日本数学会

2025年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

（2日目／9月17日）

2025年9月

於　名古屋大学

次数 2 の超楕円関数による KP 方程式の解

綾野　孝則　(阪公大数学研)*1
Victor M. Buchstaber　(Steklov Mathematical Institute)

KP 方程式は水深が浅い場合の波の伝播を記述する偏微分方程式である．1977 年に，Krichever により，代数曲線のテータ関数による KP 方程式の解が構成された．本発表では，超楕円曲線のシグマ関数を用いて，KP 方程式の新しい解を構成する．

自然数 g に対して，x の多項式

$$f(x) = x^{2g+1} + \lambda_2 x^{2g} + \lambda_4 x^{2g-1} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

を考える．$f(x)$ は重根を持たないとする．種数 g の超楕円曲線

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; y^2 = f(x)\right\}$$

を考える．C 上の正則微分形式

$$\omega_i = -\frac{x^{g-i}}{2y} dx, \qquad 1 \le i \le g$$

を考える．$\lambda_0 = 1$ とする．C 上の第 2 種微分形式

$$\eta_i = -\frac{1}{2y} \sum_{k=g-i+1}^{g+i-1} (k+i-g) \lambda_{2g+2i-2k-2} x^k dx, \qquad 1 \le i \le g$$

を考える．$\{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i\}_{i=1}^g$ を C 上の標準ホモロジー基底とする．周期行列を次で定義する．

$$2\omega' = \left(\int_{\mathfrak{a}_j} \omega_i\right), \quad 2\omega'' = \left(\int_{\mathfrak{b}_j} \omega_i\right), \quad -2\eta' = \left(\int_{\mathfrak{a}_j} \eta_i\right), \quad -2\eta'' = \left(\int_{\mathfrak{b}_j} \eta_i\right)$$

$\tau = (\omega')^{-1}\omega''$ とする．$\tau\delta' + \delta''$, $\delta', \delta'' \in \mathbb{R}^g$ を $(\{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i\}_{i=1}^g, \infty)$ に付随する Riemann 定数とする．虚数単位を $\mathbf{i}$ で表す．$u = {}^t(u_1, u_3, \ldots, u_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ に対して，

$$\theta \begin{bmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{bmatrix} (u, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi \mathbf{i}\, {}^t(n+\delta')\tau(n+\delta') + 2\pi\mathbf{i}\, {}^t(n+\delta')(u+\delta'')\right\}$$

とする (Riemann のテータ関数)．このとき，C に付随するシグマ関数は

$$\sigma(u) = \varepsilon \exp\left(\frac{1}{2} {}^t u \eta' (\omega')^{-1} u\right) \theta \begin{bmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{bmatrix} \left((2\omega')^{-1} u, \tau\right)$$

で定義される．ここで，ε は 0 でないある定数である．

---

*1 〒558-8585　大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号　大阪公立大学　数学研究所
e-mail: ayano@omu.ac.jp
web: https://researchmap.jp/ayano75/
本研究は JSPS 科研費 (課題番号:JP21K03296) の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14H70, 14H81, 14K25, 32A20
キーワード：超楕円関数，シグマ関数，超楕円曲線，KP 方程式

Remark 1. シグマ関数の原点におけるべき級数展開の係数は，超楕円曲線 C の定義方程式の係数 λ_i の有理数係数の多項式になる．よって，シグマ関数を用いて微分方程式の解を構成出来れば，λ_i を実数にとることで，微分方程式の実数値解を構成することができる．これにより，現実の物理現象を記述する解を構成することができる．

整数 $k \geq 2$ に対して，$\wp_{i_1,\ldots,i_k} = -\partial_{u_{i_1}} \cdots \partial_{u_{i_k}} \log\sigma$ とする．ここで，$\partial_{u_l} = \partial/\partial u_l$ とした．次数を $\deg\wp_{i_1,\ldots,i_k} = i_1 + \cdots + i_k$ と定義する．

Remark 2. $g \geq 3$ とする．$g \geq 4$ のときは，定数 $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq g-3$ をとる．$\lambda_{4g+2} \neq 0$ とする．このとき，関数

$$\varphi(t_1,t_2,t_3) = -2\wp_{2g-1,2g-1}\left(a_1,\ldots,a_{g-3},\mathfrak{c}t_3,\mathfrak{d}t_2,t_1+\mathfrak{e}t_2\right) - \mathfrak{f}$$

$$\mathfrak{c} = -16\lambda_{4g+2}, \quad \mathfrak{d} = 2\sqrt{-3\lambda_{4g+2}}, \quad \mathfrak{e} = \frac{\lambda_{4g}}{\sqrt{-3\lambda_{4g+2}}}, \quad \mathfrak{f} = \frac{2}{3}\lambda_{4g-2} + \frac{\lambda_{4g}^2}{18\lambda_{4g+2}}$$

は，次の KP 方程式を満たすことが知られている．

$$\partial_{t_1}(\partial_{t_3}\varphi + 6\varphi\partial_{t_1}\varphi + \partial_{t_1}^3\varphi) = \partial_{t_2}^2\varphi$$

この結果は [3] で証明なしで指摘され，[1] で厳密な証明が与えられた．

Lemma 3 ([2, Corollary 3.1.2])**.** $g \geq 1$ に対して，次が成り立つ．ただし，$g=1$ のときは，$\wp_{1,3}=0$ とおく．

$$\wp_{1,1,1,1} = (6\wp_{1,1} + 4\lambda_2)\wp_{1,1} + 4\wp_{1,3} + 2\lambda_4$$

本発表の主結果は以下である．

Theorem 4. $g \geq 2$ とする．$g \geq 3$ のときは，定数 $b_i \in \mathbb{C}$, $3 \leq i \leq g$ をとる．このとき，関数

$$\psi(t_1,t_2,t_3) = -2\wp_{1,1}(t_1 + 2\sqrt{\lambda_2}t_2, -4t_3, b_3, \ldots, b_g)$$

は，次の KP 方程式を満たす．

$$\partial_{t_1}(\partial_{t_3}\psi + 6\psi\partial_{t_1}\psi + \partial_{t_1}^3\psi) = \partial_{t_2}^2\psi$$

参考文献

[1] T. Ayano, V. M. Buchstaber, Hyperelliptic sigma functions and the Kadomtsev-Petviashvili equation, arXiv:2502.19972, (2025).

[2] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskiĭ, D. V. Leĭkin, Hyperelliptic Kleinian Functions and Applications, Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–33.

[3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, Uniformization of Jacobi Varieties of Trigonal Curves and Nonlinear Differential Equations, Funct. Anal. Appl. **34** (2000), 159–171.

AN EXAMPLE OF HOLOMORPHICALLY NONCONVEX LOCALLY PSEUDOCONVEX ANALYTIC SET IN $\mathbb{C}^3$

TAKEO OHSAWA

In the theory of several complex variables, it is well known that a complex manifold M is holomorphically convex if there exists a locally biholomorphic map $\pi : M \to \mathbb{C}^n$ which is locally pseudoconvex in the sense that every point of $\mathbb{C}^n$ has a neighborhood whose preimage by π is holomorphically convex, or Stein equivalently in this situation. This basic fact is an immediate consequence Oka's solution of the Levi problem for Riemann domains over $\mathbb{C}^n$, which established that every connected component of the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ of $\mathbb{C}^n$ is holomorphically convex.

On the other hand, by a counterexample due to Fornaess, it is known that there exists a holomorphically nonconvex complex surface X with a locally pseudoconvex holomorphic map $p : X \to \mathbb{C}^2$ whose fibers are 0-dimensional. Roughly speaking, X is constructed from a domain $\Omega_\varphi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 ;\ |z| < 1 \text{ and } e^{\varphi(z)} < |w|\}$, where φ is a subharmonic function on the disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ defined by

$$\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{m(\mu)} \log \left| z - \frac{1}{n(\mu)} \right|$$

with $m, n : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, in such a way that $\sup \varphi(z) < 1$.

More precisely, $\mathbb{C}^2$ is blown up at the points $\left(\dfrac{1}{m(\mu)}, 0\right)$ by the maps

$$(u, v) \mapsto \left(uv^{m(\mu)} + \frac{1}{n(\mu)}, v \right),$$

so that one can find a neighborhood U of the intersection of the exceptional set with the proper transform of the complex lines

$$\left\{ \left(\frac{1}{m(\mu)}, w \right) ; w \in \mathbb{C}, \mu = 1, 2, \ldots \right\}$$

such that U can be patched with $\Omega_\varphi \setminus V$ for some neighborhood V of $\left\{ \left(\dfrac{1}{m(\mu)}, 0 \right) ; \mu = 1, 2, \ldots \right\}$ to define a complex surface X with a locally pseudoconvex holomorphic map $p : X \to \mathbb{C}^2$ in such a way that

$p^{-1}(z)$ are finite for all $z \in \mathbb{C}$ and X contains complex curves which are mapped biholomorphically onto

$$L_\mu := \left\{ \left(\frac{1}{m(\mu)}, w \right); w \in \mathbb{C} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

by p.

Holomorphic nonconvexity of X is an immediate consequence of the maximum modulus principle applied to the restrictions of holomorphic functions on X to $p^{-1}(L_\mu)$.

This example suggests, as well as counterexamples to the Serre problem on the Steinness of analytic fiber bundles with Stein fibers and bases, that there remains something to be explored on those non-Stein manifolds.

From such an interest, it might be still worthwhile to see whether or not the above mentioned patching procedure does not destroy the separatedness of the manifolds by holomorphic functions. This point is closely related to the following question which was raised by P. A. Griffiths in 1977.

Question. Let S be a locally closed complex submanifold of $\mathbb{C}^n$. Is S holomorphically convex if the inclusion map $S \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ is locally pseudoconvex ?

The purpose of the present note is to show that Fornaess's example can be modified to yield a negative answer to Griffiths's question.

More explicitly, we shall prove the following.

Theorem. *Let* $\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{-\mu} \log |z - 2^{-\mu}|$ *and let* $\Omega'_\varphi = \{(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}; e^{\varphi(z)} < |w| < e\}$. *Then,* Ω'_φ *is biholomorphically equivalent to a dense open subset of a holomorphically nonconvex locally closed submanifold* S *of* $\mathbb{C}^3$ *such that the inclusion map* $\Omega'_\varphi \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ *is continuously extended to* S *by this correspondence as a locally pseudoconvex map* $q : S \to \mathbb{C}^2$ *satisfying* $q^{-1}((2^{-\mu}, 0)) \cong \mathbb{D}$ *for all* μ.

Corollary. *There exists a locally pseudoconvex but holomorphically nonconvex Riemann domain over* $\mathbb{C}^2$ *which is embeddable into* $\mathbb{C}^3$ *as a locally closed complex submanifold.*

$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐リーマン領域の境界距離関数

阿部 誠（広島大*）・本田 竜広（専修大商）

本稿は論文［1］の内容の概要である．

$(E,\|\cdot\|)$ を複素ノルム空間とする．任意の $x\in E$ と $\rho\in(0,+\infty]$ に対して，集合 $\mathbf{B}(x,\rho):=\{z\in E \mid \|z-x\|<\rho\}$ を E 内の**中心** x，**半径** ρ の**開球**という．特に，集合 $\mathbf{B}:=\mathbf{B}(0,1)$ を**単位開球**という．

(D,π) を E 上の（不分岐）Riemann 領域とする．(D,π) の（到達可能）境界点全体を $\check{\partial}D$ と書き，これを (D,π) の**抽象境界**という．$\check{D}:=D\cup\check{\partial}D$ を (D,π) の**抽象閉包**といい，π の $\check{D}$ への拡張を $\check{\pi}$ と書く．

任意の $a\in D$ に対して，a の近傍 B が存在して $\pi(B)=\mathbf{B}(\pi(a),\rho)$ かつ $\pi|_B:B\to\mathbf{B}(\pi(a),\rho)$ が同相であるような $\rho\in(0,+\infty]$ の上限を $d(a)=d_{D,\|\cdot\|}(a)$ と書き，関数 $d=d_{D,\|\cdot\|}:D\to(0,+\infty]$ をノルム $\|\cdot\|$ に関する (D,π) の**境界距離関数**という．D が連結かつ π が同相でないとき，任意の $a\in D$ に対し $d(a)<+\infty$ であり，関数 $d:D\to(0,+\infty)$ は連続である．

任意の $a\in D$ と $\rho\in(0,d(a)]$ に対して，$\pi(B)=\mathbf{B}(\pi(a),\rho)$ かつ $\pi|_B:B(a,\rho)\to\mathbf{B}(\pi(a),\rho)$ が同相であるような a の D における近傍 B が一意的に定まる．この B を $B(a,\rho)$ と書き，D 内の**中心** a，**半径** ρ の**開球**という．任意の $a\in D$ に対して，$W(a):=\bigcup_{x\in B(a,d(a))}B(x,d(x))$ とおく．

命題 1（［2, Proposition 4.5］） 任意の $a\in D$ に対して，$\pi|_{W(a)}:W(a)\to\pi(W(a))$ は同相である．

任意の $(a,u)\in D\times\partial\mathbf{B}$ に対して, 次の 2 条件をみたす連続写像 $\Lambda:\mathbf{B}(u,\delta)\times[0,l)\to D$, $\delta>0$，$l\in(0,+\infty]$，全体の族を $\mathscr{C}(a,u)$ と書く：

- $\pi(\Lambda(v,t))=\pi(a)+tv$（$(v,t)\in\mathbf{B}(u,\delta)\times[0,l)$），
- $\Lambda(u,0)=a$.

任意の $(a,u)\in D\times\partial\mathbf{B}$ に対して，$\mathscr{C}(a,u)$ に属する $\Lambda:\mathbf{B}(u,\delta)\times[0,l)\to D$，$\delta>0$, が存在するような $l\in(0,+\infty]$ の上限を $l(a,u)$ と書くとき，次の条件をみたす連続写像 $\lambda(a,u,\cdot):[0,l(a,u))\to D$ が定まる：

- 任意の $l_0\in[0,l(a,u))$ に対して，$\mathscr{C}(a,u)$ に属する $\Lambda:\mathbf{B}(u,\delta_0)\times[0,l_0)\to D$, $\delta_0>0$，が存在して，$\lambda(a,u,t)=\Lambda(u,t)$（$0\leqq t<l_0$）.

このとき，$d(a)\leqq l(a,u)$ であり，次のことが成り立つ：

- $\pi(\lambda(a,u,t))=\pi(a)+tu$（$0\leqq t<l(a,u)$），
- $\lambda(a,u,t)=\left(\pi|_{B(a,d(a))}\right)^{-1}(\pi(a)+tu)$（$0\leqq t<d(a)$）.

$l(a,u)<+\infty$ の場合，点 $q(a,u):=\pi(a)+l(a,u)u$ の E における任意の連結近傍 U に対して，数 $l_U\in[0,l(a,u))$ が存在して，$l_U\leqq t<l(a,u)$ のとき $\pi(a)+tu\in U$ が成り立つ．集合 $\pi^{-1}(U)$ の $\lambda(a,u,\cdot)([l_U,l(a,u)))$ を含む連結成分を $C(U)$ と書くとき，$C(U)$ は l_U の選び方によらない．このとき，族

$$r(a,u):=\{C(U) \mid U \text{ は } q(a,u) \text{ の連結近傍}\}$$

は D 上のフィルター基であり，$\lim\pi(r(a,u))=q(a,u)$ をみたし，さらに，$r(a,u)$ は D において触点をもたない．すなわち，$r(a,u)\in\check{\partial}D$，$\check{\pi}(r(a,u))=q(a,u)$.

命題 2（［1, Proposition 2.2］） 任意の $a\in D$ に対して，関数 $l(a,\cdot):\partial\mathbf{B}\to(0,+\infty]$ は下半連続である．

命題 3（［2, Lemma 4.12］） 任意の $a \in D$ に対して，$d(a) = \inf_{u \in \partial \mathbf{B}} l(a,u)$.

考察を $\dim E = n < \infty$ の場合に限定して，(D,π) を $E = \mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域とする．このとき，射影 π が局所両正則であるような D の（有限次元）複素多様体としての構造が定まる．$\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^n$ の任意のノルムとして，$d = d_{D,\|\cdot\|}$ を $\|\cdot\|$ に関する D の境界距離関数とする．

補題 4（［1, Lemma 3.1］） $a \in D$，$d(a) < +\infty$ のとき，点 $q_0 \in \partial \mathbf{B}(\pi(a), d(a))$，$r_0 \in \check{\partial} D$ が存在して，$\check{D}$ において，

$$\lim_{\substack{z \to q_0 \\ z \in \mathbf{B}(\pi(a), d(a))}} \left(\pi|_{B(a,d(a))}\right)^{-1}(z) = r_0.$$

補題 5（［1, Lemma 3.2］） $a \in D$，$d(a) < +\infty$ のとき，任意の $x \in B(a, d(a))$ に対して，

$$d(x) = \min\left\{\|z - \pi(x)\| \mid z \in \check{\pi}(\check{\partial} D) \cap \left(\mathbb{C}^n \setminus \pi(W(a))\right)\right\}.$$

X を複素多様体，$u : X \to [-\infty, +\infty)$ を上半連続関数とする．X の任意の相対コンパクト開集合 G と $\overline{G}$ の近傍で定義された任意の多重調和関数 h に対して，∂G 上で $u \leqq h$ ならば $\overline{G}$ 上でも $u \leqq h$ であるとき，u は（藤田の意味で）**劣多重調和**（subpluriharmonic）であるという．任意の点 $p \in X$ に対して，p の近傍 B が存在して $u|_B$ が劣多重調和であるとき，u は**局所劣多重調和**であるという．X が K 完備（holomorphically spreadable）のとき，u が局所劣多重調和であることと u が劣多重調和であることは同値である（Vâjâitu［7, Proposition 2］）.

定理 6（［1, Theorem 3.3］） (D,π) を $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域とする．このとき，$\mathbb{C}^n$ の任意のノルム $\|\cdot\|$ に関する (D,π) の境界距離関数 $d = d_{D,\|\cdot\|}$ について，関数 $-\ln d$ は D で劣多重調和である．

注意 7 定理 6 は，Słodkowski［6, Proposition 4.6］（D が単葉，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$），Pawlaschyk［4, Proposition 4.2.3］（D が単葉），Pawlaschyk・Zeron［5, Example 2.8］（D が単葉）の一般化であり，D が単葉のとき［2, Theorem 2.7］に含まれ，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ のとき Matsumoto［3, Theorem 1］に含まれる．ただし，$\|\cdot\|_2$ は $\mathbb{C}^n$ の Euclid ノルムを表わす．

注意 8 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を複素前 Hilbert 空間，(D,π) を E 上の Riemann 領域とするとき，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定める E のノルム $\|\cdot\|$ に関する (D,π) の境界距離関数 $d = d_{D,\|\cdot\|}$ について，関数 $-\ln d$ は（［2, Definition 3.4］の意味で）D で局所劣多重調和である（［2, Theorem 5.4］）.

謝辞 本研究は部分的に科研費 JP23K03136 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Abe, M., Honda, T.: Boundary distance functions of unramified Riemann domains over $\mathbb{C}^n$. Complex Anal. Oper. Theory **19**, Paper No. 10 (2025)

[2] Abe, M., Honda, T., Shima, T.: Boundary distance functions of Riemann domains over pre-Hilbert spaces. Complex Anal. Oper. Theory **16**, Paper No. 88 (2022)

[3] Matsumoto, K.: Pseudoconvex Riemann domains of general order over Stein manifolds. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **44**, 95–109 (1990)

[4] Pawlaschyk, T.: On some classes of q-plurisubharmonic functions and q-pseudoconcave sets. Ph.D. thesis, Bergische Universität Wuppertal (2015)

[5] Pawlaschyk, T., Zeron, E.S.: On convex hulls and pseudoconvex domains generated by q-plurisubharmonic functions, part II. Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **22**, 367–388 (2016)

[6] Slodkowski, Z.: Local maximum property and q-plurisubharmonic functions in uniform algebras. J. Math. Anal. Appl. **115**, 105–130 (1986)

[7] Vâjâitu, V.: A Levi problem for continuous strongly q-plurisubharmonic functions. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**, 573–578 (1999)

吉原の定義式に関する数式処理的考察
～A_{19} 特異点を有する平面６次曲線の導出について～

高橋　正　(羽衣国際大学)*

2 次元複素射影空間における A_{19} 特異点をもつ平面６次曲線の定義式は、1979 年に、吉原により得られている。本発表では、この定義式をどのように導出できるかについてグレブナー基底および終結式を用いた計算によって求める方法を考察する。

1　はじめに

$\mathbb{P}^2$ において A_{19} 特異点をもつ平面６次曲線の定義式は、吉原により得られた。[1] この研究ではその定義式は記載されているがその導出方法は記載されていない。本発表では、この定義式をどのように導出できるかについて、定義式（多項式）の係数を、多項式環の計算によって数式処理の手法（グレブナー基底および終結式）を用いる方法を考察する。

2　特異点定義式の変形方法

A_n 型特異点をもつパラメータを有する特異点定義式に対しては、変数変換 $z = z' + y^n$ $n \in \mathbb{Z}^+$ を実行し、定義式の係数（パラメータ）がどのような条件の下で、原点における特異点のミルナー数がどのように変化するかを判定することができる。その際、係数の関係を同時に満たす条件を見出す方法として、グレブナー基底を計算する方法と終結式を計算する方法がある。

グレブナー基底を計算する方法は、計算が大規模になるが複数の条件を見出すことに有効である。それに対し２つの条件を求める際には終結式を計算する方法が有効である。以下に、それらを効率的に行なった 2 次元複素射影平面における A_{19} 特異点をもつ平面６次曲線の定義式の変形過程を示す。

3　特異点定義式の変形過程

まず、$f_1 = x^4z^2 + x^3(-2y^2z + a_1yz^2 + a_2z^3) + x^2(y^4 + a_3y^3z + a_4y^2z^2 + a_5yz^3 + a_6z^4) + x(a_7y^5 + a_8y^4z + a_9y^3z^2 + a_{10}y^2z^3 + a_{11}yz^4 + a_{12}z^5) + a_{13}y^6 + a_{14}y^5z + a_{15}y^4z^2 + a_{16}y^3z^3 + a_{17}y^2z^4 + a_{18}yz^5 + a_{19}z^6$ とおき、$x = 1$ とする（$\mathbb{P}^2$ の [1,0,0] で考える)。

このとき、$f_1 = 0$ で定義される６次曲線は、(1,0,0) で $A_i(i \geqq 4)$ 特異点を有する（パラメータ $a_j(1 \leqq j \leqq 19)$ の条件によって、i は変化する。最初の変数変換として $z = z' + y^2$ を実行し、z' を再び z とすると、以下の f_2 を得る。

---

* 〒592-8344 大阪府堺市西区浜寺南町 1-89-1　羽衣国際大学 現代社会学部
e-mail: `ttakahashi@hagoromo.ac.jp`
2010 Mathematics Subject Classification: 32G05
キーワード：Deformations of complex structures, Sextic curves, Singularity

$f_2 = z^2 + c_{5,0}y^5 + c_{3,1}y^3z + c_{6,0}y^6 + c_{7,0}y^7 + c_{4,1}y^4z + c_{8,0}y^6 + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）
ここで $G[\{c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}\}, \{a_{19}, \cdots, a_1\}]$ を $c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}$ の変数順序 $a_{19}, \cdots, a_1$ でのグレブナー基底とすると、グレブナー基底の共通解として、(1,0,0) で A_9 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

同様にして、変数変換 $z = z' - \frac{c_{5,1}}{2}y^5$ を実行し z' を再び z とすると以下の f_3 を得る。
$f_3 = z^2 + c_{10,0}y^{10} + c_{11,0}y^{11} + c_{6,1}y^6z + c_{12,0}y^{12} + c_{13,0}y^{13} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）
ここで $c_{10,0}, c_{11,0}, c_{6,1}, c_{12,0}, c_{13,0}$ の変数順序 $a_{19}, a_{18}, a_{17}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{10}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算するとそのグレブナー基底の共通解のなかで [1,0,0] において A_{13} 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

次に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{7,1}}{2}y^7$ を実行し、z' を再び z とすると以下の f_4 を得る。
$f_4 = z^2 + c_{14,0}y^{14} + c_{15,0}y^{15} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）

ここで $c_{14,0}, c_{15,0}$ の変数順序 $a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算すると、グレブナー基底の共通解のなかで (1,0,0) において A_{15} 特異点を有するパラメータの適切な条件を見出すことができる。

次に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{8,1}}{2}y^8$ を実行し、z' を再び z とすると以下の f_5 を得る。
$f_5 = z^2 + c_{16,0}y^{16} + c_{17,0}y^{17} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）となる。この $c_{16,0}, c_{17,0}$ を因数分解すると適切な因子（パラメータの条件多項式）を見出すことができる。その因子を h_{16}, h_{17} とする。ここで、$R[\{h_{16}, h_{17}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{17} の終結式とすると、その終結式は変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。

同様に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{9,1}}{2}y^9$ を実行し、z' を再び z とすると以下の f_6 を得る。
$f_6 = z^2 + c_{18,0}y^{18} + c_{19,0}y^{19} + \cdots$（$c_{i,j}$ は y^iz^j の係数）となる。この $c_{18,0}, c_{19,0}$ を因数分解すると適切な因子（パラメータの条件多項式）を見出すことができる。その因子を h_{18}, h_{19} とする。$R[\{h_{16}, h_{18}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{18} の終結式、$R[\{h_{16}, h_{19}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{19} の終結式とすると、この 2 つの終結式も変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。この 3 つの多項式を P, Q, R とする。この 3 つの多項式 P, Q, R に対し、変数 a_5 に対して、再度終結式を求めると (1,0,0) で A_{19} 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

これらの得られた数を P, Q, R に代入することにより、吉原の定義式を得る。

4 謝辞

本研究の進めるにあたり大渕朗先生（徳島大学)、泊昌孝先生（日本大学）には、多くのご支援をいただきました。心より感謝申し上げます。

参考文献

[1] H. Yoshihara. On plane rational curves. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 55(4):152–155, 1979.

過渡的ケーラー多様体上の有理型関数に対する ネヴァンリンナ理論

厚地 淳　(慶大理工)*

1 過渡的多様体

以下では、多様体はすべて連結とする.

M を リーマン多様体、Δ_M を そのリーマン計量から定義されるラプラシアンとする. 熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_M u$ の最小基本解を $p(t,x,y)$ とする.

$$\int_0^\infty p(t,x,y)dt < \infty \ (x \neq y,\ x,y \in M)$$

となるとき、M を過渡的多様体 (transient manifold) と呼ぶことにする. このとき、$G_M(x,y) := \int_0^\infty p(t,x,y)dt$ と置き、M のグリーン関数と呼ぶ. すなわち、過渡的多様体とはグリーン関数が存在するリーマン多様体である.

M は与えられたリーマン計量に関し完備な過渡的多様体であるとする. 任意の固定された $x_0 \in M$ に対し、

$$G_M(x_0,x) \to 0 \ (d(x_0,x) \to \infty)$$

を満たすとき、M は無限遠で正則 (regular at infinity) ということにする. 無限遠で正則であるためには、端がある程度大きくなければならない. M が放物的 (Grigoryan) あるいは小さい (Li-Tam) 端を持つならば、M は過渡的であっても無限遠で正則ではない (次節を見よ).

2 無限遠で正則なケーラー多様体

M を 完備ケーラー多様体とし、前節の意味で過渡的多様体とする. $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

例. $n = 1$ のとき. 過渡的ケーラー多様体全体 $= O_G^c$.

Stoll, Griffiths-King らの意味での放物的多様体は、過渡的にも非過渡的にもなり得るものがある. (例. $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$).

例 1. $n \geq 2$ とする. M がリーマン多様体としてカルタン・アダマール多様体 (単連結、断面曲率が非正) ならば、 無限遠で正則な過渡的多様体である.

2. M のリッチ曲率が非負で過渡的ならば、無限遠で正則な多様体である.

3. $M = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ とし、双曲計量から誘導される計量を考えると、曲率有界、完備過渡的であるが、無限遠で正則ではない.

---

* 〒 223-8522 神奈川県 横浜市港北区 日吉 3-14-1 慶應義塾大学理工学部数理科学科
e-mail: atsuji@math.keio.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:JP21K03299, JP25K07052) の助成を受けたものである。

関数論的に重要な例としては、プロパーに埋め込まれた $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体 (2 次元以上)、$\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ の有界強擬凸領域、超凸領域、ディリクレ問題の意味で正則な有界領域などは、適当な計量に関し無限遠で正則な過渡的多様体となる.

3 ネヴァンリンナの定理

M を無限遠で正則な過渡的ケーラー多様体とする. $x_0 \in M$ を任意に参照点として取り、$\phi(x) := -\log G_M(x_0, x)$ によって、M のエグゾースチョン関数を定義する. $B(r) := \{x \in M : \phi(x) < r\}$ と置く. 以下では、$\phi = r$ の正則点 $r > 0$ a.e. について考える. $f : M \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を非定数正則写像とする.

$$m_{x_0}(r,a) := \int_{\partial B(r)} \log[f(x),a]^{-2} d\omega_r^{x_0}(x) \quad \text{近接関数},$$
$$N_{x_0}(r,a) := \int_{B(r)} G_r(x_0,x) d\nu_f^a(x) \quad \text{個数関数},$$
$$T_{x_0}(r) := \int_{B(r)} G_r(x_0,x) e_f(x) dV(x) \quad \text{特性関数},$$
$$N_1(r,x_0) := \int_{B(r)} G_r(x_0,x) d\nu_1(x), \ N_{x_0}(r,\mathrm{Ric}) := \int_{B(r)} G_r(x_0,x) R(x) dV(x),$$
$$N_G(r,x_0) := \int_{\partial B(r)} \log|\nabla\phi|^2(x) d\omega_r^{x_0}(x).$$

ここで、$[w,a]$: $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ 上の弦距離, $d\omega_r^{x_0}(x)$: $B(r)$ における x_0 に関する $\partial B(r)$ 上の調和測度, $G_r(x_0,x)$: $B(r)$ 上のグリーン関数, $e_f := tr_M(f^* g_{FS})$, $dV(x)$: M の体積測度, $-R(x) := x$ におけるリッチ曲率の下限, $d\nu_f^a$: $\frac{1}{2}\Delta_M \log[f,a]^{-2}$ のリース測度の負の部分などである. 詳細は講演中に与える. このように設定すると、まず第 1 主定理:

$$m_{x_0}(r,a) + N_{x_0}(r,a) = T_{x_0}(r) + \log[f(x_0),a]^{-2}$$

が得られ、さらに次の形の第 2 主定理も得られる.

[第 2 主定理] $a_1, \ldots, a_q \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を異なる点とし、$x_0 \in M$ は $f(x_0) \notin \{a_1, \ldots, a_q\}$, $e_f(x_0) \neq 0$ を満たすとする. $T_{x_0}(r) \uparrow \infty$ $(r \uparrow \infty)$ ならば、ある対数測度有限な集合 $E \subset (0, \infty)$ の外で

$$\sum_{k=1}^{q} m_{x_0}(r,a_k) + N_1(r,x_0) \leq 2T_{x_0}(r) + N_{x_0}(r,\mathrm{Ric}) + N_G(r,x_0) + O(\log T_{x_0}(r)) \ (r \notin E)$$

が成り立つ.

$E \subset [0, \infty)$ が対数測度有限とは、$\int_E \frac{dr}{\max\{r,1\}} < \infty$ を満たすことである. なお、リッチ曲率が下に有界ならば、$N_G(r,x_0)$ は r に関し有界となる.

$\mathbb{CP}^2$ の非特異複素曲線までの対数的 Fubini-Study 距離の Levi form の固有値

松 本　和 子　(東京理科大・創域理工)*

1.　D を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ の (真部分) 領域, $\delta_{\partial D}$ を Fubini-Sutudy 計量 ω_{FS} に関する境界距離関数とする. このとき, 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ は D 上多重劣調和であり,

$$i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_{\partial\Omega}) \geq \frac{1}{3}\omega_{FS} \qquad \text{on} \quad D$$

という武内の不等式が成り立つ ([5], [6]). この不等式は $\mathbb{CP}^n$ 内の擬凸領域に関する種々の結果を導く際に基本的に重要である ([3], [4]).

「$\mathbb{CP}^n$ $(n \geq 2)$ には Levi 平坦な (補集合が擬凸である) 滑らかな実超曲面は存在しないであろう」という興味ある予想があり, $n \geq 3$ のときは曲面が C^2 級の場合に肯定的に解決されたが, $n = 2$ のときは曲面が実解析的の場合でさえ未解決である ([1], [4]).

今回, その非存在予想への応用の可能性を視野に入れて, $\mathbb{CP}^2$ 内の非特異複素曲線 S までの Fubiin-Study 距離 δ_S に対し, $-\log \delta_S$ の Levi form を正確に計算し, 固有値を求めることができたので, その結果を報告する (特別な座標での法方向の結果は [2]).

2.　$[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2]$ を $\mathbb{CP}^2$ の同次座標, (z_1, z_2) を $\mathbb{C}^2 \cong U_0 := \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid \zeta_0 \neq 0\}$ の非同次座標とし, 非特異複素曲線は $S = \{(t, f(t)) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in V\}$ と表されているとする ($V \subset \mathbb{C}$ は開集合, $f : V \to \mathbb{C}$ は正則関数).

$-\log \delta_S$ の Levi form の局所座標による成分表示は次の通りである.

定理 1　各 $p \in S$ に対し, p の近傍 $U_p \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ と, C^∞ 級の関数 $t_p : U_p \to V \subset \mathbb{C}$ が存在して, $z \in U_p \setminus S$ に対し

$$\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) = \psi(\delta_S(z))g_{ij}(z) + [\varphi(\delta_S(z), t_p(z)) - \psi(\delta_S(z))]b_{ij}(z, t_p(z))$$

が成り立つ $(i, j = 1, 2)$. ここで $(t_p(z), f(t_p(z))$ は $z \in U_p$ に最も近い S の点を表す.

記号の定義は次の通りである.

- $|x| < \pi/2, t \in V \subset \mathbb{C}$ に対し,

$$\varphi(x,t) := \frac{\tan x}{2x} \cdot \frac{1 + \dfrac{|f''(t)|^2 \|F\|^6}{\|F \times F_t\|^6}}{1 - \dfrac{|f''(t)|^2 \|F\|^6}{\|F \times F_t\|^6} \cdot \tan^2 x}, \quad \psi(x) := \frac{\tan x + x(\tan^2 x - 1)}{4x^2 \tan x}.$$

- $t \in V \subset \mathbb{C}$ に対し, $F(t) := (1, t, f(t))$, $F_t(t) := (0, 1, f''(t))$, $F \times F_t = (tf'(t) - f(t), -f'(t), 1)$, $A(t) = (a(t), b(t), c(t)) := \langle F, F \rangle F_t - \langle F_t, F \rangle F$.

- $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ に対し, $Z := (1, z_1, z_2)$.

* 〒 278-8510 野田市山崎 2641　東京理科大学 創域理工学部 数理科学科
e-mail: matsumoto_kazuko@rs.tus.ac.jp

- $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $t \in V$ に対し,

$$g_{ij}(z) := \frac{\partial^2 \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)}{\partial z_i \bar{z}_j}, \quad (b_{ij})(z,t) := \frac{1}{\|A\|^2\|Z\|^2}\begin{pmatrix} |b|^2 & \bar{b}c \\ \bar{c}b & |c|^2 \end{pmatrix}.$$

3. Levi form の固有値については次の結果が得られた.

定理 2 $z \in U_p$ に対し $\varphi^*(z) := \varphi(\delta_S(z), t(z))$, $\psi^*(z) := \psi(\delta_S(z))$ とおくと関数 φ^*, ψ^* は U_p で C^∞ 級であり, $i\partial\bar{\partial}(-\log\delta_S)$ の Fubini-Study 計量 ω_{FS} に関する固有値になる.

定理 2 の前半は, 関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ の定義に現れる関数

$$\frac{\tan x}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{15} + \cdots, \quad \frac{\tan x + x(\tan^2 x - 1)}{4x^2 \tan x} = \frac{1}{3} + \frac{4x^2}{45} + \frac{32x^4}{945} + \cdots,$$

および $\tan^2 x$ が $|x| < \pi/2$ で解析的な偶関数であることと, 関数 ${\delta_S}^2$ が U_p で C^∞ 級であることから従う. 後半は

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|A\|\|Z\|^2}\begin{pmatrix} \bar{b}\|Z\| & \bar{c}\|Z\| \\ az_2 - c & b - az_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

と変数変換すると, (ζ_1, ζ_2), $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$, $z \in U_p$ に対し

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\zeta_i\bar{\zeta}_j = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2(-\log\delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\zeta_i\bar{\zeta}_j = \varphi^*(z)|\eta_1|^2 + \psi^*(z)|\eta_2|^2$$

と表されることから従う.

4. 関数 $-\log\delta_S$ は S 上で $+\infty$ であるが, 定理 1 の右辺の関数は S 上でも定義され, S の近傍で C^∞ 級になる. また, Levi form の ω_{FS} に関する固有値は, 局所座標の取り方によらずに決まる. したがって, 次の大域的な結果が得られる.

定理 3 $\Omega \subseteq \mathbb{CP}^2$ を開集合, $S \subset \Omega$ を非特異複素曲線とする. このとき, S の近傍 $\Delta \subset \Omega$ が存在して, $i\partial\bar{\partial}(-\log\delta_S)$ は $\Delta \setminus S$ から Δ に自然に拡張され, Δ 上の C^∞ 級の形式になる. Levi form の 2 つの固有値も, Δ 上の C^∞ 級の関数とみなすことができる.

参考文献

[1] A. Lins Neto, *A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 4, 1369–1385.

[2] K. Matsumoto, *Takeuchi's equality for the Levi form of the Fubini-Study distance to complex submanifolds in complex projective spaces*, Kyushu J. Math. **72** (2018), no. 1, 107–121.

[3] T. Ohsawa and N. Sibony, *Bounded p.s.h. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 1–8.

[4] Y.-T. Siu, *Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension* ≥ 3, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 3, 1217–1243.

[5] A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159–181.

[6] ———, *Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 323–357.

L^2 評価式,L^2 拡張定理と曲率の正値性

稲山貴大　(東京理科大学)*

2025 年 9 月 17 日

概　要

Hörmander の L^2 評価法や大沢–竹腰の L^2 拡張定理は複素解析学で重要な役割を果たしている．ここで，Hörmander の L^2 評価法とは，Hermite 計量が正値な曲率を持つとき，$\overline{\partial}$ 方程式が計量に関する L^2 ノルムの評価付きで解けることを保証する定理である．一方，大沢–竹腰の L^2 拡張定理とは，計量が正値な曲率を持つとき，部分多様体 (e.g. 超平面) で定義された L^2 正則関数が，全空間上の L^2 正則関数に，L^2 ノルムの評価付きで拡張できることを主張する定理である．近年これらの定理の逆が，様々な研究者により様々な方法で研究されてきた．本講演では，これらの進展について講演者の貢献を含む形で紹介する．時間があれば，今後の問題についても議論する予定である．

目　次

1　はじめに

概要で述べた Hörmander の L^2 評価法 [Hor65] と大沢–竹腰の L^2 拡張定理 [OT87] について，具体的に見ていく．まず，Hörmander の L^2 評価法について説明する．定理中の記号，定理の主張は [Dem], [Dem-book] の書き方に準拠する．

定理 1.1（[Dem，Dem-book]）　$(X, \widehat{\omega})$ を完備ケーラー多様体と，ω をケーラー形式，$(E, h) \to X$ を中野正値な C^∞ 級計量 h を持つ X 上の正則ベクトル束 $E \to X$ とする．このとき，任意の $\overline{\partial}$ 閉な E 係数 (n, q) 形式 u $(q > 0)$ であって $\int_X \langle[\sqrt{-1}\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega]^{-1}u, u\rangle_{\omega,h} dV_\omega < +\infty$ となるものに対し，E 係数 $(n, q-1)$ 形式 v で

* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641　東京理科大学創域理工学部数理科学科
e-mail: inayama_takahiro@rs.tus.ac.jp
この研究は科学研究費助成事業，若手研究 (23K12978) の助成を受けています．
2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32U05, Secondary 32A70, 32L20.
キーワード：Griffiths 正値性，中野正値性，L^2 評価法，L^2 拡張定理

あって，$\overline{\partial} v = u$ かつ

$$\int_X |v|^2_{\omega,h} dV_\omega \leq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega]^{-1} u, u \rangle_{\omega,h} dV_\omega \tag{1}$$

となるものが存在する．

簡潔に述べると，ベクトル束 (E,h) が中野正値なとき，$\overline{\partial}$ 方程式が不等式 (1) の形の L^2 ノルムの評価付きで解けることを主張している．この定理は複素解析学における最も基本的な定理の一つであり，非常に重要な役割を果たしてきた．

続いて，大沢–竹腰の L^2 拡張定理について述べる．概要で述べた通り，大沢–竹腰の L^2 拡張定理は，部分多様体 (e.g. 超平面) で定義された L^2 正則関数が，全空間上の L^2 正則関数に，L^2 ノルムの評価付きで拡張できることを主張する定理であり，こちらも様々な応用があることが知られている．大沢–竹腰両氏によってある普遍的な定数により L^2 ノルムの評価が出来ることが発見されて以降，この定数の改良が様々な研究者によって行われ，最終的に Błocki[Bło13]，Guan–Zhou[GZ15] によってこの評価が最良化された．その後もこの最良 L^2 評価は特異計量に一般化されたり，sharper な評価に拡張されたりと様々な方向が模索されている．今回は [GMY24, GMY25] によって得られた評価を紹介する．

定理 1.2（[GMY25]） (X,ω) を弱擬凸ケーラー多様体とする．また，$\psi < -T$ を X 上の quasi-psh 関数で，neat analytic singularities を持ち，また $Y := V(\mathcal{I}(\psi))$ に沿って log canonical singularties を持つものとする．また $E \to X$ を X 上の正則ベクトル束で，h を E 上の C^∞ 級計量とする．さらに，以下の条件を仮定する：

(1) $\sqrt{-1}\Theta_h + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_E$ が中野の意味で $X \setminus \{\psi = -\infty\}$ 上成り立つ，
(2) $\sqrt{-1}\Theta_h + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_E + \frac{1}{s(-\psi)}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_E$ が中野の意味で $X \setminus \{\psi = -\infty\}$ 上成り立つ．

このとき，任意の $f \in H^0(Y^0, (K_X \otimes E)|_{Y^0})$ で

$$\int_{Y^0} |f|^2_{\omega,h} dV_\omega[\psi] < +\infty$$

となるものに対し，ある $F \in H^0(X, K_X \otimes E)$ が存在し，$F|_{Y^0} = f$ かつ

$$\int_X c(-\psi)|F|^2_{\omega,h} dV_\omega \leq \left(\frac{1}{\delta} c(T) e^{-T} + \int_T^\infty c(t_1) e^{-t_1} dt_1 \right) \int_{Y^0} |f|^2_{\omega,h} dV_\omega[\psi]$$

が成立する．

細かい記号に関する説明は省略したが，気になる読者の方々は是非原論文を参照していただきたい（ψ, c, s, δ, T 等を自明なものに取れば，よく知られる評価が出てくる）．ちなみに，ベクトル束が直線束で有界擬凸領域の場合にシンプルな形で大沢–竹腰の L^2 拡張定理を述べると以下の通りとなる．

定理 1.3（[Bło13, GZ15]） D を $D \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \{|z_n| < r\}$ for $r > 0$ を満たす有界擬凸領域とする．また，φ を Ω 上の多重劣調和関数で，H を $H := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ で定まる超平面とする．このとき，$\int_H |f(z')|^2 e^{-\varphi(z',0)} \mathrm{d}\lambda(z') < +\infty$ を満たす任意の L^2 正則関数に対して，ある Ω 上の正則関数 F が存在し，$F|_H = f$ かつ

$$\int_D |F(z', z_n)|^2 e^{-\varphi(z', z_n)} \mathrm{d}\lambda(z', z_n) \leq \pi r^2 \int_H |f(z')|^2 e^{-\varphi(z',0)} \mathrm{d}\lambda(z'),$$

を満たす．

この π が最良係数である．今回重要となるのは，計量が（何らかの意味で）中野（半）正値であれば,（適切な意味で）最良な L^2 拡張が出来るということである．

本誌でお話ししたいのは，これらの定理自身ではなく，ある意味でこれらの逆にあたる命題である．つまり,（特に正値とは仮定していない）計量が Hörmander の L^2 評価法,または大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件を満たせば，その計量は"正値"になる，という主張である．これらの逆命題は，純理論的な側面，及び応用的な側面の両者から興味深いものだと思う．本論にあたる前に，ここでいう"正値"の意味を明らかにしたい．

2 中野/Griffiths 正値性

(E, h) をベクトル束とその上の C^∞ 級計量，$\Theta_{E,h}$ を Chern 曲率とする．ある固定された点のまわりの局所座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ とその点での orthonormal frame$(e_1, \ldots, e_r)$ を使って Chern 曲率を

$$\sqrt{-1}\Theta_h = \sum_{1 \leq j,k \leq n, 1 \leq \lambda,\mu \leq r} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

と書く．よく知られた方法により, $TX \otimes E$ 上の Hermitian form$\widetilde{\Theta}_h$ が, $\tau = \sum_{j,\lambda} \tau_{j\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} \otimes e_\lambda \in TX \otimes E$ に対し，以下のように定まる：

$$\widetilde{\Theta}_h(\tau, \tau) = \sum c_{jk\lambda\mu} \tau_{j\lambda} \bar{\tau}_{k\mu}.$$

任意の τ に対して $\widetilde{\Theta}_h(\tau, \tau) \geq 0$ となるとき，h は中野半正値であるという（正値性も同様）．また，任意の $\xi \in TX, v \in E$ に対して $\widetilde{\Theta}_h(\xi \otimes v, \xi \otimes v) \geq 0$ となるとき，h は Griffiths 半正値であるという（正値性も同様）．定義から，中野正値性の方が強い条件であることが分かり，また真に強い概念であることも知られている（ベクトル束が直線束の場合，または多様体が一次元の場合は一致する）．Hörmander の L^2 評価法，大沢–竹腰の L^2 拡張定理，及びコホモロジーの消滅定理等を導出するためには，計量が中野正値でなければならないことが知られている．

3 Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件

本章では,「計量が Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件を満たす」といったときの条件を詳しく述べる．歴史的経緯についても軽く触れる．

筆者の知る限りでは，最初にこれらの逆命題が世に出てきたのは Berndtsson の論文 [Ber98] であると思われる．複素関数版の Prékopa の定理を示すにあたり，Berndtsson は $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数 φ に対して，任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ について $k\varphi$ に関して Hörmander の L^2 評価が成り立てば，φ が劣調和になることを示している．何故思いついたのかは分からないが，非常に独創的なアイデアである．

続いて，Guan–Zhou は論文 [GZ15] で最良係数の L^2 拡張定理を証明した際，応用として Berndtsson の相対 Bergman 核の log 多重劣調和性の結果を，最良 L^2 拡張定理のある種の逆を用いることで簡潔に示した．このアイデアは非常に優秀で，今後の様々な研究の方向性を決定づけることとなる．

このアイデアは minimal extension property という名前で [HPS18] に輸入され，代数幾何学的な文脈で，ある種の順像層の正値性を示す方法として重要な役割を果たすこととなる．

一方 Deng–Wang–Zhang–Zhou は論文 [DWZZ24] にて，（上半連続な）関数 φ について任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ について $k\varphi$ に関して（最良とは限らない）大沢–竹腰の L^2 拡張定理が成り立てば，φ 自身が多重劣調和関数になることを示した．これはいわば上の Berndtsson と Guan–Zhou の結果の融合/中間とも呼べるような結果である．ところで，今までは多重劣調和関数についてのみ述べてきたが，ベクトル束についても同様の条件/命題を考えることができる．

定義 3.1 (Multiple coarse L^p-extension condition [DNWZ23, DWZZ24])**.** (E, h) を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上のベクトル束と特異計量とし，$p > 0$ とする．(E, h) が次の条件を満たすとき，(E, h) は *multiple coarse L^p-extension condition* を満たすという：任意の点 $z \in \Omega$，任意の元 $a \in E_z$ でノルムが有限 $|a|_{h_z} < +\infty$ なもの，及び任意の自然数 $m \geq 1$ に対して，ある $E^{\otimes m}$ の切断 f_m が存在し，$f_m(z) = a^{\otimes m}$ かつ

$$\int_\Omega |f_m|^p \leq C_m |a^{\otimes m}|^p_{h^{\otimes m}}$$

が成り立つ．ここで，C_m は z に無関係な定数で，$\frac{1}{m} \log C_m \to 0$ を満たす．

Deng–Wang–Zhang–Zhou は彼らの論文で，h^* が上半連続な特異計量 h が multiple coarse L^p-extension property を満たせば，h が Griffiths 半正値であることを示した．（ここで特異計量 h が Griffiths 半正値であるとは，任意の E^* の局所正則切断 u に対し，$\log |u|_{h^*}$ が多重劣調和関数となることをいう．）

筆者は大学院生時代上記の論文に非常に影響を受け，Hörmander の L^2 評価法版で上のような定理が成り立つかどうか考察した．まず最初の問題は，計量が特異計量である場合，定理 1.1 に表れる曲率作用素 $[\sqrt{-1}\Theta_h, \Lambda_\omega]$（特に $\sqrt{-1}\Theta_h$）がそもそも定義できないという点である．筆者は細野元気氏と共同で，この問題を解決するために，twisted Hörmander condition という条件を論文 [HI21] で導入した．アイデアとしては，ψ とい

う C^∞ 級強多重劣調和関数を h にかけ $he^{-\psi}$ という新たな計量を導入し，曲率作用素としては $e^{-\psi}$ の部分からくる $[\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda_\omega]$ の部分だけ考えるというものである．

定義 3.2 (twisted Hörmander condition, multiple L^p-estimate condition [HI21], [DNWZ23])**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上のベクトル束と特異計量 (E, h) が *twisted Hörmander condition* を満たすとは，任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の強多重劣調和関数 ψ，及び任意の $E^{\otimes m}$ 係数の閉 $(n,1)$ 形式 v に対し，ある $E^{\otimes m}$ 係数 $(n,0)$ 形式 u が存在し，$\overline{\partial}u = v$ かつ

$$\int_\Omega |u|^2_{\omega, h^{\otimes m}} e^{-\psi} \leq \int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_{E^{\otimes m}}, \Lambda_\omega]^{-1} v, v\rangle_{\omega, h^{\otimes m}} e^{-\psi}$$

が成り立つ．ここで，v は右辺の値が有限となるものを取ってきている．

この条件を世に出した後，Deng–Ning–Wang–Zhou が上記の右辺に定義 3.1 の C_m をかけ，2 を p に変えたものを導入し multiple L^p-estimate condition と呼び始めたが，あまり差はないため，混乱の恐れのない文脈では twisted Hörmander condition と multiple L^2(or L^p)-estimate condition を特に区別せず使うこととする．

一方，Deng–Ning–Wang–Zhou は同論文にて上の条件の $m = 1$ のみを考えたものを *optimal L^p-estimate condition* と呼び，導入した（上の multiple coarse L^p-estimate condition で右辺に C_m をつけたのも，この条件との違いをより明確にするためかもしれない）．$m = 1$ のみ考えても $m \in \mathbb{N}$ で $m \to \infty$ を考える場合と比べて主要な情報は得られなそうな気もするが，実際には強力な結果が彼らによって得られた．詳細は次章以降で見ていく．

今後のため，既に書いた multiple L^p-estimate/extension condition 以外の 2 条件を [DNWZ23] に倣って以下に記す．簡単のため全て有界（擬凸）領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の条件として述べるが，一部はもう少し一般化された形でも述べられる．

定義 3.3 (Optimal L^p-estimate condition)**.** 任意の強多重劣調和関数 ψ と任意の E 係数 $\overline{\partial}$ 閉 $(n,1)$ 形式 v に対し，ある E 係数 $(n,0)$ 形式 u が存在し，$\overline{\partial}u = v$ かつ

$$\int_\Omega |u|^p_{\omega,h} e^{-\psi} \leq \int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda_\omega]^{-1} v, v\rangle^{\frac{p}{2}}_{\omega,h} e^{-\psi}$$

が成り立つ．ここで，v は右辺の値が有限となるものを取ってきている [*1]．

定義 3.4 (Optimal L^p-extension condition)**.** 任意の $z \in \Omega, a \in E_z$ で $|a|_{h_z} = 1$ となるもの，また任意の holomorphic cylinder $P_{r,s,A}$ で $z + P_{r,s,A} \subset \Omega$ となるものに対して，ある $f \in H^0(z + P_{r,s,A}, E)$ が存在して $f(z) = a$ かつ

$$\frac{1}{|P_{r,s,A}|} \int_{z+P_{r,s,A}} |f|^p_h \leq 1$$

[*1] 定義 3.2,3.3 の v は C_c^∞ の元から取ってくるか L^2 の元から取ってくるか微妙な流儀の違いはあるが，ここでは混乱を避けるためあえて明示しない．結果に影響はない．

が成り立つ．ここで holomorphic cylinder $P_{r,s,A}$ とは，$\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, $\mathbb{B}_s^m = \{z \in \mathbb{C}^m \mid |z| < s\}$, $A \in \mathbf{U}(n)$ に対して $P_{r,s,A} = A(\Delta_r \times \mathbb{B}_s^{n-1})$ で定義されるものである．

これは 1 点からの最良係数の L^p 拡張の条件に対応している．ここで holomorphic cylinder を考える理由は，以下の技術的な補題による．

補題 3.5（[DNW21, Lemma 3.1]） 上半連続な関数 φ が

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{|P_{r,s,A}|}\int_{z+P_{r,s,A}} \varphi$$

の形の平均値不等式を満たすとき，φ は多重劣調和となる．

以上をまとめると次のようになる．

	optimal	multiple (coarse)
L^p-estimate	Hosono–I., Deng–Ning–Wang–Zhou	Hosono–I.
L^p-extension	Guan–Zhou, HPS^{*2}, DNWZ	Deng–Wang–Zhang–Zhou

（^{*2} Hacon–Popa–Schnell）

4 Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の逆

本章では，前章で述べた条件を計量が満たすとき，計量がどのような正値性を持つか述べる．これらが，本誌で展開したい Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の逆にあたる命題である．特に何も述べない限り，$(E, h) \to \Omega$ は有界領域 Ω 上のベクトル束と（特異）計量とする．

まず，Optimal L^p-estimate condition の逆について述べる．

定理 4.1（[GZ15, HPS18, DNWZ23]） h を h^* が上半連続な特異計量とする．このとき，(E, h) が optimal L^p-extension condition を満たせば，(E, h) は Griffiths 半正となる．

証明は基本的には Jensen の不等式を上手く使うというもので，非常にシンプルである．前章でも述べた通り，Guan–Zhou によってこのアイデアが見出され，Hacon–Popa–Schnell によって minimal extension property という名前で定式化され代数幾何学的な文脈で応用された後，Deng–Ning–Wang–Zhou によって今の形でまとめられた．

Multiple coarse L^p-estimate condition の逆についても，ほぼ同様にして次の結果が得られる．

定理 4.2（[DNWZ23, DWZZ24]） h を h^* が上半連続な特異計量とする．このとき，(E, h) が multiple coarse L^p-estimate condition を満たせば，(E, h) は Griffiths 半正となる．

以上の結果をまとめると，計量が大沢–竹腰の L^2 拡張定理的な条件を満たせば，計量が Griffiths の意味で半正値性を持つことが分かる．一方で，定理 1.2 の条件を見ると，計量は中野正値性が仮定されている．そこで，計量が上述の条件を満たすとき，Griffiths 正値性よりも強い中野正値性が従うのか，という疑問が自然に思いつく．これは実際，論文 [DWZZ24] にて著者等によって提起された問題である．筆者は細野元気氏と共同で，論文 [HI21] にて反例を構成することに成功した．

定理 4.3（[HI21]） $\mathbb{P}^n (n \geq 2)$ 上に下記の完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \to Q \to 0$$

で定まるベクトル束 Q を考える．また $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$ 上の標準的なユークリッド計量 h_0 の商から定まる計量 h_q を考える．このとき，h_q は multiple L^2-extension condition を満たすが，中野半正値ではない．

証明のポイントは，multiple L^2-extension condition は商にも遺伝するという点にある．この例によって，大沢–竹腰の L^2 拡張定理に相当する条件は Griffiths 半正値性を導くが，中野半正値性は導かない，つまり Griffiths 半正値性以上に強く，中野半正値性よりも真に弱い条件であるということが分かる（optimal L^2-extension condition についても同様である）．

続いて，Hörmander の L^2 評価法の条件について考察する．筆者は論文 [HI21] にて，multiple L^2-estimate condition の逆について，以下の形で定理を証明した．

定理 4.4（[HI21]） $\log|\bullet|_h$ が局所ヘルダー連続であると仮定する．このとき，(E, h) が multiple L^2-estimate condition を満たせば，(E, h) は Griffiths 半正値となる．

その後，Deng–Ning–Wang–Zhou[DNWZ23] によって，"局所ヘルダー連続"が"連続"へ，"L^2"が"L^p"へ一般化された．当然このような結果があると，Hörmander の L^2 評価法の条件から中野正値性は従うのか，という問いが考えられる．これは，我々の論文 [HI21] の Quesiton3.10 にて述べられている．その後この問題は Deng–Ning–Wang–Zhou によって（驚くべきことに）肯定的に解決された．詳しく述べると以下の通りとなる．

定理 4.5（[DNWZ23]） C^∞ 級計量 h が optimal L^2-estimate condition を満たすとき，h は中野半正値となる．

これはつまり，C^∞ 級計量については（twisted 分の差は除いて）Hörmander の L^2 評価の完全な逆が成り立つことを示している．すなわち C^∞ 級計量について，中野半正値であることと，（twisted 版の）Hörmander の L^2 評価が成り立つことは同値ということとなる．上記で見たように，大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件が Griffiths 半正値性しか導かなかったのに比べると，Hörmander の L^2 評価の条件は真に強い条件だということが分かる．

以上の関係をまとめると次のようになる（optimal と multiple coarse の違いは無視している）.

$$
\begin{tikzcd}
\text{中野正値性} \arrow[rrr, shift left] \arrow[d, shift left] & & & \text{Hörmander} \arrow[lll, shift left] \arrow[d] \\
\text{Griffiths 正値性} \arrow[u, shift left, "\times" description] & & & \text{大沢–竹腰} \arrow[lll] \arrow[ulll, "\times" description]
\end{tikzcd}
$$

5 関連する問題，これからの問題

最後に，関連する問題について述べる．まず，乗数部分加群層 $\mathcal{E}(h)$ の連接性の問題がある．ここで乗数部分加群層とは，特異計量 h に対して，

$$\mathcal{E}(h)_x := \{s \in \mathcal{O}(E)_x \mid |s|_h^2 \in L^1_{\mathrm{loc}(x)}\}$$

で定義される層，つまり h に関して局所二乗可積分な局所正則切断の芽のなす層である．直線束の場合は乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ と呼ばれ，Nadel によって導入された [Nad90]．さらに，Nadel は同論文で，特異計量が半正値性を持つ場合，乗数イデアル層が連接となることを示した．Hörmander の L^2 評価法を巧みに用いることで証明できるが，詳しくは原論文か [Dem] 等を参照していただきたい．

この Nadel の結果をベクトル束に一般化することを考える．そのために，まずベクトル束の特異計量の中野（半）正値性を定義する必要がある．この試みは，de Cataldo によって最初に行われた．de Cataldo は特異計量の中野正値性を，中野正値な C^∞ 計量の近似列のある種の収束先として定義し，$\mathcal{E}(h)$ の連接性を示した．この特異計量の定義は現状あまり採用されていないが，それでも Guan–Mi–Yuan[GMY24]，I.-松村 [IM24] 等によって種々の一般化や応用が研究されている．他の定義としては，定義 3.3 の optimal L^2-estimate condition を使うものが知られている．3 章で説明した通り，twisted Hörmander condition を導入した当初の目的が Hörmander の L^2 評価法の条件を特異計量に対して定義したかったということを考えると，自然な発想ではある．この定義で実際に C^∞ 級計量の場合中野正値性と同値になることは，定理 4.5 により保証されている．私は博士論文の一部で，この条件を用い，Stein 座標等と上手く組み合わせることで，特異計量の中野正値性の一般的な定義を一つ確立した [Ina22]．以上が，特異計量の中野正値性に対して現状知られている二つの主流な定義である．[IM24] の書き方に倣って書くと，以下の通りとなる．

定義 5.1 ([IM24]). ω をエルミート計量，h を h^* が上半連続な特異計量とする．以下

の条件が成り立つとき，特異計量の意味で

$$\sqrt{-1}\Theta_h \geq^s_{\mathrm{Nak.}} 0$$

と書く：以下を満たすデータ $(\{X_j\}_{j=1}^\infty, \{\Sigma_{j,s}\}_{j,s=1}^\infty, \{h_{j,s}\}_{j,s=1}^\infty)$

- $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ は $X_j \Subset X_{j+1} \Subset X$ を満たす X の開被覆である，
- $\Sigma_{j,s} \subset X_j$ は X_j の (proper closed) 解析的部分集合である：
- $h_{j,s}$ は $E|_{X_j \setminus \Sigma_{j,s}}$ の C^2 計量であって，$h_{j,s}^*$ は X 上，上に局所有界である

が，次の条件 (a), (b) を満たしている

(a) $\Sigma_j := \cup_{s=1}^\infty \Sigma_{j,s}$ とする．任意の点 $x \in X_j \setminus \Sigma_j$ と元 $e \in E_x$ に対し，

$$|e|_{h_{j,s}} \nearrow |e|_h \text{ as } s \nearrow \infty$$

が成り立つ，

(b) $\overline{X}_j$ 上の連続関数 $\lambda_{j,s}, \lambda_j$ が存在し，
- $0 \leq \lambda_{j,s} \leq \lambda_j$ が X_j 上成り立つ，
- $\lambda_{j,s} \to 0$ が a.e. で X_j 上成り立つ，
- $\sqrt{-1}\Theta_h \geq_{\mathrm{Nak.}} -\lambda_{j,s}\omega \otimes \mathrm{Id}_{E_{h_{j,s}}}$ が任意の点 $x \in X_j \setminus \Sigma_j$ について成り立つ．

定義 5.2 ([IM24]). h を h^* が上半連続な特異計量とする．以下の条件が成り立つとき，特異計量の意味で

$$\sqrt{-1}\Theta_h \geq^{L^2}_{\mathrm{Nak.}} 0$$

と書く：任意の $E|_\Omega \cong \Omega \times \mathbb{C}^r$ を満たす Stein 座標, Ω 上の Kähler 形式 ω_Ω, 強多重劣調和関数 ψ, $\overline{\partial}$ 閉な $v \in L^2_{n,q}(\Omega, E; \omega_\Omega, he^{-\psi})$ で $\int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_E, \Lambda_{\omega_\Omega}]^{-1} v, v\rangle_{\omega_\Omega, h} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega} < +\infty$ となるものに対し，ある $u \in L^2_{n,q-1}(\Omega, E; \omega_\Omega, he^{-\psi})$ が存在し，$\overline{\partial}u = v$ かつ

$$\int_\Omega |u|^2_{\omega_\Omega, h} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega} \leq \int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{Id}_E, \Lambda_{\omega_\Omega}]^{-1} v, v\rangle_{\omega_\Omega, h} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega}$$

が成り立つ．

混乱を避けるためこれ以上細かく述べることはしないが，細かい記号の説明や背景等が気になる方は当該論文を参照していただきたい（半正値性だけではなく，連続な $(1,1)$ 形式 θ に対して曲率が θ 以上という概念も定義できる）．簡潔に述べると，定義 5.1 は下から単調増加する中野半正値な（正確には少々負値性を許容した）C^∞ 級計量が存在するということを仮定した定義であり，定義 5.2 は各 Stein 座標上で twisted 型の Hörmander の L^2 評価法（optimal L^2-estimate condition）が成り立つことを仮定した定義である．定義 5.1 は近似列の意味で中野正値，定義 5.2 は L^2 評価の意味で中野正値と呼ばれたりする．ちなみに我々によって，定義 5.1 が成り立つならば，定義 5.2 が成り立つことが証明されている．これを読んだ読者の中には，どのようにしてこの定義を確かめるのかと

疑問に思う方もいるかもしれないが，代数幾何学的な設定で定まる標準的な順像層が，定義 5.1 または定義 5.2 の意味で中野正値であることが証明できる．例えば，$f : X \to Y$ を proper Kähler fibration とし，$(L, h) \to X$ を半正値な特異計量 h を持つ X 上の直線束としたとき，$f_*(\mathcal{O}_X(K_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(h))$ が定義 5.2 の意味で中野正値であることが証明できる（論文 [HPS18] では，これが Griffiths 半正値であることが証明されている）．詳しくは [IM24] および [IMW24] を確認していただきたい．

乗数部分加群層の連接性の話に戻ると，特異計量 h が定義 5.1 または定義 5.2 の意味で中野正値であれば，対応する乗数部分加群層 $\mathcal{E}(h)$ が連接となることが知られている（定義 5.1 の場合は [IM24]，定義 5.2 の場合は [HI21, Ina22]）．これは自然と想定される結果で，というのも Nadel や de Cataldo による証明はいずれも Hörmander の L^2 評価法を用いるものであり，定義 5.1 及び定義 5.2 からは Hörmander の L^2 評価法が自然に従うからである．

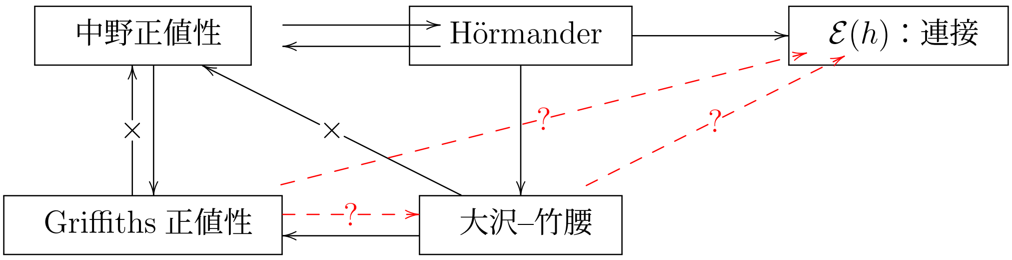
ここで問題となるのは，h が Griffiths 半正値しか持たない場合に，$\mathcal{E}(h)$ が連接層になるのか，ということである．これは実際に論文 [Ina22b] にて筆者によって提起された予想である．中野正値性の場合との一番の違いは，Hörmander の L^2 評価法が使えない点にある．これは C^∞ 級計量の場合ですらそうで，というのも，定理 4.5 により，計量が中野正値であることと，その計量に関して（twisted 型の）Hörmander の L^2 評価ができることが同値だからである．そのため，この予想解決のためには，根本的に新しいアイデアが必要となる．とはいえ，ある程度部分的な結果も分かっている．まず，筆者自身によって，$\det h$ の特異点が孤立していれば，$\mathcal{E}(h)$ が連接となることが証明されている．この仮定は様々な数学者によって弱められており，例えば Yongpan Zou は論文 [Zou22] にて，$\det h$ が解析的特異点を持てば，$\mathcal{E}(h)$ が連接となることを証明した．しかしこれらの結果はいずれも Hörmander の L^2 評価法を"より"上手く使うという手法で証明されており，完全に解決するには更に新しいアイデアが必要となるであろう．

最後に，これからの問題についていくつか述べて本論を終わりにしたい．まず，特異計量の中野正値性の定義である．定義 5.1 も定義 5.2 も近似列の存在や L^2 評価を前提としており，それ故これらは最も理想的な定義とは言えない．各点の周りでいくつか局所正則切断を取り，Griffiths 半正値性のように素朴に定義する方法が理想的であると多くの人が考えていると思われるが，結実には至っていない．実際に Dror Varolin によってそのような新たな定義が提唱されたりもしたが，gap が指摘されたようである．これに関して個人的な考えを述べると，純理論的には，いずれ理想的な定義が見つかり，そこから定義 5.1 や 5.2 が"定理"として導かれるのが理想だとは思うが，現状かなり難しい問題だと思われる．一方応用的側面としては，現状の定義でもある程度良いだろうと考えている．例えばある種の順像層が理想的な定義の上で中野正値であることを示しても，そこから導きたいのは Hörmander の L^2 評価や，そこからのコホモロジーの消滅定理等であり，「理想的な定義の意味で中野正値」$\Longrightarrow$「L^2 の意味で中野正値」の部分は純粋な一

般論だからである．少なくとも C^∞ 級計量の場合は通常の意味で中野正値であることと L^2 の意味で中野正値であることは同値なので，特異計量が L^2 の意味で中野正値であれば C^∞ 級計量の場合に期待されるような種々の性質が成り立つことが示されている以上([Ina22])，理論を回す上で計量に関して Hörmander 型の L^2 評価が出来ていれば一旦中野正値ということで落ち着くというのは，それほど悪いものでもないだろうと思う．

次に，h が Griffiths 半正値のときの $\mathcal{E}(h)$ の連接性の問題である．上述した通りこれ自体未解決で解くべき問題ではあるが，これは次の方針で考えることもできる．まず，計量が Griffiths 半正値であれば最良係数の大沢–竹腰の L^2 拡張定理が成り立つかという問題を考える (これは一部の数学者は正しいと信じているようである)．次に，大沢–竹腰の L^2 拡張定理を使って $\mathcal{E}(h)$ の連接性が言えるかという問題を考える．このどちらも正しければ，上記の予想は解決でき，またそれぞれ独立した問題であるため，どちらか片方だけ証明できるだけでも十分な進展であるように思える．しかしどちらとも根拠らしい根拠がない状況なので，全くの筋違いかもしれない．

以上をまとめると次のようになる．



参考文献

[Ber98] B. Berndtsson, *Prekopa's theorem and Kiselman's minimum principle for plurisubharmonic functions*, Math. Ann. **312** (1998), 785–792.

[Bło13] Z. Błocki, *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. **193**, (2013), 149–158.

[deC98] M. A. A. de Cataldo, *Singular Hermitian metrics on vector bundles*, J. Reine Angew. Math. **502** (1998), 93–122.

[Dem] J.-P. Demailly, *Analytic methods in algebraic geometry*, Surveys of Modern Mathematics, vol. 1, International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012.

[Dem-book] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[DNW21] F. Deng, J. Ning, and Z. Wang, *Characterizations of plurisubharmonic functions*, Sci. China Math. **64**, (2021), 1959–1970.

[DNWZ23] F. Deng, J. Ning, Z. Wang, and X. Zhou, *Positivity of holomorphic vector bundles in terms of L^p-estimates for $\overline{\partial}$*, Math. Ann. **385** (2023), 575–607.

[DWZZ24] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang, and X. Zhou, *New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves*, American Journal of Mathematics **146**, (2024), no. 3, 751–768.

[GMY24] Q. Guan, Z. Mi, and Z. Yuan, *Optimal L^2 extension for holomorphic vector bundles with singular Hermitian metrics*, Peking Math J (2024).

[GMY25] Q. Guan, Z. Mi, and Z. Yuan, *Guan–Zhou's unified version of optimal L^2 extension theorem on weakly pseudoconvex Kähler manifolds* J. Math. Soc. Japan **77** (2025), no. 1, 167–188.

[GZ15] Q. Guan and X. Zhou, *A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 3, 1139–1208.

[HPS18] C. Hacon, M. Popa, and C. Schnell, *Algebraic fiber spaces over Abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Paun*, Contemp. Math. **712** (2018), 143–195.

[Hor65] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[HI21] G. Hosono and T. Inayama, *A converse of Hörmander's L^2-estimate and new positivity notions for vector bundles*, Sci. China Math. **64** (2021), 1745–1756.

[Ina22] T. Inayama, *Nakano positivity of singular Hermitian metrics and vanishing theorems of Demailly-Nadel-Nakano type*, Algebraic Geometry **9** (2022), 69–92.

[Ina22b] T. Inayama, *Singular Hermitian metrics with isolated singularities*, Nagoya Math. J. **248** (2022), 980–989.

[IM24] T. Inayama, S. Matsumura, *Nakano positivity of singular Hermitian metrics: Approximations and applications*, arXiv:2402.06883.

[IMW24] T. Inayama, S. Matsumura, and Y. Watanabe, *Singular Nakano positivity of direct image sheaves of adjoint bundles*, arXiv:2407.11412.

[Nad90] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195**, (1987), no. 2, 197–204.

[Zou22] Y. Zou, *Note on the singular Hermitian metrics with analytic singularities*, arXiv:2209.05053.