal{M} \setminus K)$$

ならば、 $\mathcal{M}$ は確率的完備である。

3.3.2 再帰性・過渡性

Definition 22 i) 任意の空でない開集合 $U \subset \mathcal{M}$ に対し、

$$P_x(\sigma_U < \infty) = 1 \quad (\forall \exists x \in \mathcal{M})$$

の時、 X は再帰的 (recurrent) という。ただし、 $\sigma_U := \inf\{t > 0 : X_t \in U\}$.

ii) X が再帰的でないとき、過渡的 (transient) という。

Remark 23 i) 既約性により、リーマン多様体 $\mathcal{M}$ に対し、 X の再帰性・過渡性はいずれかに定まる。

ii) X が再帰的であれば、保存的である。すなわち、保存的でないときは過渡的である。

上の注意により、 X が再帰的 (resp. 過渡的) なとき、リーマン多様体を再帰的 (resp. 過渡的) ということにする。

Proposition 24 X が過渡的であることと、次の各条件は同値である。

i)

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)ds\right] < \infty \quad (\forall \exists f \in L_+^1(dV), \int_M f dV > 0, \zeta : \text{life time}).$$

ii) グリーン関数が存在する。すなわち、

$$G_{\mathcal{M}}(x, y) := \int_0^\infty p(t, x, y)dt < \infty \quad (\forall \exists x \neq y \in \mathcal{M})$$

iii) $\mathcal{M}$ 上に非定数有界な劣調和関数が存在する。

iv) $\mathcal{M}$ 上に非定数非負優調和関数が存在する。

$\mathcal{M}$ が過渡的なときは、前に見たように、 $f \in L^1(dV)$ に対し、

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)ds\right] = \int_{\mathcal{M}} G_{\mathcal{M}}(x, y)f(y)dV(y).$$

Proposition 25 X が再帰的であることと、次の各条件は同値である。

i) 任意の空でない開集合 $U \subset \mathcal{M}$ に対し、

$$\int_0^\infty 1_U(X_t)dt = \infty \quad P_x\text{-a.s.}$$

ii) [ロイデンの条件] $\phi_n \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ が存在して、

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla \phi_n|^2(x)dV(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

iii) グリーン関数が存在しない。すなわち、

$$\int_1^\infty p(t, x, y) dt = \infty \quad (\forall \exists x, y \in \mathcal{M}).$$

iv) $\mathcal{M}$ 上の有界な劣調和関数は定数に限る。

v) $\mathcal{M}$ 上の非負優調和関数は定数に限る。

Theorem 26 (Grigor'yan[17]) $\mathcal{M}$ は完備とする。 $\int_1^\infty \frac{r dr}{v(r)} = \infty$ ならば、 X は再帰的である。

3.4 ケーラー多様体における例

まず 1 次元の場合を見てみよう。

例 1. $\mathbb{C}$ は計量にかかわらず、再帰的である。

例 2. $D \subset \mathbb{C}$ を単位円板とする。 D にユークリッド計量を入れたものは、確率的非完備である。一方、 D に双曲計量 (ポアンカレ計量) を入れたものは確率的完備であり、過渡的である。

リーマン面 (1 次元複素多様体) には適当な等角計量が入っており、ケーラー多様体とみなすことにする。1 次元の場合には、再帰性・過渡性は等角不変であることに注意する。

例 2. 開リーマン面 $\mathcal{M}$ が再帰的になる必要十分条件は、 $\mathcal{M}$ がリーマン面のクラス O_G に属することである。

例 3. $\mathbb{C}^n$ にユークリッド計量を入れたものは過渡的で確率的完備である。

例 4. $\mathbb{C}^n$ の有界領域は計量にかかわらず、過渡的である。確率的完備性は計量による。

ケーラー多様体に対しては、前節でみたようにケーラー計量に応じて再帰性・過渡性を定義することができる。一方、複素多様体一般では計量によって再帰的であったり、過渡的であったりすることもある。そこで次のような分類を与えてみる。

Definition 27 i) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のすべての非退化対称正則拡散過程が再帰的なとき、 $\mathcal{M}$ を強再帰的という。

ii) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上に再帰的な非退化対称正則拡散過程が存在するとき、 $\mathcal{M}$ を弱再帰的という。

iii) 複素多様体 $\mathcal{M}$ 上のすべての非退化対称正則拡散過程が過渡的なとき、 $\mathcal{M}$ を強過渡的という。

例 5. コンパクト複素多様体は強再帰的である。

例 6. リーマン面は強再帰的か、強過渡的のいずれかである。開リーマン面が強再帰的であるための必要十分条件は O_G に属することである。

例 7. $\mathbb{C}^n$ の有界領域は強過渡的である。

例 8. Stoll の意味で parabolic な多様体 ([31], cf. [16]) は弱再帰的である ([22])。

4 再帰的ケーラー多様体と放物的ネヴァンlinna理論

4.1 定性的性質

Definition 28 (Liouville 定理) 複素多様体 M が有界な多重劣調和関数は定数以外許容しないとき、 $\mathcal{M}$ は有界多重劣調和関数に関して Liouville 性を持つという。

Proposition 29 $\mathcal{M}$: 弱再帰的 $\Rightarrow \mathcal{M}$: 多重劣調和関数に関して Liouville 性を持つ。

問題 (open): 上の Proposition の逆は成り立つか?

Proposition 30 (Casorati-Weierstrass の定理) M が弱再帰的、 f が $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数ならば、 f の除外点の集合は対数容量零である。

4.2 放物型ネヴァンlinna理論

再帰的な場合以外でも以下の設定は可能である。今、ケーラー多様体 $(\mathcal{M}, g)$ は確率的完備とする。 $[w, a] : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の球面距離 (弦距離), $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 正則写像 (i.e. 有理型関数), $e_f := \text{tr}_M(f^*g_{FS})$, $g_{FS} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の Fubini-Study 計量, $dV : (\mathcal{M}, g)$ の体積要素とする。 $f(x) \neq a$ のとき、次の量を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{m}_x(t, a) &= E_x[\log[f(X_t), a]^{-2}], \\ \tilde{N}_x(t, a) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \log[f(X_s), a]^{-2} > \lambda\right), \\ \tilde{T}_x(t) &= E_x\left[\int_0^t e_f(X_s) ds\right].\end{aligned}$$

Proposition 31 (第 1 主定理) $f(x) \neq a$ かつ $\tilde{T}_x(t) < \infty$ ならば、

$$\tilde{m}_x(t, a) - \log[f(x), a]^{-2} + \tilde{N}_x(t, a) = \tilde{T}_x(t).$$

$$R(x) := \inf_{|\xi|=1, \xi \in T_x \mathcal{M}} \text{Ric}(\xi, \xi) \quad (8)$$

と置く。 $r(x) := d(x_0, x)$ を参照点 $x_0 \in \mathcal{M}$ からの距離関数とする。

Lemma 32 ある定数 $C > 0$ があって、

$$R(x) \geq -Cr(x)^2 - C \quad (9)$$

とする。 f が $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を除外するならば、 $\tilde{N}_x(t, a) = 0$ ($\forall t > 0$), a.e. x .

今、 f として

$$\tilde{T}_x(t) < \infty \quad (\forall t > 0), \text{ a.e. } x \quad (10)$$

となる有理型関数を考える。 f がエネルギー有限, i.e. $\int_{\mathcal{M}} e_f(x) dV(x) < \infty$ ならば、(10) は満たされる。

Theorem 33 ([2], [3]) $\mathcal{M}$ を完備ケーラー多様体とし、そのリッチ曲率は (9) を満たすとする。 f は (10) を満たす $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数であり、 $a_1, a_2, \dots, a_q$ を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の異なる点とする。 $x \in \mathcal{M}$ は $f(x) \neq a_j$ ($j = 1, \dots, q$) とし、 $\tilde{T}_x(t) \uparrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^q \tilde{m}_x(t, a_i) + \tilde{N}_1(t, x) \leq 2\tilde{T}_x(t) + \tilde{N}_x(t, \text{Ric}) + O(\log \tilde{T}_x(t))$$

がルベグ測度有限な集合を除いた $t \in (0, \infty)$ について成立する。ここで、

$$\tilde{N}_x(t, \text{Ric}) = -E_x\left[\int_0^t R(X_s)ds\right].$$

今、

$$\int_{\mathcal{M}} |R(x)| dV(x) < \infty$$

を仮定する。これは、1次元のときは再帰性の十分条件である。

$$\alpha := - \int_{\mathcal{M}} R(x) dV(x) / \int_{\mathcal{M}} e_f(x) dV(x)$$

と置く。

Theorem 34 上の設定の下、 $(\mathcal{M}, g)$ が再帰的ケーラー多様体ならば、

$$\sum_{i=1}^q \tilde{\delta}_x(a_i) \leq 2 + \alpha.$$

ここで、

$$\tilde{\delta}_x(a) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{m}_x(t, a)}{\tilde{T}_x(t)}.$$

特に、 f の除外点の個数 $\leq 2 + \alpha$.

証明は 再帰的拡散過程のエルゴード定理から従う。

5 過渡的ケーラー多様体上の有理型関数の値分布論

5.1 シュヴァルツの補題とピカル型定理

この節では写像の的が負曲率多様体の場合を想定する。

$(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$: 完備ケーラー多様体、 $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$: エルミート多様体、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ 正則写像、 $\mathcal{B}(r) : \mathcal{M}$ の半径 $r > 0$ の測地球、 $K(y) : y \in \mathcal{N}$ における $\mathcal{N}$ の正則双断面曲率の上界とする。 $R(x)$ を (8) で定義した $\mathcal{M}$ のリッチ曲率の下限とし、 $R_-(x) := \max\{0, -R(x)\}$ と置く。まず次が基本的である。

Theorem 35 (一般化されたシュヴァルツの補題 [33]) 定数 $K_1, K_2 > 0$ が存在して、 $\sup_{y \in \mathcal{N}} K(y) \leq -K_1$, $\sup_{x \in \mathcal{M}} R_-(x) \leq K_2$ ならば、 $f^*g_{\mathcal{N}} \leq \frac{K_2}{K_1}g_{\mathcal{M}}$.

Corollary 36 $R(x) \geq 0$ ($x \in \mathcal{M}$) であり、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{3 \text{ 点}\}$ が正則写像ならば、 f は定数。

この $R(x)$ の下限の条件を可積分条件に置き換えたものが考えられている。

Theorem 37 ([4](2021)) ケーラー多様体 $\mathcal{M}$ は過渡的とし、 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ を正則写像とする。非負連続非増加関数 ρ で $\int_1^\infty \sqrt{\rho(t)} dt = \infty$ を満たすものが存在し、 $\mathcal{M}$ の或るコンパクト集合の外で $K(f(x)) \leq -\rho(r(x))$ が成り立つとする。

$$\int_{\mathcal{M}} R_-(x) dV(x) < \infty \quad \text{かつ} \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(r)^2} \log \text{vol}(\mathcal{B}(r)) < \infty,$$

ならば、 f は定数。ここで、 $\Phi(r) = \int_1^r \sqrt{\rho(t)} dt$ 。

Remark 38 Li-Yau [27](1990) は ρ が定数のとき、さらに、Pigola-Rigoli-Setti [29](2008) は $\rho(t) = ct^{-b}$ ($b < 2$) の時に同様な結果を示している。

Corollary 39 ケーラー多様体 $\mathcal{M}$ は過渡的とする。 $\int_{\mathcal{M}} R_-(x) dV(x) < \infty$ かつ

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \log \text{vol}(\mathcal{B}(r)) < \infty,$$

ならば、 $\mathcal{M}$ 上の非定数有理型関数の除外点の個数は高々 2 個。

Remark 40 1) 1 次元のときを考えればわかるように、上の結果で過渡性の条件は外せない。

2) 上の体積の増大条件は、ある正則拡散過程の保存性に関する条件である。

5.2 無限遠で正則なケーラー多様体

$(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$: 過渡的ケーラー多様体とし、 $G_{\mathcal{M}}(y, x)$ をグリーン関数とする。 $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ 。

Definition 41 $D_r \uparrow \mathcal{M}$ ($r \uparrow \infty$) をエグゾースションとする。任意の固定された $x_0 \in \mathcal{M}$ に対し、

$$\sup_{x \in \mathcal{M} \setminus D_r} G_{\mathcal{M}}(x_0, x) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

を満たすとき、 $(\mathcal{M}, g)$ は無限遠で正則 (regular at infinity) ということにする。

$(\mathcal{M}, g)$ が完備なときは、 $G_{\mathcal{M}}(x_0, x) \rightarrow 0$ ($d(x_0, x) \rightarrow \infty$) を満たすことである。

例 1. $n \geq 2$ とする。 $\mathcal{M}$ がリーマン多様体としてカルタン・アダマール多様体 (単連結、断面曲率が非正) ならば、無限遠で正則な過渡的多様体である。

2. $\mathcal{M}$ のリッチ曲率が非負で過渡的ならば、無限遠で正則な多様体である。

3. $\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ とし、双曲計量を考えると、曲率有界、完備過渡的であるが、無限遠で正則ではない。

無限遠で正則な過渡的多様体で関数論的に重要な例としては、次が挙げられる。

- プロパーに埋め込まれた $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体 (2 次元以上, $\mathbb{C}^n$ から誘導された計量に関して. cf. [1]).
- affine algebraic varieties $\dim \geq 2$ (cf. [14]).
- $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) の超凸領域、特に、有界強擬凸領域 (cf. [28]).
- $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) のディリクレ問題の意味で正則な有界領域.

$\mathcal{M}$ が無限遠を正則とする場合は、 $x_0 \in \mathcal{M}$ を任意に参照点として取り、 $\phi(x) := -\log G_{\mathcal{M}}(x_0, x)$ によって、 $\mathcal{M}$ のエグゾースション関数を定義することができる。

5.3 過渡的多様体のネヴァンlinna理論

$X: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ 上のブラウン運動, $B(r) := \{x \in \mathcal{M} : \phi(x) < r\}$ とし、その他前節と同じ記号を用いる。 $a > 0$ に対し、 $\log^- a = \max\{-\log a, 0\}$ と書く。

Definition 42 (Nevanlinna functions) $x \in \mathcal{M}$, $\tau_r = \inf\{t > 0 : \phi(X_t) \geq r\}$ とする。 $f(x) \neq a$ なる $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と $r > 0$ に対し、次の量を定義する。

$$\begin{aligned} T_x(r) &= E_x \left[\int_0^{\tau_r} e_f(X_s) ds \right] \quad (\text{characteristic function}), \\ N_x(r, a) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x \left(\sup_{0 \leq s \leq \tau_r} \log[f(X_s), a]^{-2} > \lambda \right) \quad (\text{counting function}), \\ m_x(r, a) &= E_x [\log[f(X_{\tau_r}), a]^{-2}] \quad (\text{proximity function}), \\ N_1(r, x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x \left(\sup_{0 \leq s \leq \tau_r} \log^- e_f(X_s) > \lambda \right). \end{aligned}$$

Definition 43

$$N_x(r, \text{Ric}) := -E_x \left[\int_0^{\tau_r} R(X_s) ds \right], \quad N_G(r, x) := E_x [\log |\nabla \phi|^2(X_{\tau_r})]$$

と置く。

$N_G(r, x_0) < \infty$ a.e. $r > 0$ である。また、 $\mathcal{M}$ が完備ケーラー多様体でリッチ曲率が下に有界ならば、S.T.Yau の勾配評価より $N_G(r, x_0)$ は有界となることがわかる。

Theorem 44 (第1主定理) $f(x_0) \neq a$ とする。

$$m_{x_0}(r, a) + N_{x_0}(r, a) = T_{x_0}(r) + \log[f(x_0), a]^{-2} \quad (r > 0).$$

Theorem 45 (第2主定理, A.2025+) $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を異なる点とし、 $x_0 \in \mathcal{M}$ は $f(x_0) \notin \{a_1, \dots, a_q\}$, $e_f(x_0) \neq 0$ を満たすとする。 $T_{x_0}(r) \uparrow \infty$ ($r \uparrow \infty$) ならば、ある対数測度有限な集合 $E \subset (0, \infty)$ があって

$$\sum_{k=1}^q m_{x_0}(r, a_k) + N_1(r, x_0) \leq 2T_{x_0}(r) + N_{x_0}(r, \text{Ric}) + N_G(r, x_0) + O(\log T_{x_0}(r)) \quad (r \notin E).$$

$E \subset [0, \infty)$ が対数測度有限とは、 $\int_E \frac{dr}{\max\{r, 1\}} < \infty$ を満たすことである。

5.4 除外指数関係式

Definition 46 $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{x_0}(r) = \infty$ のとき, $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し、

$$\delta_f(a) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_{x_0}(r, a)}{T_{x_0}(r)}, \quad \alpha_f := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{x_0}(r, \text{Ric})}{T_{x_0}(r)}$$

と置く。

第 2 主定理より、次が得られる。

Corollary 47 無限遠で正則な完備ケーラー多様体 M のリッチ曲率は下に有界とし、 $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{x_0}(r) = \infty$ とする。 $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し、

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2 + \alpha_f.$$

$$\eta_f := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{V_f(r)}{V(r)}, \quad \left(V_f(r) := \int_{B(r)} e_f(x) dV(x), \quad V(r) := \text{Vol}(B(r)) \right)$$

と置く。

Corollary 48 $\mathcal{M}$ を無限遠で正則な完備ケーラー多様体, $R(x) \rightarrow 0$ ($d(x_0, x) \rightarrow \infty$) とする。 $\eta_f > 0$ ならば、

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2.$$

$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) < 0\}$ は $\mathbb{C}^n$ の有界強擬凸領域とする。ただし、 p は $\bar{\mathcal{M}}$ の近傍上の滑らかな狭義多重劣調和関数とし、 $dp \neq 0$ (∂D 上) とする。 $q := -\log(-p)$ とし、ケーラー計量 $ds^2 = i\partial\bar{\partial}q$ を考える。

Corollary 49 $T_{z_0}(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) とする。

$$\sum_{k=1}^q \delta_f(a_k) \leq 2 + \frac{n+1}{\eta_f}.$$

6 離散の場合

前節までの確率論的方法は、伊藤解析の基本的事項と拡散過程の基本的な性質しか用いていないので、考察対象となる写像の定義域に適切な確率過程を構成することができれば、同様に議論を進めることができると期待される。そのような例として、筆者らは最近、離散空間における古典的関数論の離散類似について検討している。

近年のトロピカル幾何学の研究の流れの中で、古典的関数論の離散類似とその応用が研究されるようになった。値分布論に関連するものとしては、Halburd-Southall[18], Laine-Tohge[26] らによるトロピカルネヴァンリンナ理論がある。[25] にその一連の研究

成果とその応用がまとめられている。金子と筆者は確率論的考察を通して、このトロピカルネヴァンリンナ理論が対象とする関数のクラスとその定義域の拡張を試みた ([6])。また、Baker-Norine [8] によって有限グラフ間の調和射に対するリーマン-フルウィッツの定理の類似が得られているが、金子と筆者はこれを前述した確率論的方法をもとに考察し、強い再帰性を持つ無限グラフ間の調和射に対してネヴァンリンナ理論の類似を示し、Baker らのリーマン-フルウィッツの定理の拡張を試みている ([7])。

参考文献

- [1] A. Atsui, A second main theorem of Nevanlinna theory for meromorphic functions on complex submanifolds in $\mathbb{C}^n$, *Potential Anal.* 29 (2008), 119—138.
- [2] A. Atsui, On the number of omitted values by a meromorphic function of finite energy and heat diffusions, *J. Geom. Anal.* 20 (2010), no. 4, 1008–1025.
- [3] A. Atsui, Nevanlinna-type theorems for meromorphic functions on non-positively curved Kähler manifolds, *Forum Math.* 30 (2017), 171–189.
- [4] A. Atsui, Default functions and Liouville type theorems based on symmetric diffusion, *J. Math. Soc. Japan*, 73 (2021), 525—551.
- [5] 厚地 淳, 確率論と関数論, SGC ライブラリ 176, サイエンス社, 2022.
- [6] A. Atsui and H. Kaneko, Nevanlinna Theory on Infinite Graphs, *Comput. Methods Funct. Theory* 25(2025), 363–391.
- [7] A. Atsui and H. Kaneko, Nevanlinna theory for harmonic morphisms between graphs, 準備中.
- [8] M. Baker and S. Norine, Harmonic Morphisms and Hyperelliptic Graphs, *International Mathematics Research Notices*, Vol. 2009, No. 15 (2009), 2914—2955.
- [9] R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*. Springer, 1995.
- [10] T. K. Carne, Brownian motion and Nevanlinna theory. *Proc. London Math. Soc.* 52(1986), 349–368.
- [11] M. Fukushima and M. Okada, On conformal martingale diffusions and pluripolar sets, *Jour. Funct. Anal.* 55 (1984), 377–388.
- [12] M. Fukushima and M. Okada, On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions. *Acta Math.* 159 (1987), 171–213.
- [13] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd Edition, Walter de Gruyter (2010).
- [14] B. Gaveau and J. Vauthier, Répartition des zéros des fonctions de type exponentiel sur une variété algébrique affine lisse, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 283(1976), 635–638.
- [15] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe, Conformal martingales, *Invent. Math.*, 16 (1972), 271–308.
- [16] P. Griffiths and J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.* 130 (1973), 145–220.
- [17] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36 (1999) 135–

- [18] R. G. Halburd and N. J. Southall, Tropical Nevanlinna theory and ultra-discrete equations. *International Mathematics Research Notices* 2009 (2009), 887–911.
- [19] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, AMS, 2001.
- [20] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed. North Holland, 1992.
- [21] 金子 宏, 多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程, *数学* 41(1989), 345–375.
- [22] H. Kaneko, A stochastic approach to a Liouville property for plurisubharmonic functions, *J. Math. Soc. Japan* 41 (1989), No. 2, 291–299.
- [23] H. Kaneko and S. Taniguchi, A stochastic approach to the Šilov boundary, *Jour. Func. Anal.* 74 (1987), 415–429.
- [24] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Graduate Texts in Mathematics), 2nd ed. Springer, 1998.
- [25] R. Korhonen, I. Laine, and K. Tohge, *Tropical Value Distribution Theory and Ultra-Discrete Equations*, World Scientific, Singapore 2015.
- [26] I. Laine and K. Tohge, Tropical Nevanlinna theory and second main theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society* 102(5) (2009), 883–922.
- [27] P. Li and S. T. Yau, Curvature and holomorphic mappings of complete Kähler manifolds, *Comp. Math.* 73 (1990), 125–144.
- [28] P. Malliavin, Fonctions de Green d’un ouvert strictement pseudo-covexe et classe de Nevanlinna, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 278 (1974), Série A, 141–144.
- [29] S. Pigola, M. Rigoli and A. G. Setti, *Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis*, Birkhäuser, 2008.
- [30] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed, Springer, New York, 2004.
- [31] W. Stoll, The Ahlfors-Weyl theorem of meromorphic maps on parabolic manifolds, *Lecture Notes in Math.*, 981, Springer, 1983.
- [32] 谷口説男, 確率幾何解析 (朝倉数学大系 15), 朝倉書店, 2021.
- [33] S. T. Yau, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.*, 100 (1978), 197–203.