

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2026年9月

於 神戸大学

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2026年9月

於 神戸大学

無限可積分系

9月1日(火) 第VIII会場

9:30~10:30

	(分)	頁
1 松ヶ下和也 (近畿大総合理工) $(A_5 + A_1)^{(1)}$ 対称性をもつ 4 次元パンルヴェ系の初期値空間 ...	(15)	1
鈴木貴雄 (近畿大理工)		
2 高崎金久 (京大*阪公大数研) Direct linearization and Sato Grassmannian	(15)	3
3 加藤正輝 (立命館大情報理工) 多重対称関数と離散可積分系	(15)	5
4 谷口東曜 (東大数理) The universal framed KZB connection in higher genera	(15)	7

10:45~11:45 特別講演

関真一郎 (長浜バイオ大バイオサイエンス)	調和数に関する Euler の恒等式の一般化	9
-----------------------	------------------------------	---

14:30~16:30

5 尾角正人 (阪公大理)	Kirillov-Reshetikhin 加群に付随する幾何クリスタルの装飾関数について	(15) 23
6 赤木亮太 (名大多元数理)	ランク 3 団輪状行列の G 扇の構造	(15) 25
7 山口瑞樹 (東大総合文化)	量子スピン系における Yang-Baxter 可積分性の直接判定法	(15) 27
白石直人 (東大総合文化)		
石井風雅 (東大教養)		
8 小谷久寿 (九大 I M I)	The Kontsevich invariant and the action of the Grothendieck-Teichmüller group on 2-component string links	(15) 29
野崎雄太 (北大理)		
9 島崎達史 (明石工高専)	階段状 Young 図形のフック長比と Jacobi 多項式の特値	(15) 31
10 藤井大計 (お茶の水女大理)	変形 Noumi-Sano 作用素の固有値問題の積分変換	(15) 33
信川喬彦 (皇學館大教育)		
11 土見怜史 (近畿大総合理工)	A generalization of the μ -function associated with the Kontsevich function	(15) 35
渋谷元樹 (北見工大工)		

9月2日(水) 第VIII会場

9:20~10:45

12 大島利雄 (東大*)	Riemann 球面上の線型微分方程式の分類	(15) 37
13 松ヶ下和也 (近畿大総合理工)	簾の合流に由来する 4 次元 q -ガルニエ系の退化	(15) 39
鈴木貴雄 (近畿大理工)		
土見怜史 (近畿大総合理工)		
14 長尾秀人 (岐阜聖徳学園大教育)	離散パンルヴェ方程式の退化図式の変数化	(15) 41
15 信川喬彦 (皇學館大教育)	Middle Laplace transform の q 類似と $A_4^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式	(15) 43
安達駿弥 (宇都宮大教育)		
16 渋谷元樹 (北見工大工)	Three-term relations and some specializations of the μ function	(15) 45

11:00~12:00 特別講演

L. Vinet (Univ. de Montreal)	Algebras and bispectrality	47
------------------------------	----------------------------------	----

$(A_5 + A_1)^{(1)}$ 対称性をもつ 4 次元パンルヴェ系の初期値空間

松ヶ下 和也 (近畿大学 総合理工学研究科)*¹

鈴木 貴雄 (近畿大学 理工学部)*²

概要

パンルヴェ方程式の岡本初期値空間は、幾つかの複素平面を正準変換によって貼り合わせてできるシンプレクティック多様体であり、各局所座標における方程式系は多項式ハミルトン系となる。本講演では、藤・鈴木および津田によって提唱された $(A_5 + A_1)^{(1)}$ 対称性をもつ 4 次元パンルヴェ系について、同様の初期値空間の構成を特異点解消によって行う。

1. 相空間のコンパクト化

藤・鈴木および津田による 4 次元パンルヴェ系

$$\begin{aligned} t(t-1)\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad t(t-1)\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2), \\ H &= H_{VI}[\alpha_3 + \alpha_5 - \eta, \alpha_0, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1\eta; q_1, p_1] + H_{VI}[\alpha_1 + \alpha_5 - \eta, \alpha_0 + \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3\eta; q_2, p_2] \\ &\quad + (q_1 - 1)(q_2 - t)\{(q_1 p_1 + \alpha_1)p_2 + (q_2 p_2 + \alpha_3)p_1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

ただし

$$H_{VI}[a, b, c, d; q, p] = q(q-1)(q-t)p^2 - \{a(q-1)(q-t) + bq(q-t) + (c-1)q(q-1)\}p + dq$$

を集合 $B = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上で考える。まず、この方程式系の相空間を論文 [1, 3] にしたがってコンパクト化する。 $\mathbb{P}^2$ の同次座標

$$\xi = [\xi_0 : \xi_1 : \xi_2], \quad \zeta^{(i)} = [\zeta_0^{(i)} : \zeta_1^{(i)} : \zeta_2^{(i)}] \quad (i=0, 1, 2)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \left\{ (\xi, \zeta^{(i)}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid \xi_i \neq 0, \zeta_j^{(i)} \neq 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^4 \quad (i, j=0, 1, 2), \\ W_i &= W_{i0} \cup W_{i1} \cup W_{i2} \simeq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2 \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned}$$

とおく。ここで、 W_{00} のアフィン座標を $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}, \frac{\zeta_1^{(0)}}{\zeta_0^{(0)}}, \frac{\zeta_2^{(0)}}{\zeta_0^{(0)}} \right)$ と定める。さらに、 $\zeta^{(i)}$ の間に関係式

$$\begin{pmatrix} \zeta_0^{(1)} \\ \zeta_1^{(1)} \\ \zeta_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0^2 & 0 & 0 \\ -\xi_0\xi_1\eta & -\xi_1^2 & -\xi_1\xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_0\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0^{(0)} \\ \zeta_1^{(0)} \\ \zeta_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta_0^{(2)} \\ \zeta_1^{(2)} \\ \zeta_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_0\xi_2 & 0 \\ -\eta\xi_0\xi_2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0^{(0)} \\ \zeta_1^{(0)} \\ \zeta_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定める。このとき、 $W_{00} \cup W_{10} \cup W_{20}$ および $W_0 \cup W_1 \cup W_2$ の関係式 (2) による商空間をそれぞれ Σ_η^0 および Σ_η とおく。

命題 1. $\Sigma_\eta^0 \times B$ における方程式系 (1) は多項式ハミルトン系となり、そのすべての解は $W_{00} \times B$ を通る。

命題 2. 方程式系 (1) の特異性は $(\Sigma_\eta \setminus \Sigma_\eta^0) \times B$ に現れる。

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 33E17, 37K35

*¹ 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学総合理工学研究科

e-mail: 2444310104w@kindai.ac.jp

*² 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

2. 到達可能な特異点集合とその解消

各 $W_{ij} \times B$ ($j \neq 0$) において、到達可能な特異点集合と呼ばれる方程式系が不定形となる集合が存在する。そのうち、1 次元集合のものを $C_k^{(ij)}$ で、0 次元集合のものを $P_k^{(ij)}$ で表す。

命題 3. 到達可能な特異点集合は $C_k^{(ij)}$ が 18 個、 $P_k^{(ij)}$ が 42 個の合計 60 個現れる。これらは関係式 (2) を用いることで、 $C_k^{(ij)}$ が 12 個、 $P_k^{(ij)}$ が 12 個の合計 24 個にまで減らすことができる。

到達可能な特異点集合においては 1 点を通る解が無限に存在するため、それらをパラメトライズする座標系を特異点解消によって導入する。まず、

$$C_3^{(01)} = \left\{ (q_1, q_2, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, t) \mid q_1 = q_2 = p_1^{(01)} = 0 \right\}$$

について考える。詳細については割愛するが、これについてはブローアップを 2 回行うことにより解消できる。このとき、得られる座標系は

$$(x_3^{[01]}, y_3^{[01]}, z_3^{[01]}, w_3^{[01]}) = \left(-(q_1 p_1 + q_2 p_2 - \alpha_5 + \eta) p_1, \frac{1}{p_1}, q_2 p_1, \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (3)$$

となり、これは正準変換である。他の $C_k^{(ij)}$ についてもすべて同様である。

次に、

$$P_3^{(01)} = \left\{ (q_1, q_2, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, t) \mid q_1 = q_2 - t = p_1^{(01)} = p_2^{(01)} = 0 \right\}$$

について考える。これについては、まず $t = t_0$ ($t_0 \in B$) において $P_3^{(01)}$ を通る解を形式的冪級数の形で構成する。このとき、解には 2 つの任意定数が含まれる。この任意定数を初期条件に移すために、

$$\begin{aligned} r_3((q_1, q_2, p_1, p_2, t)) &= \left(q_1, q_2 + \frac{\alpha_3}{p_2}, p_1, p_2, t \right), \\ r_3((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \eta)) &= (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_4 + \alpha_3, \alpha_5, \eta - \alpha_3) \end{aligned}$$

で定まる方程式系 (1) の対称性 r_3 を用いて変数変換

$$(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)}) = \left(q_1, q_2 + \alpha_3 \frac{p_1^{(01)}}{p_2^{(01)}}, p_1^{(01)}, p_2^{(01)} \right)$$

を行う。先に得られた解の形式的冪級数表示を右辺に代入すると、 $t = t_0$ において $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{p}_1^{(01)} = \tilde{p}_2^{(01)} = 0$ であることがわかる。一方で、座標系 $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)})$ における方程式系は、対称性より到達可能な特異点集合

$$\tilde{C}_3^{(01)} = \left\{ (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)}, t) \mid \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{p}_1^{(01)} = 0 \right\}$$

をもつ。したがって、 $P_3^{(01)}$ を解消する座標系は (3) を用いて

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_3^{[01]}, \tilde{y}_3^{[01]}, \tilde{z}_3^{[01]}, \tilde{w}_3^{[01]}) &= \left(-\{\tilde{q}_1 \tilde{p}_1 + \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 - r_3(\alpha_5) + r_3(\eta)\} \tilde{p}_1, \tilde{q}_2 \tilde{p}_1, \frac{1}{\tilde{p}_1}, \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} \right) \\ &= r_3 \left(x_3^{[01]}, y_3^{[01]}, z_3^{[01]}, w_3^{[01]} \right) \end{aligned}$$

となる。他の $P_k^{(ij)}$ についてもすべて同様である。

定理 4. 方程式系 (1) の初期値空間は、 W_{i0} ($i = 0, 1, 2$) の座標系と上記のようにして得られる 24 個の到達可能な特異点集合を解消する座標系の、合計 33 個の座標系を貼り合わせることで構成される。

参考文献

- [1] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$* , Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **20** (1993) 1–60.
- [2] K. Matsugashita and T. Suzuki *Initial value space of the four dimensional Painlevé system with $(A_5 + A_1)^{(1)}$ symmetry*, Math. Phys. Anal. Geom. **29** (2026) 9.
- [3] M. Suzuki, *Spaces of initial conditions of Garnier system and its degenerate system in two variables*, J. Math. Soc. Japan. **58** (2006) 1079–1117.

Direct linearization and Sato Grassmannian

高崎金久 (大阪公立大学数学研究所・京都大学)

Direct linearization (以下 DL と略する) は Fokas と Ablowitz によってコーシー核をもつ積分方程式 (あるいは $\bar{\partial}$ 問題) を用いるソリトン方程式の解法として開発された [1]. 後に Fu と Nijhoff によって無限次行列による再定式化が行われ, 連続時間・離散時間の KP・BKP・CKP 階層とそのさまざまな簡約や特殊解が論じられた [2, 3]. 最近では Li と Zhang によって反自己双対ヤン・ミルズ方程式にも DL が応用された [4]. この講演ではこの行列形式の DL の中に佐藤グラスマン多様体 [5] が隠れていることを指摘したい.

KP 階層の DL [2, 3] では無限個の時間変数 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial t_k} = \Lambda^k U - U \Lambda^{-k} - U \mathcal{O}_k U \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

という微分方程式を満たす行列 $U = (u_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ が基本的な役割を演じる. ここで $\Lambda^k, \mathcal{O}_k$ は

$$\Lambda^k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+k}, \quad \mathcal{O}_k = \sum_{l=0}^{k-1} E_{l, k-l-1}$$

という $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列である. E_{ij} は (i, j) 成分が 1 で, 他の成分が 0 の行列単位を表す. この行列からスペクトルパラメータ z をもつベクトル

$$\mathbf{u}(z) = (u_i(z))_{i \in \mathbb{Z}} = (E - U\Omega)\mathbf{c}(z)\rho(z)$$

が構成される. ここで E は単位行列であり,

$$\Omega = \sum_{i=0}^{\infty} E_{i, -i-1}, \quad \mathbf{c}(z) = (z^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \rho(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right)$$

である. $\mathcal{O}_k$ と Ω, Λ は $\mathcal{O}_k = \Omega \Lambda^k - \Lambda^{-k} \Omega$ という代数的関係にある. $\mathbf{u}(z)$ は

$$\frac{\partial \mathbf{u}(z)}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \mathbf{u}(z) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

という微分方程式を満たし, DL において波動関数の役割を演じる.

$\mathbf{u}(z)$ の定義に現れる行列 $g = E - U\Omega$ からグラスマン多様体との関係がわかる. g を左上 $i, j < 0$, 右上 $i < 0, j \geq 0$, 左下 $i \geq 0, j < 0$, 右下 $i, j \geq 0$ の 4 つのブロックに分ければ

$$g = \left(\begin{array}{c|c} \delta_{ij} - u_{i, -j-1} & 0 \\ \hline -u_{i, -j-1} & \delta_{ij} \end{array} \right)$$

となる. さらに g は

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) g - g \Lambda^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

という微分方程式を満たす. その係数行列 $\Lambda^k - U \mathcal{O}_k$ の左下のブロックは零行列であり, この係数行列を同じ条件を満たす一般の行列 Γ_k に置き換えれば, 得られる微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = \Gamma_k g - g \Lambda^k$$

は $\mathrm{GL}(\infty)$ (発見的な意味で書いている) の放物型部分群

$$\mathcal{P} = \{p = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{GL}(\infty) \mid p_{ij} = 0 \ (i \geq 0, j < 0)\}$$

に値をとる行列 $h = h(\mathbf{t})$ によるゲージ変換 $g \mapsto hg$ で形を保つ. このことから (3) はグラスマン多様体 $\mathrm{Gr} \simeq \mathcal{P} \backslash \mathrm{GL}(\infty)$ の上の力学系を定めることがわかる. この力学系は佐藤が見出した KP 階層の幾何学的解釈 [5] と同値である. グラスマン多様体を行ベクトルのなす線形空間の部分空間の集合とみなせば, g の下半分 ($\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ 部分) はこの部分空間の基底を並べた枠行列であり, $u_{ij} \ (i, j \geq 0)$ はグラスマン多様体の開胞体のアフィン座標である.

微分方程式 (1) はもう 1 組の時間変数 (negative times) $\bar{\mathbf{t}} = (t_{-1}, t_{-2}, \dots)$ に対する方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t_{-k}} = \Lambda^{-k} U - U \Lambda^k - U \mathcal{O}_{-k} U \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

によって拡張できる. ここで

$$\mathcal{O}_{-k} = - \sum_{l=1}^k E_{-l, -k+l-1}$$

である. Ω を $\bar{\Omega} = - \sum_{i=0}^{\infty} E_{-i-1, i}$ に置き換えて $\bar{g} = E - U \bar{\Omega}$ という行列を考えれば, $\bar{g}$ は

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t_{-k}} = (\Lambda^{-k} - U \mathcal{O}_{-k}) \bar{g} - \bar{g} \Lambda^{-k} \quad (5)$$

という微分方程式を満たす. これから $\bar{\mathbf{t}}$ を時間変数とする KP 階層とそのグラスマン多様体上の力学系としての解釈が得られる.

(1) と (4) を合わせたものは 2 系列の時間変数 $(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ をもつ 2 成分 KP 階層に対応する. $g, \bar{g}$ はこれらの時間変数に関して (3) と (5) を含む微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) g - g \Lambda^k, \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \bar{g} - \bar{g} \Lambda^k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

を満たす. $g, \bar{g}$ を横に並べて得られる $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z})$ 行列

$$\eta = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \delta_{ij} - u_{i,-j-1} & 0 & \delta_{ij} & u_{i,-j-1} \\ \hline -u_{i,-j-1} & \delta_{ij} & 0 & \delta_{ij} + u_{i,-j-1} \end{array} \right)$$

は 2 成分グラスマン多様体の点を表す枠行列とみなせる. η が満たす微分方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \eta - \eta \begin{pmatrix} \Lambda^k & 0 \\ 0 & \Lambda^k \end{pmatrix} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

はグラスマン多様体上の力学系を定めるが, それは 2 成分 KP 階層を表現している.

参考文献

- [1] A. S. Fokas and M. K. Ablowitz, On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev–Petviashvili equation, *Phys. Lett.* **A94** (1983), 67–70.
- [2] W. Fu and F. W. Nijhoff, Direct linearising transform for three-dimensional discrete integrable systems: the lattice AKP, BKP and CKP equations, *Proc. R. Soc.* **A473** (2017), 20160915.
- [3] W. Fu and F. W. Nijhoff, Linear integral equations, infinite matrices, and soliton hierarchies, *J. Math. Phys.* **59** (7) (2018), 071101.
- [4] S. S. Li and D. J. Zhang, Direct linearization of the $\mathrm{SU}(2)$ anti-self-dual Yang–Mills equation in various spaces, *J. Geom. Phys.* **207** (2025), 105351.
- [5] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold, H. Fujita, P.D. Lax and G. Strang (eds.), *Nonlinear PDE in Applied Science*, North-Holland, 1983, pp. 259–271.

多重対称関数と離散可積分系

加藤 正輝 (立命館大学)*

Schur 関数は対称関数論における基本的な特殊関数であり、表現論や組合せ論に加えて、可積分系の理論においても重要な役割を果たすことが知られている。本講演では、多重対数関数の p, q -類似 [1, 2] を用いて定義される Schur 関数の類似物 $\mathcal{S}_\lambda$ [3], およびそのさらなる拡張である $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ (Schur 型擬対称関数の類似) の満たす双線形差分方程式系を導出し、その離散可積分系との関連を紹介する。

関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は以下のように定義される。まず、 $0 < |p| < 1$, $0 < |q| < 1$ を満たす複素数 p, q に対して

$$\begin{aligned} L((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) \\ = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^n F(u_i t_1 \cdots t_i z_1 \cdots z_i, v_i; p) F(t_i^{-1} z_i^{-1}, w_i; q) \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n} \end{aligned}$$

とおく。ここで

$$F(z, w; p) = \frac{\theta'(1; p)\theta(zw; p)}{\theta(z; p)\theta(w; p)}, \quad \theta(z; p) = (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty$$

は Kronecker 関数である。

次に、 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ の合成 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ に対して、単項擬対称関数の類似物 $\mathcal{M}_\alpha$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) \\ = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{k-1} (w_{s_i+1} \cdots w_{s_{i+1}})^i \sum_{l_1=1}^{\alpha_1} \cdots \sum_{l_k=1}^{\alpha_k} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{\substack{1 \leq j \leq \alpha_i \\ j \neq l_i}} F(u_{s_{i-1}+j} u_{s_{i-1}+l_i}^{-1}, v_{s_{i-1}+j}; p) \right) \\ \times L((q^{i-1} u_{s_{i-1}+l_i})_{i=1}^k, (v_{s_{i-1}+1} \cdots v_{s_i})_{i=1}^k, (w_{s_{i-1}+1} \cdots w_n)_{i=1}^k; p, q) \end{aligned}$$

で定める。ただし $s_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ とする。この関数 $\mathcal{M}_\alpha$ を用いて、関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は

$$\mathcal{S}_\lambda^\gamma((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) = \sum_{U \in \text{SYT}(\lambda)} \sum_{\substack{\alpha \in \text{Comp}(n) \\ \text{Des}(U) \subset S_\alpha}} \mathcal{M}_{\alpha(U, \gamma)}((u_i)_{\alpha, U}, (v_i)_{\alpha, U}, (w_i)_{\alpha, U}; p, q)$$

により定義される。特に $\gamma_{ij} = 1$ ($(i, j) \in D(\lambda/\mu)$) の場合には、 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は [3] で導入した $\mathcal{S}_\lambda$ に一致する。

関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ の基本的性質として、Jacobi-Trudi 型の行列式表示

$$\mathcal{S}_\lambda^\gamma(u, v, w; p, q) = \det \left(\mathcal{E}_{(\gamma_{-j+1}, \gamma_{-j+2}, \dots, \gamma_{\lambda_i-i})}(u, v, w; p, q) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 33B30, 33E20, 05E05, 39A14, 37K10

キーワード: Schur type quasisymmetric function, Jacobi-Trudi formula, multiple polylogarithm, bilinear difference equation, discrete integrable system

* 〒567-8570 大阪府茨木市岩倉町 2-150 立命館大学 大阪いばらきキャンパス

e-mail: katom@fc.ritsumeai.ac.jp

が成り立つ。ここで $\mathcal{E}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ は essential quasisymmetric function の類似物である。一方、 $\mathcal{E}_\alpha$ は以下のような q -差分関係式を満たす。

$$\left(w_1 \cdots w_n T_{q, u_1} \cdots T_{q, u_n} - 1\right) \mathcal{E}_\alpha = (-1)^{\alpha_1+1} \left(\prod_{j=1}^{\alpha_1} F(u_j, v_j; p)\right) \mathcal{E}_{\hat{\alpha}},$$

ここで T_{q, u_i} は $u_i \mapsto qu_i$ を与える q -シフト作用素であり、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\hat{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ である。この q -差分関係式と Jacobi–Trudi 型公式を組み合わせることにより、 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ の満たす非自明な双線形差分方程式を導くことができる。

そのために

$$\tau_{t, \lambda}^{(\gamma)} = w^{t \sum_{(i,j) \in D(\lambda)} \gamma_{j-i}} \mathcal{S}_\lambda^\gamma(q^t u, v, w; p, q)$$

を導入する。さらに

$$\hat{\gamma} = (\gamma_{c+1})_{c \in \mathbb{Z}}, \quad \check{\gamma} = (\gamma_{c-1})_{c \in \mathbb{Z}}$$

とおくと、 $\tau_{t, \lambda}^{(\gamma)}$ は以下のような双線形差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} &= \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^{r+1}}^{(\gamma)} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\hat{\gamma})} - \tau_{t, (\lambda_i-1)_{i=2}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)}, \\ \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} &= \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^{r+1}}^{(\gamma)} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\hat{\gamma})} - \tau_{t, (\lambda_i-1)_{i=2}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)}, \\ (-w^t F(q^t u, v; p))^{\gamma_0} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=2}^r}^{(\check{\gamma})} &= \tau_{t, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)} \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} - \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)} \end{aligned}$$

特に、 $\gamma_{j-i} = 1$ ($(i, j) \in D(\lambda/\mu)$) とし、さらに分割を長方形分割に特殊化すると、これらの双線形差分方程式は既知の離散可積分系に帰着する。実際、

$$\lambda = ((t-k)^n)$$

とし、

$$\tau_n^{k, t} = w^{(t-k)nt} \mathcal{S}_{(t-k)^n}(q^t u, v, w; p, q)$$

とおくと、これは R_I 格子 [5] の双線形差分方程式系を満たす。さらに $p = q$, $w = v$ と特殊化すると、離散相対論的戸田格子 [6] の双線形差分方程式系が得られる。

本講演の内容は、論文 [4] に基づく。

参考文献

- [1] M. Kato, On certain two-parameter deformations of multiple zeta values, Res. Number Theory **6**, No. 3, Paper No. 30 (2020).
- [2] M. Kato, Parity result for q - and elliptic analogues of multiple polylogarithms, Res. Number Theory **9**, no. 2, Paper No. 45 (2023).
- [3] M. Kato, Symmetric functions and elliptic q -multiple polylogarithms, J. Combin. Theory Ser. A **221**, Paper No. 1061178 (2026).
- [4] M. Kato, Multiple polylogarithms and discrete integrable systems, J. Phys. A **59** (2026), no.21, Paper No. 215204, 19pp.
- [5] A. Mukaihira and S. Tsujimoto, Determinant structure of R_I type discrete integrable system, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 4557–4565.
- [6] Y. Suris, A discrete-time relativistic Toda lattice, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 451–465.

The universal framed KZB connection in higher genera

谷口 東曜 (東大数理)*

Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 接続とは, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の n (≥ 1) 点の配置空間上に定まる平坦接続である. 平坦接続が 1 つ与えられるとモノドロミーと呼ばれる基本群から適切な (Lie) 群への射が定まり, KZ 接続のモノドロミーは多重ゼータ値で記述される. このモノドロミーは五角関係式を満たすが, それはさらに double shuffle 関係式をもたらしことが古庄 [Fur11] により示されている. 五角関係式を記述するには, 配置空間の基本群である組み紐群の紐の本数を増減させる写像 (“coproducts”) が必要である. これは, 特定の紐をその近傍で $\mathbb{C}$ 上で右向きにコピーして複数本にすることで得られる.

KZ 接続の種数 g への一般化 (種数 0 の曲面 $\mathbb{C}$ を一般の種数の曲面に取り替えるもの) は Enriquez [Enr14b] により導入されており, これを用いて高種数の多重ゼータ値を定義できる. しかし, それらの間の五角関係式のような明らかな関係式は述べられていない.

本講演では, Enriquez の接続の framed version を構成する. これが標題の universal framed KZB connection である. これは Enriquez の接続を拡張したものであり, 曲面上の組み紐に由来する関係式を満たす.

1 Enriquez 接続と framed version

C を種数 g の閉リーマン面とし, $\text{Conf}_n(C)$ で C 上の n 点のなす配置空間を表す. C の複素構造を用いて, Enriquez は Drinfeld–Kohno Lie 代数 $\mathfrak{t}_{g,n}$ に係数をもつ平坦接続 α_n を導入した. $\mathfrak{t}_{g,n}$ は有限表示を持ち, C 上の組み紐群 $\text{PB}_{g,n} := \pi_1(\text{Conf}_n(C))$ に付随する Lie 代数である. $g = 0$ のときは古典的な KZ 接続に一致するため, KZ 接続の一般化とみなせる. 今の場合, モノドロミーは群準同型 $\rho: \pi_1(\text{Conf}_n(C)) \rightarrow \exp(\mathfrak{t}_{g,n})$ である.

$\text{PB}_{g,2}$ の生成元の中から $X_i^{1,2}, Y_i^{1,2}$ ($1 \leq i \leq g$) を適切にとると, 多重ゼータ値はその ρ での値 $A_i^{1,2}, B_i^{1,2} \in \exp(\mathfrak{t}_{g,2})$ の (適切な $\mathfrak{t}_{g,2}$ 上の「語」に関する) 係数であると思える. これらの満たす関係式を考えたいが, 複素平面 $\mathbb{C}$ の場合には $\mathbb{C}$ の標準的な framing (つまり $\mathbb{C}$ 内の「右向き」の概念) を用いた. 一方で C には標準的な framing は無いので, 組み紐の本数を増減させるには, 紐の近傍で「右向き」が必要になる. そこで, framed な配置空間 $\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ を次の引き戻し図式で定める. UTC は C の単位接束である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_n^{\text{fr}}(C) & \longrightarrow & (UTC)^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \text{Conf}_n(C) & \longrightarrow & C^n \end{array}$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: toyo@ms.u-tokyo.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 57K20, 58B34.

キーワード: Drinfeld associators, multi-zeta values, surface braid groups.

$\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ の元は, C 上の異なる n 点に単位接ベクトルが付いたものである. こうすると $\text{PB}_{g,n}^{\text{fr}} := \pi_1(\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C))$ には coproducts が定まり, 付随する Lie 代数 $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ も coproducts を持つ. 上で見た $\mathfrak{t}_{g,n}$ とは次の ($g \neq 1$ では分裂しない) 完全列により関係する.

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow \mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}} \xrightarrow{q} \mathfrak{t}_{g,n} \rightarrow 0$$

定理 1 (T.). $\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ 上の $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ -値の平坦接続 α_n^{fr} が存在し, $\pi^*(\alpha^{\text{fr}}) = q(\alpha_n^{\text{fr}})$ を満たす. このモノドロミーは $\text{PB}_{g,n}^{\text{fr}}$ と $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ 上の coproducts と整合的であり, KZ 接続に漸近する.

2 Gonzalez の operad を用いた定義

Coproducts と整合的であるという主張は operad を用いて簡潔に述べられる. ここでは詳細は割愛するが, Gonzalez [Gon20] は operad の言葉で種数 g の Drinfel'd associator を定義した. 等価な定義として, 種数 g の Drinfel'd associator は通常の Drinfel'd associator $\Phi^{1,2,3}$ と $2g$ 個の $\exp(\mathfrak{t}_{g,2}^{\text{fr}})$ の元 $A_i^{1,2}, B_i^{1,2}$ ($1 \leq i \leq g$) の組であり, 次の関係式を満たすものである.

- $W_a^{\emptyset,1} = 1$
- $W_a^{12,3} = \Phi^{1,2,3} W_a^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1} R^{1,2} \Phi^{2,1,3} W_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} R^{2,1}$
- $(\Phi^{1,2,3} W_b^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1}, R^{1,2} \Phi^{2,1,3} V_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} (R^{1,2})^{-1}) = 1 \quad (a < b)$
- $R^{1,2} R^{2,1} = (R^{1,2} \Phi^{2,1,3} A_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} R^{2,1}, \Phi^{1,2,3} B_a^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1})$
- $R^{1,2} R^{2,1} (F^{1,2})^{2(1-g)} = ((A_g^{1,2})^{-1}, B_g^{1,2}) \cdots ((A_1^{1,2})^{-1}, B_1^{1,2})$

ここで $W, V \in \{A, B\}$, $1 \leq a, b \leq g$, $R^{1,2} = e^{t_{12}/2}$, $F^{1,2} = e^{t_{11}/2}$ である. 定理 1 は, α_n^{fr} のモノドロミーがこれを満たすことを主張している.

五角関係式が double shuffle 関係式を導いたように, これらの関係式から高種数多重ゼータ値の興味深い関係式が導かれることを期待している.

参考文献

- [Fur11] Hidekazu Furusho. Double shuffle relation for associators. *Annals of Mathematics* 174, 341–360, 2011.
- [Enr14b] Benjamin Enriquez. Flat connections on configuration spaces and braid groups of surfaces. *Advances in Mathematics*, 252:204–226, 2014.
- [Gon20] Martin Gonzalez. Surface Drinfeld torsors I: Higher genus associators. 2020. arXiv:2004.07303.

調和数に関する Euler の恒等式の一般化

Generalizations of Euler's identity for harmonic numbers

関 真一朗 (長浜バイオ大学)*

1 Euler の恒等式

任意の正整数 N に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{N}{n} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m}$$

が成立する. 二項係数に関する公式とも調和数に関する公式ともとれるこの恒等式は, 証明も簡単であり, 大学入試問題等でもしばしば取り上げられる.

実は, この恒等式は少なくとも Euler にまで遡ることができて, 彼の論文 [4] では

§. 13. *Hinc ergo nacti sumus sequentem aequationem maxime memorabilem:*

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \binom{n}{4} + \frac{1}{5} \binom{n}{5} \text{ etc. } \dots \pm \frac{1}{n} \binom{n}{n} = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc. } \dots \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

と記載されている.

Euler の恒等式はシンプルであるが, 様々な一般化が成り立つことが知られており, 意外にも奥が深い公式である. 本稿では, 「多重化する」という方向の種々の一般化と, 関連する結果を紹介する.

2 Hoffman-川島の恒等式

Euler の恒等式の片方の辺について, $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n^k}$ や $\frac{1}{m} \mapsto \frac{1}{m^l}$ と一般化すると, 他方の辺については多重和が現れる. 以下, N はずっと正の整数である.

* 〒526-0829 滋賀県長浜市田村町 1266 長浜バイオ大学 バイオサイエンス学部

e-mail: s_seki@nagahama-i-bio.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/shinichiro-seki>

本研究は科研費 (課題番号:16J01758, JP18J00151, 21K13762, JP26K06734) の助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: 11M32, 11B65

キーワード: 調和数, 二項係数, Euler の恒等式, 多重ゼータ値, 多重ポリログ, 有限多重ゼータ値, 有限多重ポリログ, 連結和法, 川島関係式, 多重ゼータダイヤモンド値

定理 2.1 (Knuth [14]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^k} \binom{N}{n} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$$

が成り立つ.

なお, 多重ゼータ値に関する研究分野でよく現れる多重和の表記を用いているが, 別の視点で発見された Knuth の恒等式などは, 「入れ子式の和」で表示されていたことも多い. 例えば, $c_N^{(0)} = 1$ として, 帰納的に

$$c_N^{(s+1)} = \sum_{m=1}^N \frac{c_m^{(s)}}{m}$$

と定義することにより, Knuth の恒等式の右辺は $c_N^{(k)}$ と表されていた.

定理 2.2 (Hernandez [1]). 任意の正整数 l に対して,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N} \frac{(-1)^{n_l-1}}{n_1 \cdots n_l} \binom{N}{n_l} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^l}$$

が成り立つ.

正整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ をインデックスとよび (r を $\mathbf{k}$ の深さとよぶ), その Hoffman 双対インデックス $\mathbf{k}^\vee$ が定義される. 2 以上の成分を $1 + \dots + 1$ と表すことによって, インデックスを「1 とコンマ記号とプラス記号」のみで表すとき, 「コンマ記号」と「プラス記号」を入れ替えることによって Hoffman 双対インデックスが得られる. 例) $(1, 2, 3) = (1, 1+1, 1+1+1)$ なので, $(1, 2, 3)^\vee = (1+1, 1+1, 1, 1) = (2, 2, 1, 1)$.

定理 2.3 (Hoffman [7], Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_s^{l_s}} \quad (1)$$

が成り立つ.

これは Hoffman の恒等式とよばれることが多いが, 実際は Hoffman とは独立に川島も証明している. 論文の出版年では川島の方が早い, プレプリントの公開は Hoffman の方が早い.

$\mathbf{k} = (k)$ とすれば, $(k)^\vee = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$ であるため, Knuth の恒等式が得られる. $\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_l)$ とすれば, $\mathbf{k}^\vee = (l)$ であるため, Hernandez の恒等式が得られる.

3 連結和法による証明

Hoffman–川島の恒等式については、様々な証明方法が知られている．ここでは、連結和法を用いた証明の概略を紹介する．連結和法は多重ゼータ値の双対関係式の新しい証明法として、[18] で提案されたものである．その後、サーベイ論文 [17] など、様々な関係式族を証明するのに有効な手法であることが確認されている．

定義 3.1 (連結和)．インデックス $(k_1, \dots, k_r), (l_1, \dots, l_s)$ に対して、連結和を

$$Z_N(k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s) = \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N \\ 1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} C(n_r, m_1) \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}}$$

と定義する．ここで、

$$C(n, m) = (-1)^{n-1} n \binom{m}{n}$$

であり、コネクターとよばれる．

命題 3.2 (輸送関係式)．

$$\begin{aligned} Z_N(k_1, \dots, k_r, 1; l_1, \dots, l_s) &= Z_N(k_1, \dots, k_r; l_1 + 1, l_2, \dots, l_s), \\ Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; l_1, \dots, l_s) &= Z_N(k_1, \dots, k_r; 1, l_1, \dots, l_s). \end{aligned}$$

証明 次の2つの式をそれぞれ証明すればよい (望遠鏡和によって簡単に計算できる):

$$\sum_{n \leq k \leq m} C(k, m) \frac{1}{k} = C(n, m) \frac{1}{m}, \quad C(n, m) \frac{1}{n} = \sum_{n \leq k \leq m} C(n, k) \frac{1}{k}. \quad \square$$

補題 3.3 (境界条件)．

$$\begin{aligned} Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; \emptyset) &= \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r}, \\ Z_N(1; l_1, \dots, l_s) &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}}. \end{aligned}$$

証明 1つ目については、このように定義しておけば、右側のインデックスが空であっても整合的に輸送関係式が成立するという意味．2つ目については

$$\sum_{n=1}^{m_1} (-1)^{n-1} \binom{m_1}{n} = 1$$

より得られる． □

輸送関係式を用いてインデックスを左から右へ輸送していくことにより、

$$(1) \text{ の左辺 } = Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; \emptyset) = \dots = Z_N(1; \mathbf{k}^\vee) = (1) \text{ の右辺}$$

と、Hoffman–川島の恒等式が証明される．

4 有限多重ゼータ値への応用

有限多重ゼータ値とよばれる多重ゼータ値の類似物は、環

$$\mathcal{A} = \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

の元として定義される。インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と各素数 p について、

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r < p} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (2)$$

を $\text{mod } p$ することによって $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を得、それらを並べて自然に $\mathcal{A}$ の元を定義したものが、有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ である。本稿で主役として現れるのは、

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (3)$$

から同様に定義される $\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k})$ の方であるが、これらは有限多重ゼータ値の線形和で表すことができる。例) $\zeta_{\mathcal{A}}^*(1, 2, 3) = \zeta_{\mathcal{A}}(1, 2, 3) + \zeta_{\mathcal{A}}(3, 3) + \zeta_{\mathcal{A}}(1, 5) + \zeta_{\mathcal{A}}(6)$ 。

Hoffman–川島の恒等式において $N = p - 1$ と代入し、 $\text{mod } p$ をとることによって、以下の有限多重ゼータ値の間の関係式が得られる。

定理 4.1 (Hoffman [7]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して、

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}^\vee)$$

が成り立つ。

環 $\mathcal{A}$ は、正整数 n に対して

$$\mathcal{A}_n = \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

に一般化できる。また、これらを集めたものは射影系をなすので、逆極限をとって

$$\hat{\mathcal{A}} = \varprojlim_n \mathcal{A}_n$$

を定義でき、(2) を $\text{mod } p^n$ して集めることによって $\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ が定義され、(3) から $\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k})$ が定義される。有限多重ゼータ値の間の関係式を $\hat{\mathcal{A}}$ における関係式にリフトすることは興味があるが、実際、二項係数の部分を p 進展開して計算することにより、定理 4.1 は次のようにリフトされる。

定理 4.2 (Seki [16]). 任意のインデックス $(k_1, \dots, k_r)$ について、 $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき、

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(k_1, \dots, k_r, \underbrace{1, \dots, 1}_i) p^i = - \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(l_1, \dots, l_s, \underbrace{1, \dots, 1}_i) p^i$$

が成り立つ.

ここで, $\mathbf{p} = ((p \bmod p^n)_p)_n \in \hat{\mathcal{A}}$ であり, $\hat{\mathcal{A}}$ は $\mathbf{p}$ 進位相に関して完備である. $\mathcal{A} \simeq \hat{\mathcal{A}}/p\hat{\mathcal{A}}$ であり, 定理 4.2 を $\bmod \mathbf{p}$ すると, 定理 4.1 となる.

5 ポリログ化

t を不定元として, Euler の恒等式に t をつけた

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-t)^n}{n} \binom{N}{n} = \sum_{m=1}^N \frac{(1-t)^m - 1}{m}$$

が成り立つ. $t = 1$ とすれば, Euler の恒等式となる.

他の定理を証明する際の式変形として, この恒等式が本質的に現れている論文は複数確認できるが ([20] の Lemma 4.1 の証明など), 「 $\sim$ の恒等式」と誰かにクレジットを与えられるような文献は見つけれられていない.

定理 5.1 (Tauraso–Zhao [21]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-t)^n}{n^k} \binom{N}{n} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{(1-t)^{m_1} - 1}{m_1 \cdots m_k}$$

が成り立つ.

$t = 1$ とすれば, Knuth の恒等式となる.

定理 5.2 (Sakugawa–Seki [15]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{t^{n_1} (-1)^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{(1-t)^{m_1} - 1}{m_1^{l_1} \cdots m_s^{l_s}}$$

が成り立つ.

$t = 1$ とすれば, Hoffman–川島の恒等式となる. $\mathbf{k} = (k)$ とすれば, Tauraso–Zhao の恒等式となる.

さらに多変数化することもでき, その一般形を書くこともできるが, 実はインデックスが $(1, 1, \dots, 1)$ の場合を考えれば十分である.

定理 5.3 (Sakugawa–Seki [15]). 任意の正整数 k と不定元 $t_1, \dots, t_k$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \leq N} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2 - n_1} \cdots t_k^{n_k - n_{k-1}} (-1)^{n_k}}{n_1 \cdots n_k} \binom{N}{n_k} \\ &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{\{(1-t_1)^{m_1} - 1\} (1-t_2)^{m_2 - m_1} \cdots (1-t_k)^{m_k - m_{k-1}}}{m_1 \cdots m_k} \end{aligned}$$

が成り立つ.

この恒等式で各変数に 0 または 1 を代入する場合, $0^0 = 1$ と解釈した式が得られることを確認できる. このことから, 一般のインデックスの場合を得ることができる.

この恒等式も今となっては複数の証明方法が考えられるが, 原論文執筆時には連結和法はまだなく, 形式的積分作用素を導入し, インデックスの重さ (成分の総和) に関する数学的帰納法で証明した.

Hoffman–川島の恒等式の応用として有限多重ゼータ値の関係式が得られたように, 佐久川–関の恒等式からは有限多重ポリログの間の関数等式が得られる ([15, 16]).

なお, 佐久川–関の恒等式と同値な式は, 佐久川–関よりも早く, 川島–田中 [11] によっても得られている. また, 佐久川–関の恒等式と同値であるが別の形をした恒等式, およびそれを更に q 変形した恒等式を鎌野 [8] が示している. これは Mneimneh や Boyadzhiev らの研究の文脈における一般化のようだ.

6 q -類似

q を $0 < q < 1$ を満たす実数として, q -整数 $[n]_q$ を

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

と定め, q -階乗 $[n]_q!$ を $[n]_q! = \prod_{a=1}^n [a]_q$ と定める. q -二項係数 $\binom{m}{n}_q$ を

$$\binom{m}{n}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q! [m-n]_q!}$$

と定義する.

定理 6.1 (Van Hamme [22]).

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2}}{[n]_q} \binom{N}{n}_q = \sum_{m=1}^N \frac{q^m}{[m]_q}.$$

$q \rightarrow 1$ とすると, Euler の恒等式となる.

定理 6.2 (Dilcher [3]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2 + (k-1)n}}{[n]_q^k} \binom{N}{n}_q = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{q^{m_1 + \dots + m_k}}{[m_1]_q \cdots [m_k]_q}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Knuth の恒等式となる.

定理 6.3 (Prodinger [13]). 任意の正整数 l に対して,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N} \frac{(-1)^{n_l-1} q^{n_l(n_l+1)/2}}{[n_1]_q \cdots [n_l]_q} \binom{N}{n_l}_q = \sum_{m=1}^N \frac{q^m}{[m]_q^l}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Hernandez の恒等式となる.

定理 6.4 (Bradley [2]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(k_1-1)n_1 + \dots + (k_r-1)n_r} (-1)^{n_r-1} q^{n_r(n_r+1)/2}}{[n_1]_q^{k_1} \cdots [n_r]_q^{k_r}} \binom{N}{n_r}_q \\ &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{q^{m_1 + \dots + m_s}}{[m_1]_q^{l_1} \cdots [m_s]_q^{l_s}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Hoffman-川島の恒等式となる. $\mathbf{k} = (k)$ とすれば, Dilcher の恒等式となり, $\mathbf{k} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_l$ とすれば, Prodinger の恒等式となる.

7 大野化

多重ゼータ値の双対関係式には大野関係式とよばれる美しい一般化がある ([12]). 一方で, 有限多重ゼータ値についても Hoffman による双対性 (定理 4.1) が成り立つため, それを大野化できないかという自然な疑問が生じる. この観点から得られた有限多重ゼータ値の間の関係式が, 次である.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と非負整数の組 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ に対して, インデックス $\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}$ を

$$\mathbf{k} \oplus \mathbf{e} = (k_1 + e_1, \dots, k_r + e_r)$$

と定義し, 整数 $b(\mathbf{k}; \mathbf{e})$ を

$$b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) = \prod_{i=1}^r \binom{k_i + e_i + \delta_{i1} + \delta_{ir} - 2}{e_i}$$

と定義する. ここで, δ_{ij} は Kronecker's delta であり,

$$\binom{e-1}{e} = \begin{cases} 1 & (e=0) \\ 0 & (e>0) \end{cases}$$

と定める. 正整数 e, r に対して, $J_{e,r}$ で $e_1 + \dots + e_r = e$ を満たすような非負整数の組 $(e_1, \dots, e_r)$ 全体の集合を表す.

定理 7.1 (Hirose–Imatomi–Murahara–Saito [5]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{e,r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) \zeta_A^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = - \sum_{\mathbf{e}' \in J_{e,s}} \zeta_A^*(\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e}')$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は定理 4.1 と解釈して成立する. 係数 $b(\mathbf{k}; \mathbf{e})$ がついているのでオリジナルの大野関係式より美しくないと感じるかもしれないが, この係数があるために発見されるまでに時間がかかったというか, [5] 以前にはこのような公式の存在は予期されていなかったように思われる.

定理 4.1 は Hoffman–川島の恒等式を $\text{mod } p$ して得られるものであったが, 定理 7.1 についても $\text{mod } p$ する前に成立する恒等式はあるだろうか. この疑問への回答が以下の定理である.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して, $H_N^*(\mathbf{k})$, $\zeta_N^*(\mathbf{k})$ をそれぞれ

$$H_N^*(\mathbf{k}) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r}, \quad \zeta_N^*(\mathbf{k}) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

と定める.

定理 7.2 (Seki–Yamamoto [19]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{e,r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) H_N^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = \sum_{j=0}^e \zeta_N^*(\underbrace{1, \dots, 1}_{e-j}) \sum_{\mathbf{e}' \in J_{j,s}} \zeta_N^*(\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e}')$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は恒等式 (1) と解釈して成立する. $\text{mod } p$ すると, $\zeta_A^*(1, \dots, 1) = 0$ に注意して, 定理 7.1 が得られる.

Hoffman–川島の恒等式は q -類似に拡張することができた (Bradley の恒等式) が, 上記大野型恒等式についても, q -類似に拡張することができる.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と非負整数の組 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ に対して, $H_N^*(\mathbf{k}; q)$, $z_N^*(\mathbf{k}; \mathbf{e}; q)$ をそれぞれ

$$H_N^*(\mathbf{k}; q) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(k_1-1)n_1 + \dots + (k_r-1)n_r} (-1)^{n_r-1} q^{n_r(n_r+1)/2}}{[n_1]_q^{k_1} \dots [n_r]_q^{k_r}} \binom{N}{n_r}_q,$$

$$z_N^*(\mathbf{k}; \mathbf{e}; q) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(e_1+1)n_1 + \dots + (e_r+1)n_r}}{[n_1]_q^{k_1+e_1} \dots [n_r]_q^{k_r+e_r}}$$

と定める.

定理 7.3 (Seki–Yamamoto [19]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{e,r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) H_N^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}; q) = \sum_{j=0}^e z_N^*(\underbrace{1, \dots, 1}_{e-j}; \underbrace{0, \dots, 0}_{e-j}; q) \sum_{\mathbf{e}' \in J_{j,s}} z_N^*(\mathbf{k}^\vee; \mathbf{e}'; q)$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は Bradley の恒等式と解釈して成立し, $q \rightarrow 1$ とすると, 定理 7.2 が得られる.

この恒等式は, コネクターを

$$C_{q,x}(n, m) = (-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2} \frac{[n]_q - q^n x}{q^n} \frac{\prod_{h=1}^m ([h]_q - q^h x)}{[n]_q! [m-n]_q!}$$

と一般化することによって, 連結和法を用いて証明できる.

8 川島関係式

Hoffman は Hoffman–川島の恒等式を有限多重ゼータ値の間の関係式へ応用したが[§] (定理 4.1), 川島は多重ゼータ値の間の関係式へ応用した.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して, Newton 級数

$$G(\mathbf{k}; t) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{t}{n_r}$$

を考える. このとき, 川島関数 $F(\mathbf{k}; t)$ が[§]

$$F(\mathbf{k}; t) = G(\mathbf{k}^\vee; t)$$

によって定義される.

2つのインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対して, そのスター版調和積 $\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}$ がインデックスの整数係数線形結合として定義される. 例) $(2) \bar{*} (3) = (2, 3) + (3, 2) - (5)$. このとき, 標準的な積公式

$$\zeta_N^*(\mathbf{k}) \zeta_N^*(\mathbf{l}) = \zeta_N^*(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}) \quad (4)$$

が成り立つことが知られている. ここで,

$$\zeta_N^*(2) \zeta_N^*(3) = \zeta^*((2) \bar{*} (3)) = \zeta_N^*(2, 3) + \zeta_N^*(3, 2) - \zeta_N^*(5)$$

のように, ζ_N^* を線形に拡張した記述を用いている. このような拡張は ζ_N^* 以外にも適宜適用することとする. 川島は川島関数についても同様の積公式が成立することを証明した.

定理 8.1 (Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ に対して,

$$F(\mathbf{k}; t) F(\mathbf{l}; t) = F(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}; t) \quad (5)$$

が成り立つ.

この定理の川島による証明は, 任意の正整数 N に対する $t = N$ の場合の成立に帰着させるという, Newton 級数の理論における補間性質を用いたものである. Hoffman-川島の恒等式によって

$$F(\mathbf{k}; N) = G(\mathbf{k}^\vee; N) = H_N^*(\mathbf{k}^\vee) = \zeta_N^*(\mathbf{k})$$

であるため, (4) によって補間されることがわかる.

Newton 級数として定義された $G(\mathbf{k}; t)$ は, Taylor 展開公式

$$G(\mathbf{k}; t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \circledast \mathbf{k}^*) t^m$$

を満たすため, (5) の両辺を Taylor 展開して係数比較することによって, 次の定理が得られる. $\circledast$ および $\mathbf{k}^*$ の定義は割愛する (詳しく知りたい方は [23] を参照のこと). $\zeta(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値である.

定理 8.2 (Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ と任意の正整数 m に対して,

$$\sum_{\substack{a+b=m \\ a, b \in \mathbb{Z}_{>0}}} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_a \circledast (\mathbf{k}^\vee)^*) \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_b \circledast (\mathbf{l}^\vee)^*) = -\zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \circledast ((\mathbf{k} * \mathbf{l})^\vee)^*)$$

が成り立つ.

これは多重ゼータ値の間の代数関係式であるが, $m = 1$ の場合を考えると多重ゼータ値の間の線形関係式が得られ, それは川島関係式の線形部分とよばれている. また, 一般の川島関係式において, 左辺にある多重ゼータ値の積をシャッフル積で展開することによって得られる線形関係式は, それら関係式の線形結合を考えることによって, 多重ゼータ値の間の線形関係式を尽くすと予想されている.

9 川島関係式のダイヤモンドリフト

[6] で導入された多重ゼータダイヤモンド値の間には様々な関係式が成り立つが, それらは多重ゼータ値の間に成り立つ関係式と全く同じ形をしている. 実際, $k_r \geq 2$ であるようなインデックス $(k_1, \dots, k_r)$ に対して, $\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r)$ を

$$\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r) = \sum_{A \subset \{i | k_i = 1\}} \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{Z}_{>0} \ (1 \leq i \leq r), \ n_{r+1} = N \\ n_i \leq n_{i+1} \ (i \in A) \\ n_i < n_{i+1} \ (i \notin A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right)$$

と定義し, 多重ゼータダイヤモンド値 $\zeta^\diamond(k_1, \dots, k_r)$ を, 有理数列として $\zeta^\diamond(k_1, \dots, k_r) = (\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r))_{N \in \mathbb{Z}_{>0}}$ と定義するが,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N^\diamond(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$$

であることから、関係式の遺伝性がわかる．一方、多重ゼータ値の間の任意の関係式が多重ゼータダイヤモンド値の間でも成り立つわけではない．多重ゼータ値の間の既存の関係式が多重ゼータダイヤモンド値の間でも成り立つとき、その関係式はダイヤモンドリフトすると表現する．

実は、川島関係式はダイヤモンドリフトする．

定理 9.1 (Hirose–Maesaka–Seki–Watanabe [6]). 任意のインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ と任意の正整数 m に対して、

$$\sum_{\substack{a+b=m \\ a,b \in \mathbb{Z}_{>0}}} \zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_a) \circledast (\mathbf{k}^\vee)^\star) \zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_b) \circledast (\mathbf{l}^\vee)^\star) = -\zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_m) \circledast ((\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l})^\vee)^\star)$$

が成り立つ．

正整数 n とインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して、記号

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}, \quad [r]_{\mathbf{k}}^1 = \{i \in [r] \mid k_i = 1\}$$

を用いる．また、 $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ は上昇べきの記号である．

$$G_N(\mathbf{k}; t) = \sum_{A \subset [r]_{\mathbf{k}}^1 \setminus \{r\}} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_i \leq n_{i+1} \text{ } (i \in A \cap [r-1] \text{ or } i+1 \in [r] \setminus A) \\ n_i < n_{i+1} \text{ } (i \in [r-1] \setminus A \text{ and } i+1 \in A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i + t} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right) \\ \cdot (-1)^{n_r-1} \binom{t}{n_r} \frac{(1-N)_{n_r}}{(1-N-t)_{n_r}}$$

と定義すると、Taylor 展開公式

$$G_N(\mathbf{k}; t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta_N^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_m) \circledast \mathbf{k}^\star) t^m$$

を証明できる．一方、 $F_N(\mathbf{k}; t)$ を

$$F_N(\mathbf{k}; t) = \sum_{A \subset [r]} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_{i-1} \leq n_i \text{ } (1 < i \notin A) \\ n_{i-1} < n_i \text{ } (1 < i \in A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{(N - n_i + t)^{k_i}} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right)$$

と定義すると、

$$F_N(\mathbf{k}; t) F_N(\mathbf{l}; t) = F_N(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}; t)$$

が成り立つことを確認できる．以上より、川島関係式のダイヤモンドリフトを証明するためには、次の恒等式の成立を示せばよい．

定理 9.2 (Hirose–Maesaka–Seki–Watanabe [6]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して、

$$F_N(\mathbf{k}; t) = G_N(\mathbf{k}^\vee; t)$$

が成り立つ．

これは, $t \rightarrow \infty$ とすると, Hoffman–川島の恒等式に一致する. 示すべき式は非常に複雑であるが^{*1}, 3 節の証明を適切に拡張することによって証明できる (必要な輸送関係式の形は同じである). 以下に, 連結和の定義のみ紹介しておこう.

定義 9.3. 連結和を

$$\begin{aligned}
& Z_{N,t}(k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s) \\
&= \sum_{AC[r]_k^1} \sum_{BC[s]} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_i \leq n_{i+1} \text{ (} i \in A \cap [r-1] \text{ or } i+1 \in [r] \setminus A \text{)} \\ n_i < n_{i+1} \text{ (} i \in [r-1] \setminus A \text{ and } i+1 \in A \text{)}}} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_s) \in [N-1]^s \\ m_{j-1} \leq m_j \text{ (} 1 < j \notin B \text{)} \\ m_{j-1} < m_j \text{ (} 1 < j \in B \text{)}}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i + t} \right) \left(\prod_{i \in [r] \setminus A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right) \\
& C_{N,t}((1 - \delta_{r \in A}) \cdot n_r + \delta_{r \in A} \cdot (N - n_r + t), (1 - \delta_{s \in B}) \cdot m_1 + \delta_{s \in B} \cdot (N - m_1 + t)) \\
& (-1)^{\#B} \left(\prod_{j \in B} \frac{1}{(N - m_j + t)^{l_j}} \right) \left(\prod_{j \in [s] \setminus B} \frac{1}{m_j^{l_j}} \right)
\end{aligned}$$

と定義する. ここで, $\delta_{r \in A}$ は $r \in A$ のときは 1 で, $r \notin A$ のときは 0 と定義される記号で, コネクタは

$$\begin{aligned}
C_{N,t}(n, m) &= (-1)^{n-1} n \binom{m}{n} \frac{(1 - N - t)_{n+m}}{(1 - N - t)_n (1 - N - t)_m}, \\
C_{N,t}(N - n + t, m) &= \frac{N - n + t}{N - n - m + t} C_{N,t}(n, m), \\
C_{N,t}(n, N - m + t) &= C_{N,t}(n, m - 1), \\
C_{N,t}(N - n + t, N - m + t) &= \frac{(N - n + t)(N - m + t)}{m(N - n - m + t)} C_{N,t}(n, m)
\end{aligned}$$

と定義される.

極限 $t \rightarrow \infty$ をとれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{N,t}(n, m) = (-1)^{n-1} n \binom{m}{n}$$

と, 古典コネクタに一致する.

なお, 本稿では詳細を紹介することはできないが, 多重ゼータダイヤモンド値の間の線形関係式は Drop1 関係式とよばれる関係式族で尽くされることが, [6] において既に証明されている. 多重ゼータ値の間で成立することが知られていた Drop1 関係式をダイヤモンドドリフトしたのではなく, Drop1 関係式は [6] において初めて発見された関係式族である. 尽くされるといっても, Drop1 関係式に川島関係式の線形部分が含まれているかどうかは非自明であるし, 代数関係式としての川島関係式がダイヤモンドドリフトするかどうかについても非自明である (多重ゼータダイヤモンド値自体が調和積公式を一般には満たさ

^{*1} $G_N(\mathbf{k}; t)$ はインデックスの成分 1 を特別視した, “ダイヤモンド的な” 和であるが, $F_N(\mathbf{k}; t)$ はそうではない (ので, スター版調和積公式が自然に示される). これら異質なものが繋がるということにはわかには信じられなかった.

ないことを考えると, ある種の調和積的現象である, 川島関係式がフルにリフトすることはかなり意外であった).

多重ゼータダイヤモンド値の間の線形関係式が Drop1 関係式で尽くされることと合わせると, Drop1 関係式から川島関係式の線形部分が導出されることが従う (これは, 抽象的な関係式族としての導出関係であるため, 本来多重ゼータダイヤモンド値とは無関係の事柄である). このような導出関係が Euler の恒等式の大幅な一般化から得られるという事実は興味深いといえよう.

終わりに, 本稿で紹介された Euler の恒等式の一般化に限っても全てを含む一般公式は得られていないので, まだまだ拡張の余地がありそうである.

参考文献

- [1] S.-J. Bang, J. E. Dawson, A. N. 't Woord, O. P. Lossers, V. Hernandez, *Problems and solutions: Solutions: A reciprocal summation identity: 10490*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 588–590.
- [2] D. M. Bradley, *Duality for finite multiple harmonic q -series*, Disc. Math. **300** (2005), 44–56.
- [3] K. Dilcher, *Some q -series identities related to divisor functions*, Disc. Math. **145** (1995), 83–93.
- [4] L. Euler, *Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium*, Nova Acta Acad. Sci. Imp. Petropol. **15** (1799-1802; published 1806), 33–43; reprinted in Leonhardi Euleri Opera omnia, Series I, vol.16, pt.2, ed. C. Boehm, B. G. Teubner, Leipzig, 1935, 104–116 (Eneström E726).
- [5] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara, S. Saito, *OHNO-type relations for classical and finite multiple zeta-star values*, Kyushu J. Math. **75** (2021), 115–124.
- [6] M. Hirose, T. Maesaka, S. Seki, T. Watanabe, *The $\mathbb{Z}$ -module of multiple zeta values is generated by ones for indices without ones*, arXiv:2505.07221.
- [7] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.
- [8] K. Kamano, *A q -analogue of Boyadzhiev-Mneimneh-type binomial sums of finite multi-polylogarithms*, arXiv:2510.25059.
- [9] M. Kaneko, D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, (to appear) Advanced Studies in Pure Math.
- [10] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.
- [11] G. Kawashima, T. Tanaka, *Newton series and extended derivation relations for multiple L -values*, arXiv:0801.3062.
- [12] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.
- [13] H. Prodinger, *A q -analogue of a formula of Hernandez obtained by inverting a result of Dilcher*, Australas. J. Combin. **21** (2000), 271–274.

- [14] S. Roman, *The harmonic logarithms and the binomial formula*, J. Combin. Theory Ser. A **63** (1993), 143–163.
- [15] K. Sakugawa, S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, J. Algebra **469** (2017), 323–357.
- [16] S. Seki, *The p -adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, Tohoku Math. J. **71** (2019), 111–122.
- [17] S. Seki, *Connectors*, RIMS Kôkyûroku **2160** (2020), 15–27.
- [18] S. Seki, S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. Number Theory **15** (2019), 1261–1265.
- [19] S. Seki, S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), 673–686.
- [20] Z. H. Sun, *Congruences involving Bernoulli and Euler numbers*, J. Number Theory **128** (2008), 280–312.
- [21] R. Tauraso, J. Zhao, *Congruences of alternating multiple harmonic sums*, J. Comb. Number Theory **2** (2010), 129–159.
- [22] L. Van Hamme, *Advanced problem 6407*, Amer. Math. Monthly **40**, (1982), 703–704.
- [23] S. Yamamoto, *A note on Kawashima functions*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr. 2019/1, 151–163.

Kirillov-Reshetikhin 加群に付随する幾何クリスタルの 装飾関数について

尾角 正人 (大阪公立大学)*

アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}$ のディンキン図の 0 以外の頂点 r に対して、Kirillov-Reshetikhin 加群の系列および KR クリスタルの系列が存在し、それに対応して Berenstein-Kazhdan の意味での幾何クリスタルが存在することが予想されている。今回、 $\mathfrak{g}$ がアフィン ADE 型で、 r が極小ウェイト表現に対応する頂点のとき、[1] の意味での装飾関数 (decoration function) を求めたので報告したい。これを超離散 (トロピカル) 化することにより、任意の l で KR クリスタル $B^{r,l}$ の整多面体表示が得られる。

1 幾何クリスタル

幾何クリスタルは柏原クリスタルの代数幾何版として Berenstein-Kazhdan が導入したもので、クリスタル上の組合せ論的作用 $\tilde{e}_i$ や関数 ε_i, φ_i が代数群が作用する多様体上の有理変換 e_i^c 、有理関数 ε_i, φ_i に置き換わり、種々の公理を満たすものであり、それが正值性をもてば超離散化により柏原クリスタルが得られる [1, 5]。KR クリスタルに対しても対応する幾何クリスタルが存在すると予想されていて、非例外型アフィンリー環の自然表現に対応する場合や D_n, E_6 型の随伴表現の場合、 A_n 型のすべての場合では予想が成り立つことがわかっていて [2, 3, 4]、こちらでは超離散化により完全結晶の連接族の極限が出てくる。

例 1 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}^\times\} \\ \gamma_i(x) &= \begin{cases} \frac{x_i^2}{x_{i-1}x_{i+1}} & (i \neq 0) \\ \frac{1}{x_1x_n} & (i = 0) \end{cases} \\ \varepsilon_i(b) &= \frac{x_{i+1}}{x_i} \\ e_i^c(x) &= \begin{cases} (x_1, \dots, cx_i, \dots, x_n) & (i \neq 0) \\ (c^{-1}x_1, c^{-1}x_2, \dots, c^{-1}x_n) & (i = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと $(\mathcal{V}, e_i^\bullet, \gamma_i, \varepsilon_i)$ は $r = 1$ (自然表現) に対応する幾何クリスタルである。ただし、 $x_0 = x_{n+1} = 1$ とする。

2 装飾関数

幾何クリスタルに装飾関数という概念がある [1]。これは

$$f(e_i^c(x)) = f(x) + \frac{c-1}{\varphi_i(x)} + \frac{c^{-1}-1}{\varepsilon_i(x)}$$

* e-mail: okado@omu.ac.jp

を満たす有理関数で、装飾関数付きの幾何クリスタルを超離散化することにより正規クリスタル (normal crystal) が得られる。正規クリスタルとは通常の可積分表現のクリスタル同様、関数 ε_i が $\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}$ の意味をもつようなクリスタルのことである。今回、極小ウェイト表現に付随する KR クリスタルのときに装飾関数を求めた。

型	極小ウェイト
A_n	$\varpi_1, \dots, \varpi_n$
B_n	ϖ_n
C_n	ϖ_1
D_n	$\varpi_1, \varpi_{n-1}, \varpi_n$
E_6	ϖ_1, ϖ_6
E_7	ϖ_7

例 2 $A_n^{(1)}, r = 1; f(x) = \frac{1}{lx_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + x_n$
 $D_n^{(1)}, r = 1; f(x) = \frac{1}{l\bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} + \dots + \frac{\bar{x}_{n-2}}{\bar{x}_{n-1}} + \frac{\bar{x}_{n-2}}{x_{n-1}} + \frac{\bar{x}_{n-1}}{x_{n-2}} + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} + \dots + \frac{x_2}{x_1} + x_1$

これらの装飾関数は KR クリスタル $B^{r,1}$ のクリスタルグラフを調べることにより得られる。

3 KR クリスタルの整多面体表示

超離散極限をとることにより、KR クリスタル $B^{r,l}$ の正多面体表示が得られる。

例 3 $A_n^{(1)}, r = 1;$

$$-l \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 0$$

$D_n^{(1)}, r = 1;$

$$-l \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_{n-2} \leq \frac{x_{n-1}}{\bar{x}_{n-1}} \leq x_{n-2} \leq \dots \leq x_1 \leq 0$$

参考文献

- [1] A. Berenstein, D. Kazhdan, Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases, Quantum groups, 13-88, Contemp. Math, **433**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [2] M. Kashiwara, T. Nakashima, M. Okado, Affine geometric crystals and limit of perfect crystals, Transactions in American Mathematical Society **360** (2008), no.7, 3645-3686.
- [3] 柏原、中島、尾角, 幾何クリスタルと可積分系, RIMS 講究録, 第 1541 巻, 2007 年 150-165.
- [4] K. C. Misra, T. Nakashima, Affine geometric crystal of $A_n^{(1)}$ and limit of Kirillov-Reshetikhin perfect crystals, J. Algebra **507** (2018), 249-291.
- [5] T. Nakashima, Geometric crystals on Schubert varieties, Journal of Geometry and Physics, **53** (2005), (2), 197-225.

ランク 3 団輪状行列の G 扇の構造

赤木 亮太 (名古屋大学)*

1 団代数と g ベクトル

団代数とは, 2000 年ごろに Fomin, Zelevinsky により導入された, 可換環のクラスである [1]. 初期交換行列 (initial exchange matrix) とよばれる歪対称化可能行列 B を一つ与えるごとに, 初期変数 $x_1, \dots, x_n$ から変異 (mutation) と呼ばれる関係式を $\mathbf{w} = [k_1, \dots, k_r]$ の順に適用することで, 団変数 (cluster variable) と呼ばれる生成元の族 $x_1^{\mathbf{w}}, \dots, x_n^{\mathbf{w}}$ と別の交換行列 $B^{\mathbf{w}}$ が構成される. 団代数は団変数全体が生成する代数として定義される. 変異の有する豊富な性質により, 団代数は代数分野に限らず, あらゆる側面から研究されている. 団変数は分離公式 (separation formula) $x_j^{\mathbf{w}} = x_1^{g_{1j}^{\mathbf{w}}} \cdots x_n^{g_{nj}^{\mathbf{w}}} F_j^{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{y}})$ と呼ばれる表示を持つことが知られている [2]. ここで, $g_{1j}^{\mathbf{w}}, \dots, g_{nj}^{\mathbf{w}} \in \mathbb{Z}$ であり, $F_j^{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{y}})$ は, 定数項が 1 の, $\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_n})$ 変数多項式である. 単項式部分の次数を並べた列ベクトル $\mathbf{g}_j^{\mathbf{w}} = (g_{1j}^{\mathbf{w}}, \dots, g_{nj}^{\mathbf{w}})^{\top}$ を g ベクトルとよぶ. このように団変数のある種の次数という, 特殊な情報で定義されている g ベクトルであるが, これは団変数のもつ周期性を完全に反映している (つまり $x_j^{\mathbf{w}} = x_i^{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \mathbf{g}_j^{\mathbf{w}} = \mathbf{g}_i^{\mathbf{u}}$) [3]. このことから, g ベクトルは団代数の研究において中心的役割を果たす.

2 G 扇

g ベクトルには, ルート系のコルートに類似する現象が観察されている. その中で最も重要な対象として, G 扇がある. 各 $\mathbf{w}$ に対し, g ベクトルを並べた行列 $G^{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}_1^{\mathbf{w}}, \dots, \mathbf{g}_n^{\mathbf{w}})$ を G 行列といい, g ベクトルの非負の線形結合として張られる錐 $\mathcal{C}(G^{\mathbf{w}})$ を G 錐と呼ぶ. これは, n 次元の単体的錐となることが知られている. これら G 錐の全体と, その面がなす集合を G 扇と呼び, $\Delta(B)$ で表す. G 扇は「1. 面をとる操作で閉じている」, 「2. 二つの錐の共通部分は, 両方の錐の面である」という性質を満たし, 通常の意味での (無限個を許す) 扇となることが知られている [3]. この G 扇は, ルート系における Coxeter の部屋 (Coxeter chamber) 構造の類似と考えられている.

このように, g ベクトルは団変数の周期性を保存するだけでなく, 幾何学的に良い構造を与える点で興味深い研究対象である. 一方で, その構造は非常に複雑であり, 現在その個別具体的な性質はほとんど判明していない.

* 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

e-mail: ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/ryotaakagi/english?authuser=0>

本講演の内容は, 中国科学技術大学院大学の Zhichao Chen 氏との共同研究に基づく [4]. 本研究は科研費 (課題番号: JP25KJ1438) の助成を受けたものである.

キーワード: cluster algebras, G -fan (g -vector fan)

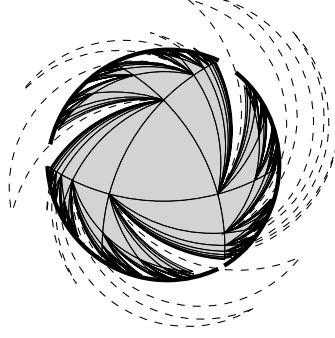


図 1 団輪状行列の G 扇 (を立体射影したもの). 太線が大域上界, 破線が局所上界.

3 主定理・ランク 3 団輪状行列に対する G 扇

本講演の内容は, G 扇の詳細な様子について, ランク 3 の団輪状行列と呼ばれるクラスで調べたものである. ここで, 歪対称化可能行列 B が輪状 (cyclic) であるとは, B の各要素の符号が $\pm \begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$ であることをいい, B が団輪状 (cluster-cyclic) であるとは, 全ての変異した行列 $B^{\mathbf{w}}$ が輪状であることをいう.

このクラスの G 扇は, 図 1 に描かれる, 次の二種類の上界により説明される.

定理 1 ([4]) 次の二種類の上界が定まる.

1. 初めの変異 $i = 1, 2, 3$ により得られた G 錐 $\mathcal{C}(G^{\mathbf{w}})$ ($\mathbf{w} = [i, \dots]$) は, ある i にのみ依存する二葉双曲面 (もしくはそれが退化したもの) の一方の連結成分を包含する錐 Q_i^+ に含まれる (大域上界).
2. (全てではないが) 多くの $\mathbf{w}$ に対して, その $\mathbf{w}$ 以降に変異を適用して出現する G 錐は, ある単体的錐 $\mathcal{V}^{\mathbf{w}}$ に包含される (局所上界).

この定理の応用として, 次の g ベクトルに関する性質が導かれる.

定理 2 ([4]) ランク 3 の団輪状行列 B について, 次の事実が成り立つ.

1. g ベクトルは, 自明なものを除いて一切の周期性を持たない.
2. 各 $\mathbf{w}$ と $j = 1, 2, 3$ に対し, $g_{j1}^{\mathbf{w}}, g_{j2}^{\mathbf{w}}, g_{j3}^{\mathbf{w}} \geq 0$ であるか, $g_{j1}^{\mathbf{w}}, g_{j2}^{\mathbf{w}}, g_{j3}^{\mathbf{w}} \leq 0$ であるかのいずれか一方であり, さらにその符号の族は, 初期交換行列の符号のみにより決まる. また, その符号を具体的に求めることができる.

参考文献

- [1] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529; MR1887642
- [2] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164; MR2295199
- [3] M. Gross et al., Canonical bases for cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 497–608; MR3758151
- [4] R. Akagi and Z. Chen, Geometric structures of G -fans associated with rank 3 cluster-cyclic exchange matrices, arXiv preprint arXiv:2603.16326 (2026).

量子スピン系における Yang-Baxter 可積分性の直接判定法

山口 瑞樹（東大総合文化）

白石 直人（東大総合文化）、石井 風雅（東大教養）との共同研究

量子スピン鎖の可積分性を定式化する標準的な方法の一つは Yang-Baxter 方程式である．局所空間を有限次元ベクトル空間 V とする．スペクトルパラメータ x に依存する $V \otimes V$ 上の線形作用素の族 $R(x)$ が，正則性条件

$$R(0) = P$$

および差分型 Yang-Baxter 方程式

$$R_{12}(x)R_{13}(x+y)R_{23}(y) = R_{23}(y)R_{13}(x+y)R_{12}(x)$$

を満たすとき，対応する転送行列の可換族が得られる．このとき

$$h = PR'(0)$$

により局所ハミルトニアン密度が定まり，最近接スピン鎖

$$H = \sum_i h_{i,i+1}$$

の Yang-Baxter 可積分性が従う．しかし，この定式化は補助的対象である R 行列を出発点とするため，与えられた h から可積分性を直接判定するものではない．

ハミルトニアンだけで書かれる自然な必要条件として，Reshetikhin 条件

$$[Q_3^B, H] = 0, \quad Q_3^B = \sum_i [h_{i,i+1}, h_{i+1,i+2}]$$

がある．実際， $R(x)$ を

$$R(x) = P(1 + xh + x^2r^{(2)} + \dots)$$

と展開して Yang-Baxter 方程式に代入すると，この条件は x^2y 係数から得られる最初の非自明な整合条件である．Yang-Baxter 可積分性の初期の研究において，Kulish-Sklyanin, Öttinger-Honerkamp, Jimbo-Miwa らは，この必要条件が正則差分型 Yang-Baxter 方程式に対して十分条件でもあると予想していた．

本講演ではこの予想を肯定的に解決する．すなわち，有限次元局所空間上の局所相互作用 h が Reshetikhin 条件を満たすならば，

$$R(0) = P \quad D'(0) = Ph$$

を満たす差分型 Yang–Baxter 方程式の解 $R(x)$ が存在する．したがって，正則差分型の範囲では，Reshetikhin 条件は Yang–Baxter 可積分性の必要十分条件を与える．さらに，対応する R 行列は形式冪級数として逐次的に構成できる．

証明の中心は Yang–Baxter 方程式の defect 解析である．構成中の $R(x)$ に対して

$$R_{12}(x)R_{13}(x+y)R_{23}(y) - R_{23}(y)R_{13}(x+y)R_{12}(x) = D_{123}(x, y)$$

とおき，defect $D_{123}(x, y)$ の最低次数成分を追跡する．もし Yang–Baxter 方程式が破れるならば，最低次数の非零 defect が存在する．Reshetikhin 条件の下で構成された $R(x)$ について，この最低次数 defect が満たす整合性を導き，それが非零であることと矛盾することを示す．これにより defect は全次数で消え，Yang–Baxter 方程式が従う．

最後に，量子スピン鎖における Liouville–Arnold 型の問題との関係を述べる．古典可積分系では，十分な数の保存量の存在と可解性が Liouville–Arnold 定理により結びつけられる．量子スピン鎖においても，Yang–Baxter 可積分性と無限個の局所保存量の存在は対応するはずだと期待されている．本講演の主定理は，Yang–Baxter 可積分性を R 行列の存在からハミルトニアン密度 h の条件へと言い換えるものであり，この期待を保存量の問題と直接比較するための橋渡しを与える．実際，等方的最近接スピン鎖については，局所保存量に関する白石・山口の結果と本講演の主定理を組み合わせることで，任意の局所次元に対して，Yang–Baxter 可積分性と無限個の局所保存量の存在の同値性が得られる．この意味で，等方的最近接スピン鎖に対する量子 Liouville–Arnold 型定理が成立する．

The Kontsevich invariant and the action of the Grothendieck–Teichmüller group on 2-component string links

小谷 久寿 (九大 IMI)

野崎 雄太 (北大理)

1 はじめに

絡み目に対する Kontsevich 不変量は associator の取り方に依らない一方で, タングルに対しては一般にはその取り方に依ることが知られている. 本講演では, 2 成分ストリングリンクの場合に焦点を当て, Kontsevich 不変量の associator の取り方依存性について考察する. Kontsevich 不変量の associator の取り替え問題は Grothendieck–Teichmüller 群を通して基本群へのガロア作用及びその拡張である結び目へのガロア作用と密接に関係している. 本講演の考察の帰結として, Grothendieck–Teichmüller 群の冪単部分 $GT_1(\mathbb{K})$ の副代数的ストリングリンク (proalgebraic string link) への作用が非自明であることが従い, Furusho によるある問題に対して部分的な解決を与える. 本講演の内容は [3] に基づく. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする.

2 Kontsevich 不変量の associator 依存性

Kontsevich 不変量は Jacobi 図と呼ばれるあるグラフのなすベクトル空間に値をもつ q タングルに対する位相不変量である. ここで, q タングルとはその端点に非結合的語を備えたタングルのことである. この不変量は, 元々は絡み目に対して Kontsevich により組紐群の KZ 方程式のモノドロミー表現の拡張として Chen の反復積分を用いた形で導入され, その後 Le–Murakami により Drinfel’d associator を用いた組合せ的構成が与えられた. 一般には, Kontsevich 不変量は associator の取り方に依るため, associator Φ により定まる Kontsevich 不変量を Z_Φ と記す. 不変量 Z_Φ の associator の取り方依存性について, 純組紐群の場合はわかりやすいが, 純組紐のホモロジーシリンダー的な拡張であるストリングリンクの場合については, 成分数が 2 の場合が微妙なケースとなっており注意深く調べる必要がある. 本研究では, 2 成分の場合について以下の結果を得た.

命題 2.1 T を 2 成分ストリングリンクとし, Φ, Φ' を associators とする. このとき, $Z_\Phi(T)_{\leq 6} = Z_{\Phi'}(T)_{\leq 6}$ が成り立つ.

すなわち, 少なくとも次数 6 以下では 2 成分ストリングリンクの Kontsevich 不変量

本研究は JSPS 科研費 JP23K12974, JP25K06954 及び九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用・共同研究拠点 (FY2025 研究集会 (II)「トポロジーとコンピュータ 2025」(2025a038)) の支援を受けたものである.

は associator の取り方に依らない. しかし, 以下の定理からわかるように, より高次の部分については一般には associator の取り方に依存する.

定理 2.2 次を満たすような 2 成分ストリングリンク T_n ($n \geq 2$) が存在する: $\mathbb{K}$ に係数をもつ任意の associator Φ に対して, $\mathbb{K}$ に係数をもつある associator Φ' が存在して

$$Z_\Phi(T_n)_{\leq 2n+3} = Z_{\Phi'}(T_n)_{\leq 2n+3} \text{ and } Z_\Phi(T_n)_{2n+4} \neq Z_{\Phi'}(T_n)_{2n+4}$$

が成り立つ. さらに, Φ が horizontal であるとき, Φ' も horizontal であるように取れる.

ここで, 2 変数の非可換形式的冪級数として導入された Drinfel'd associator ([1]) から得られる associator のことを horizontal であると呼んでいることに注意する. 2 成分ストリングリンクの場合でも, 一般には, Z_Φ は associator の取り方によることがわかったが, 多くのウェイトシステムを取ると取り方に依らなくなることにもわかった. このことから 2 成分の場合の取り方依存性問題の微妙さが窺える.

定理 2.3 2 本糸上の (可算) 無限個のウェイトシステム W が存在して, 合成写像 $W \circ Z_\Phi$ が associator Φ の取り方に依らない.

3 副代数的ストリングリンクへの Grothendieck–Teichmüller 群作用

Furusho により Grothendieck–Teichmüller 群 $GT(\mathbb{K})$ の副代数的ストリングリンクへの作用が調べられており, そこで 2 成分の場合の作用が忠実か否かについて問題が提出されていた ([2, Problem 4.17]). 本講演の考察からこの問題への部分的解答を得る.

定理 3.1 Grothendieck–Teichmüller 群 $GT(\mathbb{K})$ の冪単部分 $GT_1(\mathbb{K})$ の副代数的 2 成分ストリングリンクへの作用は非自明である.

	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$
kernel $\text{Ker } \rho$	$\text{Ker } \rho = GT_1(\mathbb{K})$ ([2])	$\text{Ker } \rho \subsetneq GT_1(\mathbb{K})$ (定理 3.1)	$\text{Ker } \rho = \{e\}$ ([2])
faithfulness	far from faithful	?	faithful

表 1 副代数的 n 成分ストリングリンク上の $GT(\mathbb{K})$ -表現 ρ の核と忠実性.

参考文献

- [1] V. G. Drinfel'd. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningr. Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [2] H. Furusho. Galois action on knots II: Proalgebraic string links and knots. In *Periods in quantum field theory and arithmetic*, volume 314 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 541–591. Springer, Cham, 2020.
- [3] H. Kodani, Y. Nozaki. The Kontsevich invariant and the action of the Grothendieck–Teichmüller group on 2-component string links. arXiv:2512.19132, 2025.

階段状 Young 図形のフック長比と Jacobi 多項式の特殊値

島崎 達史 (明石工業高等専門学校)*

Young 図形 λ に付随する半標準 Young 盤 (以下, 半標準盤) の個数 $|\text{SST}(\lambda, n)|$ は, 表現論や幾何学における不変量の計算において重要な役割を果たす. Frame–Robinson–Thrall (1954) によるフック長公式以降, その q 類似や歪形状への拡張, さらに K 理論への一般化が研究されてきた. 本講演では, 階段型分割 $\delta_k = (k-1, k-2, \dots, 1)$ に着目し, 隣接する階段型分割に対応する半標準盤の個数比が Jacobi 多項式の特殊値を用いて表されることを紹介する.

Jacobi 多項式 $P_k^{(\alpha, \beta)}(z)$ を Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ を用いて次で定める.

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_k}{k!} {}_2F_1\left(-k, k+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right).$$

Theorem 1 ([7]). 正の整数 k および n ($n \geq k$) に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{|\text{SST}(\delta_{k+1}, n)|}{|\text{SST}(\delta_k, n)|} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} P_k^{\left(\frac{n-k-1}{2}, -\frac{n-k-1}{2}\right)}(-1). \quad (1)$$

階段型分割のフック長・コンテンツの対称性により, フック長公式から導かれる積は Jacobi 多項式の特殊値として表される. 実際, 対応する ${}_2F_1$ のパラメータは $k + \alpha + \beta + 1 = 0$ を満たす.

Example 2. 正の整数 $k = 4, n = 6$ の場合を考える. 隣り合う階段型形状 $\delta_4 = (3, 2, 1)$ および $\delta_5 = (4, 3, 2, 1)$ の Young 図形は以下の通りである.

$$\delta_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \quad \delta_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}.$$

フック長公式

$$|\text{SST}(\lambda, n)| = \prod_{u \in \lambda} \frac{n + c(u)}{h(u)}$$

を用いると, $|\text{SST}(\delta_4, 6)| = 896$, $|\text{SST}(\delta_5, 6)| = 8064$ が得られ, 左辺の比は

$$\frac{|\text{SST}(\delta_5, 6)|}{|\text{SST}(\delta_4, 6)|} = \frac{8064}{896} = 9$$

である. 一方, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{11}{2}$ のとき, 超幾何関数のパラメータが $k + \alpha + \beta + 1 = 0$ を満たすため, Jacobi 多項式の特殊値は

$$\frac{2^8(4!)^2}{8!} \times P_4^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)}(-1) = \frac{128}{35} \times \frac{315}{128} = 9$$

となり, 定理の主張 (1) が確認できる.

* 〒674-8501 兵庫県明石市魚住町西岡 679-3 明石工業高等専門学校 (教養学群)

e-mail: t.shimazaki@akashi.ac.jp

キーワード: Jacobi 多項式, 階段型分割, Grothendieck 多項式, K 理論的 Schur P 多項式

定理 1 に現れる Jacobi 多項式は, K 理論的対称関数の枠組みにおいても現れる. 複素数 β を K 理論のパラメータ (Jacobi 多項式のパラメータとは無関係とする) とし, シフトされた Young 図形を $\tilde{\lambda}$ で表す. Lascoux–Schützenberger [4] が導入した Grothendieck 多項式 $G_{\lambda}(x \mid \beta)$ および Ikeda–Naruse [6] による K 理論的 Schur P 多項式 $GP_{\tilde{\lambda}}(x \mid \beta)$ に対し, Lewis–Marberg [5] は, $G_{\delta_k}(x \mid \beta) = GP_{\tilde{\delta}_k}(x \mid \beta)$ を示した. この等式と Holman の超幾何級数 $F^{(n)}$ [3] による表示式を用いることで, 次の漸化式が得られる.

Proposition 3 ([7]). 正の整数 k および n ($n \geq k$) に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{G_{\delta_{k+1}}(1, \dots, 1 \mid \beta)}{G_{\delta_k}(1, \dots, 1 \mid \beta)} = \frac{GP_{\tilde{\delta}_{k+1}}(1, \dots, 1 \mid \beta)}{GP_{\tilde{\delta}_k}(1, \dots, 1 \mid \beta)} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} P_k^{\left(\frac{n-k-1}{2}, \frac{-n-k-1}{2}\right)}(-1) \times \frac{F_{\delta_{k+1}}^{(n)}(-\beta)}{F_{\delta_k}^{(n)}(-\beta)}.$$

Grothendieck 多項式および K 理論的 Schur P 多項式において, 特殊化 $\beta = 1$ はそれぞれ Buch [1] により導入された集合値半標準盤, および Ikeda–Naruse [6] によるシフトされた集合値半標準盤の数え上げに対応する. これらは半標準盤の一般化であり, K 理論的対称関数の組合せ論的観点や超幾何関数との関連などからも研究されている [2]. 特に, 特殊化 $\beta = 1$ の下では次が成り立つ.

Proposition 4 ([7]). 階段形 δ_k およびシフトされた階段形 $\tilde{\delta}_k$ に対し, $n \geq k-1$ とする. 変数 $x_i = 1$ かつ $\beta = 1$ の特殊化の下で, 集合値半標準盤およびシフトされた集合値半標準盤の個数は, いずれも $3^{\binom{k-1}{2}}$ で割り切れる.

Proposition 3 は $\beta = 0$ において 定理の主張 (1) を与える. 一方, $\beta = 1$ において現れる可除性は, 励起 Young 図形の構造に起因する. 本講演では, この可除性の組合せ論的意味について, 励起 Young 図形を用いて説明する.

参考文献

- [1] A. S. Buch, *A Littlewood–Richardson rule for the K -theory of Grassmannians*, Acta Mathematica, **189**(1): 37–78, 2002.
- [2] T. Fujii, T. Nobukawa, and T. Shimazaki, *Special values of Grothendieck polynomials in terms of hypergeometric functions*, Hiroshima Math. J., **55**(2), 167–182, 2025.
- [3] W. J. Holman III, *Summation Theorems for Hypergeometric Series in $U(n)$* , SIAM J. Math. Anal., **11**(3), 523–532, 1980.
- [4] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Structure de Hopf de l’anneau de cohomologie et de l’anneau de Grothendieck d’une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **295**(11), 629–633, 1982.
- [5] J. B. Lewis and E. Marberg, *Enriched set-valued P -partitions and shifted stable Grothendieck polynomials*, Math. Z., **299**, 1929–1972, 2021.
- [6] T. Ikeda and H. Naruse, *K -theoretic analogues of factorial Schur P - and Q -functions*, Adv. Math., **243**, 22–66, 2013.
- [7] T. Shimazaki, *Staircase hook-length ratios and special values of Jacobi polynomials*, arXiv:2601.05471, 2026.

変形 Noumi–Sano 作用素の固有値問題の積分変換

信川 喬彦 (皇學館大学)*¹

藤井 大計 (お茶の水女子大学)*²

本稿では複素数 q, t を $0 < |q| < 1, 0 < |t| < 1$ ととり固定する. また, 上昇階乗幂を以下で定める:

$$(z; q)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - zq^j) \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}).$$

非負整数の組 $\mu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し, $T_{q,x}^{\pm\mu} = \prod_{i=1}^n T_{q,x_i}^{\pm\mu_i} : f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(q^{\pm\mu_1}x_1, \dots, q^{\pm\mu_n}x_n)$ とする. 変形 Noumi–Sano 作用素 $H_{m,n}$ は次で定義される差分作用素である [2]:

$$H_{n,m}(x, y; u) := \sum_{\mu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} (t^{1-n} q^m u)^{|\mu|} (-tu)^{|I|} q^{\binom{|I|}{2}} B_{\mu,I}(x, y) T_{q,x}^{\mu} T_{t,y}^{-I},$$

$$B_{\mu,I}(x, y) = \frac{\Delta(q^{\mu}x)}{\Delta(x)} \prod_{i,j=1}^n \frac{(tx_i/x_j; q)_{\mu_i}}{(qx_i/x_j; q)_{\mu_i}} \prod_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \in I, j \notin I}} \frac{y_i - qy_j}{y_i - y_j} \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j \in I} \frac{1 - x_i/(ty_j)}{1 - q^{\mu_i}x_i/y_j} \prod_{j \notin I} \frac{1 - x_i/(qy_j)}{1 - q^{\mu_i-1}x_i/y_j} \right).$$

ここで, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$, $q^{\mu}x = (q^{\mu_1}x_1, \dots, q^{\mu_n}x_n)$ である. この作用素は適当な可換性を持ち, super-Macdonald 多項式 SP_{λ} [7] を固有函数にもつ. また, Kajihara の超幾何級数 [3, 4] の双対変換公式を用いることで, kernel identity と呼ばれる次の公式 [2] が得られている:

$$\mathcal{H}_{n,m}(x, y; u) \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) = \mathcal{H}_{N,M}(z, w; u) \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w).$$

ただし, $\mathcal{H}_{n,m} = \frac{(t^{1-n} q^m u; q)_{\infty}}{(tu; q)_{\infty}} H_{n,m}(x, y; u)$ であり,

$$\Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^N \frac{(tx_i z_j; q)_{\infty}}{(x_i z_j; q)_{\infty}} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^M \frac{(qty_i w_j; t)_{\infty}}{(ty_i w_j; t)_{\infty}} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^M (1 - tx_i w_j) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^N (1 - ty_i z_j)$$

である. 本稿の目的は, この公式を用いて変形 Noumi–Sano 作用素の固有値問題の積分変換を構成することである. 以降, $H_{n,m}(x, y; u) = \sum_{R=0}^{\infty} H_{n,m}^R(x, y) u^R$ とする.

*¹ 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704 皇學館大学 教育学部

e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

*² 〒112-8610 東京都文京区大塚 2-1-1 お茶の水女子大学 基幹研究院

e-mail: fujii.taikei@ocha.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:26KJ0129) の助成を受けたものである.

キーワード: q 超幾何積分, Macdonald 多項式, q 差分方程式

定理 $q^r = t^{-s}$ とする. 函数 φ が

$$H_{n,m}^d(tx^{-1}, q^{-1}y^{-1})\varphi(x, y) = E_d\varphi(x, y), \quad 0 \leq d \leq R$$

を満たしているとする. この時, 積分路を適切に取れば

$$\begin{aligned} H_{N,M}^R(z, w) \int \varphi(x, y) x^r y^s \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) \rho(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \\ = \left(\sum_{k+l=R} \frac{(q^{N-n} t^{m-M}; q)_k}{(q; q)_k} (q^{1-N} t^M)^k t^{sl} E_l \right) \int \varphi(x, y) x^r y^s \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) \rho(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\rho(x, y) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (x_i/x_j; q)_\infty / (tx_i/x_j; q)_\infty \right) \left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq m} (y_i/y_j; t)_\infty / (ty_i/y_j; t)_\infty \right)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 - q^{-1}x_i/y_j)(1 - ty_j/x_i)}.$$

証明の鍵は, 次の公式である:

$$T_{q,x}^{-\mu} T_{t,y}^I (B_{\mu,I}(x, y) \rho) = B_{\mu,I}(tx^{-1}, q^{-1}y^{-1}) \rho.$$

補足 定理の中の重み函数 ρ は, [1] の $\Delta_{n,m}$ を適当に変数変換したものである. また, $n = 0$ の場合 (A 型の Macdonald 作用素の固有値問題の積分変換) は [5] で得られている. $m = 0$ の場合は, Noumi-Sano 作用素 [6] の固有値問題の積分変換を与えている.

参考文献

- [1] F. Atai, M. A. Hallnäs and E. Langmann, Super-Macdonald polynomials: orthogonality and Hilbert space interpretation, *Comm. Math. Phys.* **388** (2021), no. 1, 435–468.
- [2] M. A. Hallnäs, E. Langmann, M. Noumi and H. Rosengren, From Kajihara’s transformation formula to deformed Macdonald-Ruijsenaars and Noumi-Sano operators, *Selecta Math. (N.S.)* **28** (2022), no. 2, Paper No. 24, 36 pp.
- [3] Y. Kajihara and M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant, *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), no. 3-4, 395–421.
- [4] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, *Adv. Math.* **187** (2004), no. 1, 53–97.
- [5] K. Mimachi and M. Noumi, An integral representation of eigenfunctions for Macdonald’s q -difference operators, *Tohoku Math. J. (2)* **49** (1997), no. 4, 517–525.
- [6] M. Noumi and A. Sano, An infinite family of higher-order difference operators that commute with Ruijsenaars operators of type A , *Lett. Math. Phys.* **111** (2021), no. 4, Paper No. 91, 17 pp.
- [7] A. N. Sergeev and A. P. Veselov, Deformed Macdonald-Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials, *Comm. Math. Phys.* **288** (2009), no. 2, 653–675.

A generalization of the μ -function associated with the Kontsevich function

渋川 元樹 (北見工業大学・工)*¹

土見 怜史 (近畿大学・総合理工)*²

概要

本講演では, (一般化) μ 函数 [ST] を 1 パラメーター変形した big μ 函数を導入し, それが q -Kummer 方程式に現れる発散級数解の q -Borel 総和と一致することを述べる. さらに q 差分関係式, 接続公式や対称性といったいくつかの諸公式を述べ, big q -Hermite 多項式との関連も併せて紹介する.

$q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1$ に対して,

$$(x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j), \quad (x)_n = (x; q)_n := \frac{(x; q)_\infty}{(q^n x; q)_\infty},$$

$$\theta_q(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (q)_\infty (-x)_\infty (-q/x)_\infty$$

とし, 適当な複素数 $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, x$ に対して,

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r+1} x^n,$$

$${}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r} x^n$$

とおき, 特に

$$\widehat{K}(x; a, b; q) := {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ - \end{matrix}; q, x \right)$$

とする. ここで $a = b = q, x = q^{-1}$ とすると, 結び目不変量の Kontsevich 函数に一致する [Za]. この $\widehat{K}$ は q -Kummer 方程式 (1) の原点周りの発散級数解である.

形式級数 $g(x) = \sum_n a_n x^n$ に対して q -Borel 変換, q -Laplace 変換を以下で定める [RSZ]:

$$\mathcal{B}_q(g)(\xi) := \sum_n a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n, \quad \mathcal{L}_q(g)(x, \lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n/x)}.$$

定義 1 (big μ 函数).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b; q) := \frac{(a, ayq, bx)_\infty}{\theta_q(-yq)(x)_\infty} {}_2\psi_2 \left(\begin{matrix} 1/ay, x \\ 0, bx \end{matrix}; q, a \right).$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 25KJ0371, 26K06837) の助成を受けたものである.
キーワード: Zweegers' μ -function, q -hypergeometric functions, q -Borel summable, knot invariants

*¹ 〒090-0015 北海道北見市公園町 165 北見工業大学工学部

e-mail: g-shibukawa@mail.kindai.ac.jp

*² 〒657-8501 大阪府東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科

e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

定理 2 (発散級数解 $\widehat{K}$ の q -Borel 総和).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b; q) = \mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q \left(\widehat{K}(x; a, b; q) \right) (xy, -x).$$

命題 3 (q 差分関係式).

$$\begin{aligned} [(1 - abxy)T_x - (1 - (a + b)xy) - xyT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0, \\ [(1 - T_x) + (1 - a)(1 - b)xyT_aT_bT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0, \\ [(1 - T_b) - (1 - a)bxT_aT_bT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

定理 4 (q -Kummer 方程式の収束級数解 [Zh] との関係と接続公式).

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow q} \theta_q(-y) \widehat{\mu}(x, y; a, b) &= \frac{(a, b, abx, q, q)_\infty}{\theta_q(-xq)} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q/a, q/b \\ 0 \end{matrix}; q, abx \right), \\ \widehat{\mu}(x, 1/b; a, b) &= \frac{(ax, aq/b, q)_\infty}{\theta_q(-x)(q/b)_\infty} {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} q/b \\ aq/b \end{matrix}; q, \frac{q}{x} \right), \\ \widehat{\mu}(x, y; a, b) &= \frac{\theta_q(-c_2q)\theta_q(-c_2x/y)\theta_q(-c_1y)\theta_q(-c_1x)}{\theta_q(-x)\theta_q(-yq)\theta_q(-c_1c_2x/y)\theta_q(-c_1/c_2)} \widehat{\mu}(c_1x, y/c_1; a, b; q) \\ &\quad + \frac{\theta_q(-c_1q)\theta_q(-c_1x/y)\theta_q(-c_2y)\theta_q(-c_2x)}{\theta_q(-x)\theta_q(-yq)\theta_q(-c_1c_2x/y)\theta_q(-c_2/c_1)} \widehat{\mu}(c_2x, y/c_2; a, b; q) \end{aligned}$$

命題 5 (対称性).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b) = \widehat{\mu}(xq, y/q; a, b) = \widehat{\mu}(x, y; b, a) = \widehat{\mu}(y, x; a, b).$$

命題 6 (退化と特殊化).

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(x, y; a; q) &= iq^{-\frac{1}{8}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\mu}(x/q, y; a, b; q)}{(b, by)_\infty}, \\ H_n(\cos(u + v); b \mid q) &= e^{in(u+v)} \widehat{\mu}(q^n e^{-2\pi i u}, e^{-2\pi i v}; q^{-n}, b e^{i(u+v)}). \end{aligned}$$

ただし $\widehat{\mu}_1(x, y; a; q)$ は一般化 μ 関数 [ST], $H_n(\cos \theta; b \mid q)$ は big q -Hermite 多項式 [KLS]:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(x, y; a; q) &:= iq^{-\frac{1}{8}} \frac{(xy)^{\frac{\alpha}{2}}}{\theta_q(-y)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(axq^n)_\infty}{(xq^n)_\infty} (-y)^{-n} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ H_n(\cos \theta; b \mid q) &:= b^{-n} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, be^{i\theta}, be^{-i\theta} \\ 0, 0 \end{matrix}; q, q \right) = e^{in\theta} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, be^{i\theta} \\ - \end{matrix}; q, q^n e^{-2i\theta} \right). \end{aligned}$$

参考文献

- [KLS] R. Koekoek, P. A. Leskyand and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues*, Springer Science & Business Media, (2010).
- [RSZ] J. P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, *Local Analytic Classification of q -difference Equations*, *Astérisque* **355**, (2013).
- [ST] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, *A generalization of Zwegers' μ -function according to the q -Hermite-Weber difference equation*, *SIGMA* **19** (2023), 014, 23 pages.
- [Za] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, *Topology* **40** (2001), no. 5, 945–960.
- [Zh] C. Zhang, *Une sommation discrete pour des equations aux q -différences lineaires et a coefficients analytiques: theorie generale et exemples*, *Differential equations and the Stokes phenomenon*, 309–329, World Sci. Publ., (2002).

Riemann 球面上の線型微分方程式の分類

大島 利雄 (東大・名誉教授)*

1. スペクトル型

Fuchs 型方程式 $\mathcal{M} : \frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{A_j}{x-a_j} u$ は, その局所構造が一般化 Riemann scheme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = a_1 & \cdots & x = a_p = \infty \\ [\lambda_{1,\nu}]_{m_{1,\nu}} \ (1 \leq \nu \leq n_1) & \cdots & [\lambda_{p,\nu}]_{m_{p,\nu}} \ (1 \leq \nu \leq n_p) \end{array} \right\}$$

で分かる. ここで, $A_j \in M(n, \mathbb{C})$, $A_p = -(A_1 + \cdots + A_{p-1})$ である.

なお, ordered すなわち $m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j}$ とすると

$$\text{rank}(A_j - \lambda_{j,1}) \cdots (A_j - \lambda_{j,k}) = n - m_{j,1} - \cdots - m_{j,k} \quad (k = 1, \dots, n_j)$$

定義. 正整数 n の分割の p 個の組

$$\mathbf{m} : n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 1, \dots, p)$$

を $\mathcal{M}$ のスペクトル型といい, $\mathbf{m} = m_{1,1} \cdots m_{1,n_1}, m_{2,1} \cdots m_{2,n_2}, \dots, m_{p,1} \cdots m_{p,n_p}$ と記述する.

たとえば, 一般化超幾何関数 ${}_3F_2(x)$ の満たす微分方程式のスペクトル型は 111, 21, 111

2. 星型 Kac-Moody ルート系

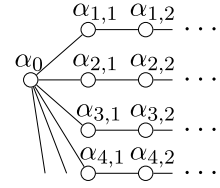
$$(\alpha|\alpha) = 2 \quad (\alpha \in \Pi := \{\alpha_0, \alpha_{j,\nu} \mid j \geq 1, \nu \geq 1\})$$

$$(\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) = -\delta_{\nu,1}$$

$$(\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) = \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ or } |\mu - \nu| > 1) \\ -1 & (i = j \text{ and } |\mu - \nu| = 1) \end{cases}$$

$$s_\alpha : x \mapsto x - (x|\alpha)\alpha \quad (\alpha \in \Pi), \quad W := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$$

$$\alpha_{\mathbf{m}} := n\alpha_0 + \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{\nu > i} m_{j,\nu} \right) \alpha_{j,i} \quad (\text{ord } \mathbf{m} := n)$$



定理 [Crawley-Boevey]. $\mathbf{m}$: 既約実現可能 $\Leftrightarrow \alpha_{\mathbf{m}}$: 正ルート ($\mathbf{m}$: 分割不能 $\Leftarrow$ affine)

定理 [Katz]. $\dim \{(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_p) \mid \tilde{A}_j \sim A_j, \sum_j \tilde{A}_j = 0\} / GL(n, \mathbb{C}) = 2 - \text{idx } \mathbf{m}$

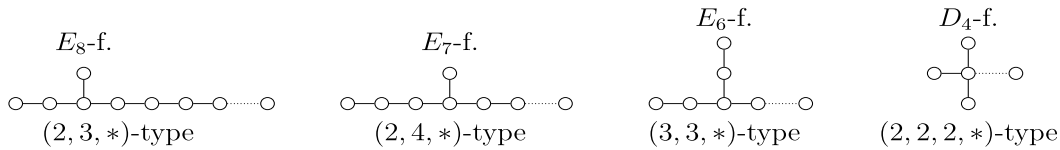
$$\text{idx } \mathbf{m} := (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) : \text{rigid 指数} \quad (\text{idx } \mathbf{m} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{m} : \text{rigid})$$

定義. $\mathcal{L} := \{\mathbf{m} : \text{既約実現可能で non-rigid な分割の組}\}$

$$\mathcal{L} \ni \mathbf{m} : \text{fundamental} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha) \leq 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi) \quad (\Rightarrow \alpha_{\mathbf{m}} : \text{正の虚ルート})$$

$$\mathcal{L} \ni \mathbf{m} : (k_1, k_2, *)\text{-type} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} p = 3 \text{ かつ } (n_1, n_2) = (k_1, k_2)$$

$$\mathcal{F} := \{\mathbf{m} \mid \mathbf{m} : \text{fundamental}\}, \quad \mathcal{F}^T := \{\mathbf{m} \in \mathcal{F} \mid \mathbf{m} : T\text{-fundamental}\} \quad T : E_8, E_7, \dots$$



定理 [O]. $\mathcal{F}_\ell := \{\mathbf{m} \in \mathcal{F} \mid \text{idx } \mathbf{m} = -\ell\} \Rightarrow |\mathcal{F}_\ell| < \infty \quad (\ell = 0, 2, 4, \dots)$

* e-mail: oshima@ms.u-tokyo.ac.jp

3. 方程式の変換

不分岐不確定特異点を許す方程式のスペクトル型は「 n の分割の組 + 細分構造」で表す

定理 [Hi]. 分割の組 + 細分構造：既約実現可能 $\Leftrightarrow$ 開折（分割の組）が既約実現可能

変換：middle convolution, addition, 合流/開折, Harnad dual, Möbius 変換を考える

対応するスペクトル型の変換 (idx は不変)：

$$\begin{aligned} \text{mc}_\sigma \mathbf{m} &:= \left\{ m_{j,\nu} - d_\sigma(\mathbf{m}) \delta_{\sigma_j, \nu} \right\}_{\substack{j=1,\dots,p \\ \nu=1,\dots,n_j}} \quad (d_\sigma(\mathbf{m}) := \sum_j m_{j,\sigma_j} - (p-2) \text{ord } \mathbf{m}) \\ \mathbf{m} &= m'_{1,1} \cdots m'_{n_1, R_{n_1}}, m_{2,1} \cdots m_{2, n_2}, m_{3,1} \cdots m_{3, n_3}, \dots, m_{p,1} \cdots m_{p, n_p} \\ &\xleftrightarrow[\text{開折}]{\text{合流}} \overbrace{(m'_{1,1} \cdots m'_{1, R_1})}^{m_{2,1}} \cdots \overbrace{(m'_{n_1,1} \cdots m'_{n_1, R_{n_1}})}^{m_{2, n_2}}, m_{3,1} \cdots m_{3, n_3}, \dots, \dots, m_{p,1} \cdots m_{p, n_p} \\ &= m'_{1,1} \cdots m'_{1, R_1} m'_{2,1} \cdots m'_{n_1, R_{n_1}} | m_{2,1} \cdots m_{2, n_2}, \underline{m_{3,1}} m_{3,2} \cdots m_{3, n_3}, \dots, \underline{m_{p,1}} m_{p,2} \cdots m_{p, n_p} \\ &\xleftrightarrow{\text{Hd}} (m_{3,2} \cdots m_{3, n_3}) \cdots (m_{p,2} \cdots m_{p, n_p}), \underline{m'_{1,0}} m'_{1,1} \cdots m'_{1, R_1}, \dots, \underline{m'_{n_1,0}} m'_{n_1,1} \cdots m'_{n_1, R_{n_1}} \end{aligned}$$

idx=0, 4 fundamental スペクトル型

6: 33, 222, 111111 $E_8^{(1)}$	4: 22, 1111, 1111 $E_7^{(1)}$	3: 111, 111, 111 $E_6^{(1)}$	2: 11, 11, 11, 11 $D_4^{(1)}$
--------------------------------	-------------------------------	------------------------------	-------------------------------

$$\begin{array}{ccccccc} 33, 222, 111111 & \xrightarrow{(1^3)(1^3)} & 22, 1111, 1111 & \xrightarrow{(1^2)(1^2)} & 111, 111, 111 & \xrightarrow{(1)(1)(1)} & 11, 11, 11, 11 \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ (1^3)(1^3), 2^3 & \xrightarrow{(1^2)(1^2)(1^2), 3^2} & (1^2)(1^2), 1^4 & \xrightarrow{(1)(1)(1)(1), 2^2} & (1)(1)(1), 1^3 & \xrightarrow{(1)(1), 11, 11} & ((1)(1)), 11 \\ & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow \\ & & ((1)(1))((1)(1)) & & ((1))((1))((1)) & & (1)(1), (1)(1) ((1))((1)), 11 \\ & & & & & & \searrow \quad \swarrow \\ & & & & & & (((1)))(((1))) \end{array}$$

$$33, 222, 111111 \xrightarrow{\text{合流}} 111111 | 33, 222 = (111)(111), 222 \xrightarrow{\text{Hd}} (22), \underline{1111}, \underline{1111} \xrightarrow{\text{開折}} 22, 1111, 1111$$

定義. $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{L}$ に対し, $\mathbf{m} \sim \mathbf{m}' \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 上の変換の組み合わせで $\mathbf{m}$ と $\mathbf{m}'$ は移り合う

問題. $\mathbb{P}^1$ 上の線型微分方程式（ただし不確定特異点是不分岐とする）の全体を, これらの変換で移り合うものに分類せよ. すなわち $\mathcal{L}/\sim$ を決定せよ (cf. $\mathcal{L}/\sim \simeq \mathcal{F}$, [Ka]).

idx=-2, 13 fundamental スペクトル型 $\Rightarrow$ 2 classes

8: 44, 332, 11111111 $[11]_5^T$	6: 33, 2211, 111111	5: 32, 11111, 11111	5: 221, 221, 11111
4: 211, 1111, 1111	4: 31, 22, 22, 1111 Sa	3: 21, 21, 111, 111 FS	2: 11, 11, 11, 11, 11 $[11]_5$
12: 66, 444, 2222211 $E_8^{(2)}$	10: 55, 3331, 22222	8: 44, 2222, 22211 $E_7^{(2)}$	6: 222, 222, 2211 $E_6^{(2)}$
4: 22, 22, 22, 211 $D_4^{(2)}$			

4. 結果

定理 i) $\mathcal{L} = \bigsqcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}} \{\mathbf{m} \in \mathcal{L} \mid \mathbf{m} \sim \mathbf{n}\}$ (すなわち $\mathcal{L}/\sim \simeq \mathcal{F}/\sim \simeq \mathcal{F}^{E_8}$)

ii) $\mathbf{m} \in \mathcal{F}, \mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}, \mathbf{m} \sim \mathbf{n}, \mathbf{m} \neq \mathbf{n} \Rightarrow \text{ord } \mathbf{m} < \text{ord } \mathbf{n}.$

iii) $\mathbf{m} \in \mathcal{F}^T$ ($T = D_4, E_6, E_7$) に対し, $\mathbf{m} \sim \mathbf{n}$ となる $\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ の具体型が分かる.

たとえば, $\mathbf{n} = \bar{m}_{11}\bar{m}_{12}, \bar{m}_{21}\bar{m}_{22}\bar{m}_{23}, \bar{m}_{31} \cdots \bar{m}_{3n_3} \in \mathcal{F}^{E_8}$ に対し, $\mathbf{n} \sim \exists \mathbf{m} \in \mathcal{F}^{D_4}$

$\Leftrightarrow \bar{m}_{11} = \bar{m}_{12}, \bar{m}_{21} = \bar{m}_{22}, \bar{m}_{23} = 2\bar{m}_{31} = 2\bar{m}_{32}$ (このとき $\mathbf{m}$ は一意に定まる)

参考文献

[Hi] K. Hiroe, arXiv.2407.20486.

[O] T. Oshima, MSJ Memoirs **28**, Mathematical Society of Japan, 2012.

[Ka] H. Kawakami, Experimental Mathematics **34** (2025), 563–577.

籠の合流に由来する 4 次元 q -ガルニエ系の退化

松ヶ下 和也 (近畿大学 総合理工学研究科)*¹

鈴木 貴雄 (近畿大学 理工学部)*²

土見 怜史 (近畿大学 総合理工学研究科)*³

概 要

q -ガルニエ系はまず坂井によって提唱され, 続いて長尾・山田によって離散時間発展の方向を増やすように拡張された. その後, これらの時間発展がアフィン・ワイル群の増田・大久保・津田による双有理表現に由来することが, 大久保と講演者によって明らかにされた. 本講演では, 4 次元 q -ガルニエ系の退化の幾つかを, その由来となる籠の頂点の合流を用いて定式化する.

1. 4 次元 q -ガルニエ系

図 1 の籠 Q_{12} において, y_i を頂点 i に対応する係数, μ_i を頂点 i における変異, (i, j) を頂点 i, j の互換, ι を全ての矢の反転とする. 定義の詳細については [3] を参照のこと. これらの変換を用いて, [2] に従って, 単純鏡映とディンキン図形の自己同型を

$$\begin{aligned} r_i &= \mu_{2i+1}(2i+1, 2i+2)\mu_{2i+1} \quad (i = 0, \dots, 5), \\ s_0 &= \mu_1\mu_4\mu_5\mu_8\mu_9(9, 12)\mu_9\mu_8\mu_5\mu_4\mu_1, \quad s_1 = \mu_2\mu_3\mu_6\mu_7\mu_{10}(10, 11)\mu_{10}\mu_7\mu_6\mu_3\mu_2, \\ s'_0 &= \mu_1\mu_3\mu_5\mu_7\mu_9(9, 11)\mu_9\mu_7\mu_5\mu_3\mu_1, \quad s'_1 = \mu_2\mu_4\mu_6\mu_8\mu_{10}(10, 12)\mu_{10}\mu_8\mu_6\mu_4\mu_2, \\ \pi_1 &= (2, 4, 6, 8, 10, 12)(1, 3, 5, 7, 9, 11), \quad \pi_2 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12), \\ \pi_3 &= \iota(1, 12)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7) \end{aligned}$$

と定める.

事実 1 ([2]). 群 $\langle r_0, \dots, r_5 \rangle$, $\langle s_0, s_1 \rangle$, $\langle s'_0, s'_1 \rangle$ はそれぞれ $A_5^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_1^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群と同型である. 更に, どの 2 つの群も互いに可換である.

更に, 平行移動を

$$\begin{aligned} T_i &= r_i r_{i+1} r_{i+2} r_{i+3} r_{i+4} r_{i+5} r_{i+4} r_{i+3} r_{i+2} r_{i+1} \quad (i = 0, \dots, 5), \\ U_0 &= s_0 s_1, \quad U_1 = s_1 s_0, \quad U'_0 = s'_0 s'_1, \quad U'_1 = s'_1 s'_0, \quad V = \pi_1 r_5 \dots r_1 s_1, \quad V' = \pi_2 \pi_1 r_5 \dots r_1 s'_1, \end{aligned}$$

ただし, $r_{i+6} = r_i$ と定める. 平行移動は拡大アフィン・ワイル群の極大可換部分群を生成し, その双有理表現は非線形 q -差分方程式系の族を与える. 本講演では, この族を 4 次元 q -ガルニエ系と呼ぶ.

2. 籠の合流と q -ガルニエ系の退化

2 次元の q -パンルヴェ方程式の退化が籠の頂点の合流に由来することは, [1] において初めて指摘され, その後 [4] において具体的な計算が与えられた. これらの先行研究に従って, 2 つの頂点 i, j の合流 $i \rightarrow j$ を次のように定める.

1. i と j の間の辺を全て消去する.
2. 更に, i と j を重ねて新たな 1 つの頂点 j とする.

本研究は科研費 (課題番号:25KJ0371) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 39A13, 13F60, 17B80, 34M56

*¹ 〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学総合理工学研究科

e-mail: 2444310104w@kindai.ac.jp

*² 〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

*³ 〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学総合理工学研究科

e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

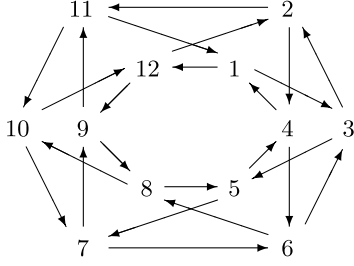


図 1: 簾 Q_{12}

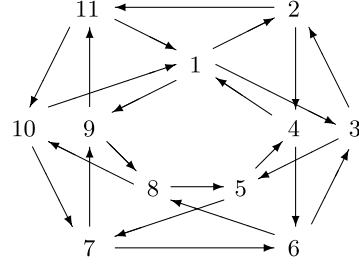


図 2: 簾 Q_{11}

合流 $i \rightarrow j$ は、係数に対しては次のような操作と定める.

1. $y_i \rightarrow \varepsilon^{-1}y_j, y_j \rightarrow \varepsilon$ と置き換える.
2. 更に、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を取る.

簾 Q_{12} において合流 $12 \rightarrow 1$ を行くと、図 2 の簾 Q_{11} が得られる. なお、簾 Q_{12} における合流は簾の形の対称性から $12 \rightarrow 1$ と $12 \rightarrow 2$ の実質 2 つだけしかなく、後者も変異によって Q_{11} に帰着する. 簾 Q_{11} において、[2] に従って、単純鏡映とディンキン図形の自己同型を

$$\begin{aligned} r_0 &= \mu_1\mu_2(2, 11)\mu_2\mu_1, & r_i &= \mu_{2i+1}(2i+1, 2i+2)\mu_{2i+1} \quad (i=1, \dots, 4), \\ s_0 &= \mu_1\mu_4\mu_5\mu_8(8, 9)\mu_8\mu_5\mu_4\mu_1, & s_1 &= \mu_2\mu_3\mu_6\mu_7\mu_{10}(10, 11)\mu_{10}\mu_7\mu_6\mu_3\mu_2, \\ \pi_1 &= (1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10)\mu_2, & \pi_2 &= \iota(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7) \end{aligned}$$

と定める.

事実 2 ([2]). 群 $\langle r_0, \dots, r_4 \rangle, \langle s_0, s_1 \rangle$ はそれぞれ $A_4^{(1)}, A_1^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群と同型である. 更に、これらの群は互いに可換である.

更に、平行移動を

$$\begin{aligned} T_i &= r_i r_{i+1} r_{i+2} r_{i+3} r_{i+4} r_{i+3} r_{i+2} r_{i+1} \quad (i=0, \dots, 4), \\ U_0 &= s_0 s_1, \quad U_1 = s_1 s_0, \quad V = \pi_1 r_4 r_3 r_2 r_1 s_1, \quad V' = \pi_1^5 s_1, \end{aligned}$$

ただし、 $r_{i+5} = r_i$ と定める.

定理 3 ([3]). 簾 Q_{12} における合流 $12 \rightarrow 1$ によって、単純鏡映とディンキン図形の自己同型は次の表のように退化する.

Q_{12}	$r_0 r_5 r_0$	r_1	r_2	r_3	r_4	s_0	s_1	$\pi_2 s'_0$	π_3
Q_{11}	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	s_0	s_1	π_1^5	π_2

また、平行移動は次の表のように退化する.

Q_{12}	$T_5 T_0$	T_1	T_2	T_3	T_4	U_0	U_1	V	$(V')^{-1}V$
Q_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	U_0	U_1	V	V'

本講演では更に、簾 Q_{11} における合流を考える. これにより、10 個の頂点を持つ簾が全部で 5 つ得られる. また時間が許せば、 q -超幾何級数による特殊解の退化についても言及する.

参考文献

- [1] M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization*, J. High Energ. Phys. (2018) 077.
- [2] T. Masuda, N. Okubo and T. Tsuda, *Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras*, arXiv:2303.06704; RIMS Kôkyûroku **2127** (2018) 20–38 (in Japanese).
- [3] K. Matsugashita, T. Suzuki and S. Tsuchimi, *A degeneration of the q -Garnier system of fourth order arises from confluences in quivers*, arXiv:2604.04463.
- [4] T. Suzuki and N. Okubo, *Cluster algebra and q -Painlevé equations: higher order generalization and degeneration structure*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B78** (2020) 53–75.

離散パンルヴェ方程式の退化図式の多変数化

長尾秀人（岐阜聖徳学園大学）^{*1}

楕円差分パンルヴェ方程式の多変数版として、楕円差分ガルニエ系と呼ばれる系が知られている [1, 2]。また、アフィンワイル群対称性 $E_7^{(1)}$ 型 q -差分パンルヴェ方程式の多変数版も知られている [3]。しかし、これらの楕円差分ガルニエ系と、坂井の退化図式に現れる q -差分系の多変数版との関係は十分には明らかでない。

一方、坂井の分類において、離散パンルヴェ方程式はアフィンワイル群対称性の型により分類され、楕円差分を最上位とする退化図式をもつ。特に、楕円差分パンルヴェ方程式からアフィンワイル群対称性 $E_8^{(1)}$ 型 q -差分パンルヴェ方程式、さらに $E_7^{(1)}$ 型 q -差分パンルヴェ方程式への退化

$$e-E_8^{(1)} \longrightarrow q-E_8^{(1)} \longrightarrow q-E_7^{(1)}$$

はよく知られている。

本講演では、坂井の退化図式の多変数化という観点から、楕円差分ガルニエ系 [1] の退化を考察する。ここでいう多変数化とは、離散系においてシフト可能なパラメータが増えることに対応するものであり、微分方程式における Garnier 系と同様に、独立変数の増加と従属変数の増加が対応するものとみなす。従って、得られる系は従属変数 $2n$ 個をもつ高次元の離散ガルニエ型の系として記述される。

具体的には、楕円差分ガルニエ系を $M_n(P(e-E_8))$ と表し、その退化として得られる q -差分の系を $M_n(P(q-E_8))$ および $M_n(P(q-E_7))$ と書くことにより、

$$M_n(P(e-E_8)) \longrightarrow M_n(P(q-E_8)) \longrightarrow M_n(P(q-E_7)), \quad \dim M_n = 2n,$$

という図式を考える。特に $n = 1$ の場合には、通常の 2 次元の離散パンルヴェ方程式

$$e-E_8^{(1)} \longrightarrow q-E_8^{(1)} \longrightarrow q-E_7^{(1)}$$

に対応する。

また、離散パンルヴェ方程式は双有理変換として記述される。本講演では、 $e-E_8^{(1)}$ 型、 $q-E_8^{(1)}$ 型、 $q-E_7^{(1)}$ 型の多変数版として現れる離散ガルニエ型の系を、双有理変換として記述できるかを考察する。特に、楕円差分ガルニエ系から $p \rightarrow 0$ 極限によって得られる

^{*1}〒501-6122 岐阜県岐阜市柳津町高桑西 1 丁目 1 番地 岐阜聖徳学園大学教育学部

e-mail: hnagao@gifu.shotoku.ac.jp

本研究は科研費（課題番号：JP23K03173）の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 33E17, 34M55, 39A13.

キーワード: elliptic Garnier system; discrete Painlevé equation; q -Garnier system; birational transformation; degeneration.

q - $E_8^{(1)}$ 型の多変数系, およびその退化として得られる q - $E_7^{(1)}$ 型の多変数系の間関係を調べ, 離散パンルヴェ方程式の退化図式と高次元の離散ガルニエ型の系との対応関係を整理する。

参考文献

- [1] Yamada Y., *An Elliptic Garnier System from Interpolation*, SIGMA **13** (2017), 069, 8 pages.
- [2] Ormerod C.M. and Rains E.M., *An elliptic Garnier system*, 2017.
- [3] Nagao H. and Yamada Y., *Padé method for Painlevé equations*, Math. Phys. Anal. Geom. **24** (2021), Article 18.
- [4] Sakai H., *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220** (2001), 165–229.

Middle Laplace transform の q 類似と $A_4^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式

安達 駿弥 (宇都宮大学)*1

信川 喬彦 (皇學館大学)*2

本講演の第一著者によって, Laplace 変換 $y(x) \mapsto \int y(t)e^{-xt} dt$ に付随する線形常微分方程式の変換として middle Laplace transform $\mathcal{ML}$ が導入された [1]. これは middle convolution [3] の Laplace 変換版で, 次の形の方程式全体の集合に閉じて作用する:

$$\frac{du}{dx} = \left(A_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} \right) u \quad (A_\infty, A_i : n \times n \text{ 定数行列})$$

また Fuchs 型方程式に対する middle convolution mc_λ は $\mathcal{ML}$ を用いて表せる:

$$mc_\lambda = \mathcal{ML}^{-1} \circ add_{-\lambda} \circ \mathcal{ML}.$$

ここで $add_{-\lambda}$ は未知関数に対する gauge 変換 $u \mapsto x^{-\lambda}u$ に付随する方程式の変換である.

本稿の目的は, $\mathcal{ML}$ の q 差分類似を構成することである. 以降, $q \in \mathbb{C}$ を $0 < |q| < 1$ ととり固定する. q 差分商 $D_x : f(x) \mapsto \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx}$ を用いた次の形の方程式を考える:

$$D_x u = \left(A_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} \right) u \quad (A_\infty, A_i : n \times n \text{ 定数行列})$$

ただし, A_∞ は対角行列とする. この方程式に対して $U(x) := \left(\frac{u(x)}{x - t_1}, \frac{u(x)}{x - t_2}, \dots, \frac{u(x)}{x - t_m} \right)^T$ とおけば q -Okubo 型と呼ばれる次の多項式係数の方程式が得られる:

$$(qx - S)D_x U = (A - I + A_\infty^{\oplus m}(x - S))U$$

ここで I は単位行列, $A, S, A_\infty^{\oplus m}$ は A_i, t_i, A_∞ を並べてできる $nm \times nm$ 行列 (S は対角行列) である. 積分路 C をうまく取れば, $U(x)$ の Laplace 型 Jackson 積分変換

$$V(x) = \int_C U(s)(q(1 - q)xs)_\infty d_q s \quad ((z)_\infty = (1 - z)(1 - qz)(1 - q^2z) \cdots)$$

が満たす方程式を $D_x \mapsto x, x \mapsto -q^{-1}T_x^{-1}D_x = -q^{-1}D_x^-$ により求めることができる:

$$D_x^- V = q \left(-S + \sum_{j=1}^l \frac{B_j}{x - \tau_j} \right) V.$$

*1 〒321-8505 栃木県宇都宮市峰町 350 宇都宮大学 共同教育学部

e-mail: sadachi@a.utsunomiya-u.ac.jp

*2 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704 皇學館大学 教育学部

e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 39A13, 34M55

キーワード: q 差分方程式, q -Laplace 変換, q -middle convolution

ここで B_j は A_i から定まる行列, τ_j は A_∞ の相異なる固有値 ($1 \leq j \leq l$) である. $\mathbb{C}^{mn}$ の部分空間 $\mathcal{K} = \text{Ker} A_1 \oplus \text{Ker} A_2 \oplus \cdots \oplus \text{Ker} A_m$ は S と各 B_j の作用で不変である. 商空間 $\mathbb{C}^{mn}/\mathcal{K}$ への S, B_j の作用を $\bar{S}, \bar{B}_j$ としたとき, q 差分方程式の変換

$$D_x u = \left(A_\infty + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} \right) u \mapsto D_x^- v = q \left(-\bar{S} + \sum_{j=1}^l \frac{\bar{B}_j}{x - \tau_j} \right) v$$

を q -middle Laplace transform と呼び, $\mathcal{ML}_q$ と書く. $\mathcal{ML}_q$ については,

- 逆変換 $\mathcal{ML}_q^-$ の構成
- 既約性の保存
- q -middle convolution [2, 5] の $\mathcal{ML}_q$ を用いた分解

などがわかっている.

$\mathcal{ML}_q$ を $A_4^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式の Lax 方程式 [4] へ適用してみよう. $A_4^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式は次の 2 階の線形 q 差分方程式の適当な変形で得られる:

$$u(qx) = A(x)u(x), \quad A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2, \\ A_0 \sim \begin{pmatrix} \theta_1 t & 0 \\ 0 & \theta_2 t \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A(x) = \kappa_1 \kappa_2 (x - a_1 t)(x - a_2 t)(x - a_3).$$

$\tilde{u}(x) = x^\rho (x/a_1)_\infty u(x)$ ($q^\rho = \theta_1^{-1}$) とし, $\tilde{u}$ の満たす方程式に $\mathcal{ML}_q$ を施して整理すれば, 次の方程式を得る:

$$v(qx) = \bar{A}(x)v(x), \quad A(x) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1x + \bar{A}_2x^2, \\ \bar{A}_0 \sim \begin{pmatrix} a_2 a_3 \kappa_1 t & 0 \\ 0 & \theta_2 t \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \theta_1/(a_2 a_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \bar{A}(x) = \kappa_1 \kappa_2 \left(x + \frac{\theta_2}{\kappa_2} t \right) (x - a_2 t)(x - a_3).$$

つまり, $\mathcal{ML}_q$ により Lax 方程式に対する次の変換を与えたことになる:

$$a_1 \mapsto -\frac{\theta_2}{\kappa_2}, \quad \kappa_1 \mapsto \frac{\theta_1}{a_2 a_3}, \quad \kappa_2 \mapsto -\frac{\theta_2}{a_1}, \quad \theta_1 \mapsto a_2 a_3 \kappa_1.$$

参考文献

- [1] S. Adachi, Middle Laplace transform and middle convolution for linear Pfaffian systems with irregular singularities, *J. Math. Soc. Japan* (to appear). [arXiv:2502.01263](#)
- [2] Y. Arai and K. Takemura, Reformulation of q -middle convolution and applications, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **22** (2026), Paper 040, 43 pp.
- [3] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [4] M. Murata, Lax forms of the q -Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 115201.
- [5] H. Sakai and M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Not.* **2017** (2017), 1975–2013.

Three-term relations and some specializations of the μ function

渋川 元樹 (北見工業大学・工)*

概 要

(一般化) μ 関数 [ST] の Al-Salam-Ismail 多項式 [AI] を用いた三項関係式の明示公式を導出する. その応用として特殊化の明示公式を与える.

q を $|q| < 1$ なる複素数とし, q 階乗積とテータ関数を

$$(x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j), \quad (x)_n = (x; q)_n := \frac{(x; q)_\infty}{(q^n x; q)_\infty},$$

$$\theta(x) = \theta(x; q) := (x; q)_\infty (q/x; q)_\infty,$$

で定める.

定義 1. x, y, a を $xa^{-1}, y \in \mathbb{C} \setminus q^{\mathbb{Z}}$ となる複素数とすると, (一般化) μ 関数を以下のように定める [ST] :

$$\mu(x, y; a) := -iq^{-\frac{1}{8}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(x)_\infty}{(q, x/a)_\infty \theta(y)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{(x/a)_n}{(x)_n} y^n.$$

更に対称化された μ 関数を

$$M(x, y; a) := iq^{\frac{1}{8}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta(x/a)}{\theta(x)} \mu(x, y; a) = \frac{(qa/x)_\infty}{(q, q/x)_\infty \theta(y)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{(x/a)_n}{(x)_n} y^n$$

とおく.

命題 2. (1) 差分方程式: $T_{q,x}$ を x 変数の q シフト作用素とすると,

$$\left[T_{q,x}^2 - \left(1 - q\frac{x}{y}\right) aT_{q,x} - aq\frac{x}{y} \right] M(x, y; a) = 0,$$

$$[T_{q,x}^{-1} - 1] M(x, y; a) = (a - 1) \frac{q}{x} M(x, y; qa).$$

(2) 対称性:

$$M(x, y; a) = M(y, x; a),$$

$$M(q^{\pm 1}x, q^{\pm 1}y; a) = M(x, y; a)a^{\pm 1}.$$

(3) 特殊化:

$$M(x, -x; a) = \frac{(aq; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty} \frac{\theta(x^2/a; q^2)}{\theta(x^2; q^2)},$$

$$M(x, q^{\frac{1}{2}}x; a) = \frac{(q^{\frac{1}{2}}; q)_\infty}{2\theta(q^{\frac{1}{2}}x)\theta(x)} \{ (a^{\frac{1}{2}}; q^{\frac{1}{2}})_\infty \theta(x/a^{\frac{1}{2}}) \theta(q^{\frac{1}{2}}x/a^{\frac{1}{2}}) + (-a^{\frac{1}{2}}; q^{\frac{1}{2}})_\infty \theta(-x/a^{\frac{1}{2}}) \theta(-q^{\frac{1}{2}}x/a^{\frac{1}{2}}) \}.$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 26K06837) の助成を受けたものである.

キーワード: q -hypergeometric series, μ function, Al-Salam-Ismail polynomials, difference equations

* 〒090-0015 北海道北見市公園町165 北見工業大学工学部

e-mail: g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

数列 $\{S_n(\alpha, \beta, \gamma; q)\}_n$ と $\{T_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma; q)\}_n$ を漸化式

$$V_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma; q) = \gamma(1 + \alpha q^n)V_n(\alpha, \beta, \gamma; q) - \beta q^{n-1}V_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma; q)$$

を満たし、それぞれ初期値が

$$\begin{aligned} S_0(\alpha, \beta, \gamma; q) &= 0, & S_1(\alpha, \beta, \gamma; q) &= 1, \\ T_{-1}(\alpha, \beta, \gamma; q) &= 1, & T_0(\alpha, \beta, \gamma; q) &= 0 \end{aligned}$$

によって定めるとする.

命題 3. n を非負整数とするととき,

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma; q) = U_{n-1}(q\alpha, q\beta, \gamma; q), \quad T_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma; q) = -\beta U_{n-2}(q^2\alpha, q^2\beta, \gamma; q).$$

ただし, $U_n(\alpha, \beta, \gamma; q)$ は Al-Salam-Ismail 多項式 [AI]:

$$\begin{aligned} U_n(\alpha, \beta, \gamma; q) &:= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-\alpha)_{n-k}(q)_{n-k}(-\beta)^k}{(-\alpha)_k(q)_k(q)_{n-2k}} q^{k(k-1)} \gamma^{n-2k}, \\ U_{-1}(\alpha, \beta, \gamma; q) &:= 0, \quad U_{-2}(\alpha, \beta, \gamma; q) := -\frac{q}{\beta}. \end{aligned}$$

定理 4 (三項間関係式). 任意の非負整数 n について,

$$\begin{aligned} M(q^{n-1}x, y; a) &= M(y, q^{n-1}x; a) = M(x, q^{1-n}y; a)a^{n-1} = M(q^{1-n}y, x; a)a^{n-1} \\ &= t_{n-1}(x, y; a)M(q^{-1}x, y; a) + s_n(x, y; a)M(x, y; a) \\ &= \{t_{n-1}(x, y; a) + s_n(x, y; a)\}M(x, y; a) \\ &\quad + (a-1)\frac{q}{x}t_{n-1}(x, y; a)M(x, y; qa). \end{aligned}$$

ただし,

$$s_n(x, y; a) := S_n\left(-\frac{x}{y}, -\frac{aqx}{y}, a; q\right), \quad t_{n-1}(x, y; a) := T_{n-1}\left(-\frac{x}{y}, -\frac{aqx}{y}, a; q\right).$$

系 5.

$$\begin{aligned} M(q^{n-1}x, -x; a) &= M(-x, q^{n-1}x; a) = M(x, -q^{1-n}x; a)a^{n-1} = M(-q^{1-n}x, x; a)a^{n-1} \\ &= \{T_{n-1}(1, aq, a; q) + S_n(1, aq, a; q)\} \frac{(aq; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty} \frac{\theta(x^2/a; q^2)}{\theta(x^2; q^2)} \\ &\quad + (a-1)\frac{q}{x}T_{n-1}(1, aq, a; q) \frac{(aq^2; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty} \frac{\theta(x^2/aq; q^2)}{\theta(x^2; q^2)}. \end{aligned}$$

$M(q^{n-1}x, q^{\frac{1}{2}}x; a)$ についても同様の公式が導出できる.

参考文献

- [AI] W. A. Al-Salam and M. E. H. Ismail, *Orthogonal polynomials associated with the Rogers-Ramanujan continued fraction*, Pacific J. Math. **104**(2) (1983), 269–283.
- [ST] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, *A generalization of Zwegers' μ -function according to the q -Hermite-Weber difference equation*, SIGMA, **19** (2023) 014 pp23.

Algebras and Bispectrality

a spiral from exactly solvable models to special functions

Luc Vinet (Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal)*

Abstract

The exact solvability of many models is governed by symmetries, which are frequently not manifest. These symmetries are encoded in algebraic structures whose representations yield the special functions in terms of which the solutions are expressed. This talk approaches this circle of ideas through the notion of *bispectrality*: a family of functions satisfying an eigenvalue equation in each of two dual variables. I shall outline the algebraic theory of bispectrality, describe the associated algebras—Racah, Askey–Wilson, Bannai–Ito, together with their higher-rank and rational extensions—explain how their representations produce the classical and q -orthogonal polynomials as overlaps of eigenbases, and discuss applications ranging from association schemes and superintegrable models to the entanglement of free fermions. The lecture closes at the current frontier, where orthogonal polynomials give way to rational functions.

1 Bispectrality

Certain families of special functions share a common structural feature: their member functions $\psi_n(x)$, depending on the two (possibly discrete) variables n and x , satisfy an eigenvalue equation in each of them. Namely, one has

$$A \psi_n(x) = \Lambda(n) \psi_n(x),$$

and,

$$A^* \psi_n(x) = \theta(x) \psi_n(x).$$

This property is called *bispectrality*. Its significance depends on the class of operators considered: requiring A and A^* to be of bounded order—for instance, A and A^* second-order differential or difference operators—makes bispectrality a strong constraint, whose solutions can be classified (Duistermaat–Grünbaum). For such pairs the two operators generally do not commute, yet they close into a finite quadratic algebra whose representation theory largely characterizes $\psi_n(x)$. The aim of this lecture is to describe the algebraic underpinning of bispectrality. A convenient finite-dimensional formulation is due to Terwilliger. An ordered pair (A, A^*) of operators on a finite-dimensional space V is a *Leonard pair* if there is a basis in which A is diagonal and A^* is irreducible tridiagonal, *and* a basis in which A^* is diagonal and A is irreducible tridiagonal (all sub- and super-diagonal entries nonzero). Each operator is thus tridiagonal in an eigenbasis of the other, and the overlaps between the two bases are bispectral functions. Two operators that are simultaneously diagonal in a single basis merely

*Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal (QC) H3C 3J7, Canada

e-mail: luc.vinet@umontreal.ca

2020 Mathematics Subject Classification: 33D45, 33C45, 16S99, 81R12, 05E30.

Keywords: bispectrality, Leonard pairs, Askey–Wilson algebra, Racah algebra, Bannai–Ito algebra, orthogonal polynomials, association schemes, algebraic Heun operator, rational functions.

commute, $[A, A^*] = 0$. It is striking that passing to the next order of complexity—the one stated in the Leonard-pair definition—forces A and A^* to generate a quadratic algebra. Writing the q -commutator,

$$[X, Y]_q := qXY - q^{-1}YX \quad ([X, Y]_q \xrightarrow{q \rightarrow 1} [X, Y]),$$

the pair is then found to obey the defining relations of the Askey–Wilson algebra that involve this q -commutator and that are given below. The lecture is arranged as a spiral: a single object—the quadratic algebra of a bispectral pair—returns at successively wider levels. It first yields the classical orthogonal polynomials; it then reappears as a symmetry algebra in combinatorics, in the representation theory of Lie (super)algebras, and in exactly solvable models of physics; and it is further carried to $q = -1$, to higher rank, and beyond polynomials to rational functions. These realizations are largely independent, so each can be followed on its own.

2 Overlaps and orthogonal polynomials

The functions attached to a bispectral pair arise as overlaps of its two eigenbases. Take a self-adjoint pair with orthonormal eigenbases $|\theta_k\rangle$ and $|\theta_m^*\rangle$, and set $\phi(k, m) = \langle \theta_k | \theta_m^* \rangle$. In the matrix element $\langle \theta_k | A^* | \theta_m^* \rangle$, letting A^* act to the right returns $\theta_m^* \phi(k, m)$, while letting it act to the left—where it is tridiagonal in the eigenbasis of A —yields a three-term recurrence in k ,

$$\theta_m^* \phi(k, m) = \beta_k \phi(k+1, m) + \alpha_k \phi(k, m) + \gamma_k \phi(k-1, m),$$

and the element $\langle \theta_k | A | \theta_m^* \rangle$ gives, in the same way, a recurrence in m . The overlap is therefore bispectral in the two discrete variables—exactly the structure of a classical orthogonal polynomial, here in a discrete variable. Indeed, let $\{P_n(x)\}$ be monic orthogonal polynomials, $\deg P_n = n$. Favard’s theorem provides the first eigenvalue problem, the three-term recurrence

$$x P_n(x) = P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + u_n P_{n-1}(x),$$

and “classical” means precisely that a second one holds, a difference or differential equation $D P_n(x) = \lambda_n P_n(x)$ acting on x . The classical polynomials are bispectral, and they sit at the confluence of the two dual recurrences above. At the top of the discrete ($q = 1$) Askey scheme stand the *Racah polynomials*, of degree n in the quadratic grid $\lambda(x) = x(x+\gamma+\delta+1)$,

$$R_n(\lambda(x)) = {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, & n+\alpha+\beta+1, & -x, & x+\gamma+\delta+1 \\ & \alpha+1, & \beta+\delta+1, & \gamma+1 \end{matrix} ; 1 \right).$$

They satisfy a recurrence in n (eigenvalue $\lambda(x)$) and a second-order difference equation in x (eigenvalue $n(n+\alpha+\beta+1)$). The Racah duality $x \leftrightarrow n$, $\alpha \leftrightarrow \gamma$, $\beta \leftrightarrow \delta$ interchanges them. Denoting the two bispectral operators K_1, K_2 and setting $K_3 = [K_1, K_2]$, they close into the *Racah algebra*

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= K_3, \\ [K_2, K_3] &= K_2^2 + \{K_1, K_2\} + d K_2 + e_1, \\ [K_3, K_1] &= K_1^2 + \{K_1, K_2\} + d K_1 + e_2, \end{aligned}$$

whose structure constants d, e_1, e_2 are explicit polynomials in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On the linear grid one contracts to the Hahn polynomials and an analogous Hahn algebra.

3 Leonard's theorem

These examples are not isolated: a classification theorem shows them to be essentially exhaustive. Leonard's theorem (1982; the association-scheme account is Bannai–Ito 1984, the linear-algebraic form Terwilliger 2001) states that a finite family of orthogonal polynomials whose dual is *again* orthogonal must be a special or limiting case of the $(q-)$ Racah/Askey–Wilson polynomials. In Leonard-pair language the two spectra are tightly constrained: there is a single scalar $\beta = q + q^{-1}$ with

$$\theta_{i-1} - \beta \theta_i + \theta_{i+1} = \gamma, \quad \theta_{i-1}^* - \beta \theta_i^* + \theta_{i+1}^* = \gamma^*,$$

so each spectrum lies on a q -quadratic grid $\theta_i = a + b q^i + c q^{-i}$, and the overlaps $\langle \theta_i | \theta_j^* \rangle$ are q -Racah polynomials. This gives a triple correspondence central to the theory,

Leonard pair $(A, A^*) \iff$ Askey–Wilson algebra $\iff (q-)$ Racah polynomials.

4 The Askey–Wilson algebra

Iterating the q -brackets of (A, A^*) with $K_1 = A$, $K_2 = A^*$, $K_3 = [K_1, K_2]_q$ closes the *Askey–Wilson algebra*

$$\begin{aligned} [K_1, K_2]_q &= K_3, \\ [K_2, K_3]_q &= K_2^2 + \{K_1, K_2\} + d K_2 + e_1, \\ [K_3, K_1]_q &= K_1^2 + \{K_1, K_2\} + d K_1 + e_2, \end{aligned}$$

the quadratic algebra of the Leonard pair and the q -deformation of the Racah algebra of Section 2. Its finite-dimensional representations reproduce, as overlaps, the full q -Racah tableau.

5 Association schemes

This section is an entry point for the combinatorialist. Recall only that a bispectral pair is a couple of operators, each tridiagonal in an eigenbasis of the other; such pairs are already present inside finite combinatorial objects. A symmetric *association scheme* on a finite set X is a family of $\{0, 1\}$ adjacency matrices $A_0, \dots, A_D$ with

$$A_0 = I, \quad \sum_{i=0}^D A_i = J, \quad A_i A_j = \sum_{k=0}^D p_{ij}^k A_k = A_j A_i,$$

spanning the commutative *Bose–Mesner algebra*—the matrices the scheme diagonalizes simultaneously—with primitive idempotents $E_0, \dots, E_D$ projecting onto the common eigenspaces. When both families are polynomial in a single generator (the scheme is P - and Q -polynomial), one has an adjacency matrix A and a dual adjacency matrix A^* ; adjoining them gives the noncommutative *Terwilliger algebra* $T = \langle A, A^* \rangle$, on each irreducible module of which (A, A^*) is a Leonard pair. The eigenvalue data of the scheme are then $(q-)$ Racah-type polynomials, so the combinatorics is governed by the algebra of Section 4. The Johnson scheme $J(n, k)$ — k -subsets of $\{1, \dots, n\}$, adjacent when they share $k - 1$ elements—is the canonical illustration. Its Terwilliger algebra is a central extension of the Hahn algebra [9]: writing a k -subset as a spin configuration, the dual adjacency $A_J^* = \sum_i \sigma_z^{(i)} = 2J^z$ (with $\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$ the Pauli matrix) and a Johnson edge is a weight-preserving double spin flip, so A_J is essentially the total $\mathfrak{su}(2)$ Casimir. The change between the coupled and uncoupled bases is the $\mathfrak{su}(2)$ Clebsch–Gordan transform, with dual Hahn coefficients, so that the combinatorial and representation-theoretic descriptions coincide.

6 Recoupling and superintegrability

The Racah algebra—the $q \rightarrow 1$ quadratic algebra of Sections 2 and 4—also governs the recoupling of three copies of $\mathfrak{su}(1, 1)$ in the quantum theory of angular momentum. With Casimirs $C^{(i)} = \lambda_i$ and intermediate Casimirs $C^{(ij)}$, the identity

$$C^{(123)} = C^{(12)} + C^{(23)} + C^{(31)} - C^{(1)} - C^{(2)} - C^{(3)}$$

leaves two independent intermediate Casimirs, and $K_1 = -\frac{1}{2}C^{(12)}$, $K_2 = -\frac{1}{2}C^{(23)}$ generate the Racah algebra. The recoupling $(6j)$ coefficients are the Racah polynomials [1]. The very same algebra is the symmetry algebra of the generic three-parameter superintegrable model on the two-sphere,

$$H = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{x_1^2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{x_2^2} + \frac{k_3^2 - \frac{1}{4}}{x_3^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Here $J_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k$ (with summation over j, k). Realizing the three $\mathfrak{su}(1, 1)$ by singular oscillators (radial motion in an inverse-square potential) gives $H = 4C^{(123)} + \frac{3}{4}$, and each constant of motion is an intermediate Casimir, $L_k = 4C^{(ij)} - a_i - a_j + 1$. Recoupling and superintegrability are thus governed by the same algebra.

7 The Bannai–Ito algebra and higher rank

Leonard’s classification has a second edge. Alongside the limit $q \rightarrow 1$ (Racah) sits $q \rightarrow -1$, where the polynomials become the *Bannai–Ito* family [2]. These are bispectral through a first-order Dunkl shift operator—a difference operator built from the reflection $Rf(x) = f(-x)$, in the manner of the Dunkl calculus of reflection groups—

$$L = F(x)(1 - R) + G(x)(T^+R - 1), \quad LP_n = \lambda_n P_n,$$

and L together with multiplication by x generates, through anticommutators, the *Bannai–Ito algebra*

$$\{K_1, K_2\} = K_3 + \omega_3, \quad \{K_2, K_3\} = K_1 + \omega_1, \quad \{K_3, K_1\} = K_2 + \omega_2,$$

whose natural home is the superalgebra $\mathfrak{osp}(1|2)$. It is the exact $q \rightarrow -1$ mirror of the Racah construction, with three $\mathfrak{osp}(1|2)$ replacing three $\mathfrak{su}(1, 1)$. A more recent and active direction couples n copies rather than three, producing the *higher-rank* Racah algebra $\text{Rac}(n)$ [3], generated by the intermediate Casimirs C_A over subsets $A \subseteq [n]$. A central quotient of $\text{Rac}(n)$ is precisely the centralizer of the diagonal $\mathfrak{su}(2)$ in $U(\mathfrak{su}(2))^{\otimes n}$ [4]. Its overlaps are the multivariate (Tratnik) Racah polynomials, and its combinatorial homes are the multivariate P -polynomial association schemes and the associated m -distance-regular graphs that we have recently introduced [5].

8 The algebraic Heun operator

Until now the two eigenbases of a bispectral pair have been related only through their overlaps; there is also a particular operator that couples them, and it turns out to arise in a range of concrete problems. Given any bispectral pair (X, Y) , the bilinear

$$W = \tau_1 XY + \tau_2 YX + \tau_3 X + \tau_4 Y + \tau_0 I$$

is, for a Leonard pair, the unique operator that is tridiagonal in *both* eigenbases (Nomura–Terwilliger). For the Jacobi pair, with $X = x$ and Y the hypergeometric

operator, W is the classical Heun operator—hence the name *algebraic Heun operator* [6]—and it is also characterized as the most general operator that raises every polynomial degree by one. Such an operator is associated to every bispectral algebra: Racah, Askey–Wilson, Bannai–Ito. This operator has concrete uses in areas far from special-function theory. It underlies the *time–band limiting* problem of Slepian, Landau and Pollak, a cornerstone of signal analysis: a local second-order operator commuting with the pair of limiting projections—which are difficult to diagonalize numerically—is obtained from the algebraic Heun operator of the underlying bispectral pair. The same mechanism enters into the determination of the entanglement entropy of free fermions [7], a question of great significance in quantum information. The ground-state correlation matrix

$$C_{mn} = \langle \Psi_0 | c_m^\dagger c_n | \Psi_0 \rangle,$$

restricted to a subsystem, is a full matrix with nearly degenerate eigenvalues; but when the single-particle wavefunctions obey a recurrence with Askey-scheme coefficients, the chopped C commutes with a tridiagonal algebraic Heun operator sharing its eigenbasis. On distance-regular graphs (e.g. the Hamming [8] and Johnson [9] schemes) the chopped C lives in the Terwilliger algebra $\mathcal{T}$, and the same tool, together with the representation theory of $\mathcal{T}$, allows the diagonalization of the entanglement Hamiltonian block by block.

9 Rational functions

The last part of the lecture turns to the current frontier of the subject. Orthogonal polynomials solve an ordinary eigenvalue problem (EVP); *biorthogonal rational functions* solve a generalized one (a generalized eigenvalue problem, GEVP), $L\varphi_n = \lambda_n M\varphi_n$ for two tridiagonal operators L, M (Zhedanov). To treat both problems in a unified way, *meta algebras* have been introduced [10]. EVPs and GEVPs are posited in modules of these algebras and overlaps between EVP and GEVP bases are found to be bispectral rational functions. For the Hahn case the *meta-Hahn algebra*

$$[Z, X] = Z^2 + Z, \quad [V, Z] = 2X + \eta_1 Z + \eta_3 I, \quad [X, V] = \{V, Z\} + \eta_1 X + V - \eta_1 Z + \eta_0 I$$

contains the Hahn algebra as a Leonard pair and returns both the Hahn polynomials and the Hahn rational functions (both of ${}_3F_2$ type). The most recent development recasts this in linear-algebraic terms. A *Leonard trio* $(V, \tilde{V}, Z)$ [11] involves the existence of eigenbases for V and $\tilde{V}$ and the property that Z and products of Z with V or $\tilde{V}$ be tridiagonal in these bases. The overlaps of these bases satisfy two three-term generalized eigenvalue problems and are therefore bispectral rational functions. Where a Leonard *pair* produces polynomials, a Leonard *trio* produces rational functions; setting $Z = I$ collapses the trio to a pair. In the Hahn case the trio algebra is isomorphic to the meta-Hahn algebra, and in the Wilson case the overlaps are the Wilson rational functions. Classifying irreducible Leonard trios is the rational analogue of classifying Leonard pairs. This task would eventually provide a *rational Askey scheme*.

10 Conclusion

A central theme runs through the material presented. Bispectrality—the property of a family of functions satisfying both a recurrence and a difference or differential equation—is encoded in a quadratic algebra whose representations return those functions as overlaps of eigenbases. On the polynomial side one has Leonard pairs and

the Racah/Askey–Wilson algebra, realized in association schemes, in $\mathfrak{su}(1, 1)$ recoupling and in superintegrable models. For $q \rightarrow -1$ one finds the Bannai–Ito algebra via $\mathfrak{osp}(1|2)$, and higher rank considerations connect to multivariate polynomials. The algebraic Heun operator is tridiagonal in both eigenbases and provides a means of characterizing free-fermion entanglement. On the rational side, generalized eigenvalue problems, meta algebras and Leonard trios provide the algebraic framework, with the Wilson rational functions at the top of the scheme. Several questions remain open—the full classification of Leonard trios, the rational theory at $q \rightarrow -1$, multivariate rational functions, and higher-rank meta algebras. In each case considered, the solvable structure is governed by a quadratic algebra whose eigenbasis overlaps are the associated special functions.

References

- [1] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov, *The Racah algebra and superintegrable models*, J. Phys. Conf. Ser. **512** (2014), 012011; arXiv:1312.3874.
- [2] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov, *Dunkl shift operators and Bannai–Ito polynomials*, Adv. Math. **229** (2012), 2123–2158; arXiv:1106.3512.
- [3] H. De Bie, V. X. Genest, W. van de Vijver, and L. Vinet, *A higher rank Racah algebra and the $\mathbb{Z}_2^n$ Laplace–Dunkl operator*, J. Phys. A: Math. Theor. **51** (2018), 025203; arXiv:1610.02638.
- [4] N. Crampé, J. Gaboriaud, L. Poulain d’Andecy, and L. Vinet, *Racah algebras, the centralizer $Z_n(\mathfrak{sl}_2)$ and its Hilbert–Poincaré series*, arXiv:2105.01086.
- [5] P.-A. Bernard, N. Crampé, L. Poulain d’Andecy, L. Vinet, and M. Zaimi, *Bivariate P -polynomial association schemes*, arXiv:2212.10824.
- [6] F. A. Grünbaum, L. Vinet, and A. Zhedanov, *Algebraic Heun operator and band-time limiting*, Comm. Math. Phys. **364** (2018), 1041–1068; arXiv:1711.07862.
- [7] N. Crampé, R. I. Nepomechie, and L. Vinet, *Free-fermion entanglement and orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. (2019), 093101; arXiv:1907.00044.
- [8] P.-A. Bernard, N. Crampé, and L. Vinet, *Entanglement of free fermions on Hamming graphs*, arXiv:2103.15742.
- [9] P.-A. Bernard, N. Crampé, and L. Vinet, *Entanglement of free fermions on Johnson graphs*, arXiv:2104.11581.
- [10] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov, *Meta algebras and biorthogonal rational functions: the Hahn case*, arXiv:2405.05692.
- [11] N. Crampé, W. Groenevelt, Q. Labriet, L. Morey, L. Vinet, and C. Wagenaar, *Bispectral rational functions and Leonard trios*, arXiv:2601.15052.