

✿ 日本数学会

2025年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

(1日目／9月16日)

2025年9月

於 名古屋大学

完備調和計量の拡張とその存在と一意性と近似について

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 調和計量が非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であるということ

X をコンパクトとは限らない連結 Riemann 面, $K_X \rightarrow X$ を X の標準束とする. 標準束の二乗根と $q \in H^0(K_X^2)$ を選ぶごとに, 巡回 Higgs 束とその上の調和計量という概念が定義される. 巡回 Higgs 束やその上の調和計量は Higgs 束のモジュライ空間の理論, 複素構造の変形理論, 曲面論や調和写像の理論, 数理物理, と関連し, 巡回 Higgs 束とその上の調和計量に関するこれまでの研究は上述したものの少なくともいずれかに主たる関心がありなされてきたのではないと思われるが, 今回の一連の講演では, 上述したものと関連はすれども, いずれとも少なくとも動機の上では異なる, 複素解析やポテンシャル論との関連による発展可能性というものを提示したい.

上述したことを説明するに当たって, まず, 巡回 Higgs 束上の調和計量が非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であるという講演者の立場・見方を説明したい. 以下, しばらくの間簡単のため $r = 2$ を仮定する. 標準束の二乗根 $K_X^{1/2} \rightarrow X$ ($K_X^{1/2} \otimes K_X^{1/2} \simeq K_X$) を一つ固定し, X 上の階数が 2 の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_2 \rightarrow X$ を $\mathbb{K}_2 := K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2}$ と定める. 各正則切断 $q \in H^0(K_X^2)$ に対し, $\text{End}\mathbb{K}_2$ に値をとる正則一形式 $\Phi(q) \in H^0(\text{End}\mathbb{K}_2 \otimes K_X)$ を以下のように定める:

$$\Phi(q) := \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この組 $(\mathbb{K}_2, \Phi(q))$ は階数が 2 の巡回 Higgs 束で, Hitchin による Higgs 束の最初の論文で導入されたものである. また, $\mathbb{K}_r$ 上の Hermite 計量 $h = (h_1, h_1^{-1})$ であって, その Chern 接続を ∇^h としたとき, h を用いて定義される接続 $D := \nabla^h + \Phi(q) + \Phi(q)^{*h}$ が平坦, すなわち D の曲率が零となるようなものを, 調和計量と呼ぶ. 調和計量から, X の普遍被覆空間 $\tilde{X}$ から $\text{SL}(2, \mathbb{C})/\text{SU}(2)$ もしくは $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ への調和写像が定まる. また, 調和計量の隣接成分の差を取ることで, $T_X := K_X^{-1}$ の Hermite 計量 (Kähler 計量) H_1 が $H_1 := h_1^{-2}$ と定まる. さらに q が $K_X^{-2} \rightarrow X$ に自然に誘導する q の零点において退化した Hermite 計量を h_q と書くとき, $H_1^{-1} \otimes h_q$ により自然に q の零点において退化した Hermite 計量 H_2 が定まる. さて, X が例えば楕円曲線であるとする. このとき, $(\mathbb{K}_2, \Phi(q)) \rightarrow X$ 上に調和計量が存在するための必要十分条件は, q が零切断でないことであり, このとき, $h = (h_1, h_1^{-1}) = (h_q^{-1/4}, h_q^{1/4})$ が調和計量となることは容易に確かめることができる. このとき, 上述した H_1, H_2 は $H_1 = H_2 = h_q^{1/2}$ となり, 平坦な定曲率

*e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

Kähler と一致する. 次に, X が閉双曲 Riemann 面であるとする. このとき, 調和計量は常に存在し, また $\det(h)$ を一つ固定すれば一意性も成り立つ. q には零点が存在するので, H_1, H_2 には零点の分だけ平坦な計量からのずれ (ひずみ) が生じるが, その最もひずみ切った極限, すなわち $q = 0$ の場合には, H_1 は双曲計量と一致する. 以上は $r = 2$ の場合の説明であったが, 同様のこと r がより一般の場合にも観察できる.

2 完備調和計量の拡張とその存在と一意性と近似について

調和計量を非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であると見做す立場からは, 双曲計量の側から見て双曲計量とのずれを生む付加構造 q は, q である必要はない. そこで, q が誘導する標準束上の特異 Hermite 計量 $h_q^{-1/r}$ をより一般の標準束上の半正值特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi}h_*$ へ拡張する. これは, X 上の巡回型分岐被覆上の調和計量と, その被覆次数無限大の極限をとって得られる Hermite 計量まで考察の対象にするということである. それらをより具体的にどのように研究するかは本講演に続く二つの講演において説明する. 通常の調和計量には完備性という概念が [1] で導入され, 完備調和計量の存在と一意性が [1] において示された. その定理の一般の $e^{-\varphi}h_*$ への拡張と, 完備計量の近似定理が本講演の主定理である. 以下, X が双曲的でない場合には, φ は恒等的に $-\infty$ ではないと仮定する.

Theorem 1. φ は以下の仮定を満たすとする:

(*) あるコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在して, $X \setminus K$ 上, e^φ は滑らかである.

このとき, 二つの φ に付随する完備計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ と $h' = (h'_1, \dots, h'_r)$ で $\det(h) = \det(h') = 1$ を満たすものに対し, 常に $h = h'$ が成り立つ.

Theorem 2. φ に存在する完備計量は, e^φ が滑らかならば常に存在する. また次が成り立つ: $(e^{-\varphi_\epsilon}h_*)_{\epsilon>0}$ を滑らかな半正值計量の族で, それぞれは開部分集合 $X_\epsilon \subseteq X$ 上定義されており, 次が成り立つとする:

- それぞれの $\epsilon' > \epsilon > 0$ に対し $X_{\epsilon'} \subseteq X_\epsilon$ かつ, $\bigcup_{\epsilon>0} X_\epsilon = X$.
- 各 $\epsilon' > \epsilon > 0$ について $\varphi_\epsilon \leq \varphi_{\epsilon'}$ が成り立ち, また $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ は $\epsilon \searrow 0$ で φ に収束する.

このとき, $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ に対応する完備計量の族 $(h_\epsilon = (h_{1,\epsilon}, \dots, h_{r,\epsilon}))_{\epsilon>0}$ は φ に付随する完備計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ に $\epsilon \searrow 0$ で単調減少収束する.

参考文献

- [1] Li, Qionglin, and Takuro Mochizuki. *Complete Solutions of Toda Equations and Cyclic Higgs Bundles Over Non-compact Surfaces*, International Mathematics Research Notices 2025.7 (2025): rnaf081.

調和計量と劣調和関数とエントロピーと自由エネルギー

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 エントロピーと自由エネルギー

本講演はこの講演の前の講演の続きである。ページの節約のため、背景知識や動機の説明の一部をそちらの予稿にゆずって本稿では省略する。\$X\$ を連結 Riemann 面、\$K_X \to X\$ を標準束とする。標準束上の半正値特異 Hermite 計量 \$e^{-\varphi}h_*\$ に対し、以下の正則ベクトル上の対角形の Hermite 計量 \$h = (h_1, \dots, h_r)\$ を解に持つような楕円型方程式を、通常の調和計量が従う楕円型方程式の拡張として講演者が導入した:

$$\mathbb{K}_r := K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus K_X^{\frac{r-3}{2}} \oplus \dots \oplus K_X^{-\frac{r-3}{2}} \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}.$$

\$h = (h_1, \dots, h_r)\$ から、\$K_X^{-1} \to X\$ 上の Hermite 計量 \$H_1, \dots, H_{r-1}\$ が、\$H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}\$ と定まり、さらに \$\varphi\$ の \$-\infty\$ 集合において退化した Hermite 計量 \$H_r\$ が \$H_r := e^{r\varphi} h_*^{-r} \otimes h_r^{-1} \otimes h_1\$ 定まる。これら \$h = (h_1, \dots, h_r)\$ や \$H_1, \dots, H_r\$ が、非負定曲率 Kähler 計量からどのようにずれるか・ひずむのかという問題を正則切断の零点配置やポテンシャル論の問題として・それらと関連付けて研究をしたい。

少々唐突ではあるが、平衡統計力学において良く知られているカノニカル分布の理論とのアナロジーで、\$H_1, \dots, H_r\$ からさらに情報を縮約した以下の二つの関数を導入する:

Definition 1 (M.). \$\beta\$ を非零実数とする。以下の関数を自由エネルギーと呼ぶ:

$$F(r, \beta, \varphi, H_*) := -\frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{j=1}^r (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*))^\beta \right).$$

ここに、\$H_*\$ は \$K_X^{-1} \to X\$ 上のある計量である。

Definition 2 (M.). 各 \$j = 1, \dots, r\$ と非零実数 \$\beta\$ に対し、関数 \$p_j(\beta, \varphi) : X \to [0, 1]\$ を以下のように定める:

$$p_j(\beta, \varphi) := \frac{\text{vol}(H_j)^\beta}{\sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^\beta},$$

以下の関数をエントロピーと呼ぶ:

$$S(r, \beta, \varphi) := -\sum_{j=0}^{r-1} p_j(\beta, \varphi) \log p_j(\beta, \varphi).$$

* e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

以下, $H_1, \dots, H_{r-1}$ は全て完備で, また滑らかな計量による近似に関する条件が仮定されているものとする. 以下の定理が本講演の主定理である:

Theorem 3. $e^{-\varphi} h_*$ は恒等的に ∞ ではなく, また平坦でもないとする. このとき, 次が成り立つ:

$$S_{r,\beta} \leq S(r, \varphi, \beta)(x) < \log r \text{ for any } x \in X,$$

ここに, $S_{r,\beta}$ は重み関数が $-\infty$ の場合の双曲計量に対応するエントロピーである. さらに, $S(r, \varphi, \beta)(x)$ の下からの評価における等号は $r = 2, 3$ かつ $\varphi(x) = -\infty$ の場合にのみ達成される. またさらにその上界と下界に関して次が成り立つ:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_{r,\beta} - \log r) = \begin{cases} \frac{2\beta d_\beta}{c_\beta} - \log(c_\beta) & \text{if } \beta > -1 \\ -\infty & \text{if } \beta \leq -1. \end{cases}$$

ここに, c_β と d_β を以下のように定義した:

$$c_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta ds,$$

$$d_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta \log s \, ds.$$

Theorem 4. φ と φ' は次を満たすとする:

- 各 $x \in X$ に対し, $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成立し, 少なくとも一つの $x \in X$ について $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
- 各 $x \in X$ に対して $\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi'(x) \geq \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi(x)$ が成り立つ.

このとき, $r = 2, 3$ の場合に次が成り立つ:

$$S(r, \beta, \varphi)(x) > S(r, \beta, \varphi')(x) \text{ for all } x \in X.$$

Theorem 5. β は正であると仮定する. φ と φ' は以下を満たすとする:

1. 各 $x \in X$ に対し, $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成り立ち, 少なくとも一つの $x \in X$ について $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
2. 各 $x \in X$ について, $\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi'(x) \geq \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi(x)$ が成り立つ.

φ と φ' が条件 1 を満たし, $r = 2, 3$ であるとする. このとき次が成り立つ:

$$0 < F(r, \beta, \varphi')(x) - F(r, \beta, \varphi)(x) \text{ for all } x \in X.$$

φ が φ' が条件 1 と 2 をどちらも満たすとする. このとき, 全ての $r \geq 2$ に対して次が成り立つ:

$$0 < F(r, \beta, \varphi')(x) - F(r, \beta, \varphi)(x) < \varphi - \varphi' + \frac{1}{\beta} \log r \text{ for all } x \in X.$$

エントロピーと自由エネルギーと双曲計量と冗長性

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 エントロピーと自由エネルギー

本講演はこの講演の前に行われる二つの講演の続きである。ページの節約のため、背景知識や動機の説明の一部をそれらの予稿にゆずって本稿では省略する。以下、本講演の前の講演の予稿において述べたことの繰り返しになるが、本講演の主定理を述べるに当たって必要な記号と概念を準備する: X を連結 Riemann 面, $K_X \rightarrow X$ を標準束とする。標準束上の半正値特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi} h_*$ に対し、以下の正則ベクトル上の対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ を解に持つような楕円型方程式を、通常の調和計量が従う楕円型方程式の拡張として講演者が導入した:

$$\mathbb{K}_r := K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus K_X^{\frac{r-3}{2}} \oplus \cdots \oplus K_X^{-\frac{r-3}{2}} \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}.$$

$h = (h_1, \dots, h_r)$ から、 $K_X^{-1} \rightarrow X$ 上の Hermite 計量 $H_1, \dots, H_{r-1}$ が[‡] $H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}$ と定まり、さらに φ の $-\infty$ 集合において退化した Hermite 計量 H_r が[‡] $H_r := e^{r\varphi} h_*^{-r} \otimes h_r^{-1} \otimes h_1$ 定まる。平衡統計力学において良く知られているカノニカル分布の理論とのアナロジーで、 $H_1, \dots, H_r$ からさらに情報を縮約した以下の二つの関数を本講演の前の講演において導入した:

Definition 1 (M.). β を非零実数とする。以下の関数を自由エネルギーと呼ぶ:

$$F(r, \beta, \varphi, H_*) := -\frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{j=1}^r (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*))^\beta \right).$$

ここに、 H_* は $K_X^{-1} \rightarrow X$ 上のある計量である。

Definition 2 (M.). 各 $j = 1, \dots, r$ と非零実数 β に対し、関数 $p_j(\beta, \varphi) : X \rightarrow [0, 1]$ を以下のように定める:

$$p_j(\beta, \varphi) := \frac{\text{vol}(H_j)^\beta}{\sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^\beta},$$

以下の関数をエントロピーと呼ぶ:

$$S(r, \beta, \varphi) := -\sum_{j=0}^{r-1} p_j(\beta, \varphi) \log p_j(\beta, \varphi).$$

さらに、本講演では以下の概念を導入する:

* e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

Definition 3. 以下の関数を冗長性関数 (redundancy function) と呼ぶ:

$$R(r, \varphi, \beta) := 1 - S(r, \varphi, \beta) / \log r.$$

また, 以下の定数を下冗長性定数 (lower redundancy constant) と呼ぶ:

$$\underline{R}_{r, \varphi, \beta} := \inf_{x \in X} R(r, \varphi, \beta)(x).$$

以下, X は (開) 双曲 Riemann 面とし, 完備定曲率 -1 の Kähler 形式 ω_X から誘導される $K_X \rightarrow X$ 上の Hermite 計量を h_X と書く. 特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi} h_*$ の h_* を h_X と取る. 無限大かもしれない定数 M_φ を $M_\varphi := \sup_X e^\varphi$ と定める. $H_1, \dots, H_{r-1}$ は全て完備で, また滑らかな計量による近似に関する条件が仮定されているものとする. 以下の定理が本講演の主定理で, それは正則二次微分の双曲計量に対する有界性に関する Wan の定理 [2] やより一般の r 次微分に関する Dai-Li の定理 [1] の拡張であり, またエントロピーと自由エネルギーを用いた新たな定式化である:

Theorem 4. 以下は全て同値である:

1. e^φ は有界, すなわち, M_φ は有限である.
2. 非零実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する定数 $\delta(\beta, r, M_\varphi)$ が存在して, 以下の一様評価が成り立つ:

$$S(r, \beta, \varphi)(x) \leq \log r - \delta(\beta, r, M_\varphi) \text{ for all } x \in X.$$

3. 下冗長性定数が正である:

$$\underline{R}_{r, \beta, \varphi} := \inf_{x \in X} (1 - (S(r, \beta, \varphi)(x) / \log r)) > 0.$$

4. 全ての正の実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する正の定数 $C_1(\beta, r, M_\varphi)$ がとれて次が成り立つ:

$$F(r, \beta, \varphi)(x) - F(r, \beta, -\infty) \leq C_1(\beta, r, M_\varphi) \text{ for all } x \in X.$$

5. 正の実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する定数 $C_2(\beta, r, M_\varphi)$ が取れて次が成り立つ:

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} (F(r, \beta, \varphi) - F(r, \beta, -\infty)) \leq -C_2(\beta, r, M_\varphi) \omega_X + \omega_X.$$

参考文献

- [1] S. Dai and Q. Li, *Bounded differentials on the unit disk and the associated geometry*, Transactions of the American Mathematical Society (2024).
- [2] T. Y.-H. Wan, *Constant mean curvature surface, harmonic map and universal Teichmüller space*, Stanford University, 1991.

Maximal and Riesz potential operators on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces

大野 貴雄 (大分大学)*1
下村 哲 (広島大学)*2

集合 X , 距離 d , 非負 Borel 測度 μ に対して, 測度距離空間 (X, d, μ) を考える. また, $\text{diam}X = \infty$ とする. 関数 $\Phi(x, t) : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は次を満たすとする:

($\Phi 1$) $\Phi(\cdot, t)$ は X 上で可測関数で, $\Phi(x, \cdot)$ は $[0, \infty)$ 上で連続関数である;

($\Phi 2$) 定数 $A_1 \geq 1$ が存在して, $A_1^{-1} \leq \Phi(x, 1) \leq A_1$ ($\forall x \in X$);

($\Phi 3$) $\Phi(x, t)/t$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準増加である, つまり, 定数 $A_2 \geq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, t_1)/t_1 \leq A_2 \Phi(x, t_2)/t_2 \quad (\forall x \in X, 0 \leq t_1 < t_2).$$

$\bar{\phi}(x, t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \{\Phi(x, s)/s\}$, $\bar{\Phi}(x, t) = \int_0^t \bar{\phi}(x, r) dr$ ($\forall x \in X, t > 0$) とする. Musielak-Orlicz 空間を

$$L^\Phi(X) = \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(X); \int_X \Phi(y, |f(y)|) d\mu(y) < \infty \right\}.$$

と定義する. この空間は, ノルム

$$\|f\|_{L^\Phi(X)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_X \bar{\Phi}(y, |f(y)|/\lambda) d\mu(y) \leq 1 \right\}$$

によって Banach 空間になる.

$\lambda \geq 1$ に対して, 極大作用素

$$M_\lambda f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, \lambda r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y)$$

を考える. 以下, 測度距離空間 (X, d, μ) と関数 $\Phi(x, t)$ は, 次の条件を満たす:

(μQ) $0 < \inf_{x \in X} Q(x) \leq \sup_{x \in X} Q(x) < \infty$ を満たす X 上の可測関数 $Q(\cdot)$ と, 定数 $c_Q \geq 1$ が存在して,

$$\mu(B(x, r)) \geq c_Q^{-1} r^{Q(x)} \quad (\forall x \in X, r > 0);$$

($M\lambda$) 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\mu(\{x \in X : M_\lambda f(x) > k\}) \leq \frac{C}{k} \int_X |f(y)| d\mu(y) \quad (\forall f \in L^1(X), k > 0);$$

*1 e-mail: t-ohno@oita-u.ac.jp

*2 e-mail: tshimo@hiroshima-u.ac.jp

2000 Mathematics Subject Classification: 46E35, 46E30.

Keywords: maximal functions, Riesz potentials, Musielak-Orlicz spaces, Sobolev's inequality, metric measure spaces, non-doubling measure.

(Φ3; p) 定数 $p > 1$ が存在して, $\Phi(x, t)/t^p$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準増加である ;

(Φ5; Q) 任意の $\gamma > 0$ に対して, 定数 $B_{\gamma, Q} \geq 1$ が存在して, $x \in X, r > 0, y \in B(x, r), t \geq 1$ が $\Phi(x, t) \leq \gamma r^{-Q(x)}$ を満たすならば, $\Phi(x, t) \leq \Phi(y, B_{\gamma, Q} t)$;

(Φ6) $0 \leq g(x) \leq 1, 0 \leq h(x) \leq 1$ ($x \in X$), $\Phi(\cdot, g(\cdot)) \in L^1(X)$ かつ $h \in L^1(X)$ を満たす関数 $g(\cdot), h(\cdot)$ と, 定数 $0 < B_\infty \leq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, B_\infty t) \leq \Phi(y, t) + h(x) \quad (\forall x, y \in X, g(y) \leq t \leq 1).$$

定理 1([2], cf. [1]). $\lambda \geq 1$ とする. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|M_\lambda f\|_{L^\Phi(X)} \leq C \|f\|_{L^\Phi(X)} \quad (\forall f \in L^\Phi(X)).$$

$\tau \geq 1$ と $0 < \inf_{x \in X} \alpha(x) \leq \sup_{x \in X} \alpha(x) < \infty$ を満たす X 上の可測関数 $\alpha(\cdot)$ に対して, $\alpha(\cdot)$ 次のリースポテンシャル

$$I_{\alpha(\cdot), \tau} f(x) = \int_X \frac{d(x, y)^{\alpha(x)} f(y)}{\mu(B(x, \tau d(x, y)))} d\mu(y)$$

を考える. 以下, 関数 $\Phi(x, t)$ は, 次の条件も満たす :

(Φ $Q\alpha$) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $r^{\alpha(x)+\varepsilon} \Phi^{-1}(x, r^{-Q(x)})$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準減少である ;

(Φ1') $\Phi(x, t) > 0$ ($\forall x \in X, t > 0$).

$H = \{x \in X : h(x) > 0\}$ に対して, 次を満たす関数 $\Phi_\infty(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在すると仮定する :

(Φ ∞ 0) $\Phi_\infty(t) > 0$ ($\forall t > 0$), $\Phi_\infty(t)$ は $(0, \infty)$ 上で連続かつ $\Phi_\infty(t)/t$ は $(0, \infty)$ 上で準増加である ;

(Φ ∞ 1) 定数 $0 < \tilde{B}_\infty \leq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, \tilde{B}_\infty \Phi_\infty^{-1}(h(x))) \leq h(x) \quad (\forall x \in H)$$

かつ

$$\Phi_\infty(\tilde{B}_\infty t) \leq \Phi(x, t) \quad (\forall x \in X, g(x) \leq t \leq 1);$$

(Φ ∞ $Q\alpha$) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $r \mapsto r^{\alpha(x)+\varepsilon} \Phi_\infty^{-1}(r^{-Q(x)})$ は $[1, \infty)$ 上で一様に準減少である.

関数 $\Phi(x, t)$ の Sobolev 共役関数 $\Psi(x, t) : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は, (Φ1) – (Φ3) を満たし, 次を満たすものを考える :

(Ψ4) $A' \geq 1$ が存在して,

$$\Psi(x, t \Phi(x, t)^{-\alpha(x)/Q(x)}) \leq A' \Phi(x, t) \quad (\forall x \in X, t > 0).$$

定理 2([2], cf. [1]). $1 \leq \lambda < \tau$. とする. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|I_{\alpha(\cdot), \tau} f\|_{L^\Psi(X)} \leq C \|f\|_{L^\Phi(X)} \quad (\forall f \in L^\Phi(X)).$$

References

- [1] T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev inequalities on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces, Bull. Sci. Math. **199** (2025), Paper No. 103546.
- [2] T. Ohno and T. Shimomura, Maximal and Riesz potential operators on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces, to appear in Czechoslovak Math. J.

Nonlinear resolvents and decreasing Loewner chains

堀田 一敬 (山口大学大学院創成科学研究科)*¹
 Sebastian Schleißinger (University of Würzburg)
 須川 敏幸 (東北大学大学院情報科学研究科)

1. $(F_t)_{t \geq 0}$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数の **semigroup** であるとする, すなわち F_0 は恒等写像で, $s, t \geq 0$ に対し $F_{s+t} = F_s \circ F_t$ が成り立ち, $t \mapsto F_t$ は D 上広義一様収束の位相で連続である. このとき, 広義一様極限

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{F_t(z) - z}{t} =: G(z)$$

が存在する. D 上の正則関数 $G(z)$ を **infinitesimal generator** と呼び, その全体を $\mathcal{G}(D)$ で表す. $D = \mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ のときは $G \in \mathcal{G}(\mathbb{D})$ の次の表現が知られている; 任意の $G \in \mathcal{G}(\mathbb{D})$ に対して, ある正則関数 $p: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ で $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ を満たすものと点 $\tau \in \mathbb{D}$ が存在し

$$G(z) = (\tau - z)(1 - \bar{\tau}z)p(z)$$

を満たす. 逆に上記で定義される正則関数 G は $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ に属する. $G \neq 0$ のとき, 上記の τ を $(F_t)_{t \geq 0}$ の **Denjoy-Wolff 点** と呼ぶ.

一般の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の semigroup $(\hat{F}_t)_{t \geq 0}$ に対して Denjoy-Wolff 点は次のようにして定義される; 等角同相写像 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow D$ を用いて $F_t := \varphi^{-1} \circ \hat{F}_t \circ \varphi$ とすれば, (F_t) は $\mathbb{D}$ 上の semigroup となる. (F_t) の Denjoy-Wolff 点が $\tau \in \mathbb{D}$ であるとき, $\varphi(\tau)$ を $(\hat{F}_t)$ の Denjoy-Wolff 点という. なお $\tau \in \partial\mathbb{D}$ のときは, D として ∂D が局所連結なものを考えるなど少し気を遣う必要がある.

$\mathcal{G}(D)$ の特徴づけとして, 本講演の主題である nonlinear resolvent の概念が知られている. これは Banach 空間上の線形作用素半群に対する Hille-Yosida 理論の類似として位置づけられる.

定義 1. $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $G: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. $t \geq 0$ に対して, 方程式

$$w = z - t \cdot G(z) \tag{1}$$

が任意の $w \in D$ に対して解 $z \in D$ をもち, 対応 $w \mapsto z =: J_t(w)$ が D の自己正則写像になるとき, 写像 $J_t(w)$ を G の (時刻 t における) **nonlinear resolvent** と呼ぶ.

もし $D \subset \mathbb{C}$ が有界凸領域であれば, 任意の $w \in D$ に対して $w = z - tG(z)$ は一意解 $z = J_t(w) \in D$ を持つ ([RS97]). nonlinear resolvent を用いて $\mathcal{G}(D)$ は次のように特徴づけられる.

定理 2 ([RS97]). $D \subset \mathbb{C}$ を有界凸領域とする. 正則関数 $G: D \rightarrow \mathbb{C}$ が, すべての $t \geq 0$ に対して nonlinear resolvent $J_t(w)$ をもつことと, $G \in \mathcal{G}(D)$ であることは同値である.

2. D の有界性の仮定を取り除くと, 一般的に nonlinear resolvent は存在するとは限らない. 例えば

$$F_t(z) := \frac{z + \tanh(t/2)}{1 + z \tanh(t/2)} \quad (z \in \mathbb{D}, t \geq 0)$$

は $\mathbb{D}$ 上の semigroup であり, Denjoy-Wolff 点は 1, 対応する infinitesimal generator は $G(z) = (1 - z^2)/2$ である. この場合 nonlinear resolvent は任意の $t \geq 0$ に対して存在する. 一方で, 上半平面 $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ を $\mathbb{D}$ にうつす一次変換 $C(z) = (z - i)/(z + i)$ を用いて $\mathbb{H}$ 上の semigroup $\hat{F}_t$ を

$$\hat{F}_t(\zeta) := (C^{-1} \circ F_t \circ C)(\zeta) = e^t \zeta \quad (\zeta \in \mathbb{H}, t \geq 0)$$

*¹ e-mail: ihotta@yamaguchi-u.ac.jp

で定義する． Denjoy-Wolff 点は ∞ ， 対応する infinitesimal generator は $\hat{G}(\zeta) = \zeta$ である． このとき resolvent 方程式は $w = \zeta - t\zeta$ となり， nonlinear resolvent $J_t(w) = \frac{w}{1-t}$ は $t \in [0, 1)$ のときのみ存在する．

D が非有界の場合， 我々は nonlinear resolvent の存在性について下記のような結果を得た；

定理 3 ([HSS24]). $D \subset \mathbb{C}$ を非有界凸領域， (F_t) を D 上の *semigroup*， $G : D \rightarrow \mathbb{C}$ を (F_t) の *infinitesimal generator* とする． もし (F_t) の Denjoy-Wolff 点が有限ならば， すべての $t \geq 0$ に対して G の nonlinear resolvent J_t は存在する．

3. Nonlinear resolvent は decreasing Loewner chain となることが知られている． これは 2020 年に [ESS20] により最初に $D = \mathbb{D}, \tau = 0, p(z) > 0$ の場合に示され， [GHK20] により n 次元に拡張された． 我々はさらに一般化し， 特に τ, p の制限なしにこの性質が成り立つことを示した．

定理 4 ([HSS24]). $D \subset \mathbb{C}$ を有界凸領域， $G \in \mathcal{G}(D)$ とする． このとき微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} J_t(w) = J'_t(w) G(J_t(w)) \quad (t \geq 0), \quad J_0(w) = w \in D \quad (2)$$

の解 (J_t) が一意に存在する． J_t は G の nonlinear resolvent であり， $(J_t)_{t \geq 0}$ は decreasing Loewner chain である．

$D = \mathbb{H}$ の場合， 自由確率論における [Maa92] の結果を応用することで， 次の nonlinear resolvent の存在性の定理を得た． これは自由加法畳み込みによる semigroup の性質とも関連している．

定理 5 ([HSS24]). $G \in \mathcal{G}(\mathbb{H})$ とし， G により生成される *semigroup* の Denjoy-Wolff 点が ∞ であるとする． また

$$b := \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{G(iy)}{iy}$$

とする． このとき b は非負実数となる． また b の値によって次が成り立つ．

1. $b = 0$ のとき， $D = \mathbb{H}$ としたときの微分方程式 (2) の解 (J_t) が一意に存在する． (J_t) はある自由加法畳み込みに関する確率測度の *semigroup* $(\mu_t)_{t \geq 0}$ を用いて

$$\frac{1}{J_t(w)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{w - x} \mu_t(dx)$$

と表される， すなわち (μ_t) に対する F -変換 F_{μ_t} に対して $J_t = F_{\mu_t}$ である． さらに J_t は G の nonlinear resolvent であり， $G = -\varphi_{\mu_1}$ が成り立つ， ここで φ_{μ} は Voiculescu 変換である．

2. $b \neq 0$ のとき， G の nonlinear resolvent はすべての $t \in [0, 1/b)$ に対して存在し， すべての $t \in [1/b, \infty)$ に対して存在しない．

注意． 定義 1， 定理 2， 定理 4 は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}^n$ に置き替えても有効である ([HSS24]).

参考文献

- [ESS20] M. Elin, D. Shoikhet, and T. Sugawa, *Geometric properties of the nonlinear resolvent of holomorphic generators*, J. Math. Anal. Appl. **483** (2020), no. 2, 123614, 18.
- [GHK20] I. Graham, H. Hamada, and G. Kohr, *Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family on the unit ball in $\mathbb{C}^n$* , J. Math. Anal. Appl. **491** (2020), no. 1, 124289, 29.
- [HSS24] I. Hotta, S. Schleißinger, and T. Sugawa, *Nonlinear resolvents and decreasing Loewner chains*, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 4, Paper No. 99, 28.
- [Maa92] H. Maassen, *Addition of freely independent random variables*, J. Funct. Anal. **106** (1992), no. 2, 409–438.
- [RS97] S. Reich and D. Shoikhet, *Semigroups and generators on convex domains with the hyperbolic metric*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **8** (1997), no. 4, 231–250.

Bloch-Ros principle とその応用について

笠尾 俊輔 (芝浦工業大学柏中学高等学校)*¹

川上 裕 (金沢大数物)*²

本稿では、有理型関数の正規族の理論、値分布論そして曲面の Gauss 写像の値分布論の結果の統一的解釈を与える “Bloch-Ros principle” [1, 2] の概要を紹介する. Σ を Riemann 面, $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面とする. このとき,

$$\mathcal{M}(\Sigma) := \{f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}} \text{ 正則写像} \} = \{f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}} \text{ 有理型関数} \} \cup \{f \equiv \infty \text{ on } \Sigma\}$$

と定める. $\mathcal{M}(\Sigma)$ の位相として, Σ 内の compact 部分集合上の一様収束位相を用いる.

P を Σ 上の $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像のある性質としたとき,

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \{f \in \mathcal{M}(\Sigma); f \text{ は } \Sigma \text{ 上で性質 } P \text{ を満たす} \}$$

と定める.

定義 1. $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像の性質 P に対して, 次の条件を考える:

- (P1) 任意の 2 つの Riemann 面 Σ, Σ' と分岐点を持たない任意の正則写像 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ に対して, $f \in \mathcal{P}(\Sigma')$ ならば $f \circ \phi \in \mathcal{P}(\Sigma)$ となる.
- (P2) Σ を Riemann 面, $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ とする. Σ 内の任意の相対コンパクト領域 Ω に対して, $f|_{\Omega} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ならば $f \in \mathcal{P}(\Sigma)$ となる.
- (P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ の元からなる収束列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数が $\mathcal{P}(\Sigma)$ の元になる.
- (P4) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ は Σ 上の正規族となる.

性質 P が条件 (P1), (P2), (P3) を満たすとき, P は **closed property** を満たすという. また, 性質 P が条件 (P1), (P2), (P3), (P4) を満たすとき, P は **compact property** を満たすという.

$X \subset \overline{\mathbf{C}}$ とする. 任意の Riemann 面 Σ および正則写像 $f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ に対して, 性質 P_X を, Σ 上で $f(\Sigma) \subset \overline{\mathbf{C}} \setminus X$ または $f \equiv (\text{constant})$ とすると, P_X は closed property である. さらに, X が 3 個以上の元を含んでいれば, P_X は compact property である.

曲面の Gauss 写像の値分布論的性質を複素解析的に扱うため, 次の概念を導入する.

定義 2. Σ を等角計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$$

*¹e-mail: kasao15039@gmail.com

*²e-mail: y-kwkami@se.kanazawa-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:23K03086) の助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: 53A10, 30D35, 30D45

キーワード: ガウス写像, 正規族, 曲率評価, Bloch-Ros principle

(但し, hdz を Σ 上の正則 1 次微分形式, g を Σ 上の有理型関数, m を正の整数) が付随した開 Riemann 面とする. このとき, 組 (Σ, hdz, g) を **Weierstrass m -triple** という.

次に, compact property を満たす有理型関数が m -curvature estimate を満たすことを定義する.

定義 3. P を compact property, m を正の整数とする. このとき, P が **m -curvature estimate** を満たすとは, ある $C = C(P, m) > 0$ が存在して, $g \in \mathcal{P}(\Sigma)$ を満たす任意の Weierstrass m -triple (Σ, hdz, g) に対して, 任意の $p \in \Sigma$ において

$$|K_{ds^2}(p)|(d(p))^2 \leq C$$

が成り立つことである. ここで, $K_{ds^2}(p)$ は $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ に関する p の Gauss 曲率, $d(p)$ は p から Σ の境界への測地的距離である.

我々は compact property が m -curvature estimate を満たすための判定条件として, 次の定理を示した.

定理 4. P を compact property, m を正の整数, $\mathbf{D}$ を単位円板とする. このとき, 次の (1) または (2) のいずれかが成り立つ:

- (1) P は m -curvature estimate を満たす.
- (2) $\mathbf{D}$ 上の正則 1 次微分形式 hdz および $\mathbf{D}$ 上の非定数有理型関数 g が存在して, 次の (A) および (B) を満たす:
 - (A) $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ が $\mathbf{D}$ 上の完備な等角計量となる,
 - (B) $g \in \mathcal{P}(\mathbf{D})$ であり, $|K_{ds^2}(0)| = 1/4$ で, $\mathbf{D}$ 上の各点 p において $|K_{ds^2}(p)| \leq 1$ が成り立つ.

定理 4 から, 次の結果を示すことができる.

命題 5. 組 (Σ, hdz, g) を Weierstrass m -triple とする. X が $m + 2$ 個以上の元を含んでいれば, P_X は m -curvature estimate を満たす compact property となる. 特に, $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ が Σ 上の完備等角計量で g が Σ 上非定数有理型関数ならば, g の除外値数は高々 $m + 2$ である.

参考文献

- [1] S. Kasao and Y. Kawakami, Bloch-Ros principle and its application to surface theory, to appear in Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, arXiv: 2402.12909.
- [2] 笠尾俊輔, 様々な曲面のクラスへの Bloch-Ros principle の応用, 2023 年度金沢大学大学院自然科学研究科数理科学専攻 修士論文, 複素解析学ホームページ 修士・博士論文アーカイブにて公開.

Galois action on Teichmüller curves and related combinatorial objects

熊谷 駿 (八戸工業大学)*

1. 導入

本稿では次で定義される**絶対ガロア群** $G_{\mathbb{Q}}$:

$$\bar{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{C} \mid \exists P(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ s.t. } P(a) = 0\}, \quad (1)$$

$$G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} : \text{体同型写像}, \sigma = \text{id on } \mathbb{Q}\}, \quad (2)$$

$$= \left\{ (g_K)_K \in \prod_{\mathbb{Q} < K: \text{有限次}} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \left| g_K|_{K'} = g_{K'} \text{ if } K \geq K' \right. \right\}, \quad (3)$$

の研究の文脈の中で、タイヒミュラー曲線への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の議論に基づき $\widehat{GT}$ -relation の新たな関係式を得た Möller の結果に代表される「折り紙」の位置づけを、それらに先立つ Grothendieck の「デッサン」の理論と対照して議論することを目的とする。なお、本稿の「折り紙」は単位正方形セルの貼り合わせ方法を指定するグラフ構造を指すものであり、一般によく知られる紙面の折り操作によるものとは異なる。その命名は2000年代初頭の Lochak [20] により、本稿で述べる組み合わせ的特徴づけと数論的性質を念頭に「デッサンの自然な高次元アナログ」となるべきものとして導入されたものである。

モジュライ空間の代数的基本群としての射有限写像類群 $\hat{\Pi}_{g,n}$ は Oda [26] の結果として $\bar{\mathbb{Q}}$ -係数拡大 $\pi_1(M_{g,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}$ と同型で、これに $G_{\mathbb{Q}}$ が作用する。各 $\overline{M}_{g,n}$ を (g,n) 型リーマン面のモジュライ空間 $M_{g,n}$ の Deligne–Mumford コンパクト化を表すものとする、モジュライ空間の間には自然な射 [13, 24] :

- (1) 曲面の標点を忘却する操作 $M_{g,n+1} \rightarrow M_{g,n}$,
- (2) 2曲面を標点で交わせノード付き曲面を得る操作 $\overline{M}_{g,n} \times \overline{M}_{g',n'} \rightarrow \partial M_{g+g',n+n'}$,
- (3) 曲面の2つの標点を繋げてノード付き曲面を得る操作 $\overline{M}_{g,n+2} \rightarrow \partial M_{g+1,n}$,

が定義される。1984年、Grothendieck はその「Equisse d'un Programme」[11] の中で $\hat{\Pi}_{g,n}$ に自然な射との両立条件を課した**タイヒミュラー塔**の概念と、その下で $\hat{\Pi}_{0,4}$, $\hat{\Pi}_{1,1}$, $\hat{\Pi}_{0,5}$, $\hat{\Pi}_{1,2}$ の4つを構成単位とし、それらの中での関係式をもって塔への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用が記述できるとする**レゴ・タイヒミュラー**の予想が提唱した。これは Moore, Seibert の物理学分野の論文 [22, 5] の中で解決したとされ、予想は代わりに $\hat{\Pi}_{0,4}$, $\hat{\Pi}_{0,5}$, $\hat{\Pi}_{1,1}$ を構成単位とするものに置き換えられている。

日本数学会 2025 年度秋季総合分科会 (2025 年 9 月 16 日, 名古屋大学) 特別講演予稿

「日本数学会 2025 年度年会の予稿と同一」

* 八戸工業大学, 工学部工学科, 〒031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1

e-mail: s-kumagai@hi-tech.ac.jp / shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp

web: https://researchmap.jp/Shun_Kumagai

1979 年の Belyi [2] の定理は $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の対象に $\hat{\mathbb{C}}^* = M_{0,4}$ の被覆としての特徴づけを与え、その基本群 $\pi_1(M_{0,4}) = \Pi_{0,4} \cong F_2$ に関する組み合わせ的对象である **デッサン** を用いることで $\hat{\Pi}_{0,4}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用における忠実性や不変量といった種々の観察 [18] をもたらしした。1991 年, Drinfel'd [6] は $\hat{\Pi}_{0,n}$ の組紐群を用いた表示におけるタイヒミュラー塔の射の可換性に関わるものとしてグロタンディーク・タイヒミュラー群 $\widehat{GT}$ を定義し、伴って Belyi の定理の帰結として $G_{\mathbb{Q}}$ を埋め込む $\text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ -部分群に対し、成り立つ関係式を示した。この結果は同時期に Ihara [16] によって組紐群の対称性の式として改めて示されており、Drinfel'd, Ihara の $\widehat{GT}$ -relation とよばれる。

2005 年に Möller [21] によって示された新たな $\widehat{GT}$ -relation は、モジュライ空間 $M_{2,0}$ に埋め込まれて $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたモデルを作る曲面族を用いて得られたものである。その構成は、一つは曲面上の正則二次微分のアフィン変形が定める擬等角変形の族がなすタイヒミュラー空間の正則等長な円盤埋め込みの像である、タイヒミュラー曲線としてのものである。これによって曲面族の軌道体としての構造は、正則二次微分の自己アフィン対称性を表す Veech 群 [32] のフックス群としてのふるまいで特徴づけられる。もう一つは次数、モノドロミー群、分岐軌道の情報を共有する分岐被覆の族であるフルヴィッツ空間 [28, 33] として代数的構造をもつものである。折り紙のこれら二つの側面を背景とした議論が $G_{\mathbb{Q}}$ に対する新たなアプローチをもたらした。その組合せ的特徴づけから種々の関連対象の可視化を行いやすい一方で、研究上の動機づけや位置づけを求めると幅広い分野にわたる難解さを伴う折り紙について、一連の話題を構成する事項をまとめる。

2. タイヒミュラー空間、平坦曲面

本節ではモジュライ空間へのフックス群モデルの埋め込みとしてのタイヒミュラー曲線と、その構造を表す Veech 群について説明する。ここでは解析的有限型 $((g, n)$ 型) のリーマン面を扱い、とくに双曲型 $(2g - 2 + n < 0)$ のものを考えるものとする。

定義 1 リーマン面の間の向きを保つ同相写像 $f : R \rightarrow R_1$ を R を基点とする **標識付きリーマン面** という。標識付きリーマン面 $f_1 : R \rightarrow R_1$, $f_2 : R \rightarrow R_2$ が **タイヒミュラー同値** $f_1 \sim_T f_2$ とは、 $f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ がある双正則写像 $h : R_1 \rightarrow R_2$ にホモトピー同値であることをいう。

$$\begin{array}{ccc} & f_1 \nearrow & R_1 \\ R & \circ & \downarrow f_2 \circ f_1^{-1} \sim \exists h: \text{双正則} \\ & f_2 \searrow & R_2 \end{array}$$

双正則写像 $h : R \rightarrow R'$ による基点の取りかえは R, R' を基点とするタイヒミュラー同値類の間の一対一対応を与えている。以下では基点 R を一つ固定するものとし、

$$T(R) := \{f : R \rightarrow R_1 : \text{標識付きリーマン面}\} / \sim_T, \quad (4)$$

を (g, n) 型の **タイヒミュラー空間** という。これについて以下のことが知られている [23, 10].

- $T(R)$ は単連結な複素 $(3g - 3 + n)$ -次元多様体の構造をもつ (Ahlfors-Bers).
- **写像類群** $\Pi(R) = \{\gamma : R \rightarrow R : \text{向きを保つ同相写像}\} / \text{ホモトピー}$ の作用

$$[\gamma]^* : [f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}], \quad [\gamma] \in \Pi(R), [f] \in T(R), \quad (5)$$

がなす群は $T(R)$ の正則自己同型群に一致する (Royden).

- 写像類群のタイヒミュラー空間への作用はいたるところ有限位数であり (Hurwitz), **モジュライ空間** $M(R) = \{(g, n) \text{ 型リーマン面}\} / \text{双正則}$ は $T(R)/\Pi(R)$ で表される複素 $(3g - 3 + n)$ -次元軌道体の構造をもつ.
- モジュライ空間 $M(R)$ は, $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0, |z| < 1, |w| < 1\}$ で局所的に自明化される **ノード** を許したリーマン面の双正則同値類を境界点として付加することでコンパクト化される射影多様体の構造をもつ (Deligne–Mumford, Bers[3]).

定義 2 ([10]) 平面上の**半並進**の群 $\text{HTrans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto \pm z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするアトラスを備えた曲面を**平坦曲面**という.

リーマン面 R とその上の正則二次微分 $\phi = \phi(z)dz^2$ に対し, 各 $p_0 \in R^* := R \setminus \text{Zero}(\phi)$ の座標近傍 (U, z) で **ϕ -座標**

$$\pm \zeta_\phi^{p_0}(p) := \pm \int_{p_0}^p \sqrt{\phi(z)} dz, \quad (6)$$

が $\sqrt{\phi(z)}$ の局所的な二つの分岐ごとに定義される. 座標近傍を共有する二点 p_0, p_1 に対し, その周りでの $\sqrt{\phi(z)}$ の分岐は高々符号を除いて一意であるから

$$\zeta_\phi^{p_0}(p) \pm \zeta_\phi^{p_1}(p) = \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\phi(z)} dz = \text{const}(p), \quad (7)$$

が成り立つ. このように ϕ -座標がなす R^* のアトラスの座標変換は半並進で, これをもって平坦曲面 (R, ϕ) という.

ユークリッド計量を ϕ -座標で引き戻して得られる (R^*, ϕ) 上の平坦計量を考える. 以下では面積有限, すなわち $\|\phi\| := \int_R |\phi(z)| dx dy < \infty$ を仮定するものとする, ϕ -座標は計量完備化 $\bar{R}$ における特異点集合 $p \in \text{Sing}(R, \phi) := \text{Zero}(\phi) \cup \partial R$ の各点周りで

$$\zeta_\phi \mapsto \frac{2}{k+2} \zeta_\phi^{\frac{k+2}{2}}, \quad k = \text{ord}_p(\phi) \geq -1, \quad (8)$$

の形になるよう一意に拡張される. とくに, 次数 k の特異点であることは角度 $(k+2)\pi$ の錐点であることに対応する.

定義 3 平坦曲面の間の向きを保つ同相写像 $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ がいたるところ局所的に平面アフィン写像, すなわちある $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ に対し

$$\zeta_\psi \circ F \circ \zeta_\phi^{-1}(\xi + \sqrt{-1}\eta) = (a\xi + c\eta + e) + \sqrt{-1}(b\xi + d\eta + f), \quad \forall \xi + \sqrt{-1}\eta \in \text{Im}(\zeta_\phi), \quad (9)$$

の形であるとき**アフィン変形**という. これに対し微分 $D_F := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ を返す対応は $\text{HTrans}(\mathbb{C})$ -不変なものとして定義できて, $\|\psi\| = |D_F| \|\phi\|$ をみたす. 自明な微

分 $D_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ をもつアフィン変形を**半並進**とよぶ. ここで半並進同値の意味で $(R, \phi) \cong (S, \psi)$ であるとき, F を (R, ϕ) の**アフィン写像**とよび, これに対し $D_F \in PSL_2(\mathbb{R})$ が成り立つ.

定理 4 (Teichmüller [1]) 任意の $[f : R \rightarrow S] \in T(R)$ に対しある $0 < k < 1$, R 上の正則二次微分 ϕ , S 上の正則二次微分 ψ , 代表元 $F = F_{[f]} \in [f]$ が存在して次が成り立つ.

- (1) $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ はアフィン変形 $\zeta_\psi \circ F \circ \zeta_\phi^{-1}(z) = \frac{z + k\bar{z}}{1 - k}$ である.
- (2) $K([f]) := \inf_{h \in [f]: \text{弱微分可能}} \frac{1 + \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty}{1 - \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty} = \frac{1 + k}{1 - k}$ の下限は $h = F$ で達成される.

さらに, (2) をみたすような F は半並進の合成を除き一意である.

各 $[f_1], [f_2] \in T(R)$ に対して $d_T([f_1], [f_2]) := \frac{1}{2} \log K([f_2 \circ f_1^{-1}])$ とおくと $T(R)$ 上の完備距離 (**タイヒミュラー距離**) を定める. 定理 4 より, R 上の正則二次微分 ϕ を固定するごとに, 次の写像 $\hat{\iota}_\phi$ が双曲距離とタイヒミュラー距離に関する等長埋め込みを定める.

$$\hat{\iota}_\phi : \mathbb{H} \rightarrow T(R) : t \mapsto [f_t] \text{ s.t. } f_t^* \phi = \operatorname{Re}(\phi) + t \operatorname{Im}(\phi). \quad (10)$$

補題 5 ([8]) 写像類 $[\gamma] \in \Pi(R)$ に対し, $\gamma^*(\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})) \cap \hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \neq \emptyset$ であるためには $F_{[\gamma]}$ が (R, ϕ) のアフィン写像であることが必要かつ十分である. さらに, このとき $\gamma^*(\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})) = \hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})$ であってアフィン写像 $F_{[\gamma]}$ は次式で $\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \subset T(R)$ に作用する.

$$F_{[\gamma]}^* \hat{\iota}_\phi(t) = \hat{\iota}_\phi\left(\frac{-at + b}{ct - d}\right), \quad D_{F_{[\gamma]}} =: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{H}. \quad (11)$$

補題 5 より, 平坦曲面 (R, ϕ) が定める円盤埋め込み $\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \subset T(R)$ のモジュライ空間への射影は (R, ϕ) のアフィン写像の作用, すなわち (R, ϕ) の **Veech 群**

$$\Gamma(R, \phi) := \{D_F \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid F : (R, \phi) \text{ 上のアフィン写像}\}, \quad (12)$$

のメビウス変換作用が与えるフックス群モデル $\mathbb{H}/\Gamma(R, \phi)$ の鏡像に同一視される. ここで, 平坦曲面 (R, ϕ) の Veech 群 $\Gamma(R, \phi) < PSL(2, \mathbb{R})$ が双曲面積有限のとき, 代数曲線の埋め込み $\iota_\phi : \mathbb{H}/\Gamma(R, \phi) \hookrightarrow M(R)$ が定まる. これを**タイヒミュラー曲線**という.

注意 6 平坦曲面 (R, ϕ) に対し, $\phi = \omega^2$ をみたす R 上のアーベル微分 ω が存在するとき, これを**並進曲面** (R, ω) という. このとき ω -座標系が $\operatorname{Trans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするサブアトラスを定め, Veech 群は $SL(2, \mathbb{Z})$ の元として定義できる. 一般に平坦曲面 (R, ϕ) に対し, 局所的に定義されたアーベル微分 $\omega = \sqrt{\phi}$ の解析接続が作る**標準二重被覆** $(\tilde{R}, \omega^2) \rightarrow (R, \phi)$ が並進曲面の構造をもつ.

Veech [32] は多角形ビリヤード台上の折れ線軌道を調べる過程で平坦曲面 (R, ϕ) のモデルを用いて次の二分法を示し, タイヒミュラー曲線上の測地線流の対称性を表すものとして群 $\Gamma(R, \phi)$ を導入した.

定理 7 (Veech の二分法 [32]) 平坦曲面 (R, ϕ) 上と各 $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ に対し, θ 方向の測地線流 $c_\theta(q, t) : (R, \phi) \times \mathbb{R} \rightarrow (R, \phi)$ は次のいずれか一方をみたす.

- (1) $c_\theta(q, \cdot)$ は任意の $q \in R$ に対し周期的である.
- (2) $c_\theta(q, \cdot)$ は任意の $q \in R$ に対し周期を持たず, その軌道は (R, ϕ) 上一様に分布する.

各 $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ は定理 7 (1) の意味で周期的であるならば, そのタイヒミュラー測地線流

$$g_\theta : (\hat{l}_\phi(\mathbb{H}), d_T) \times \mathbb{R} \rightarrow (\hat{l}_\phi(\mathbb{H}), d_T) :$$

$$g_\theta(\hat{l}_\phi(t), s) = \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \right)^* \hat{l}_\phi(t), \quad (13)$$

の $t \rightarrow +\infty$ の極限は θ 方向の円柱分解の各成分を縮約することで得られるノード付きリーマン面の構造で与えられる [14]. とくに (R, ϕ) の周期的方向に対する Veech 群 $\Gamma(R, \phi)$ の作用において, 各軌道が $\partial C(R, \phi) \subset \partial M(R)$ の各点と一対一に対応する.

3. デッサン, $G_{\mathbb{Q}}$, $\widehat{GT}$

本節では Grothendieck のデッサン, ならびにこれを用いた $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の議論について概要を述べる.

定理 8 (Belyĭ, 1979 [2]) リーマン面 R が $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された代数曲線のモデルをもつためには, 高々三点 $\{0, 1, \infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ を分岐値とする有理型関数 $\beta : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が存在することが必要かつ十分である.

上記の定理における有理型関数 β を **Belyĭ関数**あるいは**Belyĭ被覆**, これを許容するリーマン面 R (並びにその正則関数体における射影曲線のモデル) を **Belyĭ曲面 (曲線)**, これらの対 (R, β) を **Belyĭ対**という. 分岐被覆の一般論により, 以下の一連の対応物を備えた対象としてデッサンが定義される.

補題 9 (Grothendieck のデッサン [18]) 自然数 d に対し, 下記のそれぞれの同値類の間に一対一対応がある:

- (1) 次数 d の Belyĭ対 (R, β) ; 分岐軌道 $\{0, 1, \infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ を固定する被覆同値の類,
- (2) 二部グラフの位相的曲面への充填埋め込み (任意の連結補成分が位相的に円盤のもの) $G = (V_x \sqcup V_y, E) \hookrightarrow R$ で辺の数が $\#E = d$ なるもの; 二部グラフの同値類,
- (3) 推移的な並べ替え群を生成する並べ替え $m_x, m_y \in S_d$ の対; S_d -共役類,
- (4) 自由群 F_2 の位数 d の部分群 $H < F_2$; F_2 -共役類.

上記の各々を対応に沿って並立した対象として**デッサン**を考える. これを一つ取ったとき, 主として以下の役割で代表される:

- (1) 固定した三角群への同型 $\psi : F_2 \xrightarrow{\cong} \Delta(\infty, \infty, \infty)$ に対し, $\Gamma = \psi(H) < \Delta(\infty, \infty, \infty)$ が定める被覆 $\beta^* : R^* = \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}/\Delta(\infty, \infty, \infty) \cong \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} =: \hat{\mathbb{C}}^*$ によって複素構造を持ち上げて得られる対 (R^*, β^*) の完備化,

- (2) 二部グラフの充填埋め込み $(\{0\} \sqcup \{1\}, \{(0, 1)\}) \hookrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の β による持ち上げ,
- (3) $0, 1 \in \hat{\mathbb{C}}$ 周りの単純閉曲線 $c_0, c_1 \in \pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*)$ の β に関するモノドロミーが定める並び替え $m_x := m_\beta(c_x), m_y := m_\beta(c_y) \in S_d$ の対, あるいは左コセット集合 $H \backslash F_2$ への $x, y \in F_2$ の右作用が定める並び替え $m_x, m_y \in \text{Sym}(H \backslash F_2)$ の対,
- (4) 非分岐被覆 $\beta|_{R^*}, R^* := \beta^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)$ が誘導する準同型による, 基本群 $\pi_1(R^*)$ の $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*) \cong F_2$ への埋め込みの像 $H < F_2$, あるいは準同型写像 $m : F_2 \rightarrow S_d : (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ に対し $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$.

いま, 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ は $\bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$ の各多項式の係数への作用 $P \mapsto P^\sigma$ と座標への作用を通して Belyi 対に作用する. これは素イデアル $\mathfrak{p} \subset \bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$ で表される正則関数の芽の局所環 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} := (\bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N] \setminus \mathfrak{p})^{-1} \bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$, および正則関数体 $K_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ に対しても係数への作用として引き継がれる. また, この作用は Belyi 関数が $0, 1, \infty$ に値を取ることにその重複度を保つ.

定理 10 (Jones [18]) デッサンにおける以下の量は $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の不変量である:

- Belyi 被覆 β の分岐指数のリスト $(m_1^0, m_2^0 \dots \mid m_1^1, m_2^1 \dots \mid m_1^\infty, m_2^\infty, \dots)$,
- Belyi 被覆の次数 d , 一様性, 正規性,
- Belyi 曲面の種数, 自己同型群,
- モノドロミー群 $m_\beta(F_2) = \langle m_x, m_y \rangle < S_d$ の同型類.

例 A ([9]) モジュラス $t \in \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ のトーラス $E_t = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus t\mathbb{Z})$ 上の楕円関数体 $\mathbb{C}(E_t)$ は微分方程式 $(\wp'_t)^2 = 4\wp_t^3 - g_2(t)\wp_t - g_3(t)$ をみたすワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp_t, \wp'_t$ の有理関数全体の体として表される. ここで g_2, g_3 はモジュラー形式

$$g_2(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{60}{(mt+n)^4}, \quad g_3(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{140}{(mt+n)^6}, \quad (14)$$

である. 一方で $\Delta(a, b) = a^3 - 27b^2 \neq 0$ をみたす任意の係数 $a, b \in \mathbb{C}$ に対し, 楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - ax - b$ は, モジュラー形式の性質に基づき次式で一意的に定まる $t \in \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}_+$ を用いて $\lambda^2 \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus t\mathbb{Z})$ として表される.

$$j(t) := \frac{1728g_2(t)^3}{g_2(t)^3 - 27g_3(t)^2} = \frac{1728a^3}{a^3 - 27b^2}, \quad \lambda^2 = \begin{cases} a/b & b \neq 0, \\ 1 & b = 0. \end{cases} \quad (15)$$

とくにモジュライ空間 $M_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ 全体をわたるとき, その各点は $\Delta(a, b) = a^3 - 27b^2 \neq 0$ なる任意の二元で生成される拡大体 $\mathbb{Q}(a, b) > \mathbb{Q}$ を定義体とする代数曲線をわたる代表元をもつ.

例 B 二つの楕円曲線 $C_\pm : Y^2 = X(X-1)(X \pm \sqrt{2})$ とそれぞれの上の Belyi 関数 $\beta(X, Y) = 4X^{-2}(1-X^{-2})$ の対は $(\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}) \in G_{\mathbb{Q}}$ で互いに写り合う. 図1に示すこれらのデッサンは分岐指数のリスト $(1, 1, 2, 4 \mid 2, 2, 4 \mid 8)$ をはじめ補題 10 の不変量を共有する.

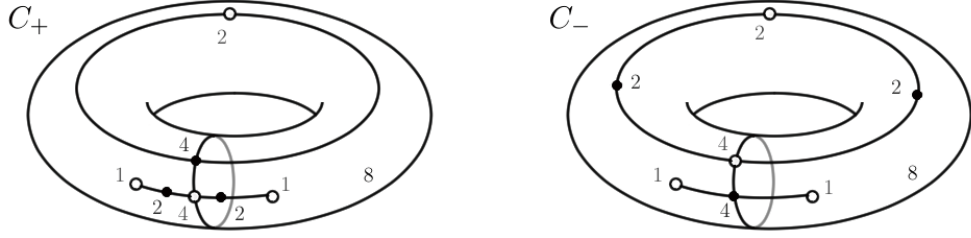


図 1: $(C_{\pm}, \beta)$ の定めるデッサン：数字は分岐指数を表す.

定義 11 ([29]) 群 G に対し, 指数有限の正規部分群の集合を $\mathcal{N}$ とかくものとし,

$$M(G_{\mathcal{N}}) := \{\phi_{NN'} : G/N' \rightarrow G/N : \text{射影} \mid N, N' \in \mathcal{N}, N > N'\}, \quad (16)$$

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G_N := \{(g_N N) \in \prod_{N \in \mathcal{N}} G/N \mid g_N N = \phi_{NN'}(g_{N'}) N, \forall \phi_{NN'} \in M(G_{\mathcal{N}})\}, \quad (17)$$

で定義される射影系の極限 $\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G_N$ を G の射有限完備化という. 例えば補題 9 を念頭におくと, 射有限群 $\hat{F}_2$ は正規 Belyi 被覆が定めるデッサンのモノドロミー群の無限直積の中で, 各々の被覆関係に両立するものを扱うものと考えられる.

Ihara [16, 17] に示された $G_{\mathbb{Q}}$ の $\hat{F}_2$ -自己同型群への埋め込み先の概要を述べる. まず, $\hat{\mathbb{C}}$ の向付き基点として $\vec{u} = 0\vec{1}$ を考えることで $(0, 1)$ を跨ぐ閉曲線がモノドロミーによって作用する設定を考える. このとき $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*, \vec{u}) \cong F_2$ である. Belyi 対 (R, β) とその重複度 m の臨界点 $v_0 \in \beta^{-1}(0)$ に対し, その周りでの局所的ピュイーズ級数表示 $\varphi\beta(z) = \sum a_n z^{\frac{n}{m}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ を与える埋め込み φ は m 通り存在する. いま, 0 周りのモノドロミー $x \in F_2$ は $z^{\frac{1}{m}}$ の分岐を 1 の m 乗根 $\zeta_m = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m})$ をかけて置き換え, とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用は $\sigma \cdot x = x^{\chi(\sigma)}$ (ここで $\chi_m(\sigma) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\chi_m(\sigma)}$ で定義される円分指標) で表される. 概観を次の図式で示す.

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xhookrightarrow{\varphi} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{x} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xleftarrow{x(\varphi)} & \bar{\mathbb{Q}}(z) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \beta & \mapsto & \sum a_n z^{\frac{n}{m}} & \mapsto & \sum a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}} & \longleftarrow & \beta \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\ \beta^\sigma & \mapsto & \sum \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \mapsto & \sum \sigma(a_n) \sigma(\zeta_m)^n z^{\frac{n}{m}} & \longleftarrow & \beta^\sigma \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xhookrightarrow{\varphi^\sigma} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{\sigma \cdot x} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xleftarrow{\sigma \cdot x(\varphi^\sigma)} & \bar{\mathbb{Q}}(z) \end{array}$$

ここで 0 周りの局所的ピュイーズ級数表示 $\varphi\beta(z) = \sum a_n z^{\frac{n}{m}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ と β の重複度 l の臨界点 $v_1 \in \beta^{-1}(1)$ に対し, 基点の取り替え $p : \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \mapsto \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\}$ の像 $p\varphi\beta(z) = \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\}$ は次の関係にある.

$$\sum a_n z^{\frac{n}{m}} = \sum a_n \left(1 - \frac{1-z}{m} + \frac{(1-z)^2}{2m(m-1)} + \cdots \right)^n = \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}}. \quad (18)$$

いま, p は 1 周りのモノドロミー y と非可換である. $p^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ p \circ \sigma : \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ が定める非自明な対応 $\sum a_n z^{\frac{n}{m}} \mapsto \sum a'_n z^{\frac{n}{m}}$ によって埋め込み $\varphi : \bar{\mathbb{Q}}(z) \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ を置

き換える $f_\sigma \in F_2$ の共役が生じ、ここで f_σ は交換子部分群 $F_2' < F_2$ に属する．とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用は $\sigma \cdot y = f_\sigma y^{\chi(\sigma)} f_\sigma^{-1}$ の形で表される．概観を次の図式で示す．

$$\begin{array}{ccccc}
& \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xrightarrow{y} & \bar{\mathbb{Q}}(z) & \\
\swarrow \varphi & & & & \searrow y(\varphi) \\
\bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} & \xleftarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \\
\downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\
\sum a_n z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{\quad} & \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}} & \xrightarrow{\quad} & \sum b_n \zeta_l^n (1-z)^{\frac{n}{l}} & \xleftarrow{\quad} & \sum a'_n z^{\frac{n}{m}} \\
\downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
\sum \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{\quad} & \sum \sigma(b_n) z^{\frac{n}{l}} & \xrightarrow{\quad} & \sum \sigma(b_n) \sigma(\zeta_l)^n z^{\frac{n}{l}} & \xleftarrow{\quad} & \sum \sigma(a'_n) z^{\frac{n}{m}} \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
\bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} & \xleftarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \\
\swarrow \varphi^\sigma & & & & \searrow \sigma \cdot y(\varphi^\sigma) & \\
& \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xrightarrow{\sigma \cdot y} & \bar{\mathbb{Q}}(z) &
\end{array}$$

定義 12 自然数 n に対し、次のようにおく．

$$B_n := \left\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i & |i-j| \geq 2 \\ \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right. \right\rangle, \quad (19)$$

$$M(0, n) := B_n / \langle \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1}, (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1})^2 \rangle, \quad (20)$$

$$x_{ij} := \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i^2 \tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1. \quad (21)$$

組紐群 B_n が定める対称群 S_n への全射準同型に関して $K(0, n) := \text{Ker}(M(0, n) \rightarrow S_n)$ とおくとき、これは $\hat{\Pi}_{0,n}$ と同型である [31]．

定理 13 ($\widehat{GT}$ -relation, Drinfel'd [6], Ihara [16]) 各群 G に対して $f = f(x, y) \in \hat{F}_2$ を写像 $f(\cdot, \cdot) : G \times G \rightarrow G$ と同一視するものとする．このとき、以下の関係式をみたす $(\lambda, f) \in (2\mathbb{Z} + 1) \times \hat{F}_2'$ が定める自己同型写像 $(\lambda, f) : (x, y) \mapsto (x^\lambda, f^{-1} y^\lambda f)$ がなす群 $\widehat{GT}$ を **グロタンディーク・タイヒミュラー群** という．

$$f(x, y) f(y, x) = 1, \quad (22)$$

$$f(z, x) z^{\frac{\lambda-1}{2}} f(y, x) y^{\frac{\lambda-1}{2}} f(x, y) x^{\frac{\lambda-1}{2}} = 1, \quad (23)$$

$$f(x_{12}, x_{23}) f(x_{34}, x_{45}) f(x_{51}, x_{12}) f(x_{23}, x_{34}) f(x_{45}, x_{51}) = 1. \quad (24)$$

このとき、 $G_{\mathbb{Q}}$ の $\hat{F}_2$ への作用は $\widehat{GT} < \text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ の部分群をなす．

ここで $G_{\mathbb{Q}} > \widehat{GT}$ であるか、とくに両者が一致するか否かは未解決である．Möller の結果 [21] は $G_{\mathbb{Q}} < G < \widehat{GT}$ となる群 G がみたす関係式を示したものにあたる．

4. 折り紙, Möller の結果

本節では折り紙の定義とそのタイヒミュラー曲線の表示を計算する具体的な方法、そしてこれらを用いて $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の新たな考察を行った Möller の結果について述べる．折り紙はデッサンと同一の組み合わせ的対象として定義され、一方で Belyi 曲面の代わりに以下の対象を定める点で異なるものである．

補題 14 ([15]) 自然数 d に対し, 下記のそれぞれの同値類の間に一対一対応がある:

- (1) トーラス E 上の一点で分岐する被覆 $p: R \rightarrow E$; 分岐軌道を保つ被覆同値の類,
- (2) 推移的な並べ替え群を生成する並べ替え $\gamma_h, \gamma_v \in S_d$ の対; S_d -共役類,
- (3) 自由群 F_2 の位数 d の部分群 $H < F_2$; F_2 -共役類,
- (4) 平面上の単位正方形セルの d 枚のコピーを辺で貼り合わせて得られる並進曲面; 並進同値類.

上記の各々を対応に沿って並立したものを考えるとき, 主に以下の役割で代表される.

- (1) $H < F_2 \cong \pi_1(E^*)$, $E^* := E \setminus \{[0]\}$ が定める非分岐被覆 $R^* \rightarrow E^*$ の完備化,
- (2) 水平, 鉛直二方向の単純閉曲線の被覆 p によるモノドロミー $m_x := m_p(z \mapsto z+1)$, $m_y := m_p(z \mapsto z + \sqrt{-1}) \in S_d$. あるいは左コセット集合 $H \backslash F_2$ への $x, y \in F_2$ の右作用が定める並べ替え $m_x, m_y \in \text{Sym}(H \backslash F_2)$,
- (3) 非分岐被覆 $p|_{R^*}$, $R^* := p^{-1}(E^*)$ が誘導する準同型による, 基本群 $\pi_1(R^*)$ の $\pi_1(E^*) \cong F_2$ への埋め込みの像 $H < F_2$, あるいは準同型写像 $m: F_2 \rightarrow S_d: (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ に対して $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$,
- (4) 単位正方形トーラス $E_{\sqrt{-1}} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ 上のアーベル微分 dz の被覆 p による R への持ち上げが定める並進曲面 $(R, (p^*dz)^2)$.

折り紙 $\mathcal{O}$ は並進曲面 $(R, \phi = \omega^2)$ として第 2 節に述べたようにタイヒミュラー空間への円盤埋め込みを定め, 対する写像類群の作用は $\mathcal{O}$ のアフィン写像によって与えられる. ここで ω -座標を普遍被覆面 $\mathbb{H} \rightarrow R^* \rightarrow E^*$ で持ち上げて解析接続した写像 $\text{dev}_\omega: (\mathbb{H}, p^*dz) \rightarrow \mathbb{C}$ (Thurston の **developing map** [12]) を通して, 折り紙上のアフィン写像は格子の補集合 $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ 上のアフィン写像への射影をもつ. とくに折り紙の Veech 群は $SL(2, \mathbb{Z})$ の有限指数部分群であることがしたが, とくに Belyi 被覆 $\beta_{\mathcal{O}}: \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ を得る. よって定理 8 の帰結として折り紙は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたタイヒミュラー曲線を与える. そのデッサンの例を図 2 に示す.

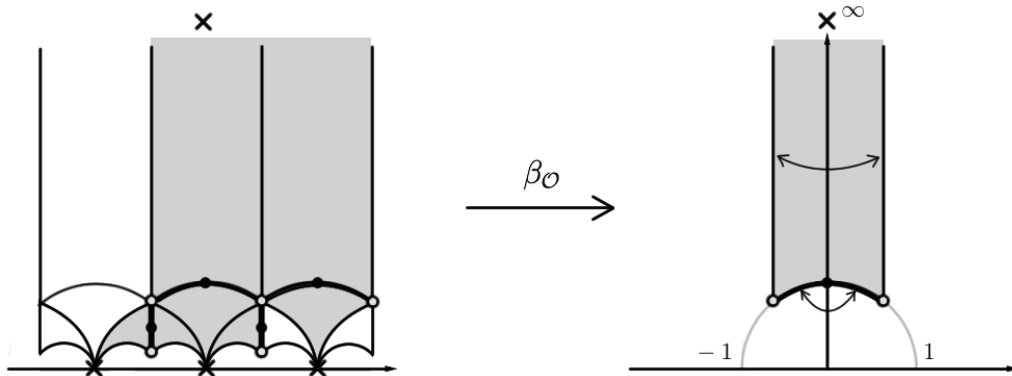


図 2: 折り紙のタイヒミュラー曲線のデッサンの例. 白, 黒点はそれぞれ補題 9 の意味で $0, 1 \in \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ に対応する分岐点を表す.

命題 15 ([20]) 折り紙 $\mathcal{O}$ はその同値類ごとに以下の対象のそれぞれを一意に定める.

- (1) タイヒミューラー空間への正則等長な埋め込み $\hat{\iota}_{\mathcal{O}} : \mathbb{H} \hookrightarrow T(\mathcal{O})$,
- (2) $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された代数曲線 $\mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$,
- (3) 代数曲線のモジュライ空間への埋め込み $\iota_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \hookrightarrow M(\mathcal{O})$.

命題 16 (Schmithüsen [30]) $u : \mathbb{H} \rightarrow E^*$ を普遍被覆とする. このときある部分群 $\text{Aut}^+(F_2) < \text{Aut}(F_2)$ に対し, 水平方向に完全系列をなす次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) & \hookrightarrow & \text{Aff}^+(\mathbb{H}, u^*dz) & \xrightarrow{D} & SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow * \cong & \nearrow \psi & \downarrow \cong \\ 1 & \longrightarrow & \text{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \text{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \text{Out}^+(F_2) \longrightarrow 1 \end{array}$$

ここで $\text{Inn}(F_2) = \{w^* : z \mapsto wz w^{-1} \mid w \in F_2\}$, $\text{Out}^+(F_2) = \text{Aut}^+(F_2)/\text{Inn}(F_2)$ である. さらに, この図式のもとで折り紙 $H < F_2$ の Veech 群 $\Gamma(H) < SL(2, \mathbb{Z})$ は固定部分群 $\text{Stab}(H) < \text{Out}^+(F_2)$ に同型である.

折り紙の普遍 Veech 群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の一つの生成系 $\left\{ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を固定する. これに対し命題 16 のもと $\psi(\gamma_T) = T$, $\psi(\gamma_U) = U$ をみたす意味で代表する, 次の自己同型写像の組を用いることができる.

$$\gamma_T := \begin{pmatrix} x \mapsto x \\ y \mapsto xy \end{pmatrix}, \quad \gamma_U := \begin{pmatrix} x \mapsto y \\ y \mapsto x^{-1} \end{pmatrix} \in \text{Aut}^+(F_2). \quad (25)$$

系 17 折り紙 $\mathcal{O} : (x, y) \in S_d^2$, $H < F_2$ に対し $\text{Gen}_{F_2} H$, $\text{Rep}_{F_2} H \subset F_2$ を極小な生成系と左コセット代表系とする. このとき $A = A(T, U) \in SL(2, \mathbb{Z})$ が $\Gamma(\mathcal{O})$ に属するためには, ある $\rho \in \text{Rep}_{F_2} H$ があって任意の $g \in \text{Gen}_{F_2} H$ に対し $m(\rho^* A(\gamma_T, \gamma_U)g)(1) = 1$ をみたすことが必要かつ十分である.

例 C 次数 4 の折り紙 $\mathcal{S}_2 : m_x = (1\ 2)(3\ 4)$, $m_y = (2\ 3) \in S_4$ に対し, その基本群は $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$ で与えられる. これに従い (x, y) の辞書式順序で H の元の枝探索を行うことで, $\text{Rep}_{F_2} H$, $\text{Gen}_{F_2} H$ の一つとして次が得られる.

$$\text{Rep}_{F_2} H = \{1, x, xy, xyx\}, \quad (26)$$

$$\text{Gen}_{F_2} H = \{y, x^2, xy^2x^{-1}, xyx^2y^{-1}x^{-1}, xyxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}\}. \quad (27)$$

系 17 の判定を $A(T, U) = T^2$ に対して行う例を示す. $\rho = xyx \in \text{Rep}_{F_2} H$ は任意の $g \in \text{Gen}_{F_2} H$, 例えば $g = y$ に対して

$$\rho^* A(\gamma_T, \gamma_U)g = (xyx)^*(\gamma_T \circ \gamma_U(y)) = xyx(x^2y)(xyx)^{-1}, \quad (28)$$

の $m : (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ による像が 1 を固定することを確認することができて, 結果として $T^2 \in \Gamma(\mathcal{S}_2)$ であることを得る. 同様の判定方法に基づき, (T, U) の辞書式順序

で $SL(2, \mathbb{Z})$ の元の枝探索を行うことで Veech 群の生成系, コセット代表系として次が得られる. 対応するタイヒミュラー曲線を図3に示す.

$$\text{Rep}_{SL(2, \mathbb{Z})} \Gamma(\mathcal{S}_2) = \{1, T, U, TU, UT, TUT\}, \quad (29)$$

$$\text{Gen}_{SL(2, \mathbb{Z})} \Gamma(\mathcal{S}_2) = \{T^2, UT^2U, UTUT^{-1}UT^{-1}, TUT^2UT^{-1}\}. \quad (30)$$

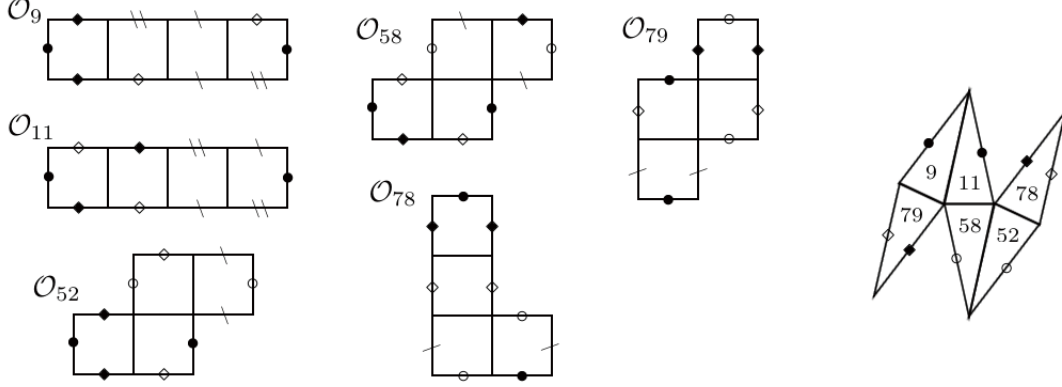


図 3: 折り紙 $\mathcal{S}_2$ のタイヒミュラー曲線 [19]. ここで $\mathcal{O}_{52} \cong \mathcal{S}_2$ であり, そのアフィン変形で与えられる各折り紙が代表する $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ のコピーを三角形で示した. 尖点は $\infty \in \overline{\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})}$ の逆像を表す. 各辺の記号は貼り合わせの対応を表す.

命題 18 (Möller [21]) 折り紙のタイヒミュラー曲線 $\iota_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \hookrightarrow M(\mathcal{O})$ は軌道体の間の射として, 自然な $G_{\mathbb{Q}}$ -作用が定義される対象である. とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ とし, $\mathcal{O}$ を折り紙とするととき $\mathcal{O}^{\sigma}$ は再び折り紙であって, $\iota_{\mathcal{O}^{\sigma}}(C(\mathcal{O})^{\sigma}) = \iota_{\mathcal{O}}(C(\mathcal{O}^{\sigma}))$ が成り立つ.

Möller [21] の結果は命題 18 に基づき, 例 C の折り紙 $\mathcal{S}_2$ における $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の考察をもって $G_{\mathbb{Q}} < \text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ のみならず新たな関係式を得たものである. 例 C の計算の結果として $\Gamma(\mathcal{S}_2)$ はモジュラー群 $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$ で指数 6 である. $\mathcal{S}_2$ は E_1, E の楕円対合と可換な超楕円対合をもち, 図 4 の被覆 $\mathcal{S}_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E$ は $P(X) := 4X(X-1)$ と $t \in \hat{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{H}/\Gamma(2)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : \{Y^2 &= (P(X) - 1)(P(X)^2 - (1 - t))\} \ni (X, Y) \\ &\rightarrow E_1 : \{Y^2 = (X^2 - 1)(X^2 - (1 - t))\} \ni (P(X), Y(2X - 1)) \\ &\rightarrow E : \{Y^2 = X(X - 1)(X - (1 - t))\} \ni (P(X)^2, Y(2X - 1)P(X)), \end{aligned}$$

と表される. $C(\mathcal{S}_2)$ の自己同型群は超楕円対合と $(X, Y) \mapsto (1 - X, Y)$ によって与えられ, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に同型である. 固定した $P_{\mathbb{C}}^1$ の向付き基点 $\vec{u} = 0\vec{1}$ に対して $\pi_1(C(\mathcal{S}_2), \vec{u}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes F_2$ と分割され, これに関して $\widehat{GT}$ が作用する.

各 x_{ij} を定義 12 における $\hat{\Pi}_{0,6}$ の生成元とし, 各 α_i を (27) 式で示した $\pi_1(\mathcal{S}_2)$ の i -番目の生成元における Dehn 捻りが表す $\Pi_{0,6}$ の元を表すものとする. ここで Birman-Hilden 表現による次の表示 [31] のもと, 続く定理が成り立つ.

$$\hat{\Pi}_{2,0} = \hat{B}_{0,6} / \langle \tau_5 \tau_4 \tau_3 \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5, (\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4)^5 \rangle, \quad (31)$$

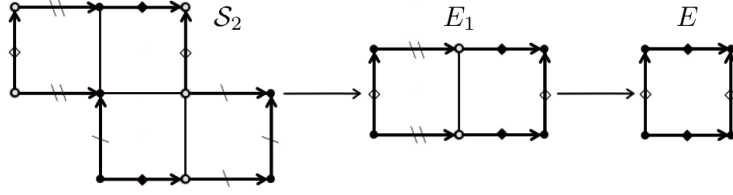


図 4: 折り紙の被覆の列 $S_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E$.

定理 19 (Möller [21]) 折り紙 S_2 の定めるタイヒミュラー曲線 $\iota_{S_2} : \mathbb{H}/\Gamma(S_2) \hookrightarrow M_{2,0}$ に対する $G_{\mathbb{Q}}$ -作用に両立する $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ の作用は $\hat{\Pi}_{2,0}$ 上で次の関係式をみたす：

$$\begin{aligned} & f(\alpha_3, (\alpha_1^2 \alpha_2)^4) f(\alpha_1^2, \alpha_2^2) f(\alpha_5^2, \alpha_4^2) \alpha_1^{-4\rho_2(\sigma)} \alpha_3^{-2\rho_2(\sigma)} \alpha_5^{-4\rho_2(\sigma)} f(\alpha_2 \alpha_4, \alpha_1^2 \alpha_3 \alpha_5^2) \\ &= x_{16}^{2\rho_2(\sigma)} (x_{46} x_{56})^{\rho_2(\sigma)} (x_{12} x_{13})^{\rho_2(\sigma)} (\alpha_2 \alpha_4)^{2\rho_2(\sigma)} (\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4)^{-2\rho_2(\sigma)}, \end{aligned} \quad (32)$$

ただし $\rho_2(\sigma)$ は $\sigma(\sqrt[n]{2}) = \zeta_n^{\rho_2(\sigma)} \sqrt[n]{2}$ で定義される Kummer コサイクル [25] を表す．関係式 (32) で定義される $\widehat{GT}$ の部分群は $G_{\mathbb{Q}}$ を包含する．

5. 付記

本節では上記の文脈に関連して、追加の議論と研究結果について述べる．

命題 18 で述べられたように、折り紙 $\mathcal{O}$ のタイヒミュラー曲線のデッサン $\beta_{\mathcal{O}}$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義される代数曲線のモジュラス $t \in \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$ が許容する各デッサンと $G_{\mathbb{Q}}$ -作用のもとで連動する関係にある． $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された楕円曲線を与える t は例 A に見るように多様にあり、それぞれの上の Belyi 関数をもとに折り紙 $\iota_{\mathcal{O}}(t) \in M(\mathcal{O})$ 上の Belyi 関数を構成することができる．例えば $E_{\sqrt{-1}} : Y^2 = 4X^3 - X$ 上の Belyi 関数 $\beta_0(X, Y) := 4X^2$ は無限遠点で分岐する被覆を通じて図 5 に示すようなデッサンを与える．

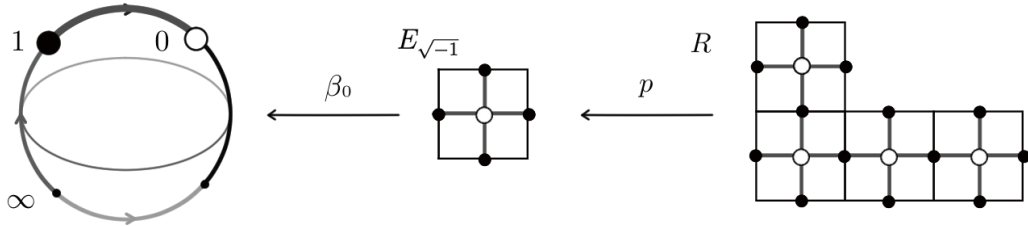


図 5: 折り紙の並進曲面モデル $\iota_{\mathcal{O}}(\sqrt{-1})$ が許容するデッサンの例．

系 20 折り紙における以下の量は $G_{\mathbb{Q}}$ の不変量である．

- Belyi 被覆 $\beta_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ が定めるデッサンの $G_{\mathbb{Q}}$ -不変量．
- モジュラス $t \in \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$ と $\iota_{\mathcal{O}}(t) \in M(\mathcal{O})$ のデッサンに関する (許容するかを含む) $G_{\mathbb{Q}}$ -不変量の組,
- 被覆 p の分岐指数のリスト $(m_1^{[0]}, m_2^{[0]}, \dots, m_n^{[0]})$, アーベル微分 $p^* dz$ の零点の位数のリスト, あるいは $[m_x, m_y] = m_x m_y m_x^{-1} m_y^{-1} \in S_d$ のサイクル長のリスト．

ここで折り紙のタイヒミュラー曲線として現れるデッサンの特徴づけ, ならびに具体的な構成方法を問う Veech 群の逆問題は本稿の文脈で. これは無限型の平坦曲面においては Przytycki-Schmithüsen-Valdez [27] によって解決されており, 有限型の設定特有の問題となっている.

定理 21 (Ellenberg, McReynolds [7], 2012) モジュラー群 $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$ の指数有限の任意の部分群であって $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ を含むものに対し, これを Veech 群として実現する折り紙が存在する.

さて, Grothendieck のレゴ・タイヒミュラーの予想において期待される $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の構成単位は射有限写像類群 $\hat{\Pi}_{0,4}, \hat{\Pi}_{1,1}, \hat{\Pi}_{0,5}$ であった. 折り紙は並進曲面の構造をもって $(1,1)$ 型の対象を扱うものであり, Möller の理論は楕円対合との関係から $(0,4)$ 型の対象への射の情報を控えて $G_{\mathbb{Q}}$ -作用を考察することで, これがみたす $(2,0)$ 型, $(0,6)$ 型における関係式を新たに得たものである. ここで $(0,4)$ 型の対象はデッサンが $\hat{\mathbb{C}}^* = M_{0,4}$ の被覆として扱っているものであるとともに, 定理 21 の Veech 群の逆問題における折り紙の構成にも現れる.

ここで $(0,4)$ 型の平坦曲面の構造は $(1,1)$ 型の並進曲面 $(E_{\sqrt{-1}}, dz)$ の楕円対合による商 $(E_{\sqrt{-1}}/\langle z \mapsto -z \rangle, dz^2)$ として自然に与えられる. その特異点集合 $\left\{ [0], [\frac{1}{2}], [\frac{\sqrt{-1}}{2}], [\frac{1+\sqrt{-1}}{2}] \right\}$ の上で分岐する被覆面は単位正方形セルを辺で貼り合わせて得られる平坦曲面である. これを **平坦折り紙** とよぶものとし, その Veech 群に関する結果を述べる.

補題 22 次数 d の折り紙 $(x, y) \in S_d^2$ と符号関数 $\varepsilon : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{\pm 1\}$ に対し,

$$\mathbf{x}(\pm i) = \pm x^{\pm 1}(i), \quad (33)$$

$$\mathbf{y}(\pm i) = \pm \varepsilon(i) y(i)^{\pm \varepsilon(i)} \varepsilon(y^{\pm \varepsilon(i)}), \quad (34)$$

が定める $2d$ 次の折り紙 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S_d^2$ は, 図 6 の折り紙の切り貼り操作が与える平坦折り紙の標準二重被覆面である. さらに, この構成は各 $\varepsilon(i) = -1$ をみたす i -番目の正方形セルにおける, 平坦折り紙上の測地的ドロネー三角形分割 [4] のフリップ操作を誘導する.

命題 23 平坦折り紙 $(x_1, y_1, \varepsilon_1), (x_2, y_2, \varepsilon_2) \in S_d^2 \times \{\pm 1\}^d$ が半並進同値であるためには, ある $\sigma \in \text{Sym}(\{\pm 1, \dots, \pm d\})$ があって次をみたすことが必要かつ十分である: $\delta := \text{sign}(\sigma) \in \{\pm 1\}^d$, $\bar{\sigma} := |\sigma(\cdot)| \in S_d$ とかくものとするとき, 任意の $i \in \{1, \dots, d\}$ に対し

- (1) $\delta(i) = \delta(x_1(i))$,
- (2) $x_2 \circ \bar{\sigma}(i) = \bar{\sigma} \circ x_1^{\delta(i)}$,
- (3) $\delta(\bar{\sigma}^{-1}(i)) \cdot \varepsilon_1(\bar{\sigma}^{-1}(i)) \cdot \varepsilon_2(i) = \delta(\bar{\sigma}^{-1}(y(i))) \cdot \varepsilon_1(\bar{\sigma}^{-1}(y(i))) \cdot \varepsilon_2(y(i))$,
- (4) $y_2(\bar{\sigma}(i)) = \bar{\sigma}(y_1^{\delta(i) \cdot \varepsilon_1(i) \cdot \varepsilon_2(\bar{\sigma}(i))}(i))$.

さらに, 補題 22 の対応 $o : (x, y, \varepsilon) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は平坦折り紙とその標準二重被覆として現れる折り紙の, 同値類の間の全単射を与える.

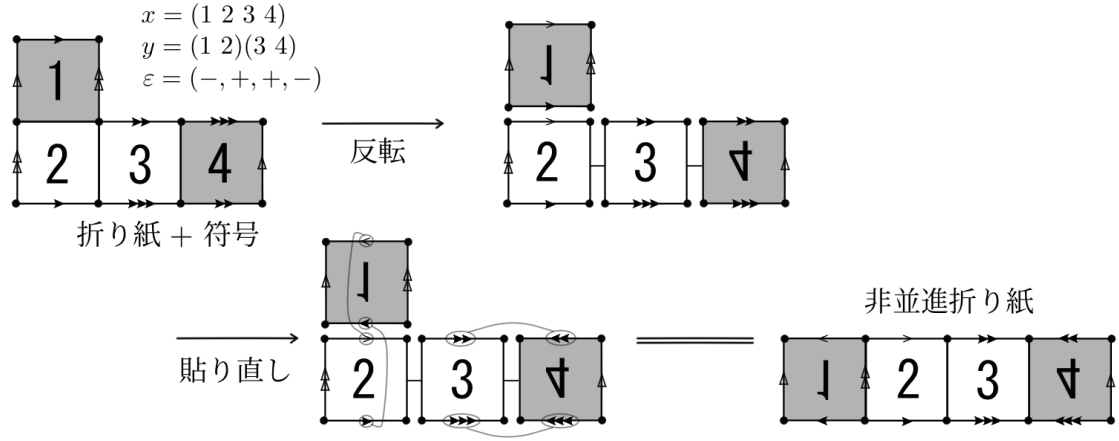


図 6: 折り紙の切り貼り操作: 折り紙の指定された正方形セルに対し, ω -座標に鏡映反転を施して適切に貼り直すことで並進曲面とならない平坦折り紙を得る.

定理 24 ([19]) ある $\sigma_T, \sigma_U \in S_{2d}$ が存在して次が成り立つ. $A = [T], [U] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ が平坦折り紙 (x, y, ε) の Veech 群に属するためには, 命題 23 の意味で $\sigma_A^{-1} \sigma_A^* \gamma_A \sigma_A o(x, y, \varepsilon)$ が (x, y, ε) に同値な平坦折り紙であることが必要かつ十分である.

とくに平坦折り紙の Veech 群は折り紙のアフィン変形 (25) を局所的な $[T], [U] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ の作用を表すものとして扱うことができる. さらに [19] では平坦折り紙の同値類の分類とこれに作用する対称群としての $PSL(2, \mathbb{Z})$ の表現を行い, 枚数 7 まで, およそ 30000 の平坦折り紙のクラスにおける Veech 群の網羅的な計算結果が得られている.

参考文献

- [1] Ahlfors, L. V.: Lectures on Quasiconformal Mappings. *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (1966).
- [2] Belyĭ, G. V.: On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Izv. Akad. Nauk USSR* **43** (1979) 267–276; transl. *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 247–256.
- [3] Bers, L.: Deformations and moduli of Riemann Surfaces with nodes and signatures. *Math. Scand.*, **36** (1975), 12–16.
- [4] Bowman, J.: Teichmüller geodesics, Delaunay triangulations, and Veech groups. *Teichmüller Theory and Moduli Problems, Ramanujan Math. Society Lecture Notes Series*, Vol. 10 (2010), 113–129.
- [5] Degiovanni, P.: Moore and Seiberg equations, topological field theories and Galois theory. *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200** (1994), 359–368.
- [6] Drinfel’d, V. G.: On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Algebra i Analiz*, 2:4 (1990), 149–181; *Leningrad Math. J.*, 2:4 (1991), 829–860.
- [7] Ellenberg, J., McReynolds, D. B.: Arithmetic Veech sublattices of $SL(2, \mathbb{Z})$. *Duke Math. J.* **161**, no. 3 (2012), 415–429.

- [8] Earle, C. J., Gardiner, F. P.: Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), 1163–1190.
- [9] Freitag, E., Busam, R.: Complex Analysis, *Universitext, Springer* (2005).
- [10] Gardiner, F. P., Lakic, N.: Quasiconformal Teichmüller Theory, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (2000).
- [11] Grothendieck, A.: Esquisse d’un Programme. (1984 manuscript) Geometric Galois Actions, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242** (1997), 7–48.
- [12] Gutkin, E., Judge, C.: Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic. *Duke Math. J.* **103** (2000), 191–213..
- [13] Hatcher, A., Lochak, P., Schneps, L.: On the Teichmüller tower of mapping class groups, *J. Reine Angew. Math.*, **521** (2000), 1–24.
- [14] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **11** (2007), 293–349.
- [15] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: Dessins d’enfants and origami curves, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **13** (2009), 767–809.
- [16] Ihara, Y.: Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II* (Kyoto, 1990), 99–120.
- [17] Ihara, Y.: On the embeddings of $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{GT}$. The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200** (1994), 289–306.
- [18] Jones, G. A., and Wolfart, J.: Dessin d’enfants on Riemann surfaces, *Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham* (2016).
- [19] Kumagai, S.: Calculation of Veech groups and Galois invariants of general origamis. *Kodai Math. J.* **47**(2) (2024), 137–161.
- [20] Lochak, P.: On arithmetic curves in the moduli space of curves. *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **4**(3) (2005), 443–508.
- [21] Möller, M.: Teichmüller curves, Galois actions and $\widehat{GT}$ -relations. *Math. Nachr.* **278**, no.9 (2005), 1061–1077.
- [22] Moore, G. W., Seiberg N.: Classical and quantum conformal field theory. *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 177–254.
- [23] Nag, S.: The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces. *Wiley, New York*, (1988).
- [24] 中村博昭 (述), 星野謙二 (記): 曲線の moduli 空間の基本群への Galois 作用. 第 12 回 整数論サマースクール報告集『基本群と Galois 表現』 (2005), 117–128.
- [25] Nakamura, H., Schneps, L.: On a subgroup of the Grothendieck–Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups. *Invent. Math.* **141** (2000), 503–560.
- [26] Oda, T.: Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves. *Geometric Galois Actions, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242** (1997), 85–95.
- [27] Przytycki, P., Schmithüsen, G., Valdez, F.: Veech groups of Loch Ness Monsters. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **61**, 2 (2011), 673–687.
- [28] Romagny, M., Wewers, S.: Hurwitz spaces. *Séminaires et Congrès*, **13** (2006), 313–341.
- [29] Ribes, L., Zalesskii, P: Profinite groups, *Springer Berlin, Heidelberg* (2010).
- [30] Schmithüsen, G.: An algorithm for finding the Veech group of an origami. *Experiment. Math.* **13**, no.4 (2004), 459–472.

- [31] Schneps, L.: The Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GT}$: a survey. Geometric Galois Actions, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **242** (2013), 183–204.
- [32] Veech, W. A.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. Invent. Math. **97** (1989), no. 3, 553—583.
- [33] Wewers, S.: Constructing Hurwitz spaces. Dissertation, Universität Essen (1998).

Hardy 族による平面領域の分類に関する Hasumi の定理について

林 実樹廣 (北海道大学 *)

成田 淳一郎 (大同大学 *)

瀬川 重男 (大同大学 *)

$[0, \infty)$ 上の非定数非負非減少凸函数を単に凸函数と呼ぶことにする. 複素球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 D と凸函数 Φ に対し, D 上の正則函数 f で $\Phi(\log^+ |f(z)|)$ が D 上で調和優函数を持つもの全体の族を $H^\Phi(D)$ と記す. さらに, $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 D で $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ (即ち, $H^\Phi(D)$ が定数函数のみ) となる D 全体の族を $\mathcal{O}_\Phi$ と記す. 以下, 記号などは [2] に従う. 標題の Hasumi(荷見) の定理とは次のことである:

定理 1 ([1], [2; XI 定理 3.5]). 2 つの凸函数 Φ, Ψ が, 任意の $s > 0$ に対し $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t+s)/\Phi(t) = 0$ をみたすとき, $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ (即ち, $\mathcal{O}_\Psi \subsetneq \mathcal{O}_\Phi$) である.

実数 $p (> 0)$ に対し $\Phi(t) = e^{pt}$ とする. このとき, $H^\Phi(D)$ は通常 $H^p(D)$ と記される D 上の Hardy 族であり, $\mathcal{O}_\Phi$ は $\mathcal{O}_p$ と略記される. 定理 1 から, Hardy 族による平面領域の分類

$$\bigcup_{q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{q > p} \mathcal{O}_q, \quad \mathcal{O}_G < \bigcap_{q > 0} \mathcal{O}_q, \quad \bigcup_{q < \infty} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_{AB}$$

が容易に導かれる. しかし, 実は定理 1 の証明に少し不備があることが確認された ([3]). 本講演では, その問題点およびその解決方法について報告したい.

定理 1 を証明するためには, $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ かつ $H^\Psi(D) \setminus \mathbb{C} \neq \emptyset$ をみたす領域 D を見付ければ良い. [1] で考察されたのは次のような領域である. $0 < \rho < \delta < 1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ は $0 < a_{n+1} < \rho a_n < a_n \leq 1$ ($n \geq 0$) をみたすとする. さらに, 各 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n \geq 0$) は非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 (有界閉集合 K が $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \subset G$ をみたす任意の領域 G に対し $H^\Phi(G \setminus K) = H^\Phi(G)$) とする. そこで

$$E := \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^\infty E_n \right), \quad D =: \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$$

とする. このとき, $f \in H^\Phi(D)$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ で正則となる.

命題 2 ([3]). 凸函数 Φ に対し, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の正則函数 f が $f \in H^\Phi(D)$ となるための必要十分条件は次の 2 条件

$$(\Phi.1) \quad \int_E \Phi(\log^+ |f(z)|) dm(z) < +\infty,$$

$$(\Phi.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Phi(\log^+ |f(z)|) dm_n(z) < +\infty$$

が成り立つことである. ここで, $C(a_n) = \{|z| = a_n\}$ とし, m (又は m_n) は $z = \infty$ における領域 D (又は $\{|z| > a_n\} \setminus (\sum_{i=0}^{n-1} E_i)$) の調和測度とする.

[1, 2] では, $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{E_n\}_{n=0}^\infty$ を上手く採って, 非定数 $f \in H^\Phi(D)$ について (Φ.1) の不成立により $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ を示している. さらに, $1/z \in H^\Psi(D)$, 即ち

$$(\Psi.1) \quad \int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) < +\infty$$

および

$$(\Psi.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+ |1/z|) dm_n(z) < +\infty$$

が示されれば定理 1 の証明は完結する. しかし, [1, 2] では, (Ψ.1) が成立することは証明されているが (Ψ.2) については全く言及されていない.

定理 1 の証明の 1 つの要は次の定理である:

定理 3 ([1], [2; XI 定理 2.7]). $0 < a < b, 0 < \delta < 1$ とする. $F (\subset \{|z| > b\})$ は非極有界閉集合で $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F$ は $z = \infty$ を含む領域になっているとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $E (\subset \{\delta a \leq |z| \leq a\})$ で

$$(1) \quad \mu(C(a)) - \mu_E(E) < \varepsilon, \quad \mu_E(F) - \mu(F) < \varepsilon$$

をみたすものが存在する. 但し, μ (又は μ_E) は $z = \infty$ における領域 $\{|z| > a\} \setminus F$ (又は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$) の調和測度とする.

定理 3 を次のように ‘精密化’ し, さらに $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{E_n\}_{n=0}^\infty$ の構成法を少し修正することで (Ψ.2) も成立させることが可能となり, 定理 1 の証明を完結出来る.

補題 4. $0 < a' < \delta a < a < b$ とし, F, μ は定理 3 と同じとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $E (\subset \{\delta a \leq |z| \leq a\})$ で

$$(1') \quad \mu(C(a)) - \nu_E(E) < \varepsilon, \quad \nu_E(C(a')) < \varepsilon$$

をみたすものが存在する. 但し, ν_E は $z = \infty$ における領域 $\{|z| > a'\} \setminus (E \cup F)$ の調和測度とする.

参考文献

- [1] M. Hasumi: *Hardy classes on plane domains*, Ark. Mat., **16**(1978), 213-227.
- [2] 荷見守助: リーマン面上のハーディ族, 内田老鶴圃, 2010.
- [3] 中井三留, 成田淳一郎, 瀬川重男: 調和優函数の存在の諸相, 大同大学紀要, **60**(2024), 11-88.

Characterization of asymptotically smooth curve

Katsuhiko MATSUZAKI (Waseda University)
Fei TAO (Waseda University)

1 Little Bloch and BMOA functions

A holomorphic function φ on the unit disk $\mathbb{D}$ is called a *Bloch function* if it satisfies $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |\varphi'(z)| < \infty$. The Banach space of all Bloch functions (modulo additive constants) is denoted by $B(\mathbb{D})$. If $\varphi \in B(\mathbb{D})$ vanishes at the boundary in the sense that $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |\varphi'(z)| = 0$, then φ is called a *little Bloch function*, and the closed subspace of all such functions is denoted by $B_0(\mathbb{D})$. Moreover, φ belongs to $BMOA(\mathbb{D})$ if φ lies in the Hardy space and its boundary function $\varphi|_{\mathbb{S}}$ on $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ belongs to BMO . The function φ is in the little subspace $VMOA(\mathbb{D})$ if $\varphi|_{\mathbb{S}}$ lies in VMO . These spaces are also characterized by the property that $(1 - |z|^2) |\varphi'(z)|^2 dx dy$ is a Carleson measure and a vanishing Carleson measure on $\mathbb{D}$, respectively.

It is known that $VMOA(\mathbb{D})$ is contained in both $BMOA(\mathbb{D})$ and $B_0(\mathbb{D})$. A natural question then arises: does $VMOA(\mathbb{D})$ coincide with $BMOA(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$? However, the known studies so far do not seem to detect any difference between them. For example, this includes characterizations of these function classes for φ given by a lacunary series $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ ($z \in \mathbb{D}$) with Hadamard gaps $\inf_k (n_{k+1}/n_k) > 1$, and also for random holomorphic functions $\varphi_{\omega}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n z^n$, where $\omega = (\omega_n)$ is a discrete stochastic process which is a sequence of random variables taking values in $\mathbb{S}$.

2 Symmetric and strongly quasisymmetric homeomorphisms

The universal Teichmüller space T is identified with the group $QS(\mathbb{S})$ of all normalized quasisymmetric self-homeomorphisms of $\mathbb{S}$. By conformal welding, every $h \in QS(\mathbb{S})$ can be represented as $h = g^{-1} \circ f|_{\mathbb{S}}$, where $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ is the normalized Riemann map onto a bounded quasidisk Ω , and $g : \mathbb{D}^* \rightarrow \Omega^*$ is the Riemann map between the complementary domains in $\widehat{\mathbb{C}}$. Then, $\varphi = \log f'$ belongs to $B(\mathbb{D})$, and the set $\mathcal{T}$ of all such φ forms a connected open subset of $B(\mathbb{D})$ containing the origin, which is regarded as the Bers fiber space over $T \cong QS(\mathbb{S})$. We denote this projection by $p : \mathcal{T} \rightarrow QS(\mathbb{S})$.

An element $h \in QS(\mathbb{S})$ is said to be *symmetric* if $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(e^{i(x+t)}) - h(e^{ix})}{h(e^{ix}) - h(e^{i(x-t)})} = 0$ uniformly. The subgroup of all such symmetric homeomorphisms is denoted by $S(\mathbb{S})$. Furthermore, $h \in QS(\mathbb{S})$ is called *strongly quasisymmetric* if it is absolutely continuous and its derivative h' is a Muckenhoupt A_{∞} -weight (implying $\log h' \in BMO(\mathbb{S})$). It is called *strongly symmetric* if $\log h' \in VMO(\mathbb{S})$. The corresponding subgroups are denoted by $SQS(\mathbb{S})$ and $SS(\mathbb{S})$, respectively. Then $SS(\mathbb{S})$ is contained in both $SQS(\mathbb{S})$ and $S(\mathbb{S})$.

Under the identification $QS(\mathbb{S}) \cong T$, we have that $S(\mathbb{S})$ corresponds to the asymptotically conformal Teichmüller space T_0 , $SQS(\mathbb{S})$ to the BMO Teichmüller space T_{BMO} , and $SS(\mathbb{S})$ to the VMO Teichmüller space T_{VMO} . Through the projection $p : \mathcal{T} \rightarrow QS(\mathbb{S})$, these spaces are related by $p(B_0(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = S(\mathbb{S})$, $p(BMOA(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = SQS(\mathbb{S})$, and $p(VMOA(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = SS(\mathbb{S})$.

These relationships between the subspaces of $\mathcal{T} \subset B(\mathbb{D})$ and $QS(\mathbb{S})$ show that the question about $VMOA(\mathbb{D}) \subset BMOA(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ is equivalent to asking whether the inclusion $SS(\mathbb{S}) \subset SQS(\mathbb{S}) \cap S(\mathbb{S})$ is strict. However, constructing an explicit element in this gap is difficult. For instance, while $\log |z - 1|$ on $\mathbb{S}$ lies in $BMO(\mathbb{S}) \setminus VMO(\mathbb{S})$, the integral of $|z - 1|$ near 1 does not hold a vanishing quasisymmetry quotient.

3 Asymptotically conformal chord-arc curves

Let $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ be a conformal homeomorphism. To characterize $\varphi = \log f'$, we consider the following geometric properties of the bounded Jordan curve $\Gamma = \partial\Omega$. For distinct points $a, b \in \Gamma$, the smaller sub-arc between a and b is denoted by $\gamma(a, b)$, and its length is denoted by $\ell(\gamma(a, b))$ if rectifiable.

Definition. A quasicircle Γ is said to be *asymptotically conformal* if

$$\lim_{|a-b| \rightarrow 0} \max_{w \in \gamma(a, b)} \frac{|a-w| + |w-b|}{|a-b|} = 1.$$

A rectifiable Γ is called *chord-arc* if there exists $C \geq 1$ such that $\ell(\gamma(a, b))/|a-b| \leq C$ for any $a, b \in \Gamma$, and *asymptotically smooth* if $\lim_{|a-b| \rightarrow 0} \ell(\gamma(a, b))/|a-b| = 1$.

The geometric characterization asserts that $\varphi = \log f' \in B_0(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ if and only if $\Gamma = f(\mathbb{S})$ is asymptotically conformal, and that $\varphi \in \text{VMOA}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ if and only if Γ is asymptotically smooth. In addition, φ lies in a certain open neighborhood of the origin in $\text{BMOA}(\mathbb{D})$ if and only if Γ is chord-arc. More generally, an element of $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ is characterized by the Bishop–Jones condition on Γ , which, roughly speaking, requires that from every point in the interior domain Ω bounded by Γ , a uniformly large portion of Γ is visible along a chord-arc curve.

By transforming the question about the inclusion relations between function spaces into one about geometric properties of the boundary curves of conformal maps, we provide an answer through an explicit example.

Theorem 1. *There exists an asymptotically conformal chord-arc curve that is not asymptotically smooth.*

Corollary 2. (1) *The inclusion $\text{VMOA}(\mathbb{D}) \subset \text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ is strict.* (2) *The inclusion $\text{SS}(\mathbb{S}) \subset \text{SQS}(\mathbb{S}) \cap \text{S}(\mathbb{S})$ is strict.*

Furthermore, we provide an additional geometric condition under which asymptotic conformality implies asymptotic smoothness for a chord-arc curve.

Definition. A chord-arc curve Γ is said to be *uniformly approximable* if, for every $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer $n \in \mathbb{N}$ such that every sub-arc $\gamma(a, b) \subset \Gamma$ with endpoints a, b admits a partition $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ along $\gamma(a, b)$ satisfying

$$(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n |a_i - a_{i-1}| \geq \ell(\gamma(a, b)).$$

Theorem 3. *A bounded chord-arc curve is asymptotically smooth if and only if it is asymptotically conformal and uniformly approximable.*

4 Further problems

We consider the intermediate closed subspace $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ between $\text{VMOA}(\mathbb{D})$ and $\text{BMOA}(\mathbb{D})$, in view of whether the properties that hold for $\text{VMOA}(\mathbb{D})$ but not for $\text{BMOA}(\mathbb{D})$ still hold for $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$. Using equivalent characterizations of these spaces, we pose the following problems from the same perspective:

1. Is an asymptotically conformal quasicircle satisfying the Bishop–Jones condition necessarily chord-arc?
2. Is $L^\infty(\mathbb{S})$ dense in $\text{BMO}_0(\mathbb{S})$, the boundary extension of $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$? Is e^φ an A_2 -weight for every $\varphi \in \text{BMO}_0(\mathbb{S})$?
3. Does there exist a real-analytic global section of the Teichmüller projection onto the BMO_0 Teichmüller space T_{BMO_0} , which is identified with $\text{SQS}(\mathbb{S}) \cap \text{S}(\mathbb{S})$?

複素力学系に現れる有理型関数の一般化シュワルツ微分について

奥山裕介 (京都工芸繊維大学)*

1. 複素力学系に現れる有理型関数

以下 $f(z)$ を、複素アフィン直線 $\mathbb{C}$ 上の非定値有理型関数とする。 f の任意回数 n の反復合成 f^n がすべて定義できるような $\mathbb{P}^1$ の最大の部分集合を $V = V(f)$ として、 f のファトゥ集合を

$$F(f) := \{z \in V : \text{反復合成族 } (f^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ は } z \text{ で正規}\}$$

と定める。 f が複素射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 上まで有理型に拡張する場合は、 $\mathbb{P}^1$ 上の有理関数としての f の次数は > 1 とし、必要ならば $\mathbb{P}^1$ の射影変換による f の共役に f を取り替えて、 f は多項式であるか、または拡張した f に対し反復合成族 (f^n) は ∞ で正規でないとする。

自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対し f^p の固定点 $a \in \mathbb{P}^1$ (このとき $a \in V$) を、 f の周期 p の周期点とも呼ぶ。このとき有限集合 $\{f^j(a) \in \mathbb{C} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset V$ を a の周期 f 軌道と呼び、微係数

$$\lambda = \lambda_{f,a,p} := (f^p)'(a) (= \lambda_{f,f^j(a),p}) \in \mathbb{C}$$

をその乗法因子 (multiplier) と呼ぶ： $\lambda = 0$ 、 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ 、 λ が 1 の冪根、のそれぞれの場合に、 a の周期 f 軌道は超吸引的、超ではない吸引的、放物的と呼ばれ、 V の部分集合

$$\Omega = \left\{ z \in F(f) : \lim_{j \rightarrow \infty} f^{pj}(z) = f^{\exists j}(a) \right\}$$

をその (超吸引/超でない吸引/放物) 鉢と呼ぶ。さらに超吸引でない場合には、ケーニス・ポワンカレ・シュレーダー/アーベル方程式

$$\begin{cases} \Phi \circ f = \lambda^{1/p} \cdot \Phi & \text{if } \lambda \in \mathbb{D}^* \\ \Phi \circ f = \Phi + \frac{1}{pq} & \text{if } \lambda^q = 1 \text{ for } \exists q \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.1)$$

は Ω 上の有理型関数であって a の周期 f 軌道の (Ω でのある種の) 近くで単葉であるような解 Φ を持つ (そのような解の一意性については略す)。このような ϕ を、この周期 f 軌道に対する、 f に付随するケーニス・ポワンカレ・シュレーダー/アーベル関数と呼ぶ。

2. 一般化 (プレ) シュワルツ微分

$\mathbb{C}$ の開集合 U 上の非定値有理型関数 ϕ に対し、 U 上の有理型関数

$$T_\phi := \frac{\phi''}{\phi'}, \quad S_\phi := \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2$$

*e-mail: okuyama@kit.ac.jp
web: <http://yusuke.cajpn.org>

を ϕ のそれぞれプレシュワルツ微分（もしくは non-linearity）およびシュワルツ微分（もしくは non-projectivity）と呼ぶ：これらはそれぞれアフィン変換および射影変換に対し良い変換則を満たす（詳細は略す）。 Φ の任意高階導関数を用いた一般化（プレ）シュワルツ微分も種々考えられている。

3. Koenigs ... / Abel 関数 Φ の一般化 (pre) シュワルツ微分の近似公式

定理 1 ([1]). f は $\mathbb{C}$ 上の非定値有理型関数であって、 f が $\mathbb{P}^1$ の有理型関数の場合は、必要ならば $\mathbb{P}^1$ の射影変換による f の共役に f を取り替えて、 f は多項式であるか、または拡張した f に対し反復合成族 (f^n) は ∞ で正規でないとする。

f の、周期 p の周期点 a の周期 f 軌道が超でない吸引的または放物的なとき、その鉢を Ω として、 $\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$, この周期 f 軌道に対する f に付随するケーニス・ポワンカレ・シュレーダー／アーベル関数の一般化プレシュワルツ微分は

$$\text{locally uniformly on } \Omega, \quad \frac{\phi^{(t)}}{\phi'} = \frac{(f^n)^{(t)}}{(f^n)'} + \begin{cases} O(|\lambda|^{\frac{n}{p}}) & \text{if } \lambda \in \mathbb{D}^* \\ O(\frac{1}{n}) & \text{if } \lambda \text{ が } 1 \text{ の冪根} \end{cases} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

のように Ω 上定量的広義一様近似される。

注 1. (i) 超吸引的鉢上のこの種の広義一様定量的近似は既知 (Vigny-Okuyama[2])。

(ii) ジーゲル円盤／エルマン円環に対してはこの種の近似公式は定性的にも成り立たない。

(iii) $t = 2, 3$ の場合から Φ のシュワルツ微分の定量的広義一様近似も従う。

定理 1 の証明ではケーニス・ポワンカレ・シュレーダー／アーベル方程式 (1.1) を繰り返し微分して評価することになるが、その際以下の二点

- $\mathbb{Z}$ 係数の多変数の多項式列系 $A_{s,u} \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_s]$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u \in \{0, \dots, s\}$ の新たな recursive な微分方程式系： $A_{0,0} := 1$, and $\forall s \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_{s,u}(X_0, \dots, X_s) &= A_{s-1,u-1}(X_0, \dots, X_{s-1}) \cdot X_0 + \\ &\quad + \sum_{q=0}^{s-1} ((\partial_{X_q}(A_{s-1,u}))(X_0, \dots, X_{s-1})) \cdot X_{q+1} \quad \text{for } u \in \{0, \dots, s\} \end{aligned}$$

が現れ用いられること、および

- a の周期 f 軌道が放物的な場合には、その (放物鉢 Ω でのある種の) 近くで Φ が単葉であることに基づく、 $\mathbb{D}$ 上の正規化された単葉関数の係数評価（最終結果は de Branges の定理）が、上記の近似の局所一様定量性を得る際に本質的であること、

に注意しておく。

参考文献

- [1] OKUYAMA, Y. Equidistribution of the zeros of higher order derivatives in polynomial dynamics, *J. Geom. Anal.*, **34**, 1 (2024), Paper No. 8, 11.
- [2] OKUYAMA, Y. and VIGNY, G. Value distribution of derivatives in polynomial dynamics, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **41**, 12 (2021), 3780–3806.