

✿ 日本数学会

2026年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

(1日目／9月1日)

2026年9月

於 神戸大学

$(A_5 + A_1)^{(1)}$ 対称性をもつ 4 次元パンルヴェ系の初期値空間

松ヶ下 和也 (近畿大学 総合理工学研究科)*¹

鈴木 貴雄 (近畿大学 理工学部)*²

概 要

パンルヴェ方程式の岡本初期値空間は、幾つかの複素平面を正準変換によって貼り合わせてできるシンプレクティック多様体であり、各局所座標における方程式系は多項式ハミルトン系となる。本講演では、藤・鈴木および津田によって提唱された $(A_5 + A_1)^{(1)}$ 対称性をもつ 4 次元パンルヴェ系について、同様の初期値空間の構成を特異点解消によって行う。

1. 相空間のコンパクト化

藤・鈴木および津田による 4 次元パンルヴェ系

$$\begin{aligned} t(t-1)\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad t(t-1)\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2), \\ H &= H_{\text{VI}}[\alpha_3 + \alpha_5 - \eta, \alpha_0, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1\eta; q_1, p_1] + H_{\text{VI}}[\alpha_1 + \alpha_5 - \eta, \alpha_0 + \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3\eta; q_2, p_2] \\ &\quad + (q_1 - 1)(q_2 - t)\{(q_1 p_1 + \alpha_1)p_2 + (q_2 p_2 + \alpha_3)p_1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

ただし

$$H_{\text{VI}}[a, b, c, d; q, p] = q(q-1)(q-t)p^2 - \{a(q-1)(q-t) + bq(q-t) + (c-1)q(q-1)\}p + dq$$

を集合 $B = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上で考える。まず、この方程式系の相空間を論文 [1, 3] にしたがってコンパクト化する。 $\mathbb{P}^2$ の同次座標

$$\xi = [\xi_0 : \xi_1 : \xi_2], \quad \zeta^{(i)} = [\zeta_0^{(i)} : \zeta_1^{(i)} : \zeta_2^{(i)}] \quad (i=0, 1, 2)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \left\{ (\xi, \zeta^{(i)}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid \xi_i \neq 0, \zeta_j^{(i)} \neq 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^4 \quad (i, j=0, 1, 2), \\ W_i &= W_{i0} \cup W_{i1} \cup W_{i2} \simeq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2 \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned}$$

とおく。ここで、 W_{00} のアフィン座標を $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}, \frac{\zeta_1^{(0)}}{\zeta_0^{(0)}}, \frac{\zeta_2^{(0)}}{\zeta_0^{(0)}} \right)$ と定める。さらに、 $\zeta^{(i)}$ の間に関係式

$$\begin{pmatrix} \zeta_0^{(1)} \\ \zeta_1^{(1)} \\ \zeta_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0^2 & 0 & 0 \\ -\xi_0\xi_1\eta & -\xi_1^2 & -\xi_1\xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_0\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0^{(0)} \\ \zeta_1^{(0)} \\ \zeta_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta_0^{(2)} \\ \zeta_1^{(2)} \\ \zeta_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_0\xi_2 & 0 \\ -\eta\xi_0\xi_2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0^{(0)} \\ \zeta_1^{(0)} \\ \zeta_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定める。このとき、 $W_{00} \cup W_{10} \cup W_{20}$ および $W_0 \cup W_1 \cup W_2$ の関係式 (2) による商空間をそれぞれ Σ_η^0 および Σ_η とおく。

命題 1. $\Sigma_\eta^0 \times B$ における方程式系 (1) は多項式ハミルトン系となり、そのすべての解は $W_{00} \times B$ を通る。

命題 2. 方程式系 (1) の特異性は $(\Sigma_\eta \setminus \Sigma_\eta^0) \times B$ に現れる。

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 33E17, 37K35

*¹ 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学総合理工学研究科

e-mail: 2444310104w@kindai.ac.jp

*² 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

2. 到達可能な特異点集合とその解消

各 $W_{ij} \times B$ ($j \neq 0$) において、到達可能な特異点集合と呼ばれる方程式系が不定形となる集合が存在する。そのうち、1 次元集合のものを $C_k^{(ij)}$ で、0 次元集合のものを $P_k^{(ij)}$ で表す。

命題 3. 到達可能な特異点集合は $C_k^{(ij)}$ が 18 個、 $P_k^{(ij)}$ が 42 個の合計 60 個現れる。これらは関係式 (2) を用いることで、 $C_k^{(ij)}$ が 12 個、 $P_k^{(ij)}$ が 12 個の合計 24 個にまで減らすことができる。

到達可能な特異点集合においては 1 点を通る解が無限に存在するため、それらをパラメトライズする座標系を特異点解消によって導入する。まず、

$$C_3^{(01)} = \left\{ (q_1, q_2, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, t) \mid q_1 = q_2 = p_1^{(01)} = 0 \right\}$$

について考える。詳細については割愛するが、これについてはブローアップを 2 回行うことにより解消できる。このとき、得られる座標系は

$$(x_3^{[01]}, y_3^{[01]}, z_3^{[01]}, w_3^{[01]}) = \left(-(q_1 p_1 + q_2 p_2 - \alpha_5 + \eta) p_1, \frac{1}{p_1}, q_2 p_1, \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (3)$$

となり、これは正準変換である。他の $C_k^{(ij)}$ についてもすべて同様である。

次に、

$$P_3^{(01)} = \left\{ (q_1, q_2, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, t) \mid q_1 = q_2 - t = p_1^{(01)} = p_2^{(01)} = 0 \right\}$$

について考える。これについては、まず $t = t_0$ ($t_0 \in B$) において $P_3^{(01)}$ を通る解を形式的冪級数の形で構成する。このとき、解には 2 つの任意定数が含まれる。この任意定数を初期条件に移すために、

$$\begin{aligned} r_3((q_1, q_2, p_1, p_2, t)) &= \left(q_1, q_2 + \frac{\alpha_3}{p_2}, p_1, p_2, t \right), \\ r_3((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \eta)) &= (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_4 + \alpha_3, \alpha_5, \eta - \alpha_3) \end{aligned}$$

で定まる方程式系 (1) の対称性 r_3 を用いて変数変換

$$(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)}) = \left(q_1, q_2 + \alpha_3 \frac{p_1^{(01)}}{p_2}, p_1^{(01)}, p_2^{(01)} \right)$$

を行う。先に得られた解の形式的冪級数表示を右辺に代入すると、 $t = t_0$ において $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{p}_1^{(01)} = \tilde{p}_2^{(01)} = 0$ であることがわかる。一方で、座標系 $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)})$ における方程式系は、対称性より到達可能な特異点集合

$$\tilde{C}_3^{(01)} = \left\{ (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1^{(01)}, \tilde{p}_2^{(01)}, t) \mid \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{p}_1^{(01)} = 0 \right\}$$

をもつ。したがって、 $P_3^{(01)}$ を解消する座標系は (3) を用いて

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_3^{[01]}, \tilde{y}_3^{[01]}, \tilde{z}_3^{[01]}, \tilde{w}_3^{[01]}) &= \left(-\{\tilde{q}_1 \tilde{p}_1 + \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 - r_3(\alpha_5) + r_3(\eta)\} \tilde{p}_1, \tilde{q}_2 \tilde{p}_1, \frac{1}{\tilde{p}_1}, \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} \right) \\ &= r_3 \left(x_3^{[01]}, y_3^{[01]}, z_3^{[01]}, w_3^{[01]} \right) \end{aligned}$$

となる。他の $P_k^{(ij)}$ についてもすべて同様である。

定理 4. 方程式系 (1) の初期値空間は、 W_{i0} ($i = 0, 1, 2$) の座標系と上記のようにして得られる 24 個の到達可能な特異点集合を解消する座標系の、合計 33 個の座標系を貼り合わせることで構成される。

参考文献

- [1] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$* , Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **20** (1993) 1–60.
- [2] K. Matsugashita and T. Suzuki *Initial value space of the four dimensional Painlevé system with $(A_5 + A_1)^{(1)}$ symmetry*, Math. Phys. Anal. Geom. **29** (2026) 9.
- [3] M. Suzuki, *Spaces of initial conditions of Garnier system and its degenerate system in two variables*, J. Math. Soc. Japan. **58** (2006) 1079–1117.

Direct linearization and Sato Grassmannian

高崎金久 (大阪公立大学数学研究所・京都大学)

Direct linearization (以下 DL と略する) は Fokas と Ablowitz によってコーシー核をもつ積分方程式 (あるいは $\bar{\partial}$ 問題) を用いるソリトン方程式の解法として開発された [1]. 後に Fu と Nijhoff によって無限次行列による再定式化が行われ, 連続時間・離散時間の KP・BKP・CKP 階層とそのさまざまな簡約や特殊解が論じられた [2, 3]. 最近では Li と Zhang によって反自己双対ヤン・ミルズ方程式にも DL が応用された [4]. この講演ではこの行列形式の DL の中に佐藤グラスマン多様体 [5] が隠れていることを指摘したい.

KP 階層の DL [2, 3] では無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial t_k} = \Lambda^k U - U \Lambda^{-k} - U \mathcal{O}_k U \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

という微分方程式を満たす行列 $U = (u_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ が基本的な役割を演じる. ここで $\Lambda^k, \mathcal{O}_k$ は

$$\Lambda^k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+k}, \quad \mathcal{O}_k = \sum_{l=0}^{k-1} E_{l, k-l-1}$$

という $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列である. E_{ij} は (i, j) 成分が 1 で, 他の成分が 0 の行列単位を表す. この行列からスペクトルパラメータ z をもつベクトル

$$\mathbf{u}(z) = (u_i(z))_{i \in \mathbb{Z}} = (E - U\Omega)\mathbf{c}(z)\rho(z)$$

が構成される. ここで E は単位行列であり,

$$\Omega = \sum_{i=0}^{\infty} E_{i, -i-1}, \quad \mathbf{c}(z) = (z^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \rho(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right)$$

である. $\mathcal{O}_k$ と Ω, Λ は $\mathcal{O}_k = \Omega \Lambda^k - \Lambda^{-k} \Omega$ という代数的関係にある. $\mathbf{u}(z)$ は

$$\frac{\partial \mathbf{u}(z)}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \mathbf{u}(z) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

という微分方程式を満たし, DL において波動関数の役割を演じる.

$\mathbf{u}(z)$ の定義に現れる行列 $g = E - U\Omega$ からグラスマン多様体との関係がわかる. g を左上 $i, j < 0$, 右上 $i < 0, j \geq 0$, 左下 $i \geq 0, j < 0$, 右下 $i, j \geq 0$ の 4 つのブロックに分ければ

$$g = \left(\begin{array}{c|c} \delta_{ij} - u_{i, -j-1} & 0 \\ \hline -u_{i, -j-1} & \delta_{ij} \end{array} \right)$$

となる. さらに g は

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) g - g \Lambda^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

という微分方程式を満たす. その係数行列 $\Lambda^k - U \mathcal{O}_k$ の左下のブロックは零行列であり, この係数行列を同じ条件を満たす一般の行列 Γ_k に置き換えれば, 得られる微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = \Gamma_k g - g \Lambda^k$$

は $\mathrm{GL}(\infty)$ (発見的な意味で書いている) の放物型部分群

$$\mathcal{P} = \{p = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{GL}(\infty) \mid p_{ij} = 0 \ (i \geq 0, j < 0)\}$$

に値をとる行列 $h = h(t)$ によるゲージ変換 $g \mapsto hg$ で形を保つ. このことから (3) はグラスマン多様体 $\mathrm{Gr} \simeq \mathcal{P} \backslash \mathrm{GL}(\infty)$ の上の力学系を定めることがわかる. この力学系は佐藤が見出した KP 階層の幾何学的解釈 [5] と同値である. グラスマン多様体を行ベクトルのなす線形空間の部分空間の集合とみなせば, g の下半分 ($\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ 部分) はこの部分空間の基底を並べた枠行列であり, $u_{ij} \ (i, j \geq 0)$ はグラスマン多様体の開胞体のアフィン座標である.

微分方程式 (1) はもう 1 組の時間変数 (negative times) $\bar{t} = (t_{-1}, t_{-2}, \dots)$ に対する方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t_{-k}} = \Lambda^{-k} U - U \Lambda^k - U \mathcal{O}_{-k} U \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

によって拡張できる. ここで

$$\mathcal{O}_{-k} = - \sum_{l=1}^k E_{-l, -k+l-1}$$

である. Ω を $\bar{\Omega} = - \sum_{i=0}^{\infty} E_{-i-1, i}$ に置き換えて $\bar{g} = E - U \bar{\Omega}$ という行列を考えれば, $\bar{g}$ は

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t_{-k}} = (\Lambda^{-k} - U \mathcal{O}_{-k}) \bar{g} - \bar{g} \Lambda^{-k} \quad (5)$$

という微分方程式を満たす. これから $\bar{t}$ を時間変数とする KP 階層とそのグラスマン多様体上の力学系としての解釈が得られる.

(1) と (4) を合わせたものは 2 系列の時間変数 $(t, \bar{t})$ をもつ 2 成分 KP 階層に対応する. $g, \bar{g}$ はこれらの時間変数に関して (3) と (5) を含む微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) g - g \Lambda^k, \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \bar{g} - \bar{g} \Lambda^k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

を満たす. $g, \bar{g}$ を横に並べて得られる $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z})$ 行列

$$\eta = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \delta_{ij} - u_{i,-j-1} & 0 & \delta_{ij} & u_{i,-j-1} \\ \hline -u_{i,-j-1} & \delta_{ij} & 0 & \delta_{ij} + u_{i,-j-1} \end{array} \right)$$

は 2 成分グラスマン多様体の点を表す枠行列とみなせる. η が満たす微分方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_k} = (\Lambda^k - U \mathcal{O}_k) \eta - \eta \begin{pmatrix} \Lambda^k & 0 \\ 0 & \Lambda^k \end{pmatrix} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

はグラスマン多様体上の力学系を定めるが, それは 2 成分 KP 階層を表現している.

参考文献

- [1] A. S. Fokas and M. K. Ablowitz, On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev–Petviashvili equation, *Phys. Lett.* **A94** (1983), 67–70.
- [2] W. Fu and F. W. Nijhoff, Direct linearising transform for three-dimensional discrete integrable systems: the lattice AKP, BKP and CKP equations, *Proc. R. Soc.* **A473** (2017), 20160915.
- [3] W. Fu and F. W. Nijhoff, Linear integral equations, infinite matrices, and soliton hierarchies, *J. Math. Phys.* **59** (7) (2018), 071101.
- [4] S. S. Li and D. J. Zhang, Direct linearization of the $\mathrm{SU}(2)$ anti-self-dual Yang–Mills equation in various spaces, *J. Geom. Phys.* **207** (2025), 105351.
- [5] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold, H. Fujita, P.D. Lax and G. Strang (eds.), *Nonlinear PDE in Applied Science*, North-Holland, 1983, pp. 259–271.

多重対称関数と離散可積分系

加藤 正輝 (立命館大学)*

Schur 関数は対称関数論における基本的な特殊関数であり、表現論や組合せ論に加えて、可積分系の理論においても重要な役割を果たすことが知られている。本講演では、多重対数関数の p, q -類似 [1, 2] を用いて定義される Schur 関数の類似物 $\mathcal{S}_\lambda$ [3], およびそのさらなる拡張である $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ (Schur 型擬対称関数の類似) の満たす双線形差分方程式系を導出し、その離散可積分系との関連を紹介する。

関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は以下のように定義される。まず、 $0 < |p| < 1$, $0 < |q| < 1$ を満たす複素数 p, q に対して

$$\begin{aligned} L((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) \\ = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^n F(u_i t_1 \cdots t_i z_1 \cdots z_i, v_i; p) F(t_i^{-1} z_i^{-1}, w_i; q) \frac{dz_1 \cdots dz_n}{z_1 \cdots z_n} \end{aligned}$$

とおく。ここで

$$F(z, w; p) = \frac{\theta'(1; p)\theta(zw; p)}{\theta(z; p)\theta(w; p)}, \quad \theta(z; p) = (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty$$

は Kronecker 関数である。

次に、 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ の合成 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ に対して、単項擬対称関数の類似物 $\mathcal{M}_\alpha$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) \\ = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{k-1} (w_{s_i+1} \cdots w_{s_{i+1}})^i \sum_{l_1=1}^{\alpha_1} \cdots \sum_{l_k=1}^{\alpha_k} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{\substack{1 \leq j \leq \alpha_i \\ j \neq l_i}} F(u_{s_{i-1}+j} u_{s_{i-1}+l_i}^{-1}, v_{s_{i-1}+j}; p) \right) \\ \times L((q^{i-1} u_{s_{i-1}+l_i})_{i=1}^k, (v_{s_{i-1}+1} \cdots v_{s_i})_{i=1}^k, (w_{s_{i-1}+1} \cdots w_n)_{i=1}^k; p, q) \end{aligned}$$

で定める。ただし $s_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ とする。この関数 $\mathcal{M}_\alpha$ を用いて、関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は

$$\mathcal{S}_\lambda^\gamma((u_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n; p, q) = \sum_{U \in \text{SYT}(\lambda)} \sum_{\substack{\alpha \in \text{Comp}(n) \\ \text{Des}(U) \subset S_\alpha}} \mathcal{M}_{\alpha(U, \gamma)}((u_i)_{\alpha, U}, (v_i)_{\alpha, U}, (w_i)_{\alpha, U}; p, q)$$

により定義される。特に $\gamma_{ij} = 1$ ($(i, j) \in D(\lambda/\mu)$) の場合には、 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ は [3] で導入した $\mathcal{S}_\lambda$ に一致する。

関数 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ の基本的性質として、Jacobi-Trudi 型の行列式表示

$$\mathcal{S}_\lambda^\gamma(u, v, w; p, q) = \det \left(\mathcal{E}_{(\gamma_{-j+1}, \gamma_{-j+2}, \dots, \gamma_{\lambda_i - i})}(u, v, w; p, q) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 33B30, 33E20, 05E05, 39A14, 37K10

キーワード: Schur type quasisymmetric function, Jacobi-Trudi formula, multiple polylogarithm, bilinear difference equation, discrete integrable system

* 〒567-8570 大阪府茨木市岩倉町 2-150 立命館大学 大阪いばらきキャンパス

e-mail: katom@fc.ritsumeai.ac.jp

が成り立つ。ここで $\mathcal{E}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ は essential quasisymmetric function の類似物である。一方、 $\mathcal{E}_\alpha$ は以下のような q -差分関係式を満たす。

$$\left(w_1 \cdots w_n T_{q, u_1} \cdots T_{q, u_n} - 1\right) \mathcal{E}_\alpha = (-1)^{\alpha_1+1} \left(\prod_{j=1}^{\alpha_1} F(u_j, v_j; p)\right) \mathcal{E}_{\hat{\alpha}},$$

ここで T_{q, u_i} は $u_i \mapsto qu_i$ を与える q -シフト作用素であり、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\hat{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ である。この q -差分関係式と Jacobi–Trudi 型公式を組み合わせることにより、 $\mathcal{S}_\lambda^\gamma$ の満たす非自明な双線形差分方程式を導くことができる。

そのために

$$\tau_{t, \lambda}^{(\gamma)} = w^{t \sum_{(i,j) \in D(\lambda)} \gamma_{j-i}} \mathcal{S}_\lambda^\gamma(q^t u, v, w; p, q)$$

を導入する。さらに

$$\hat{\gamma} = (\gamma_{c+1})_{c \in \mathbb{Z}}, \quad \check{\gamma} = (\gamma_{c-1})_{c \in \mathbb{Z}}$$

とおくと、 $\tau_{t, \lambda}^{(\gamma)}$ は以下のような双線形差分方程式を満たす：

$$\begin{aligned} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} &= \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^{r+1}}^{(\gamma)} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\hat{\gamma})} - \tau_{t, (\lambda_i-1)_{i=2}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)}, \\ \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} &= \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^{r+1}}^{(\gamma)} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\hat{\gamma})} - \tau_{t, (\lambda_i-1)_{i=2}^{r+1}}^{(\hat{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)}, \\ (-w^t F(q^t u, v; p))^{\gamma_0} \tau_{t, (\lambda_i)_{i=1}^r}^{(\check{\gamma})} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=2}^r}^{(\hat{\gamma})} &= \tau_{t, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)} \tau_{t+1, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} - \tau_{t, (\lambda_i)_{i=2}^r}^{(\gamma)} \tau_{t+1, (\lambda_i+1)_{i=1}^r}^{(\gamma)} \end{aligned}$$

特に、 $\gamma_{j-i} = 1$ ($(i, j) \in D(\lambda/\mu)$) とし、さらに分割を長方形分割に特殊化すると、これらの双線形差分方程式は既知の離散可積分系に帰着する。実際、

$$\lambda = ((t-k)^n)$$

とし、

$$\tau_n^{k, t} = w^{(t-k)nt} \mathcal{S}_{(t-k)^n}(q^t u, v, w; p, q)$$

とおくと、これは R_I 格子 [5] の双線形差分方程式系を満たす。さらに $p = q$, $w = v$ と特殊化すると、離散相対論的戸田格子 [6] の双線形差分方程式系が得られる。

本講演の内容は、論文 [4] に基づく。

参考文献

- [1] M. Kato, On certain two-parameter deformations of multiple zeta values, Res. Number Theory **6**, No. 3, Paper No. 30 (2020).
- [2] M. Kato, Parity result for q - and elliptic analogues of multiple polylogarithms, Res. Number Theory **9**, no. 2, Paper No. 45 (2023).
- [3] M. Kato, Symmetric functions and elliptic q -multiple polylogarithms, J. Combin. Theory Ser. A **221**, Paper No. 1061178 (2026).
- [4] M. Kato, Multiple polylogarithms and discrete integrable systems, J. Phys. A **59** (2026), no.21, Paper No. 215204, 19pp.
- [5] A. Mukaihira and S. Tsujimoto, Determinant structure of R_I type discrete integrable system, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 4557–4565.
- [6] Y. Suris, A discrete-time relativistic Toda lattice, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 451–465.

The universal framed KZB connection in higher genera

谷口 東曜 (東大数理)*

Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 接続とは, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の n (≥ 1) 点の配置空間上に定まる平坦接続である. 平坦接続が 1 つ与えられるとモノドロミーと呼ばれる基本群から適切な (Lie) 群への射が定まり, KZ 接続のモノドロミーは多重ゼータ値で記述される. このモノドロミーは五角関係式を満たすが, それはさらに double shuffle 関係式をもたらしことが古庄 [Fur11] により示されている. 五角関係式を記述するには, 配置空間の基本群である組み紐群の紐の本数を増減させる写像 (“coproducts”) が必要である. これは, 特定の紐をその近傍で $\mathbb{C}$ 上で右向きにコピーして複数本にすることで得られる.

KZ 接続の種数 g への一般化 (種数 0 の曲面 $\mathbb{C}$ を一般の種数の曲面に取り替えるもの) は Enriquez [Enr14b] により導入されており, これを用いて高種数の多重ゼータ値を定義できる. しかし, それらの間の五角関係式のような明らかな関係式は述べられていない.

本講演では, Enriquez の接続の framed version を構成する. これが標題の universal framed KZB connection である. これは Enriquez の接続を拡張したものであり, 曲面上の組み紐に由来する関係式を満たす.

1 Enriquez 接続と framed version

C を種数 g の閉リーマン面とし, $\text{Conf}_n(C)$ で C 上の n 点のなす配置空間を表す. C の複素構造を用いて, Enriquez は Drinfeld–Kohno Lie 代数 $\mathfrak{t}_{g,n}$ に係数をもつ平坦接続 α_n を導入した. $\mathfrak{t}_{g,n}$ は有限表示を持ち, C 上の組み紐群 $\text{PB}_{g,n} := \pi_1(\text{Conf}_n(C))$ に付随する Lie 代数である. $g = 0$ のときは古典的な KZ 接続に一致するため, KZ 接続の一般化とみなせる. 今の場合, モノドロミーは群準同型 $\rho: \pi_1(\text{Conf}_n(C)) \rightarrow \exp(\mathfrak{t}_{g,n})$ である.

$\text{PB}_{g,2}$ の生成元の中から $X_i^{1,2}, Y_i^{1,2}$ ($1 \leq i \leq g$) を適切にとると, 多重ゼータ値はその ρ での値 $A_i^{1,2}, B_i^{1,2} \in \exp(\mathfrak{t}_{g,2})$ の (適切な $\mathfrak{t}_{g,2}$ 上の「語」に関する) 係数であると思える. これらの満たす関係式を考えたいが, 複素平面 $\mathbb{C}$ の場合には $\mathbb{C}$ の標準的な framing (つまり $\mathbb{C}$ 内の「右向き」の概念) を用いた. 一方で C には標準的な framing は無いので, 組み紐の本数を増減させるには, 紐の近傍で「右向き」が必要になる. そこで, framed な配置空間 $\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ を次の引き戻し図式で定める. UTC は C の単位接束である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_n^{\text{fr}}(C) & \longrightarrow & (UTC)^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \text{Conf}_n(C) & \longrightarrow & C^n \end{array}$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: toyo@ms.u-tokyo.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 57K20, 58B34.

キーワード: Drinfeld associators, multi-zeta values, surface braid groups.

$\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ の元は, C 上の異なる n 点に単位接ベクトルが付いたものである. こうすると $\text{PB}_{g,n}^{\text{fr}} := \pi_1(\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C))$ には coproducts が定まり, 付随する Lie 代数 $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ も coproducts を持つ. 上で見た $\mathfrak{t}_{g,n}$ とは次の ($g \neq 1$ では分裂しない) 完全列により関係する.

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow \mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}} \xrightarrow{q} \mathfrak{t}_{g,n} \rightarrow 0$$

定理 1 (T.). $\text{Conf}_n^{\text{fr}}(C)$ 上の $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ -値の平坦接続 α_n^{fr} が存在し, $\pi^*(\alpha^{\text{fr}}) = q(\alpha_n^{\text{fr}})$ を満たす. このモノドロミーは $\text{PB}_{g,n}^{\text{fr}}$ と $\mathfrak{t}_{g,n}^{\text{fr}}$ 上の coproducts と整合的であり, KZ 接続に漸近する.

2 Gonzalez の operad を用いた定義

Coproducts と整合的であるという主張は operad を用いて簡潔に述べられる. ここでは詳細は割愛するが, Gonzalez [Gon20] は operad の言葉で種数 g の Drinfel'd associator を定義した. 等価な定義として, 種数 g の Drinfel'd associator は通常の Drinfel'd associator $\Phi^{1,2,3}$ と $2g$ 個の $\exp(\mathfrak{t}_{g,2}^{\text{fr}})$ の元 $A_i^{1,2}, B_i^{1,2}$ ($1 \leq i \leq g$) の組であり, 次の関係式を満たすものである.

- $W_a^{\emptyset,1} = 1$
- $W_a^{12,3} = \Phi^{1,2,3} W_a^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1} R^{1,2} \Phi^{2,1,3} W_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} R^{2,1}$
- $(\Phi^{1,2,3} W_b^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1}, R^{1,2} \Phi^{2,1,3} V_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} (R^{1,2})^{-1}) = 1 \quad (a < b)$
- $R^{1,2} R^{2,1} = (R^{1,2} \Phi^{2,1,3} A_a^{2,13} (\Phi^{2,1,3})^{-1} R^{2,1}, \Phi^{1,2,3} B_a^{1,23} (\Phi^{1,2,3})^{-1})$
- $R^{1,2} R^{2,1} (F^{1,2})^{2(1-g)} = ((A_g^{1,2})^{-1}, B_g^{1,2}) \cdots ((A_1^{1,2})^{-1}, B_1^{1,2})$

ここで $W, V \in \{A, B\}$, $1 \leq a, b \leq g$, $R^{1,2} = e^{t_{12}/2}$, $F^{1,2} = e^{t_{11}/2}$ である. 定理 1 は, α_n^{fr} のモノドロミーがこれを満たすことを主張している.

五角関係式が double shuffle 関係式を導いたように, これらの関係式から高種数多重ゼータ値の興味深い関係式が導かれることを期待している.

参考文献

- [Fur11] Hidekazu Furusho. Double shuffle relation for associators. *Annals of Mathematics* 174, 341–360, 2011.
- [Enr14b] Benjamin Enriquez. Flat connections on configuration spaces and braid groups of surfaces. *Advances in Mathematics*, 252:204–226, 2014.
- [Gon20] Martin Gonzalez. Surface Drinfeld torsors I: Higher genus associators. 2020. arXiv:2004.07303.

調和数に関する Euler の恒等式の一般化

Generalizations of Euler's identity for harmonic numbers

関 真一朗 (長浜バイオ大学)*

1 Euler の恒等式

任意の正整数 N に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{N}{n} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m}$$

が成立する. 二項係数に関する公式とも調和数に関する公式ともとれるこの恒等式は, 証明も簡単であり, 大学入試問題等でもしばしば取り上げられる.

実は, この恒等式は少なくとも Euler にまで遡ることができて, 彼の論文 [4] では

§. 13. *Hinc ergo nacti sumus sequentem aequationem maxime memorabilem:*

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \binom{n}{4} + \frac{1}{5} \binom{n}{5} \text{ etc. } \dots \pm \frac{1}{n} \binom{n}{n} = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc. } \dots \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

と記載されている.

Euler の恒等式はシンプルであるが, 様々な一般化が成り立つことが知られており, 意外にも奥が深い公式である. 本稿では, 「多重化する」という方向の種々の一般化と, 関連する結果を紹介する.

2 Hoffman-川島の恒等式

Euler の恒等式の片方の辺について, $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n^k}$ や $\frac{1}{m} \mapsto \frac{1}{m^l}$ と一般化すると, 他方の辺については多重和が現れる. 以下, N はずっと正の整数である.

* 〒526-0829 滋賀県長浜市田村町 1266 長浜バイオ大学 バイオサイエンス学部

e-mail: s_seki@nagahama-i-bio.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/shinichiro-seki>

本研究は科研費 (課題番号:16J01758, JP18J00151, 21K13762, JP26K06734) の助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: 11M32, 11B65

キーワード: 調和数, 二項係数, Euler の恒等式, 多重ゼータ値, 多重ポリログ, 有限多重ゼータ値, 有限多重ポリログ, 連結和法, 川島関係式, 多重ゼータダイヤモンド値

定理 2.1 (Knuth [14]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^k} \binom{N}{n} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$$

が成り立つ.

なお, 多重ゼータ値に関する研究分野でよく現れる多重和の表記を用いているが, 別の視点で発見された Knuth の恒等式などは, 「入れ子式の和」で表示されていたことも多い. 例えば, $c_N^{(0)} = 1$ として, 帰納的に

$$c_N^{(s+1)} = \sum_{m=1}^N \frac{c_m^{(s)}}{m}$$

と定義することにより, Knuth の恒等式の右辺は $c_N^{(k)}$ と表されていた.

定理 2.2 (Hernandez [1]). 任意の正整数 l に対して,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N} \frac{(-1)^{n_l-1}}{n_1 \cdots n_l} \binom{N}{n_l} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^l}$$

が成り立つ.

正整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ をインデックスとよび (r を $\mathbf{k}$ の深さとよぶ), その Hoffman 双対インデックス $\mathbf{k}^\vee$ が定義される. 2 以上の成分を $1 + \dots + 1$ と表すことによって, インデックスを「1 とコンマ記号とプラス記号」のみで表すとき, 「コンマ記号」と「プラス記号」を入れ替えることによって Hoffman 双対インデックスが得られる. 例) $(1, 2, 3) = (1, 1+1, 1+1+1)$ なので, $(1, 2, 3)^\vee = (1+1, 1+1, 1, 1) = (2, 2, 1, 1)$.

定理 2.3 (Hoffman [7], Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_s^{l_s}} \quad (1)$$

が成り立つ.

これは Hoffman の恒等式とよばれることが多いが, 実際は Hoffman とは独立に川島も証明している. 論文の出版年では川島の方が早い, プレプリントの公開は Hoffman の方が早い.

$\mathbf{k} = (k)$ とすれば, $(k)^\vee = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ であるため, Knuth の恒等式が得られる. $\mathbf{k} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_l$ とすれば, $\mathbf{k}^\vee = (l)$ であるため, Hernandez の恒等式が得られる.

3 連結和法による証明

Hoffman–川島の恒等式については、様々な証明方法が知られている．ここでは、連結和法を用いた証明の概略を紹介する．連結和法は多重ゼータ値の双対関係式の新しい証明法として、[18] で提案されたものである．その後、サーベイ論文 [17] など、様々な関係式族を証明するのに有効な手法であることが確認されている．

定義 3.1 (連結和)．インデックス $(k_1, \dots, k_r), (l_1, \dots, l_s)$ に対して、連結和を

$$Z_N(k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s) = \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N \\ 1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N}} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} C(n_r, m_1) \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}}$$

と定義する．ここで、

$$C(n, m) = (-1)^{n-1} n \binom{m}{n}$$

であり、コネクターとよばれる．

命題 3.2 (輸送関係式)．

$$\begin{aligned} Z_N(k_1, \dots, k_r, 1; l_1, \dots, l_s) &= Z_N(k_1, \dots, k_r; l_1 + 1, l_2, \dots, l_s), \\ Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; l_1, \dots, l_s) &= Z_N(k_1, \dots, k_r; 1, l_1, \dots, l_s). \end{aligned}$$

証明 次の2つの式をそれぞれ証明すればよい (望遠鏡和によって簡単に計算できる):

$$\sum_{n \leq k \leq m} C(k, m) \frac{1}{k} = C(n, m) \frac{1}{m}, \quad C(n, m) \frac{1}{n} = \sum_{n \leq k \leq m} C(n, k) \frac{1}{k}. \quad \square$$

補題 3.3 (境界条件)．

$$\begin{aligned} Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; \emptyset) &= \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r}, \\ Z_N(1; l_1, \dots, l_s) &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{1}{m_1^{l_1} \dots m_s^{l_s}}. \end{aligned}$$

証明 1つ目については、このように定義しておけば、右側のインデックスが空であっても整合的に輸送関係式が成立するという意味．2つ目については

$$\sum_{n=1}^{m_1} (-1)^{n-1} \binom{m_1}{n} = 1$$

より得られる． □

輸送関係式を用いてインデックスを左から右へ輸送していくことにより、

$$(1) \text{ の左辺 } = Z_N(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r + 1; \emptyset) = \dots = Z_N(1; \mathbf{k}^\vee) = (1) \text{ の右辺}$$

と、Hoffman–川島の恒等式が証明される．

4 有限多重ゼータ値への応用

有限多重ゼータ値とよばれる多重ゼータ値の類似物は、環

$$\mathcal{A} = \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

の元として定義される. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と各素数 p について,

$$\sum_{0 < n_1 < \dots < n_r < p} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (2)$$

を $\text{mod } p$ することによって $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を得, それらを並べて自然に $\mathcal{A}$ の元を定義したものが, 有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ である. 本稿で主役として現れるのは,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \quad (3)$$

から同様に定義される $\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k})$ の方であるが, これらは有限多重ゼータ値の線形和で表すことができる. 例) $\zeta_{\mathcal{A}}^*(1, 2, 3) = \zeta_{\mathcal{A}}(1, 2, 3) + \zeta_{\mathcal{A}}(3, 3) + \zeta_{\mathcal{A}}(1, 5) + \zeta_{\mathcal{A}}(6)$.

Hoffman–川島の恒等式において $N = p - 1$ と代入し, $\text{mod } p$ をとることによって, 以下の有限多重ゼータ値の間の関係式が得られる.

定理 4.1 (Hoffman [7]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}^\vee)$$

が成り立つ.

環 $\mathcal{A}$ は, 正整数 n に対して

$$\mathcal{A}_n = \prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

に一般化できる. また, これらを集めたものは射影系をなすので, 逆極限をとって

$$\hat{\mathcal{A}} = \varprojlim_n \mathcal{A}_n$$

を定義でき, (2) を $\text{mod } p^n$ して集めることによって $\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ が定義され, (3) から $\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{k})$ が定義される. 有限多重ゼータ値の間の関係式を $\hat{\mathcal{A}}$ における関係式にリフトすることは興味があるが, 実際, 二項係数の部分を p 進展開して計算することにより, 定理 4.1 は次のようにリフトされる.

定理 4.2 (Seki [16]). 任意のインデックス $(k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(k_1, \dots, k_r, \underbrace{1, \dots, 1}_i) p^i = - \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(l_1, \dots, l_s, \underbrace{1, \dots, 1}_i) p^i$$

が成り立つ.

ここで, $\mathbf{p} = ((p \bmod p^n)_p)_n \in \hat{\mathcal{A}}$ であり, $\hat{\mathcal{A}}$ は $\mathbf{p}$ 進位相に関して完備である. $\mathcal{A} \simeq \hat{\mathcal{A}}/p\hat{\mathcal{A}}$ であり, 定理 4.2 を $\bmod \mathbf{p}$ すると, 定理 4.1 となる.

5 ポリログ化

t を不定元として, Euler の恒等式に t をつけた

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-t)^n}{n} \binom{N}{n} = \sum_{m=1}^N \frac{(1-t)^m - 1}{m}$$

が成り立つ. $t = 1$ とすれば, Euler の恒等式となる.

他の定理を証明する際の式変形として, この恒等式が本質的に現れている論文は複数確認できるが ([20] の Lemma 4.1 の証明など), 「 $\sim$ の恒等式」と誰かにクレジットを与えられるような文献は見つけれられていない.

定理 5.1 (Tauraso–Zhao [21]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-t)^n}{n^k} \binom{N}{n} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{(1-t)^{m_1} - 1}{m_1 \cdots m_k}$$

が成り立つ.

$t = 1$ とすれば, Knuth の恒等式となる.

定理 5.2 (Sakugawa–Seki [15]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{t^{n_1} (-1)^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r} = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{(1-t)^{m_1} - 1}{m_1^{l_1} \cdots m_s^{l_s}}$$

が成り立つ.

$t = 1$ とすれば, Hoffman–川島の恒等式となる. $\mathbf{k} = (k)$ とすれば, Tauraso–Zhao の恒等式となる.

さらに多変数化することもでき, その一般形を書くこともできるが, 実はインデックスが $(1, 1, \dots, 1)$ の場合を考えれば十分である.

定理 5.3 (Sakugawa–Seki [15]). 任意の正整数 k と不定元 $t_1, \dots, t_k$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \leq N} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2 - n_1} \cdots t_k^{n_k - n_{k-1}} (-1)^{n_k}}{n_1 \cdots n_k} \binom{N}{n_k} \\ &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{\{(1-t_1)^{m_1} - 1\} (1-t_2)^{m_2 - m_1} \cdots (1-t_k)^{m_k - m_{k-1}}}{m_1 \cdots m_k} \end{aligned}$$

が成り立つ.

この恒等式で各変数に 0 または 1 を代入する場合, $0^0 = 1$ と解釈した式が得られることを確認できる. このことから, 一般のインデックスの場合を得ることができる.

この恒等式も今となっては複数の証明方法が考えられるが, 原論文執筆時には連結和法はまだなく, 形式的積分作用素を導入し, インデックスの重さ (成分の総和) に関する数学的帰納法で証明した.

Hoffman–川島の恒等式の応用として有限多重ゼータ値の関係式が得られたように, 佐久川–関の恒等式からは有限多重ポリログの間の関数等式が得られる ([15, 16]).

なお, 佐久川–関の恒等式と同値な式は, 佐久川–関よりも早く, 川島–田中 [11] によっても得られている. また, 佐久川–関の恒等式と同値であるが別の形をした恒等式, およびそれを更に q 変形した恒等式を鎌野 [8] が示している. これは Mneimneh や Boyadzhiev らの研究の文脈における一般化のようだ.

6 q -類似

q を $0 < q < 1$ を満たす実数として, q -整数 $[n]_q$ を

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

と定め, q -階乗 $[n]_q!$ を $[n]_q! = \prod_{a=1}^n [a]_q$ と定める. q -二項係数 $\binom{m}{n}_q$ を

$$\binom{m}{n}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q! [m-n]_q!}$$

と定義する.

定理 6.1 (Van Hamme [22]).

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2}}{[n]_q} \binom{N}{n}_q = \sum_{m=1}^N \frac{q^m}{[m]_q}.$$

$q \rightarrow 1$ とすると, Euler の恒等式となる.

定理 6.2 (Dilcher [3]). 任意の正整数 k に対して,

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2 + (k-1)n}}{[n]_q^k} \binom{N}{n}_q = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq N} \frac{q^{m_1 + \dots + m_k}}{[m_1]_q \cdots [m_k]_q}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Knuth の恒等式となる.

定理 6.3 (Prodinger [13]). 任意の正整数 l に対して,

$$\sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l \leq N} \frac{(-1)^{n_l-1} q^{n_l(n_l+1)/2}}{[n_1]_q \cdots [n_l]_q} \binom{N}{n_l}_q = \sum_{m=1}^N \frac{q^m}{[m]_q^l}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Hernandez の恒等式となる.

定理 6.4 (Bradley [2]). 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ について, $\mathbf{k}^\vee = (l_1, \dots, l_s)$ とするとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(k_1-1)n_1 + \dots + (k_r-1)n_r} (-1)^{n_r-1} q^{n_r(n_r+1)/2}}{[n_1]_q^{k_1} \cdots [n_r]_q^{k_r}} \binom{N}{n_r}_q \\ &= \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_s \leq N} \frac{q^{m_1 + \dots + m_s}}{[m_1]_q^{l_1} \cdots [m_s]_q^{l_s}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

$q \rightarrow 1$ とすると, Hoffman-川島の恒等式となる. $\mathbf{k} = (k)$ とすれば, Dilcher の恒等式となり, $\mathbf{k} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_l$ とすれば, Prodinger の恒等式となる.

7 大野化

多重ゼータ値の双対関係式には大野関係式とよばれる美しい一般化がある ([12]). 一方で, 有限多重ゼータ値についても Hoffman による双対性 (定理 4.1) が成り立つため, それを大野化できないかという自然な疑問が生じる. この観点から得られた有限多重ゼータ値の間の関係式が, 次である.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と非負整数の組 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ に対して, インデックス $\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}$ を

$$\mathbf{k} \oplus \mathbf{e} = (k_1 + e_1, \dots, k_r + e_r)$$

と定義し, 整数 $b(\mathbf{k}; \mathbf{e})$ を

$$b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) = \prod_{i=1}^r \binom{k_i + e_i + \delta_{i1} + \delta_{ir} - 2}{e_i}$$

と定義する. ここで, δ_{ij} は Kronecker's delta であり,

$$\binom{e-1}{e} = \begin{cases} 1 & (e=0) \\ 0 & (e>0) \end{cases}$$

と定める. 正整数 e, r に対して, $J_{e,r}$ で $e_1 + \dots + e_r = e$ を満たすような非負整数の組 $(e_1, \dots, e_r)$ 全体の集合を表す.

定理 7.1 (Hirose–Imatomi–Murahara–Saito [5]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{e,r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) \zeta_A^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = - \sum_{\mathbf{e}' \in J_{e,s}} \zeta_A^*(\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e}')$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は定理 4.1 と解釈して成立する. 係数 $b(\mathbf{k}; \mathbf{e})$ がついているのでオリジナルの大野関係式より美しくないと感じるかもしれないが, この係数があるために発見されるまでに時間がかかったというか, [5] 以前にはこのような公式の存在は予期されていなかったように思われる.

定理 4.1 は Hoffman–川島の恒等式を $\text{mod } p$ して得られるものであったが, 定理 7.1 についても $\text{mod } p$ する前に成立する恒等式はあるだろうか. この疑問への回答が以下の定理である.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して, $H_N^*(\mathbf{k})$, $\zeta_N^*(\mathbf{k})$ をそれぞれ

$$H_N^*(\mathbf{k}) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{N}{n_r}, \quad \zeta_N^*(\mathbf{k}) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

と定める.

定理 7.2 (Seki–Yamamoto [19]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{e,r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) H_N^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}) = \sum_{j=0}^e \zeta_N^*(\underbrace{1, \dots, 1}_{e-j}) \sum_{\mathbf{e}' \in J_{j,s}} \zeta_N^*(\mathbf{k}^\vee \oplus \mathbf{e}')$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は恒等式 (1) と解釈して成立する. $\text{mod } p$ すると, $\zeta_A^*(1, \dots, 1) = 0$ に注意して, 定理 7.1 が得られる.

Hoffman–川島の恒等式は q -類似に拡張することができた (Bradley の恒等式) が, 上記大野型恒等式についても, q -類似に拡張することができる.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と非負整数の組 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ に対して, $H_N^*(\mathbf{k}; q)$, $z_N^*(\mathbf{k}; \mathbf{e}; q)$ をそれぞれ

$$H_N^*(\mathbf{k}; q) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(k_1-1)n_1 + \dots + (k_r-1)n_r} (-1)^{n_r-1} q^{n_r(n_r+1)/2}}{[n_1]_q^{k_1} \dots [n_r]_q^{k_r}} \binom{N}{n_r}_q,$$

$$z_N^*(\mathbf{k}; \mathbf{e}; q) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r \leq N} \frac{q^{(e_1+1)n_1 + \dots + (e_r+1)n_r}}{[n_1]_q^{k_1+e_1} \dots [n_r]_q^{k_r+e_r}}$$

と定める.

定理 7.3 (Seki–Yamamoto [19]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と正整数 e に対して,

$$\sum_{\mathbf{e} \in J_{\mathbf{e}, r}} b(\mathbf{k}; \mathbf{e}) H_N^*(\mathbf{k} \oplus \mathbf{e}; q) = \sum_{j=0}^e z_N^*(\underbrace{1, \dots, 1}_{e-j}; \underbrace{0, \dots, 0}_{e-j}; q) \sum_{\mathbf{e}' \in J_{j, s}} z_N^*(\mathbf{k}^\vee; \mathbf{e}'; q)$$

が成り立つ. ここで, r は $\mathbf{k}$ の深さ, s は $\mathbf{k}^\vee$ の深さである.

$e = 0$ の場合は Bradley の恒等式と解釈して成立し, $q \rightarrow 1$ とすると, 定理 7.2 が得られる.

この恒等式は, コネクターを

$$C_{q,x}(n, m) = (-1)^{n-1} q^{n(n+1)/2} \frac{[n]_q - q^n x}{q^n} \frac{\prod_{h=1}^m ([h]_q - q^h x)}{[n]_q! [m-n]_q!}$$

と一般化することによって, 連結和法を用いて証明できる.

8 川島関係式

Hoffman は Hoffman–川島の恒等式を有限多重ゼータ値の間の関係式へ応用したが (定理 4.1), 川島は多重ゼータ値の間の関係式へ応用した.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して, Newton 級数

$$G(\mathbf{k}; t) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \binom{t}{n_r}$$

を考える. このとき, 川島関数 $F(\mathbf{k}; t)$ が

$$F(\mathbf{k}; t) = G(\mathbf{k}^\vee; t)$$

によって定義される.

2つのインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対して, そのスター版調和積 $\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}$ がインデックスの整数係数線形結合として定義される. 例) $(2) \bar{*} (3) = (2, 3) + (3, 2) - (5)$. このとき, 標準的な積公式

$$\zeta_N^*(\mathbf{k}) \zeta_N^*(\mathbf{l}) = \zeta_N^*(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}) \quad (4)$$

が成り立つことが知られている. ここで,

$$\zeta_N^*(2) \zeta_N^*(3) = \zeta^*((2) \bar{*} (3)) = \zeta_N^*(2, 3) + \zeta_N^*(3, 2) - \zeta_N^*(5)$$

のように, ζ_N^* を線形に拡張した記述を用いている. このような拡張は ζ_N^* 以外にも適宜適用することとする. 川島は川島関数についても同様の積公式が成立することを証明した.

定理 8.1 (Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ に対して,

$$F(\mathbf{k}; t) F(\mathbf{l}; t) = F(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}; t) \quad (5)$$

が成り立つ.

この定理の川島による証明は、任意の正整数 N に対する $t = N$ の場合の成立に帰着させるという、Newton 級数の理論における補間性質を用いたものである。Hoffman-川島の恒等式によって

$$F(\mathbf{k}; N) = G(\mathbf{k}^\vee; N) = H_N^*(\mathbf{k}^\vee) = \zeta_N^*(\mathbf{k})$$

であるため、(4) によって補間されることがわかる。

Newton 級数として定義された $G(\mathbf{k}; t)$ は、Taylor 展開公式

$$G(\mathbf{k}; t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \circledast \mathbf{k}^*) t^m$$

を満たすため、(5) の両辺を Taylor 展開して係数比較することによって、次の定理が得られる。 $\circledast$ および $\mathbf{k}^*$ の定義は割愛する (詳しく知りたい方は [23] を参照のこと)。 $\zeta(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値である。

定理 8.2 (Kawashima [10]). 任意のインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ と任意の正整数 m に対して、

$$\sum_{\substack{a+b=m \\ a, b \in \mathbb{Z}_{>0}}} \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_a \circledast (\mathbf{k}^\vee)^*) \zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_b \circledast (\mathbf{l}^\vee)^*) = -\zeta(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \circledast ((\mathbf{k} * \mathbf{l})^\vee)^*)$$

が成り立つ。

これは多重ゼータ値の間の代数関係式であるが、 $m = 1$ の場合を考えると多重ゼータ値の間の線形関係式が得られ、それは川島関係式の線形部分とよばれている。また、一般の川島関係式において、左辺にある多重ゼータ値の積をシャッフル積で展開することによって得られる線形関係式は、それら関係式の線形結合を考えることによって、多重ゼータ値の間の線形関係式を尽くすと予想されている。

9 川島関係式のダイヤモンドリフト

[6] で導入された多重ゼータダイヤモンド値の間には様々な関係式が成り立つが、それらは多重ゼータ値の間に成り立つ関係式と全く同じ形をしている。実際、 $k_r \geq 2$ であるようなインデックス $(k_1, \dots, k_r)$ に対して、 $\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r)$ を

$$\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r) = \sum_{A \subset \{i | k_i = 1\}} \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{Z}_{>0} \ (1 \leq i \leq r), \ n_{r+1} = N \\ n_i \leq n_{i+1} \ (i \in A) \\ n_i < n_{i+1} \ (i \notin A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right)$$

と定義し、多重ゼータダイヤモンド値 $\zeta^\diamond(k_1, \dots, k_r)$ を、有理数列として $\zeta^\diamond(k_1, \dots, k_r) = (\zeta_N^\diamond(k_1, \dots, k_r))_{N \in \mathbb{Z}_{>0}}$ と定義するが、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N^\diamond(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$$

であることから、関係式の遺伝性がわかる．一方、多重ゼータ値の間の任意の関係式が多重ゼータダイヤモンド値の間でも成り立つわけではない．多重ゼータ値の間の既存の関係式が多重ゼータダイヤモンド値の間でも成り立つとき、その関係式はダイヤモンドリフトすると表現する．

実は、川島関係式はダイヤモンドリフトする．

定理 9.1 (Hirose–Maesaka–Seki–Watanabe [6]). 任意のインデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ と任意の正整数 m に対して、

$$\sum_{\substack{a+b=m \\ a, b \in \mathbb{Z}_{>0}}} \zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_a) \circledast (\mathbf{k}^\vee)^\star) \zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_b) \circledast (\mathbf{l}^\vee)^\star) = -\zeta^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_m) \circledast ((\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l})^\vee)^\star)$$

が成り立つ．

正整数 n とインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して、記号

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}, \quad [r]_{\mathbf{k}}^1 = \{i \in [r] \mid k_i = 1\}$$

を用いる．また、 $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ は上昇べきの記号である．

$$\begin{aligned} G_N(\mathbf{k}; t) = & \sum_{A \subset [r]_{\mathbf{k}}^1 \setminus \{r\}} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_i \leq n_{i+1} \text{ } (i \in A \cap [r-1] \text{ or } i+1 \in [r] \setminus A) \\ n_i < n_{i+1} \text{ } (i \in [r-1] \setminus A \text{ and } i+1 \in A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i + t} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right) \\ & \cdot (-1)^{n_r-1} \binom{t}{n_r} \frac{(1-N)_{n_r}}{(1-N-t)_{n_r}} \end{aligned}$$

と定義すると、Taylor 展開公式

$$G_N(\mathbf{k}; t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta_N^\diamond((\underbrace{1, \dots, 1}_m) \circledast \mathbf{k}^\star) t^m$$

を証明できる．一方、 $F_N(\mathbf{k}; t)$ を

$$F_N(\mathbf{k}; t) = \sum_{A \subset [r]} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_{i-1} \leq n_i \text{ } (1 < i \notin A) \\ n_{i-1} < n_i \text{ } (1 < i \in A)}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{(N - n_i + t)^{k_i}} \right) \left(\prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right)$$

と定義すると、

$$F_N(\mathbf{k}; t) F_N(\mathbf{l}; t) = F_N(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}; t)$$

が成り立つことを確認できる．以上より、川島関係式のダイヤモンドリフトを証明するためには、次の恒等式の成立を示せばよい．

定理 9.2 (Hirose–Maesaka–Seki–Watanabe [6]). 任意のインデックス $\mathbf{k}$ に対して、

$$F_N(\mathbf{k}; t) = G_N(\mathbf{k}^\vee; t)$$

が成り立つ．

これは, $t \rightarrow \infty$ とすると, Hoffman–川島の恒等式に一致する. 示すべき式は非常に複雑であるが^{*1}, 3 節の証明を適切に拡張することによって証明できる (必要な輸送関係式の形は同じである). 以下に, 連結和の定義のみ紹介しておこう.

定義 9.3. 連結和を

$$\begin{aligned}
& Z_{N,t}(k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s) \\
&= \sum_{A \subset [r]_k} \sum_{B \subset [s]_l} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in [N-1]^r \\ n_i \leq n_{i+1} \text{ (} i \in A \cap [r-1] \text{ or } i+1 \in [r] \setminus A \text{)} \\ n_i < n_{i+1} \text{ (} i \in [r-1] \setminus A \text{ and } i+1 \in A \text{)}}} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_s) \in [N-1]^s \\ m_{j-1} \leq m_j \text{ (} 1 < j \notin B \text{)} \\ m_{j-1} < m_j \text{ (} 1 < j \in B \text{)}}} \left(\prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i + t} \right) \left(\prod_{i \in [r] \setminus A} \frac{1}{n_i^{k_i}} \right) \\
& C_{N,t} \left((1 - \delta_{r \in A}) \cdot n_r + \delta_{r \in A} \cdot (N - n_r + t), (1 - \delta_{s \in B}) \cdot m_1 + \delta_{s \in B} \cdot (N - m_1 + t) \right) \\
& (-1)^{\#B} \left(\prod_{j \in B} \frac{1}{(N - m_j + t)^{l_j}} \right) \left(\prod_{j \in [s] \setminus B} \frac{1}{m_j^{l_j}} \right)
\end{aligned}$$

と定義する. ここで, $\delta_{r \in A}$ は $r \in A$ のときは 1 で, $r \notin A$ のときは 0 と定義される記号で, コネクタは

$$\begin{aligned}
C_{N,t}(n, m) &= (-1)^{n-1} n \binom{m}{n} \frac{(1 - N - t)_{n+m}}{(1 - N - t)_n (1 - N - t)_m}, \\
C_{N,t}(N - n + t, m) &= \frac{N - n + t}{N - n - m + t} C_{N,t}(n, m), \\
C_{N,t}(n, N - m + t) &= C_{N,t}(n, m - 1), \\
C_{N,t}(N - n + t, N - m + t) &= \frac{(N - n + t)(N - m + t)}{m(N - n - m + t)} C_{N,t}(n, m)
\end{aligned}$$

と定義される.

極限 $t \rightarrow \infty$ をとれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{N,t}(n, m) = (-1)^{n-1} n \binom{m}{n}$$

と, 古典コネクタに一致する.

なお, 本稿では詳細を紹介することはできないが, 多重ゼータダイヤモンド値の間の線形関係式は Drop1 関係式とよばれる関係式族で尽くされることが, [6] において既に証明されている. 多重ゼータ値の間で成立することが知られていた Drop1 関係式をダイヤモンドドリフトしたのではなく, Drop1 関係式は [6] において初めて発見された関係式族である. 尽くされるといっても, Drop1 関係式に川島関係式の線形部分が含まれているかどうかは非自明であるし, 代数関係式としての川島関係式がダイヤモンドドリフトするかどうかについても非自明である (多重ゼータダイヤモンド値自体が調和積公式を一般には満たさ

^{*1} $G_N(\mathbf{k}; t)$ はインデックスの成分 1 を特別視した, “ダイヤモンド的な” 和であるが, $F_N(\mathbf{k}; t)$ はそうではない (ので, スター版調和積公式が自然に示される). これら異質なものが繋がるということにはわかには信じられなかった.

ないことを考えると, ある種の調和積的現象である, 川島関係式がフルにリフトすることはかなり意外であった).

多重ゼータダイヤモンド値の間の線形関係式が Drop1 関係式で尽くされることと合わせると, Drop1 関係式から川島関係式の線形部分が導出されることが従う (これは, 抽象的な関係式族としての導出関係であるため, 本来多重ゼータダイヤモンド値とは無関係の事柄である). このような導出関係が Euler の恒等式の大幅な一般化から得られるという事実は興味深いといえよう.

終わりに, 本稿で紹介された Euler の恒等式の一般化に限っても全てを含む一般公式は得られていないので, まだまだ拡張の余地がありそうである.

参考文献

- [1] S.-J. Bang, J. E. Dawson, A. N. 't Woord, O. P. Lossers, V. Hernandez, *Problems and solutions: Solutions: A reciprocal summation identity: 10490*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 588–590.
- [2] D. M. Bradley, *Duality for finite multiple harmonic q -series*, Disc. Math. **300** (2005), 44–56.
- [3] K. Dilcher, *Some q -series identities related to divisor functions*, Disc. Math. **145** (1995), 83–93.
- [4] L. Euler, *Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium*, Nova Acta Acad. Sci. Imp. Petropol. **15** (1799-1802; published 1806), 33–43; reprinted in Leonhardi Euleri Opera omnia, Series I, vol.16, pt.2, ed. C. Boehm, B. G. Teubner, Leipzig, 1935, 104–116 (Eneström E726).
- [5] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara, S. Saito, *OHNO-type relations for classical and finite multiple zeta-star values*, Kyushu J. Math. **75** (2021), 115–124.
- [6] M. Hirose, T. Maesaka, S. Seki, T. Watanabe, *The $\mathbb{Z}$ -module of multiple zeta values is generated by ones for indices without ones*, arXiv:2505.07221.
- [7] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.
- [8] K. Kamano, *A q -analogue of Boyadzhiev-Mneimneh-type binomial sums of finite multi-polylogarithms*, arXiv:2510.25059.
- [9] M. Kaneko, D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, (to appear) Advanced Studies in Pure Math.
- [10] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.
- [11] G. Kawashima, T. Tanaka, *Newton series and extended derivation relations for multiple L -values*, arXiv:0801.3062.
- [12] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.
- [13] H. Prodinger, *A q -analogue of a formula of Hernandez obtained by inverting a result of Dilcher*, Australas. J. Combin. **21** (2000), 271–274.

- [14] S. Roman, *The harmonic logarithms and the binomial formula*, J. Combin. Theory Ser. A **63** (1993), 143–163.
- [15] K. Sakugawa, S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, J. Algebra **469** (2017), 323–357.
- [16] S. Seki, *The p -adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, Tohoku Math. J. **71** (2019), 111–122.
- [17] S. Seki, *Connectors*, RIMS Kôkyûroku **2160** (2020), 15–27.
- [18] S. Seki, S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. Number Theory **15** (2019), 1261–1265.
- [19] S. Seki, S. Yamamoto, *Ohno-type identities for multiple harmonic sums*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), 673–686.
- [20] Z. H. Sun, *Congruences involving Bernoulli and Euler numbers*, J. Number Theory **128** (2008), 280–312.
- [21] R. Tauraso, J. Zhao, *Congruences of alternating multiple harmonic sums*, J. Comb. Number Theory **2** (2010), 129–159.
- [22] L. Van Hamme, *Advanced problem 6407*, Amer. Math. Monthly **40**, (1982), 703–704.
- [23] S. Yamamoto, *A note on Kawashima functions*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr. 2019/1, 151–163.

Kirillov-Reshetikhin 加群に付随する幾何クリスタルの 装飾関数について

尾角 正人 (大阪公立大学)*

アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}$ のディンキン図の 0 以外の頂点 r に対して、Kirillov-Reshetikhin 加群の系列および KR クリスタルの系列が存在し、それに対応して Berenstein-Kazhdan の意味での幾何クリスタルが存在することが予想されている。今回、 $\mathfrak{g}$ がアフィン ADE 型で、 r が極小ウェイト表現に対応する頂点のとき、[1] の意味での装飾関数 (decoration function) を求めたので報告したい。これを超離散 (トロピカル) 化することにより、任意の l で KR クリスタル $B^{r,l}$ の整多面体表示が得られる。

1 幾何クリスタル

幾何クリスタルは柏原クリスタルの代数幾何版として Berenstein-Kazhdan が導入したもので、クリスタル上の組合せ論的作用 $\tilde{e}_i$ や関数 ε_i, φ_i が代数群が作用する多様体上の有理変換 e_i^c 、有理関数 ε_i, φ_i に置き換わり、種々の公理を満たすものであり、それが正值性をもてば超離散化により柏原クリスタルが得られる [1, 5]。KR クリスタルに対しても対応する幾何クリスタルが存在すると予想されていて、非例外型アフィンリー環の自然表現に対応する場合や D_n, E_6 型の随伴表現の場合、 A_n 型のすべての場合では予想が成り立つことがわかっていて [2, 3, 4]、こちらでは超離散化により完全結晶の連接族の極限が出てくる。

例 1 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}^\times\} \\ \gamma_i(x) &= \begin{cases} \frac{x_i^2}{x_{i-1}x_{i+1}} & (i \neq 0) \\ \frac{1}{x_1x_n} & (i = 0) \end{cases} \\ \varepsilon_i(b) &= \frac{x_{i+1}}{x_i} \\ e_i^c(x) &= \begin{cases} (x_1, \dots, cx_i, \dots, x_n) & (i \neq 0) \\ (c^{-1}x_1, c^{-1}x_2, \dots, c^{-1}x_n) & (i = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと $(\mathcal{V}, e_i^\bullet, \gamma_i, \varepsilon_i)$ は $r = 1$ (自然表現) に対応する幾何クリスタルである。ただし、 $x_0 = x_{n+1} = 1$ とする。

2 装飾関数

幾何クリスタルに装飾関数という概念がある [1]。これは

$$f(e_i^c(x)) = f(x) + \frac{c-1}{\varphi_i(x)} + \frac{c^{-1}-1}{\varepsilon_i(x)}$$

* e-mail: okado@omu.ac.jp

を満たす有理関数で、装飾関数付きの幾何クリスタルを超離散化することにより正規クリスタル (normal crystal) が得られる。正規クリスタルとは通常可積分表現のクリスタル同様、関数 ε_i が $\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}$ の意味をもつようなクリスタルのことである。今回、極小ウェイト表現に付随する KR クリスタルのときに装飾関数を求めた。

型	極小ウェイト
A_n	$\varpi_1, \dots, \varpi_n$
B_n	ϖ_n
C_n	ϖ_1
D_n	$\varpi_1, \varpi_{n-1}, \varpi_n$
E_6	ϖ_1, ϖ_6
E_7	ϖ_7

例 2 $A_n^{(1)}, r = 1; f(x) = \frac{1}{lx_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + x_n$
 $D_n^{(1)}, r = 1; f(x) = \frac{1}{l\bar{x}_1} + \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} + \dots + \frac{\bar{x}_{n-2}}{\bar{x}_{n-1}} + \frac{\bar{x}_{n-2}}{x_{n-1}} + \frac{\bar{x}_{n-1}}{x_{n-2}} + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} + \dots + \frac{x_2}{x_1} + x_1$

これらの装飾関数は KR クリスタル $B^{r,1}$ のクリスタルグラフを調べることにより得られる。

3 KR クリスタルの整多面体表示

超離散極限をとることにより、KR クリスタル $B^{r,l}$ の正多面体表示が得られる。

例 3 $A_n^{(1)}, r = 1;$

$$-l \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 0$$

$D_n^{(1)}, r = 1;$

$$-l \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_{n-2} \leq \frac{x_{n-1}}{\bar{x}_{n-1}} \leq x_{n-2} \leq \dots \leq x_1 \leq 0$$

参考文献

- [1] A. Berenstein, D. Kazhdan, Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases, Quantum groups, 13-88, Contemp. Math, **433**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [2] M. Kashiwara, T. Nakashima, M. Okado, Affine geometric crystals and limit of perfect crystals, Transactions in American Mathematical Society **360** (2008), no.7, 3645-3686.
- [3] 柏原、中島、尾角, 幾何クリスタルと可積分系, RIMS 講究録, 第 1541 巻, 2007 年 150-165.
- [4] K. C. Misra, T. Nakashima, Affine geometric crystal of $A_n^{(1)}$ and limit of Kirillov-Reshetikhin perfect crystals, J. Algebra **507** (2018), 249-291.
- [5] T. Nakashima, Geometric crystals on Schubert varieties, Journal of Geometry and Physics, **53** (2005), (2), 197-225.

ランク 3 団輪状行列の G 扇の構造

赤木 亮太 (名古屋大学)*

1 団代数と g ベクトル

団代数とは, 2000 年ごろに Fomin, Zelevinsky により導入された, 可換環のクラスである [1]. 初期交換行列 (initial exchange matrix) とよばれる歪対称化可能行列 B を一つ与えるごとに, 初期変数 $x_1, \dots, x_n$ から変異 (mutation) と呼ばれる関係式を $\mathbf{w} = [k_1, \dots, k_r]$ の順に適用することで, 団変数 (cluster variable) と呼ばれる生成元の族 $x_1^{\mathbf{w}}, \dots, x_n^{\mathbf{w}}$ と別の交換行列 $B^{\mathbf{w}}$ が構成される. 団代数は団変数全体が生成する代数として定義される. 変異の有する豊富な性質により, 団代数は代数分野に限らず, あらゆる側面から研究されている. 団変数は分離公式 (separation formula) $x_j^{\mathbf{w}} = x_1^{g_{1j}^{\mathbf{w}}} \cdots x_n^{g_{nj}^{\mathbf{w}}} F_j^{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{y}})$ と呼ばれる表示を持つことが知られている [2]. ここで, $g_{1j}^{\mathbf{w}}, \dots, g_{nj}^{\mathbf{w}} \in \mathbb{Z}$ であり, $F_j^{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{y}})$ は, 定数項が 1 の, $\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_n})$ 変数多項式である. 単項式部分の次数を並べた列ベクトル $\mathbf{g}_j^{\mathbf{w}} = (g_{1j}^{\mathbf{w}}, \dots, g_{nj}^{\mathbf{w}})^{\top}$ を g ベクトルとよぶ. このように団変数のある種の次数という, 特殊な情報で定義されている g ベクトルであるが, これは団変数のもつ周期性を完全に反映している (つまり $x_j^{\mathbf{w}} = x_i^{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \mathbf{g}_j^{\mathbf{w}} = \mathbf{g}_i^{\mathbf{u}}$) [3]. このことから, g ベクトルは団代数の研究において中心的役割を果たす.

2 G 扇

g ベクトルには, ルート系のコルートに類似する現象が観察されている. その中で最も重要な対象として, G 扇がある. 各 $\mathbf{w}$ に対し, g ベクトルを並べた行列 $G^{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}_1^{\mathbf{w}}, \dots, \mathbf{g}_n^{\mathbf{w}})$ を G 行列といい, g ベクトルの非負の線形結合として張られる錐 $\mathcal{C}(G^{\mathbf{w}})$ を G 錐と呼ぶ. これは, n 次元の単体的錐となることが知られている. これら G 錐の全体と, その面がなす集合を G 扇と呼び, $\Delta(B)$ で表す. G 扇は「1. 面をとる操作で閉じている」, 「2. 二つの錐の共通部分は, 両方の錐の面である」という性質を満たし, 通常の意味での (無限個を許す) 扇となることが知られている [3]. この G 扇は, ルート系における Coxeter の部屋 (Coxeter chamber) 構造の類似と考えられている.

このように, g ベクトルは団変数の周期性を保存するだけでなく, 幾何学的に良い構造を与える点で興味深い研究対象である. 一方で, その構造は非常に複雑であり, 現在その個別具体的な性質はほとんど判明していない.

* 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

e-mail: ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/ryotaakagi/english?authuser=0>

本講演の内容は, 中国科学技術大学院大学の Zhichao Chen 氏との共同研究に基づく [4]. 本研究は科研費 (課題番号: JP25KJ1438) の助成を受けたものである.

キーワード: cluster algebras, G -fan (g -vector fan)

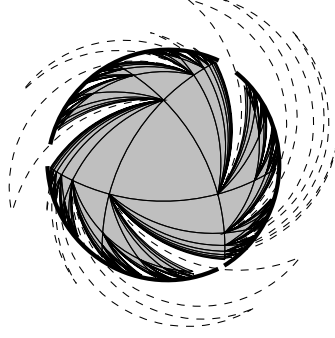


図 1 団輪状行列の G 扇 (を立体射影したもの). 太線が大域上界, 破線が局所上界.

3 主定理・ランク 3 団輪状行列に対する G 扇

本講演の内容は, G 扇の詳細な様子について, ランク 3 の**団輪状行列**と呼ばれるクラスで調べたものである. ここで, 歪対称化可能行列 B が**輪状** (cyclic) であるとは, B の各要素の符号が $\pm \begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$ であることをいい, B が**団輪状** (cluster-cyclic) であるとは, 全ての変異した行列 $B^{\mathbf{w}}$ が輪状であることをいう.

このクラスの G 扇は, 図 1 に描かれる, 次の二種類の上界により説明される.

定理 1 ([4]) 次の二種類の上界が定まる.

1. 初めの変異 $i = 1, 2, 3$ により得られた G 錐 $\mathcal{C}(G^{\mathbf{w}})$ ($\mathbf{w} = [i, \dots]$) は, ある i にのみ依存する二葉双曲面 (もしくはそれが退化したもの) の一方の連結成分を包含する錐 Q_i^+ に含まれる (**大域上界**).
2. (全てではないが) 多くの $\mathbf{w}$ に対して, その $\mathbf{w}$ 以降に変異を適用して出現する G 錐は, ある単体的錐 $\mathcal{V}^{\mathbf{w}}$ に包含される (**局所上界**).

この定理の応用として, 次の g ベクトルに関する性質が導かれる.

定理 2 ([4]) ランク 3 の団輪状行列 B について, 次の事実が成り立つ.

1. g ベクトルは, 自明なものを除いて一切の周期性を持たない.
2. 各 $\mathbf{w}$ と $j = 1, 2, 3$ に対し, $g_{j1}^{\mathbf{w}}, g_{j2}^{\mathbf{w}}, g_{j3}^{\mathbf{w}} \geq 0$ であるか, $g_{j1}^{\mathbf{w}}, g_{j2}^{\mathbf{w}}, g_{j3}^{\mathbf{w}} \leq 0$ であるかのいずれか一方であり, さらにその符号の族は, 初期交換行列の符号のみにより決まる. また, その符号を具体的に求めることができる.

参考文献

- [1] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529; MR1887642
- [2] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164; MR2295199
- [3] M. Gross et al., Canonical bases for cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 497–608; MR3758151
- [4] R. Akagi and Z. Chen, Geometric structures of G -fans associated with rank 3 cluster-cyclic exchange matrices, arXiv preprint arXiv:2603.16326 (2026).

量子スピン系における Yang-Baxter可積分性の直接判定法

山口 瑞樹（東大総合文化）

白石 直人（東大総合文化）、石井 風雅（東大教養）との共同研究

量子スピン鎖の可積分性を定式化する標準的な方法の一つは Yang-Baxter 方程式である．局所空間を有限次元ベクトル空間 V とする．スペクトルパラメータ x に依存する $V \otimes V$ 上の線形作用素の族 $R(x)$ が，正則性条件

$$R(0) = P$$

および差分型 Yang-Baxter 方程式

$$R_{12}(x)R_{13}(x+y)R_{23}(y) = R_{23}(y)R_{13}(x+y)R_{12}(x)$$

を満たすとき，対応する転送行列の可換族が得られる．このとき

$$h = PR'(0)$$

により局所ハミルトニアン密度が定まり，最近接スピン鎖

$$H = \sum_i h_{i,i+1}$$

の Yang-Baxter 可積分性が従う．しかし，この定式化は補助的対象である R 行列を出発点とするため，与えられた h から可積分性を直接判定するものではない．

ハミルトニアンだけで書かれる自然な必要条件として，Reshetikhin 条件

$$[Q_3^B, H] = 0, \quad Q_3^B = \sum_i [h_{i,i+1}, h_{i+1,i+2}]$$

がある．実際， $R(x)$ を

$$R(x) = P(1 + xh + x^2r^{(2)} + \dots)$$

と展開して Yang-Baxter 方程式に代入すると，この条件は x^2y 係数から得られる最初の非自明な整合条件である．Yang-Baxter 可積分性の初期の研究において，Kulish-Sklyanin, Öttinger-Honerkamp, Jimbo-Miwa らは，この必要条件が正則差分型 Yang-Baxter 方程式に対して十分条件でもあると予想していた．

本講演ではこの予想を肯定的に解決する．すなわち，有限次元局所空間上の局所相互作用 h が Reshetikhin 条件を満たすならば，

$$R(0) = P \quad D'(0) = Ph$$

を満たす差分型 Yang–Baxter 方程式の解 $R(x)$ が存在する．したがって，正則差分型の範囲では，Reshetikhin 条件は Yang–Baxter 可積分性の必要十分条件を与える．さらに，対応する R 行列は形式冪級数として逐次的に構成できる．

証明の中心は Yang–Baxter 方程式の defect 解析である．構成中の $R(x)$ に対して

$$R_{12}(x)R_{13}(x+y)R_{23}(y) - R_{23}(y)R_{13}(x+y)R_{12}(x) = D_{123}(x, y)$$

とおき，defect $D_{123}(x, y)$ の最低次数成分を追跡する．もし Yang–Baxter 方程式が破れるならば，最低次数の非零 defect が存在する．Reshetikhin 条件の下で構成された $R(x)$ について，この最低次数 defect が満たす整合性を導き，それが非零であることと矛盾することを示す．これにより defect は全次数で消え，Yang–Baxter 方程式が従う．

最後に，量子スピン鎖における Liouville–Arnold 型の問題との関係を述べる．古典可積分系では，十分な数の保存量の存在と可解性が Liouville–Arnold 定理により結びつけられる．量子スピン鎖においても，Yang–Baxter 可積分性と無限個の局所保存量の存在は対応するはずだと期待されている．本講演の主定理は，Yang–Baxter 可積分性を R 行列の存在からハミルトニアン密度 h の条件へと言い換えるものであり，この期待を保存量の問題と直接比較するための橋渡しを与える．実際，等方的最近接スピン鎖については，局所保存量に関する白石・山口の結果と本講演の主定理を組み合わせることで，任意の局所次元に対して，Yang–Baxter 可積分性と無限個の局所保存量の存在の同値性が得られる．この意味で，等方的最近接スピン鎖に対する量子 Liouville–Arnold 型定理が成立する．

The Kontsevich invariant and the action of the Grothendieck–Teichmüller group on 2-component string links

小谷 久寿 (九大 IMI)

野崎 雄太 (北大理)

1 はじめに

絡み目に対する Kontsevich 不変量は associator の取り方に依らない一方で, タングルに対しては一般にはその取り方に依ることが知られている. 本講演では, 2 成分ストリングリンクの場合に焦点を当て, Kontsevich 不変量の associator の取り方依存性について考察する. Kontsevich 不変量の associator の取り替え問題は Grothendieck–Teichmüller 群を通して基本群へのガロア作用及びその拡張である結び目へのガロア作用と密接に関係している. 本講演の考察の帰結として, Grothendieck–Teichmüller 群の冪単部分 $GT_1(\mathbb{K})$ の副代数的ストリングリンク (proalgebraic string link) への作用が非自明であることが従い, Furusho によるある問題に対して部分的な解決を与える. 本講演の内容は [3] に基づく. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする.

2 Kontsevich 不変量の associator 依存性

Kontsevich 不変量は Jacobi 図と呼ばれるあるグラフのなすベクトル空間に値をもつ q タングルに対する位相不変量である. ここで, q タングルとはその端点に非結合的語を備えたタングルのことである. この不変量は, 元々は絡み目に対して Kontsevich により組紐群の KZ 方程式のモノドロミー表現の拡張として Chen の反復積分を用いた形で導入され, その後 Le–Murakami により Drinfel’d associator を用いた組合せ的構成が与えられた. 一般には, Kontsevich 不変量は associator の取り方に依るため, associator Φ により定まる Kontsevich 不変量を Z_Φ と記す. 不変量 Z_Φ の associator の取り方依存性について, 純組紐群の場合はわかりやすいが, 純組紐のホモロジーシリンダー的な拡張であるストリングリンクの場合については, 成分数が 2 の場合が微妙なケースとなっており注意深く調べる必要がある. 本研究では, 2 成分の場合について以下の結果を得た.

命題 2.1 T を 2 成分ストリングリンクとし, Φ, Φ' を associators とする. このとき, $Z_\Phi(T)_{\leq 6} = Z_{\Phi'}(T)_{\leq 6}$ が成り立つ.

すなわち, 少なくとも次数 6 以下では 2 成分ストリングリンクの Kontsevich 不変量

本研究は JSPS 科研費 JP23K12974, JP25K06954 及び九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用・共同研究拠点 (FY2025 研究集会 (II)「トポロジーとコンピュータ 2025」(2025a038)) の支援を受けたものである.

は associator の取り方に依らない。しかし、以下の定理からわかるように、より高次の部分については一般には associator の取り方に依存する。

定理 2.2 次を満たすような 2 成分ストリングリンク T_n ($n \geq 2$) が存在する: $\mathbb{K}$ に係数をもつ任意の associator Φ に対して, $\mathbb{K}$ に係数をもつある associator Φ' が存在して

$$Z_\Phi(T_n)_{\leq 2n+3} = Z_{\Phi'}(T_n)_{\leq 2n+3} \text{ and } Z_\Phi(T_n)_{2n+4} \neq Z_{\Phi'}(T_n)_{2n+4}$$

が成り立つ。さらに, Φ が horizontal であるとき, Φ' も horizontal であるように取れる。

ここで, 2 変数の非可換形式的冪級数として導入された Drinfel'd associator ([1]) から得られる associator のことを horizontal であると呼んでいることに注意する。2 成分ストリングリンクの場合でも, 一般には, Z_Φ は associator の取り方によることがわかったが, 多くのウェイトシステムを取ると取り方に依らなくなることにもわかった。このことから 2 成分の場合の取り方依存性問題の微妙さが窺える。

定理 2.3 2 本糸上の (可算) 無限個のウェイトシステム W が存在して, 合成写像 $W \circ Z_\Phi$ が associator Φ の取り方に依らない。

3 副代数的ストリングリンクへの Grothendieck–Teichmüller 群作用

Furusho により Grothendieck–Teichmüller 群 $GT(\mathbb{K})$ の副代数的ストリングリンクへの作用が調べられており, そこで 2 成分の場合の作用が忠実か否かについて問題が提出されていた ([2, Problem 4.17]). 本講演の考察からこの問題への部分的解答を得る。

定理 3.1 Grothendieck–Teichmüller 群 $GT(\mathbb{K})$ の冪単部分 $GT_1(\mathbb{K})$ の副代数的 2 成分ストリングリンクへの作用は非自明である。

	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$
kernel $\text{Ker } \rho$	$\text{Ker } \rho = GT_1(\mathbb{K})$ ([2])	$\text{Ker } \rho \subsetneq GT_1(\mathbb{K})$ (定理 3.1)	$\text{Ker } \rho = \{e\}$ ([2])
faithfulness	far from faithful	?	faithful

表 1 副代数的 n 成分ストリングリンク上の $GT(\mathbb{K})$ -表現 ρ の核と忠実性。

参考文献

- [1] V. G. Drinfel'd. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Leningr. Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [2] H. Furusho. Galois action on knots II: Proalgebraic string links and knots. In *Periods in quantum field theory and arithmetic*, volume 314 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 541–591. Springer, Cham, 2020.
- [3] H. Kodani, Y. Nozaki. The Kontsevich invariant and the action of the Grothendieck–Teichmüller group on 2-component string links. arXiv:2512.19132, 2025.

階段状 Young 図形のフック長比と Jacobi 多項式の特殊値

島崎 達史 (明石工業高等専門学校)*

Young 図形 λ に付随する半標準 Young 盤 (以下, 半標準盤) の個数 $|\text{SST}(\lambda, n)|$ は, 表現論や幾何学における不変量の計算において重要な役割を果たす. Frame–Robinson–Thrall (1954) によるフック長公式以降, その q 類似や歪形状への拡張, さらに K 理論への一般化が研究されてきた. 本講演では, 階段型分割 $\delta_k = (k-1, k-2, \dots, 1)$ に着目し, 隣接する階段型分割に対応する半標準盤の個数比が Jacobi 多項式の特殊値を用いて表されることを紹介する.

Jacobi 多項式 $P_k^{(\alpha, \beta)}(z)$ を Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ を用いて次で定める.

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_k}{k!} {}_2F_1\left(-k, k+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right).$$

Theorem 1 ([7]). 正の整数 k および n ($n \geq k$) に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{|\text{SST}(\delta_{k+1}, n)|}{|\text{SST}(\delta_k, n)|} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} P_k^{\left(\frac{n-k-1}{2}, -\frac{n-k-1}{2}\right)}(-1). \quad (1)$$

階段型分割のフック長・コンテンツの対称性により, フック長公式から導かれる積は Jacobi 多項式の特殊値として表される. 実際, 対応する ${}_2F_1$ のパラメータは $k + \alpha + \beta + 1 = 0$ を満たす.

Example 2. 正の整数 $k = 4, n = 6$ の場合を考える. 隣り合う階段型形状 $\delta_4 = (3, 2, 1)$ および $\delta_5 = (4, 3, 2, 1)$ の Young 図形は以下の通りである.

$$\delta_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \quad \delta_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}.$$

フック長公式

$$|\text{SST}(\lambda, n)| = \prod_{u \in \lambda} \frac{n + c(u)}{h(u)}$$

を用いると, $|\text{SST}(\delta_4, 6)| = 896$, $|\text{SST}(\delta_5, 6)| = 8064$ が得られ, 左辺の比は

$$\frac{|\text{SST}(\delta_5, 6)|}{|\text{SST}(\delta_4, 6)|} = \frac{8064}{896} = 9$$

である. 一方, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{11}{2}$ のとき, 超幾何関数のパラメータが $k + \alpha + \beta + 1 = 0$ を満たすため, Jacobi 多項式の特殊値は

$$\frac{2^8(4!)^2}{8!} \times P_4^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)}(-1) = \frac{128}{35} \times \frac{315}{128} = 9$$

となり, 定理の主張 (1) が確認できる.

* 〒674-8501 兵庫県明石市魚住町西岡 679-3 明石工業高等専門学校 (教養学群)

e-mail: t.shimazaki@akashi.ac.jp

キーワード: Jacobi 多項式, 階段型分割, Grothendieck 多項式, K 理論的 Schur P 多項式

定理 1 に現れる Jacobi 多項式は, K 理論的対称関数の枠組みにおいても現れる. 複素数 β を K 理論のパラメータ (Jacobi 多項式のパラメータとは無関係とする) とし, シフトされた Young 図形を $\tilde{\lambda}$ で表す. Lascoux–Schützenberger [4] が導入した Grothendieck 多項式 $G_{\lambda}(x \mid \beta)$ および Ikeda–Naruse [6] による K 理論的 Schur P 多項式 $GP_{\tilde{\lambda}}(x \mid \beta)$ に対し, Lewis–Marberg [5] は, $G_{\delta_k}(x \mid \beta) = GP_{\tilde{\delta}_k}(x \mid \beta)$ を示した. この等式と Holman の超幾何級数 $F^{(n)}$ [3] による表示式を用いることで, 次の漸化式が得られる.

Proposition 3 ([7]). 正の整数 k および n ($n \geq k$) に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{G_{\delta_{k+1}}(1, \dots, 1 \mid \beta)}{G_{\delta_k}(1, \dots, 1 \mid \beta)} = \frac{GP_{\tilde{\delta}_{k+1}}(1, \dots, 1 \mid \beta)}{GP_{\tilde{\delta}_k}(1, \dots, 1 \mid \beta)} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} P_k^{\left(\frac{n-k-1}{2}, \frac{-n-k-1}{2}\right)}(-1) \times \frac{F_{\delta_{k+1}}^{(n)}(-\beta)}{F_{\delta_k}^{(n)}(-\beta)}.$$

Grothendieck 多項式および K 理論的 Schur P 多項式において, 特殊化 $\beta = 1$ はそれぞれ Buch [1] により導入された集合値半標準盤, および Ikeda–Naruse [6] によるシフトされた集合値半標準盤の数え上げに対応する. これらは半標準盤の一般化であり, K 理論的対称関数の組合せ論的観点や超幾何関数との関連などからも研究されている [2]. 特に, 特殊化 $\beta = 1$ の下では次が成り立つ.

Proposition 4 ([7]). 階段形 δ_k およびシフトされた階段形 $\tilde{\delta}_k$ に対し, $n \geq k - 1$ とする. 変数 $x_i = 1$ かつ $\beta = 1$ の特殊化の下で, 集合値半標準盤およびシフトされた集合値半標準盤の個数は, いずれも $3^{\binom{k-1}{2}}$ で割り切れる.

Proposition 3 は $\beta = 0$ において 定理の主張 (1) を与える. 一方, $\beta = 1$ において現れる可除性は, 励起 Young 図形の構造に起因する. 本講演では, この可除性の組合せ論的意味について, 励起 Young 図形を用いて説明する.

参考文献

- [1] A. S. Buch, *A Littlewood–Richardson rule for the K -theory of Grassmannians*, Acta Mathematica, **189**(1): 37–78, 2002.
- [2] T. Fujii, T. Nobukawa, and T. Shimazaki, *Special values of Grothendieck polynomials in terms of hypergeometric functions*, Hiroshima Math. J., **55**(2), 167–182, 2025.
- [3] W. J. Holman III, *Summation Theorems for Hypergeometric Series in $U(n)$* , SIAM J. Math. Anal., **11**(3), 523–532, 1980.
- [4] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Structure de Hopf de l’anneau de cohomologie et de l’anneau de Grothendieck d’une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **295**(11), 629–633, 1982.
- [5] J. B. Lewis and E. Marberg, *Enriched set-valued P -partitions and shifted stable Grothendieck polynomials*, Math. Z., **299**, 1929–1972, 2021.
- [6] T. Ikeda and H. Naruse, *K -theoretic analogues of factorial Schur P - and Q -functions*, Adv. Math., **243**, 22–66, 2013.
- [7] T. Shimazaki, *Staircase hook-length ratios and special values of Jacobi polynomials*, arXiv:2601.05471, 2026.

変形 Noumi–Sano 作用素の固有値問題の積分変換

信川 喬彦 (皇學館大学)*¹

藤井 大計 (お茶の水女子大学)*²

本稿では複素数 q, t を $0 < |q| < 1, 0 < |t| < 1$ ととり固定する. また, 上昇階乗幂を以下で定める:

$$(z; q)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - zq^j) \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}).$$

非負整数の組 $\mu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し, $T_{q,x}^{\pm\mu} = \prod_{i=1}^n T_{q,x_i}^{\pm\mu_i} : f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(q^{\pm\mu_1}x_1, \dots, q^{\pm\mu_n}x_n)$ とする. 変形 Noumi–Sano 作用素 $H_{m,n}$ は次で定義される差分作用素である [2]:

$$H_{n,m}(x, y; u) := \sum_{\mu \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} (t^{1-n} q^m u)^{|\mu|} (-tu)^{|I|} q^{\binom{|I|}{2}} B_{\mu,I}(x, y) T_{q,x}^{\mu} T_{t,y}^{-I},$$

$$B_{\mu,I}(x, y) = \frac{\Delta(q^{\mu}x)}{\Delta(x)} \prod_{i,j=1}^n \frac{(tx_i/x_j; q)_{\mu_i}}{(qx_i/x_j; q)_{\mu_i}} \prod_{\substack{1 \leq i,j \leq m \\ i \in I, j \notin I}} \frac{y_i - qy_j}{y_i - y_j} \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j \in I} \frac{1 - x_i/(ty_j)}{1 - q^{\mu_i}x_i/y_j} \prod_{j \notin I} \frac{1 - x_i/(qy_j)}{1 - q^{\mu_i-1}x_i/y_j} \right).$$

ここで, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$, $q^{\mu}x = (q^{\mu_1}x_1, \dots, q^{\mu_n}x_n)$ である. この作用素は適当な可換性を持ち, super-Macdonald 多項式 SP_{λ} [7] を固有函数にもつ. また, Kajihara の超幾何級数 [3, 4] の双対変換公式を用いることで, kernel identity と呼ばれる次の公式 [2] が得られている:

$$\mathcal{H}_{n,m}(x, y; u) \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) = \mathcal{H}_{N,M}(z, w; u) \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w).$$

ただし, $\mathcal{H}_{n,m} = \frac{(t^{1-n} q^m u; q)_{\infty}}{(tu; q)_{\infty}} H_{n,m}(x, y; u)$ であり,

$$\Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^N \frac{(tx_i z_j; q)_{\infty}}{(x_i z_j; q)_{\infty}} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^M \frac{(qty_i w_j; t)_{\infty}}{(ty_i w_j; t)_{\infty}} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^M (1 - tx_i w_j) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^N (1 - ty_i z_j)$$

である. 本稿の目的は, この公式を用いて変形 Noumi–Sano 作用素の固有値問題の積分変換を構成することである. 以降, $H_{n,m}(x, y; u) = \sum_{R=0}^{\infty} H_{n,m}^R(x, y) u^R$ とする.

*¹ 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704 皇學館大学 教育学部
e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

*² 〒112-8610 東京都文京区大塚 2-1-1 お茶の水女子大学 基幹研究院
e-mail: fujii.taikei@ocha.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:26KJ0129) の助成を受けたものである.

キーワード: q 超幾何積分, Macdonald 多項式, q 差分方程式

定理 $q^r = t^{-s}$ とする. 函数 φ が

$$H_{n,m}^d(tx^{-1}, q^{-1}y^{-1})\varphi(x, y) = E_d\varphi(x, y), \quad 0 \leq d \leq R$$

を満たしているする. この時, 積分路を適切に取れば

$$\begin{aligned} H_{N,M}^R(z, w) \int \varphi(x, y) x^r y^s \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) \rho(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \\ = \left(\sum_{k+l=R} \frac{(q^{N-n} t^{m-M}; q)_k}{(q; q)_k} (q^{1-N} t^M)^k t^{sl} E_l \right) \int \varphi(x, y) x^r y^s \Psi_{n,m;N,M}(x, y; z, w) \rho(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\rho(x, y) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (x_i/x_j; q)_\infty / (tx_i/x_j; q)_\infty \right) \left(\prod_{1 \leq i \neq j \leq m} (y_i/y_j; t)_\infty / (ty_i/y_j; t)_\infty \right)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 - q^{-1}x_i/y_j)(1 - ty_j/x_i)}.$$

証明の鍵は, 次の公式である:

$$T_{q,x}^{-\mu} T_{t,y}^I (B_{\mu,I}(x, y) \rho) = B_{\mu,I}(tx^{-1}, q^{-1}y^{-1}) \rho.$$

補足 定理の中の重み函数 ρ は, [1] の $\Delta_{n,m}$ を適当に変数変換したものである. また, $n = 0$ の場合 (A 型の Macdonald 作用素の固有値問題の積分変換) は [5] で得られている. $m = 0$ の場合は, Noumi-Sano 作用素 [6] の固有値問題の積分変換を与えている.

参考文献

- [1] F. Atai, M. A. Hallnäs and E. Langmann, Super-Macdonald polynomials: orthogonality and Hilbert space interpretation, *Comm. Math. Phys.* **388** (2021), no. 1, 435–468.
- [2] M. A. Hallnäs, E. Langmann, M. Noumi and H. Rosengren, From Kajihara’s transformation formula to deformed Macdonald-Ruijsenaars and Noumi-Sano operators, *Selecta Math. (N.S.)* **28** (2022), no. 2, Paper No. 24, 36 pp.
- [3] Y. Kajihara and M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant, *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), no. 3-4, 395–421.
- [4] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, *Adv. Math.* **187** (2004), no. 1, 53–97.
- [5] K. Mimachi and M. Noumi, An integral representation of eigenfunctions for Macdonald’s q -difference operators, *Tohoku Math. J. (2)* **49** (1997), no. 4, 517–525.
- [6] M. Noumi and A. Sano, An infinite family of higher-order difference operators that commute with Ruijsenaars operators of type A , *Lett. Math. Phys.* **111** (2021), no. 4, Paper No. 91, 17 pp.
- [7] A. N. Sergeev and A. P. Veselov, Deformed Macdonald-Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials, *Comm. Math. Phys.* **288** (2009), no. 2, 653–675.

A generalization of the μ -function associated with the Kontsevich function

渋川 元樹 (北見工業大学・工)*¹

土見 怜史 (近畿大学・総合理工)*²

概要

本講演では, (一般化) μ 函数 [ST] を 1 パラメーター変形した big μ 函数を導入し, それが q -Kummer 方程式に現れる発散級数解の q -Borel 総和と一致することを述べる. さらに q 差分関係式, 接続公式や対称性といったいくつかの諸公式を述べ, big q -Hermite 多項式との関連も併せて紹介する.

$q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1$ に対して,

$$(x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j), \quad (x)_n = (x; q)_n := \frac{(x; q)_\infty}{(q^n x; q)_\infty},$$

$$\theta_q(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (q)_\infty (-x)_\infty (-q/x)_\infty$$

とし, 適当な複素数 $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, x$ に対して,

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r+1} x^n,$$

$${}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r} x^n$$

とおき, 特に

$$\widehat{K}(x; a, b; q) := {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ - \end{matrix}; q, x \right)$$

とする. ここで $a = b = q, x = q^{-1}$ とすると, 結び目不変量の Kontsevich 函数に一致する [Za]. この $\widehat{K}$ は q -Kummer 方程式 (1) の原点周りの発散級数解である.

形式級数 $g(x) = \sum_n a_n x^n$ に対して q -Borel 変換, q -Laplace 変換を以下で定める [RSZ]:

$$\mathcal{B}_q(g)(\xi) := \sum_n a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n, \quad \mathcal{L}_q(g)(x, \lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n/x)}.$$

定義 1 (big μ 函数).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b; q) := \frac{(a, ayq, bx)_\infty}{\theta_q(-yq)(x)_\infty} {}_2\psi_2 \left(\begin{matrix} 1/ay, x \\ 0, bx \end{matrix}; q, a \right).$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 25KJ0371, 26K06837) の助成を受けたものである.

キーワード: Zwegers' μ -function, q -hypergeometric functions, q -Borel summable, knot invariants

*¹ 〒090-0015 北海道北見市公園町165 北見工業大学工学部

e-mail: g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

*² 〒657-8501 大阪府東大阪市小若江3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科

e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

定理 2 (発散級数解 $\widehat{K}$ の q -Borel 総和).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b; q) = \mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q \left(\widehat{K}(x; a, b; q) \right) (xy, -x).$$

命題 3 (q 差分関係式).

$$\begin{aligned} [(1 - abxy)T_x - (1 - (a + b)xy) - xyT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0, \\ [(1 - T_x) + (1 - a)(1 - b)xyT_aT_bT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0, \\ [(1 - T_b) - (1 - a)bxT_aT_bT_x^{-1}] \widehat{\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

定理 4 (q -Kummer 方程式の収束級数解 [Zh] との関係と接続公式).

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow q} \theta_q(-y) \widehat{\mu}(x, y; a, b) &= \frac{(a, b, abx, q, q)_\infty}{\theta_q(-xq)} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q/a, q/b \\ 0 \end{matrix}; q, abx \right), \\ \widehat{\mu}(x, 1/b; a, b) &= \frac{(ax, aq/b, q)_\infty}{\theta_q(-x)(q/b)_\infty} {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} q/b \\ aq/b \end{matrix}; q, \frac{q}{x} \right), \\ \widehat{\mu}(x, y; a, b) &= \frac{\theta_q(-c_2q)\theta_q(-c_2x/y)\theta_q(-c_1y)\theta_q(-c_1x)}{\theta_q(-x)\theta_q(-yq)\theta_q(-c_1c_2x/y)\theta_q(-c_1/c_2)} \widehat{\mu}(c_1x, y/c_1; a, b; q) \\ &\quad + \frac{\theta_q(-c_1q)\theta_q(-c_1x/y)\theta_q(-c_2y)\theta_q(-c_2x)}{\theta_q(-x)\theta_q(-yq)\theta_q(-c_1c_2x/y)\theta_q(-c_2/c_1)} \widehat{\mu}(c_2x, y/c_2; a, b; q) \end{aligned}$$

命題 5 (対称性).

$$\widehat{\mu}(x, y; a, b) = \widehat{\mu}(xq, y/q; a, b) = \widehat{\mu}(x, y; b, a) = \widehat{\mu}(y, x; a, b).$$

命題 6 (退化と特殊化).

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(x, y; a; q) &= iq^{-\frac{1}{8}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\mu}(x/q, y; a, b; q)}{(b, by)_\infty}, \\ H_n(\cos(u + v); b \mid q) &= e^{in(u+v)} \widehat{\mu}(q^n e^{-2\pi i u}, e^{-2\pi i v}; q^{-n}, b e^{i(u+v)}). \end{aligned}$$

ただし $\widehat{\mu}_1(x, y; a; q)$ は一般化 μ 関数 [ST], $H_n(\cos \theta; b \mid q)$ は big q -Hermite 多項式 [KLS]:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(x, y; a; q) &:= iq^{-\frac{1}{8}} \frac{(xy)^{\frac{\alpha}{2}}}{\theta_q(-y)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(axq^n)_\infty}{(xq^n)_\infty} (-y)^{-n} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ H_n(\cos \theta; b \mid q) &:= b^{-n} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, be^{i\theta}, be^{-i\theta} \\ 0, 0 \end{matrix}; q, q \right) = e^{in\theta} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, be^{i\theta} \\ - \end{matrix}; q, q^n e^{-2i\theta} \right). \end{aligned}$$

参考文献

- [KLS] R. Koekoek, P. A. Leskyand and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues*, Springer Science & Business Media, (2010).
- [RSZ] J. P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, *Local Analytic Classification of q -difference Equations*, *Astérisque* **355**, (2013).
- [ST] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, *A generalization of Zwegers' μ -function according to the q -Hermite-Weber difference equation*, *SIGMA* **19** (2023), 014, 23 pages.
- [Za] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, *Topology* **40** (2001), no. 5, 945–960.
- [Zh] C. Zhang, *Une sommation discrete pour des equations aux q -différences lineaires et a coefficients analytiques: theorie generale et exemples*, *Differential equations and the Stokes phenomenon*, 309–329, World Sci. Publ., (2002).