

✿ 日本数学会

2025年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2025年9月

於 名古屋大学

✿ 日本数学会

2025年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2025年9月

於 名古屋大学

函 数 論

9月16日(火) 第Ⅲ会場

9:30~11:10		(分)	頁
1	宮 武 夏 雄 (東北大MathCCS)	完備調和計量の拡張とその存在と一意性と近似について	(15) 1
2	宮 武 夏 雄 (東北大MathCCS)	調和計量と劣調和関数とエントロピーと自由エネルギー	(15) 3
3	宮 武 夏 雄 (東北大MathCCS)	エントロピーと自由エネルギーと双曲計量と冗長性	(15) 5
4	大 野 貴 雄 (大分大教育福祉) 下 村 哲 (広島大教育)	Maximal and Riesz potential operators on Musielak–Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces	(15) 7
5	堀 田 一 敬 (山口大理工) S. Schleißinger (Univ. of Würzburg) 須 川 敏 幸 (東北大情報)	Nonlinear resolvents and decreasing Loewner chains	(15) 9
6	笠 尾 俊 輔 (芝浦工大柏中高) 川 上 裕 (金沢大理工)	Bloch–Ros principle とその応用について	(15) 11

14:20~15:20 特別講演			
	熊 谷 駿 (八 戸 工 大)	Galois action on Teichmüller curves and related combinatorial objects	13

15:40~16:30			
7	成 田 淳 一 郎 (大同大教養・大同大*) 林 実 樹 廣 (北 大*) 瀬 川 重 男 (大 同 大*)	Hardy 族による平面領域の分類に関する Hasumi の定理について	(15) 29
8	松 崎 克 彦 (早 大 教 育) 陶 菲 (早 大 教 育)	Characterization of asymptotically smooth curve	(15) 31
9	奥 山 裕 介 (京都工繊大基盤)	複素力学系に現れる有理型関数の一般化シュワルツ微分について	(15) 33

9月17日(水) 第Ⅲ会場

9:30~11:10			
10	綾 野 孝 則 (阪公大数学研) V. M. Buchstaber (Steklov Math. Inst.)	次数 2 の超楕円関数による KP 方程式の解	(15) 35
11	大 沢 健 夫 (名大多元数理)b	An example of holomorphically nonconvex locally pseudoconvex analytic set in $\mathbb{C}^3$	(15) 37
12	阿 部 誠 (広 島 大*) 本 田 竜 広 (専 修 大 商)	$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐リーマン領域の境界距離関数	(15) 39
13	高 橋 正 (羽衣国際大現代社会)	吉原の定義式に関する数式处理的考察	(15) 41
14	厚 地 淳 (慶 大 理 工)	過渡的ケーラー多様体上の有理型関数に対するネヴァンリンナ理論	(15) 43
15	松 本 和 子 (東京理大理工)	$\mathbb{CP}^2$ の非特異複素曲線までの対数的 Fubini–Study 距離の Levi form の固有値	(15) 45

13:00~14:00 特別講演			
	稲 山 貴 大 (東京理大理工)	L^2 評価式, L^2 拡張定理と曲率の正值性	47

完備調和計量の拡張とその存在と一意性と近似について

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 調和計量が非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であるということ

X をコンパクトとは限らない連結 Riemann 面, $K_X \rightarrow X$ を X の標準束とする. 標準束の二乗根と $q \in H^0(K_X^2)$ を選ぶごとに, 巡回 Higgs 束とその上の調和計量という概念が定義される. 巡回 Higgs 束やその上の調和計量は Higgs 束のモジュライ空間の理論, 複素構造の変形理論, 曲面論や調和写像の理論, 数理物理, と関連し, 巡回 Higgs 束とその上の調和計量に関するこれまでの研究は上述したものの少なくともいずれかに主たる関心がありなされてきたのではないと思われるが, 今回の一連の講演では, 上述したものと関連はすれども, いずれとも少なくとも動機の上では異なる, 複素解析やポテンシャル論との関連による発展可能性というものを提示したい.

上述したことを説明するに当たって, まず, 巡回 Higgs 束上の調和計量が非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であるという講演者の立場・見方を説明したい. 以下, しばらくの間簡単のため $r = 2$ を仮定する. 標準束の二乗根 $K_X^{1/2} \rightarrow X$ ($K_X^{1/2} \otimes K_X^{1/2} \simeq K_X$) を一つ固定し, X 上の階数が 2 の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_2 \rightarrow X$ を $\mathbb{K}_2 := K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2}$ と定める. 各正則切断 $q \in H^0(K_X^2)$ に対し, $\text{End}\mathbb{K}_2$ に値をとる正則一形式 $\Phi(q) \in H^0(\text{End}\mathbb{K}_2 \otimes K_X)$ を以下のように定める:

$$\Phi(q) := \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この組 $(\mathbb{K}_2, \Phi(q))$ は階数が 2 の巡回 Higgs 束で, Hitchin による Higgs 束の最初の論文で導入されたものである. また, $\mathbb{K}_r$ 上の Hermite 計量 $h = (h_1, h_1^{-1})$ であって, その Chern 接続を ∇^h としたとき, h を用いて定義される接続 $D := \nabla^h + \Phi(q) + \Phi(q)^{*h}$ が平坦, すなわち D の曲率が零となるようなものを, 調和計量と呼ぶ. 調和計量から, X の普遍被覆空間 $\tilde{X}$ から $\text{SL}(2, \mathbb{C})/\text{SU}(2)$ もしくは $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ への調和写像が定まる. また, 調和計量の隣接成分の差を取ることで, $T_X := K_X^{-1}$ の Hermite 計量 (Kähler 計量) H_1 が $H_1 := h_1^{-2}$ と定まる. さらに q が $K_X^{-2} \rightarrow X$ に自然に誘導する q の零点において退化した Hermite 計量を h_q と書くとき, $H_1^{-1} \otimes h_q$ により自然に q の零点において退化した Hermite 計量 H_2 が定まる. さて, X が例えば楕円曲線であるとする. このとき, $(\mathbb{K}_2, \Phi(q)) \rightarrow X$ 上に調和計量が存在するための必要十分条件は, q が零切断でないことであり, このとき, $h = (h_1, h_1^{-1}) = (h_q^{-1/4}, h_q^{1/4})$ が調和計量となることは容易に確かめることができる. このとき, 上述した H_1, H_2 は $H_1 = H_2 = h_q^{1/2}$ となり, 平坦な定曲率

* e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

Kähler と一致する. 次に, X が閉双曲 Riemann 面であるとする. このとき, 調和計量は常に存在し, また $\det(h)$ を一つ固定すれば一意性も成り立つ. q には零点が存在するので, H_1, H_2 には零点の分だけ平坦な計量からのずれ (ひずみ) が生じるが, その最もひずみ切った極限, すなわち $q = 0$ の場合には, H_1 は双曲計量と一致する. 以上は $r = 2$ の場合の説明であったが, 同様のこと r がより一般の場合にも観察できる.

2 完備調和計量の拡張とその存在と一意性と近似について

調和計量を非負定曲率 Kähler 計量の拡張概念であると見做す立場からは, 双曲計量の側から見て双曲計量とのずれを生む付加構造 q は, q である必要はない. そこで, q が誘導する標準束上の特異 Hermite 計量 $h_q^{-1/r}$ をより一般の標準束上の半正值特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi}h_*$ へ拡張する. これは, X 上の巡回型分岐被覆上の調和計量と, その被覆次数無限大の極限をとって得られる Hermite 計量まで考察の対象にするということである. それらをより具体的にどのように研究するかは本講演に続く二つの講演において説明する. 通常の調和計量には完備性という概念が [1] で導入され, 完備調和計量の存在と一意性が [1] において示された. その定理の一般の $e^{-\varphi}h_*$ への拡張と, 完備計量の近似定理が本講演の主定理である. 以下, X が双曲的でない場合には, φ は恒等的に $-\infty$ ではないと仮定する.

Theorem 1. φ は以下の仮定を満たすとする:

(*) あるコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在して, $X \setminus K$ 上, e^φ は滑らかである.

このとき, 二つの φ に付随する完備計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ と $h' = (h'_1, \dots, h'_r)$ で $\det(h) = \det(h') = 1$ を満たすものに対し, 常に $h = h'$ が成り立つ.

Theorem 2. φ に存在する完備計量は, e^φ が滑らかならば常に存在する. また次が成り立つ: $(e^{-\varphi_\epsilon}h_*)_{\epsilon>0}$ を滑らかな半正值計量の族で, それぞれは開部分集合 $X_\epsilon \subseteq X$ 上定義されており, 次が成り立つとする:

- それぞれの $\epsilon' > \epsilon > 0$ に対し $X_{\epsilon'} \subseteq X_\epsilon$ かつ, $\bigcup_{\epsilon>0} X_\epsilon = X$.
- 各 $\epsilon' > \epsilon > 0$ について $\varphi_\epsilon \leq \varphi_{\epsilon'}$ が成り立ち, また $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ は $\epsilon \searrow 0$ で φ に収束する.

このとき, $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ に対応する完備計量の族 $(h_\epsilon = (h_{1,\epsilon}, \dots, h_{r,\epsilon}))_{\epsilon>0}$ は φ に付随する完備計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ に $\epsilon \searrow 0$ で単調減少収束する.

参考文献

- [1] Li, Qionglin, and Takuro Mochizuki. *Complete Solutions of Toda Equations and Cyclic Higgs Bundles Over Non-compact Surfaces*, International Mathematics Research Notices 2025.7 (2025): rnaf081.

調和計量と劣調和関数とエントロピーと自由エネルギー

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 エントロピーと自由エネルギー

本講演はこの講演の前の講演の続きである。ページの節約のため、背景知識や動機の説明の一部をそちらの予稿にゆずって本稿では省略する。\$X\$ を連結 Riemann 面、\$K_X \to X\$ を標準束とする。標準束上の半正值特異 Hermite 計量 \$e^{-\varphi}h_*\$ に対し、以下の正則ベクトル上の対角形の Hermite 計量 \$h = (h_1, \dots, h_r)\$ を解に持つような楕円型方程式を、通常の調和計量が従う楕円型方程式の拡張として講演者が導入した:

$$\mathbb{K}_r := K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus K_X^{\frac{r-3}{2}} \oplus \dots \oplus K_X^{-\frac{r-3}{2}} \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}.$$

\$h = (h_1, \dots, h_r)\$ から、\$K_X^{-1} \to X\$ 上の Hermite 計量 \$H_1, \dots, H_{r-1}\$ が、\$H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}\$ と定まり、さらに \$\varphi\$ の \$-\infty\$ 集合において退化した Hermite 計量 \$H_r\$ が \$H_r := e^{r\varphi} h_*^{-r} \otimes h_r^{-1} \otimes h_1\$ 定まる。これら \$h = (h_1, \dots, h_r)\$ や \$H_1, \dots, H_r\$ が、非負定曲率 Kähler 計量からどのようにずれるか・ひずむのかという問題を正則切断の零点配置やポテンシャル論の問題として・それらと関連付けて研究をしたい。

少々唐突ではあるが、平衡統計力学において良く知られているカノニカル分布の理論とのアナロジーで、\$H_1, \dots, H_r\$ からさらに情報を縮約した以下の二つの関数を導入する:

Definition 1 (M.). \$\beta\$ を非零実数とする。以下の関数を自由エネルギーと呼ぶ:

$$F(r, \beta, \varphi, H_*) := -\frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{j=1}^r (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*))^\beta \right).$$

ここに、\$H_*\$ は \$K_X^{-1} \to X\$ 上のある計量である。

Definition 2 (M.). 各 \$j = 1, \dots, r\$ と非零実数 \$\beta\$ に対し、関数 \$p_j(\beta, \varphi) : X \to [0, 1]\$ を以下のように定める:

$$p_j(\beta, \varphi) := \frac{\text{vol}(H_j)^\beta}{\sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^\beta},$$

以下の関数をエントロピーと呼ぶ:

$$S(r, \beta, \varphi) := -\sum_{j=0}^{r-1} p_j(\beta, \varphi) \log p_j(\beta, \varphi).$$

* e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

以下, $H_1, \dots, H_{r-1}$ は全て完備で, また滑らかな計量による近似に関する条件が仮定されているものとする. 以下の定理が本講演の主定理である:

Theorem 3. $e^{-\varphi} h_*$ は恒等的に ∞ ではなく, また平坦でもないとする. このとき, 次が成り立つ:

$$S_{r,\beta} \leq S(r, \varphi, \beta)(x) < \log r \text{ for any } x \in X,$$

ここに, $S_{r,\beta}$ は重み関数が $-\infty$ の場合の双曲計量に対応するエントロピーである. さらに, $S(r, \varphi, \beta)(x)$ の下からの評価における等号は $r = 2, 3$ かつ $\varphi(x) = -\infty$ の場合にのみ達成される. またさらにその上界と下界に関して次が成り立つ:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_{r,\beta} - \log r) = \begin{cases} \frac{2\beta d_\beta}{c_\beta} - \log(c_\beta) & \text{if } \beta > -1 \\ -\infty & \text{if } \beta \leq -1. \end{cases}$$

ここに, c_β と d_β を以下のように定義した:

$$c_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta ds,$$

$$d_\beta := \int_0^1 s^\beta (1-s)^\beta \log s \, ds.$$

Theorem 4. φ と φ' は次を満たすとする:

- 各 $x \in X$ に対し, $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成立し, 少なくとも一つの $x \in X$ について $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
- 各 $x \in X$ に対して $\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi'(x) \geq \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi(x)$ が成り立つ.

このとき, $r = 2, 3$ の場合に次が成り立つ:

$$S(r, \beta, \varphi)(x) > S(r, \beta, \varphi')(x) \text{ for all } x \in X.$$

Theorem 5. β は正であると仮定する. φ と φ' は以下を満たすとする:

1. 各 $x \in X$ に対し, $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$ が成り立ち, 少なくとも一つの $x \in X$ について $\varphi(x) > \varphi'(x)$ が成り立つ.
2. 各 $x \in X$ について, $\sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi'(x) \geq \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \varphi(x)$ が成り立つ.

φ と φ' が条件 1 を満たし, $r = 2, 3$ であるとする. このとき次が成り立つ:

$$0 < F(r, \beta, \varphi')(x) - F(r, \beta, \varphi)(x) \text{ for all } x \in X.$$

φ が φ' が条件 1 と 2 をどちらも満たすとする. このとき, 全ての $r \geq 2$ に対して次が成り立つ:

$$0 < F(r, \beta, \varphi')(x) - F(r, \beta, \varphi)(x) < \varphi - \varphi' + \frac{1}{\beta} \log r \text{ for all } x \in X.$$

エントロピーと自由エネルギーと双曲計量と冗長性

宮武夏雄 (東北大学数理科学共創社会センター)*

1 エントロピーと自由エネルギー

本講演はこの講演の前に行われる二つの講演の続きである。ページの節約のため、背景知識や動機の説明の一部をそれらの予稿にゆずって本稿では省略する。以下、本講演の前の講演の予稿において述べたことの繰り返しになるが、本講演の主定理を述べるに当たって必要な記号と概念を準備する： X を連結 Riemann 面、 $K_X \rightarrow X$ を標準束とする。標準束上の半正値特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi}h_*$ に対し、以下の正則ベクトル上の対角形の Hermite 計量 $h = (h_1, \dots, h_r)$ を解に持つような楕円型方程式を、通常の調和計量が従う楕円型方程式の拡張として講演者が導入した：

$$\mathbb{K}_r := K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus K_X^{\frac{r-3}{2}} \oplus \cdots \oplus K_X^{-\frac{r-3}{2}} \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}.$$

$h = (h_1, \dots, h_r)$ から、 $K_X^{-1} \rightarrow X$ 上の Hermite 計量 $H_1, \dots, H_{r-1}$ が[‡] $H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1}$ と定まり、さらに φ の $-\infty$ 集合において退化した Hermite 計量 H_r が[‡] $H_r := e^{r\varphi}h_*^{-r} \otimes h_r^{-1} \otimes h_1$ 定まる。平衡統計力学において良く知られているカノニカル分布の理論とのアナロジーで、 $H_1, \dots, H_r$ からさらに情報を縮約した以下の二つの関数を本講演の前の講演において導入した：

Definition 1 (M.). β を非零実数とする。以下の関数を自由エネルギーと呼ぶ：

$$F(r, \beta, \varphi, H_*) := -\frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{j=1}^r (\text{vol}(H_j) / \text{vol}(H_*))^\beta \right).$$

ここに、 H_* は $K_X^{-1} \rightarrow X$ 上のある計量である。

Definition 2 (M.). 各 $j = 1, \dots, r$ と非零実数 β に対し、関数 $p_j(\beta, \varphi) : X \rightarrow [0, 1]$ を以下のように定める：

$$p_j(\beta, \varphi) := \frac{\text{vol}(H_j)^\beta}{\sum_{j=0}^{r-1} \text{vol}(H_j)^\beta},$$

以下の関数をエントロピーと呼ぶ：

$$S(r, \beta, \varphi) := -\sum_{j=0}^{r-1} p_j(\beta, \varphi) \log p_j(\beta, \varphi).$$

さらに、本講演では以下の概念を導入する：

* e-mail: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K16912) の助成を受けたものである。

Definition 3. 以下の関数を冗長性関数 (redundancy function) と呼ぶ:

$$R(r, \varphi, \beta) := 1 - S(r, \varphi, \beta) / \log r.$$

また, 以下の定数を下冗長性定数 (lower redundancy constant) と呼ぶ:

$$\underline{R}_{r, \varphi, \beta} := \inf_{x \in X} R(r, \varphi, \beta)(x).$$

以下, X は (開) 双曲 Riemann 面とし, 完備定曲率 -1 の Kähler 形式 ω_X から誘導される $K_X \rightarrow X$ 上の Hermite 計量を h_X と書く. 特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi} h_*$ の h_* を h_X と取る. 無限大かもしれない定数 M_φ を $M_\varphi := \sup_X e^\varphi$ と定める. $H_1, \dots, H_{r-1}$ は全て完備で, また滑らかな計量による近似に関する条件が仮定されているものとする. 以下の定理が本講演の主定理で, それは正則二次微分の双曲計量に対する有界性に関する Wan の定理 [2] やより一般の r 次微分に関する Dai-Li の定理 [1] の拡張であり, またエントロピーと自由エネルギーを用いた新たな定式化である:

Theorem 4. 以下は全て同値である:

1. e^φ は有界, すなわち, M_φ は有限である.
2. 非零実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する定数 $\delta(\beta, r, M_\varphi)$ が存在して, 以下の一様評価が成り立つ:

$$S(r, \beta, \varphi)(x) \leq \log r - \delta(\beta, r, M_\varphi) \text{ for all } x \in X.$$

3. 下冗長性定数が正である:

$$\underline{R}_{r, \beta, \varphi} := \inf_{x \in X} (1 - (S(r, \beta, \varphi)(x) / \log r)) > 0.$$

4. 全ての正の実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する正の定数 $C_1(\beta, r, M_\varphi)$ がとれて次が成り立つ:

$$F(r, \beta, \varphi)(x) - F(r, \beta, -\infty) \leq C_1(\beta, r, M_\varphi) \text{ for all } x \in X.$$

5. 正の実数 β と整数 $r \geq 2$ に対し, β と M_φ と r にのみ依存する定数 $C_2(\beta, r, M_\varphi)$ が取れて次が成り立つ:

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} (F(r, \beta, \varphi) - F(r, \beta, -\infty)) \leq -C_2(\beta, r, M_\varphi) \omega_X + \omega_X.$$

参考文献

- [1] S. Dai and Q. Li, *Bounded differentials on the unit disk and the associated geometry*, Transactions of the American Mathematical Society (2024).
- [2] T. Y.-H. Wan, *Constant mean curvature surface, harmonic map and universal Teichmüller space*, Stanford University, 1991.

Maximal and Riesz potential operators on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces

大野 貴雄 (大分大学)*¹

下村 哲 (広島大学)*²

集合 X , 距離 d , 非負 Borel 測度 μ に対して, 測度距離空間 (X, d, μ) を考える. また, $\text{diam}X = \infty$ とする. 関数 $\Phi(x, t) : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は次を満たすとする:

($\Phi 1$) $\Phi(\cdot, t)$ は X 上で可測関数で, $\Phi(x, \cdot)$ は $[0, \infty)$ 上で連続関数である;

($\Phi 2$) 定数 $A_1 \geq 1$ が存在して, $A_1^{-1} \leq \Phi(x, 1) \leq A_1$ ($\forall x \in X$);

($\Phi 3$) $\Phi(x, t)/t$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準増加である, つまり, 定数 $A_2 \geq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, t_1)/t_1 \leq A_2 \Phi(x, t_2)/t_2 \quad (\forall x \in X, 0 \leq t_1 < t_2).$$

$\bar{\phi}(x, t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \{\Phi(x, s)/s\}$, $\bar{\Phi}(x, t) = \int_0^t \bar{\phi}(x, r) dr$ ($\forall x \in X, t > 0$) とする. Musielak-Orlicz 空間を

$$L^\Phi(X) = \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(X); \int_X \Phi(y, |f(y)|) d\mu(y) < \infty \right\}.$$

と定義する. この空間は, ノルム

$$\|f\|_{L^\Phi(X)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_X \bar{\Phi}(y, |f(y)|/\lambda) d\mu(y) \leq 1 \right\}$$

によって Banach 空間になる.

$\lambda \geq 1$ に対して, 極大作用素

$$M_\lambda f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, \lambda r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y)$$

を考える. 以下, 測度距離空間 (X, d, μ) と関数 $\Phi(x, t)$ は, 次の条件を満たす:

(μQ) $0 < \inf_{x \in X} Q(x) \leq \sup_{x \in X} Q(x) < \infty$ を満たす X 上の可測関数 $Q(\cdot)$ と, 定数 $c_Q \geq 1$ が存在して,

$$\mu(B(x, r)) \geq c_Q^{-1} r^{Q(x)} \quad (\forall x \in X, r > 0);$$

($M\lambda$) 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\mu(\{x \in X : M_\lambda f(x) > k\}) \leq \frac{C}{k} \int_X |f(y)| d\mu(y) \quad (\forall f \in L^1(X), k > 0);$$

*¹ e-mail: t-ohno@oita-u.ac.jp

*² e-mail: tshimo@hiroshima-u.ac.jp

2000 Mathematics Subject Classification: 46E35, 46E30.

Keywords: maximal functions, Riesz potentials, Musielak-Orlicz spaces, Sobolev's inequality, metric measure spaces, non-doubling measure.

(Φ3; p) 定数 $p > 1$ が存在して, $\Phi(x, t)/t^p$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準増加である ;

(Φ5; Q) 任意の $\gamma > 0$ に対して, 定数 $B_{\gamma, Q} \geq 1$ が存在して, $x \in X, r > 0, y \in B(x, r), t \geq 1$ が $\Phi(x, t) \leq \gamma r^{-Q(x)}$ を満たすならば, $\Phi(x, t) \leq \Phi(y, B_{\gamma, Q} t)$;

(Φ6) $0 \leq g(x) \leq 1, 0 \leq h(x) \leq 1$ ($x \in X$), $\Phi(\cdot, g(\cdot)) \in L^1(X)$ かつ $h \in L^1(X)$ を満たす関数 $g(\cdot), h(\cdot)$ と, 定数 $0 < B_\infty \leq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, B_\infty t) \leq \Phi(y, t) + h(x) \quad (\forall x, y \in X, g(y) \leq t \leq 1).$$

定理 1([2], cf. [1]). $\lambda \geq 1$ とする. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|M_\lambda f\|_{L^\Phi(X)} \leq C \|f\|_{L^\Phi(X)} \quad (\forall f \in L^\Phi(X)).$$

$\tau \geq 1$ と $0 < \inf_{x \in X} \alpha(x) \leq \sup_{x \in X} \alpha(x) < \infty$ を満たす X 上の可測関数 $\alpha(\cdot)$ に対して, $\alpha(\cdot)$ 次のリースポテンシャル

$$I_{\alpha(\cdot), \tau} f(x) = \int_X \frac{d(x, y)^{\alpha(x)} f(y)}{\mu(B(x, \tau d(x, y)))} d\mu(y)$$

を考える. 以下, 関数 $\Phi(x, t)$ は, 次の条件も満たす :

(Φ $Q\alpha$) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $r^{\alpha(x)+\varepsilon} \Phi^{-1}(x, r^{-Q(x)})$ は $(0, \infty)$ 上で一様に準減少である ;

(Φ1') $\Phi(x, t) > 0$ ($\forall x \in X, t > 0$).

$H = \{x \in X : h(x) > 0\}$ に対して, 次を満たす関数 $\Phi_\infty(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在すると仮定する :

(Φ ∞ 0) $\Phi_\infty(t) > 0$ ($\forall t > 0$), $\Phi_\infty(t)$ は $(0, \infty)$ 上で連続かつ $\Phi_\infty(t)/t$ は $(0, \infty)$ 上で準増加である ;

(Φ ∞ 1) 定数 $0 < \tilde{B}_\infty \leq 1$ が存在して,

$$\Phi(x, \tilde{B}_\infty \Phi_\infty^{-1}(h(x))) \leq h(x) \quad (\forall x \in H)$$

かつ

$$\Phi_\infty(\tilde{B}_\infty t) \leq \Phi(x, t) \quad (\forall x \in X, g(x) \leq t \leq 1);$$

(Φ ∞ $Q\alpha$) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $r \mapsto r^{\alpha(x)+\varepsilon} \Phi_\infty^{-1}(r^{-Q(x)})$ は $[1, \infty)$ 上で一様に準減少である.

関数 $\Phi(x, t)$ の Sobolev 共役関数 $\Psi(x, t) : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は, (Φ1) – (Φ3) を満たし, 次を満たすものを考える :

(Ψ4) $A' \geq 1$ が存在して,

$$\Psi(x, t \Phi(x, t)^{-\alpha(x)/Q(x)}) \leq A' \Phi(x, t) \quad (\forall x \in X, t > 0).$$

定理 2([2], cf. [1]). $1 \leq \lambda < \tau$. とする. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|I_{\alpha(\cdot), \tau} f\|_{L^\Psi(X)} \leq C \|f\|_{L^\Phi(X)} \quad (\forall f \in L^\Phi(X)).$$

References

- [1] T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev inequalities on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces, Bull. Sci. Math. **199** (2025), Paper No. 103546.
- [2] T. Ohno and T. Shimomura, Maximal and Riesz potential operators on Musielak-Orlicz spaces over unbounded metric measure spaces, to appear in Czechoslovak Math. J.

Nonlinear resolvents and decreasing Loewner chains

堀田 一敬 (山口大学大学院創成科学研究科)*¹
 Sebastian Schleißinger (University of Würzburg)
 須川 敏幸 (東北大学大学院情報科学研究科)

1. $(F_t)_{t \geq 0}$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数の **semigroup** であるとする, すなわち F_0 は恒等写像で, $s, t \geq 0$ に対し $F_{s+t} = F_s \circ F_t$ が成り立ち, $t \mapsto F_t$ は D 上広義一様収束の位相で連続である. このとき, 広義一様極限

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{F_t(z) - z}{t} =: G(z)$$

が存在する. D 上の正則関数 $G(z)$ を **infinitesimal generator** と呼び, その全体を $\mathcal{G}(D)$ で表す. $D = \mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ のときは $G \in \mathcal{G}(\mathbb{D})$ の次の表現が知られている; 任意の $G \in \mathcal{G}(\mathbb{D})$ に対して, ある正則関数 $p: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ で $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ を満たすものと点 $\tau \in \mathbb{D}$ が存在し

$$G(z) = (\tau - z)(1 - \bar{\tau}z)p(z)$$

を満たす. 逆に上記で定義される正則関数 G は $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ に属する. $G \neq 0$ のとき, 上記の τ を $(F_t)_{t \geq 0}$ の **Denjoy-Wolff 点** と呼ぶ.

一般の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の semigroup $(\hat{F}_t)_{t \geq 0}$ に対して Denjoy-Wolff 点は次のようにして定義される; 等角同相写像 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow D$ を用いて $F_t := \varphi^{-1} \circ \hat{F}_t \circ \varphi$ とすれば, (F_t) は $\mathbb{D}$ 上の semigroup となる. (F_t) の Denjoy-Wolff 点が $\tau \in \mathbb{D}$ であるとき, $\varphi(\tau)$ を $(\hat{F}_t)$ の Denjoy-Wolff 点という. なお $\tau \in \partial\mathbb{D}$ のときは, D として ∂D が局所連結なものを考えるなど少し気を遣う必要がある.

$\mathcal{G}(D)$ の特徴づけとして, 本講演の主題である nonlinear resolvent の概念が知られている. これは Banach 空間上の線形作用素半群に対する Hille-Yosida 理論の類似として位置づけられる.

定義 1. $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $G: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. $t \geq 0$ に対して, 方程式

$$w = z - t \cdot G(z) \tag{1}$$

が任意の $w \in D$ に対して解 $z \in D$ をもち, 対応 $w \mapsto z =: J_t(w)$ が D の自己正則写像になるとき, 写像 $J_t(w)$ を G の (時刻 t における) **nonlinear resolvent** と呼ぶ.

もし $D \subset \mathbb{C}$ が有界凸領域であれば, 任意の $w \in D$ に対して $w = z - tG(z)$ は一意解 $z = J_t(w) \in D$ を持つ ([RS97]). nonlinear resolvent を用いて $\mathcal{G}(D)$ は次のように特徴づけられる.

定理 2 ([RS97]). $D \subset \mathbb{C}$ を有界凸領域とする. 正則関数 $G: D \rightarrow \mathbb{C}$ が, すべての $t \geq 0$ に対して nonlinear resolvent $J_t(w)$ をもつことと, $G \in \mathcal{G}(D)$ であることは同値である.

2. D の有界性の仮定を取り除くと, 一般的に nonlinear resolvent は存在するとは限らない. 例えば

$$F_t(z) := \frac{z + \tanh(t/2)}{1 + z \tanh(t/2)} \quad (z \in \mathbb{D}, t \geq 0)$$

は $\mathbb{D}$ 上の semigroup であり, Denjoy-Wolff 点は 1, 対応する infinitesimal generator は $G(z) = (1 - z^2)/2$ である. この場合 nonlinear resolvent は任意の $t \geq 0$ に対して存在する. 一方で, 上半平面 $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ を $\mathbb{D}$ にうつす一次変換 $C(z) = (z - i)/(z + i)$ を用いて $\mathbb{H}$ 上の semigroup $\hat{F}_t$ を

$$\hat{F}_t(\zeta) := (C^{-1} \circ F_t \circ C)(\zeta) = e^t \zeta \quad (\zeta \in \mathbb{H}, t \geq 0)$$

*¹ e-mail: ihotta@yamaguchi-u.ac.jp

で定義する． Denjoy-Wolff 点は ∞ ，対応する infinitesimal generator は $\hat{G}(\zeta) = \zeta$ である． このとき resolvent 方程式は $w = \zeta - t\zeta$ となり， nonlinear resolvent $J_t(w) = \frac{w}{1-t}$ は $t \in [0, 1)$ のときのみ存在する．

D が非有界の場合，我々は nonlinear resolvent の存在性について下記のような結果を得た；

定理 3 ([HSS24]). $D \subset \mathbb{C}$ を非有界凸領域， (F_t) を D 上の *semigroup*， $G : D \rightarrow \mathbb{C}$ を (F_t) の *infinitesimal generator* とする． もし (F_t) の Denjoy-Wolff 点が有限ならば，すべての $t \geq 0$ に対して G の nonlinear resolvent J_t は存在する．

3. Nonlinear resolvent は decreasing Loewner chain となることが知られている． これは 2020 年に [ESS20] により最初に $D = \mathbb{D}, \tau = 0, p(z) > 0$ の場合に示され， [GHK20] により n 次元に拡張された． 我々はさらに一般化し，特に τ, p の制限なしにこの性質が成り立つことを示した．

定理 4 ([HSS24]). $D \subset \mathbb{C}$ を有界凸領域， $G \in \mathcal{G}(D)$ とする． このとき微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} J_t(w) = J'_t(w) G(J_t(w)) \quad (t \geq 0), \quad J_0(w) = w \in D \quad (2)$$

の解 (J_t) が一意に存在する． J_t は G の nonlinear resolvent であり， $(J_t)_{t \geq 0}$ は decreasing Loewner chain である．

$D = \mathbb{H}$ の場合，自由確率論における [Maa92] の結果を応用することで，次の nonlinear resolvent の存在性の定理を得た． これは自由加法畳み込みによる semigroup の性質とも関連している．

定理 5 ([HSS24]). $G \in \mathcal{G}(\mathbb{H})$ とし， G により生成される *semigroup* の Denjoy-Wolff 点が ∞ であるとする． また

$$b := \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{G(iy)}{iy}$$

とする． このとき b は非負実数となる． また b の値によって次が成り立つ．

1. $b = 0$ のとき， $D = \mathbb{H}$ としたときの微分方程式 (2) の解 (J_t) が一意に存在する． (J_t) はある自由加法畳み込みに関する確率測度の *semigroup* $(\mu_t)_{t \geq 0}$ を用いて

$$\frac{1}{J_t(w)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{w - x} \mu_t(dx)$$

と表される，すなわち (μ_t) に対する F -変換 F_{μ_t} に対して $J_t = F_{\mu_t}$ である． さらに J_t は G の nonlinear resolvent であり， $G = -\varphi_{\mu_1}$ が成り立つ，ここで φ_{μ} は Voiculescu 変換である．

2. $b \neq 0$ のとき， G の nonlinear resolvent はすべての $t \in [0, 1/b)$ に対して存在し，すべての $t \in [1/b, \infty)$ に対して存在しない．

注意． 定義 1，定理 2，定理 4 は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}^n$ に取り替えても有効である ([HSS24]).

参考文献

- [ESS20] M. Elin, D. Shoikhet, and T. Sugawa, *Geometric properties of the nonlinear resolvent of holomorphic generators*, J. Math. Anal. Appl. **483** (2020), no. 2, 123614, 18.
- [GHK20] I. Graham, H. Hamada, and G. Kohr, *Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family on the unit ball in $\mathbb{C}^n$* , J. Math. Anal. Appl. **491** (2020), no. 1, 124289, 29.
- [HSS24] I. Hotta, S. Schleißinger, and T. Sugawa, *Nonlinear resolvents and decreasing Loewner chains*, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 4, Paper No. 99, 28.
- [Maa92] H. Maassen, *Addition of freely independent random variables*, J. Funct. Anal. **106** (1992), no. 2, 409–438.
- [RS97] S. Reich and D. Shoikhet, *Semigroups and generators on convex domains with the hyperbolic metric*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **8** (1997), no. 4, 231–250.

Bloch-Ros principle とその応用について

笠尾 俊輔 (芝浦工業大学柏中学高等学校)*¹

川上 裕 (金沢大数物)*²

本稿では、有理型関数の正規族の理論、値分布論そして曲面の Gauss 写像の値分布論の結果の統一的解釈を与える “Bloch-Ros principle” [1, 2] の概要を紹介する． Σ を Riemann 面, $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面とする．このとき,

$$\mathcal{M}(\Sigma) := \{f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}} \text{ 正則写像} \} = \{f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}} \text{ 有理型関数} \} \cup \{f \equiv \infty \text{ on } \Sigma\}$$

と定める． $\mathcal{M}(\Sigma)$ の位相として, Σ 内の compact 部分集合上の一様収束位相を用いる．

P を Σ 上の $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像のある性質としたとき,

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \{f \in \mathcal{M}(\Sigma); f \text{ は } \Sigma \text{ 上で性質 } P \text{ を満たす} \}$$

と定める．

定義 1. $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像の性質 P に対して, 次の条件を考える：

- (P1) 任意の 2 つの Riemann 面 Σ, Σ' と分岐点を持たない任意の正則写像 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ に対して, $f \in \mathcal{P}(\Sigma')$ ならば $f \circ \phi \in \mathcal{P}(\Sigma)$ となる．
- (P2) Σ を Riemann 面, $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ とする． Σ 内の任意の相対コンパクト領域 Ω に対して, $f|_{\Omega} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ならば $f \in \mathcal{P}(\Sigma)$ となる．
- (P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ の元からなる収束列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数が $\mathcal{P}(\Sigma)$ の元になる．
- (P4) 任意の Riemann 面 Σ に対して, $\mathcal{P}(\Sigma)$ は Σ 上の正規族となる．

性質 P が条件 (P1), (P2), (P3) を満たすとき, P は **closed property** を満たすという．また, 性質 P が条件 (P1), (P2), (P3), (P4) を満たすとき, P は **compact property** を満たすという．

$X \subset \overline{\mathbf{C}}$ とする．任意の Riemann 面 Σ および正則写像 $f: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ に対して, 性質 P_X を, Σ 上で $f(\Sigma) \subset \overline{\mathbf{C}} \setminus X$ または $f \equiv (\text{constant})$ とすると, P_X は closed property である．さらに, X が 3 個以上の元を含んでいれば, P_X は compact property である．

曲面の Gauss 写像の値分布論的性質を複素解析的に扱うため, 次の概念を導入する．

定義 2. Σ を等角計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$$

*¹e-mail: kasao15039@gmail.com

*²e-mail: y-kwkami@se.kanazawa-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:23K03086) の助成を受けたものである．

2020 Mathematics Subject Classification: 53A10, 30D35, 30D45

キーワード：ガウス写像, 正規族, 曲率評価, Bloch-Ros principle

(但し, hdz を Σ 上の正則 1 次微分形式, g を Σ 上の有理型関数, m を正の整数) が付随した開 Riemann 面とする. このとき, 組 (Σ, hdz, g) を **Weierstrass m -triple** という.

次に, compact property を満たす有理型関数が m -curvature estimate を満たすことを定義する.

定義 3. P を compact property, m を正の整数とする. このとき, P が **m -curvature estimate** を満たすとは, ある $C = C(P, m) > 0$ が存在して, $g \in \mathcal{P}(\Sigma)$ を満たす任意の Weierstrass m -triple (Σ, hdz, g) に対して, 任意の $p \in \Sigma$ において

$$|K_{ds^2}(p)|(d(p))^2 \leq C$$

が成り立つことである. ここで, $K_{ds^2}(p)$ は $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ に関する p の Gauss 曲率, $d(p)$ は p から Σ の境界への測地的距離である.

我々は compact property が m -curvature estimate を満たすための判定条件として, 次の定理を示した.

定理 4. P を compact property, m を正の整数, $\mathbf{D}$ を単位円板とする. このとき, 次の (1) または (2) のいずれかが成り立つ:

- (1) P は m -curvature estimate を満たす.
- (2) $\mathbf{D}$ 上の正則 1 次微分形式 hdz および $\mathbf{D}$ 上の非定数有理型関数 g が存在して, 次の (A) および (B) を満たす:
 - (A) $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ が $\mathbf{D}$ 上の完備な等角計量となる,
 - (B) $g \in \mathcal{P}(\mathbf{D})$ であり, $|K_{ds^2}(0)| = 1/4$ で, $\mathbf{D}$ 上の各点 p において $|K_{ds^2}(p)| \leq 1$ が成り立つ.

定理 4 から, 次の結果を示すことができる.

命題 5. 組 (Σ, hdz, g) を Weierstrass m -triple とする. X が $m + 2$ 個以上の元を含んでいれば, P_X は m -curvature estimate を満たす compact property となる. 特に, $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |h|^2 |dz|^2$ が Σ 上の完備等角計量で g が Σ 上非定数有理型関数ならば, g の除外値数は高々 $m + 2$ である.

参考文献

- [1] S. Kasao and Y. Kawakami, Bloch-Ros principle and its application to surface theory, to appear in Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, arXiv: 2402.12909.
- [2] 笠尾俊輔, 様々な曲面のクラスへの Bloch-Ros principle の応用, 2023 年度金沢大学大学院自然科学研究科数理科学専攻 修士論文, 複素解析学ホームページ 修士・博士論文アーカイブにて公開.

Galois action on Teichmüller curves and related combinatorial objects

熊谷 駿 (八戸工業大学)*

1. 導入

本稿では次で定義される**絶対ガロア群** $G_{\mathbb{Q}}$:

$$\bar{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{C} \mid \exists P(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ s.t. } P(a) = 0\}, \quad (1)$$

$$G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} : \text{体同型写像}, \sigma = \text{id on } \mathbb{Q}\}, \quad (2)$$

$$= \left\{ (g_K)_K \in \prod_{\mathbb{Q} < K: \text{有限次}} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \left| g_K|_{K'} = g_{K'} \text{ if } K \geq K' \right. \right\}, \quad (3)$$

の研究の文脈の中で、タイヒミュラー曲線への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の議論に基づき $\widehat{GT}$ -relation の新たな関係式を得た Möller の結果に代表される「折り紙」の位置づけを、それらに先立つ Grothendieck の「デッサン」の理論と対照して議論することを目的とする。なお、本稿の「折り紙」は単位正方形セルの貼り合わせ方法を指定するグラフ構造を指すものであり、一般によく知られる紙面の折り操作によるものとは異なる。その命名は2000年代初頭の Lochak [20] により、本稿で述べる組み合わせ的特徴づけと数論的性質を念頭に「デッサンの自然な高次元アナログ」となるべきものとして導入されたものである。

モジュライ空間の代数的基本群としての射有限写像類群 $\hat{\Pi}_{g,n}$ は Oda [26] の結果として $\bar{\mathbb{Q}}$ -係数拡大 $\pi_1(M_{g,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}$ と同型で、これに $G_{\mathbb{Q}}$ が作用する。各 $\overline{M}_{g,n}$ を (g,n) 型リーマン面のモジュライ空間 $M_{g,n}$ の Deligne–Mumford コンパクト化を表すものとする、モジュライ空間の間には自然な射 [13, 24] :

- (1) 曲面の標点を忘却する操作 $M_{g,n+1} \rightarrow M_{g,n}$,
- (2) 2曲面を標点で交わせノード付き曲面を得る操作 $\overline{M}_{g,n} \times \overline{M}_{g',n'} \rightarrow \partial M_{g+g',n+n'}$,
- (3) 曲面の2つの標点を繋げてノード付き曲面を得る操作 $\overline{M}_{g,n+2} \rightarrow \partial M_{g+1,n}$,

が定義される。1984年、Grothendieck はその「Equisse d'un Programme」[11] の中で $\hat{\Pi}_{g,n}$ に自然な射との両立条件を課した**タイヒミュラー塔**の概念と、その下で $\hat{\Pi}_{0,4}$, $\hat{\Pi}_{1,1}$, $\hat{\Pi}_{0,5}$, $\hat{\Pi}_{1,2}$ の4つを構成単位とし、それらの中での関係式をもって塔への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用が記述できるとする**レゴ・タイヒミュラー**の予想が提唱した。これは Moore, Seibert の物理学分野の論文 [22, 5] の中で解決したとされ、予想は代わりに $\hat{\Pi}_{0,4}$, $\hat{\Pi}_{0,5}$, $\hat{\Pi}_{1,1}$ を構成単位とするものに置き換えられている。

日本数学会 2025 年度秋季総合分科会 (2025 年 9 月 16 日, 名古屋大学) 特別講演予稿

「日本数学会 2025 年度年会の予稿と同一」

* 八戸工業大学, 工学部工学科, 〒031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1

e-mail: s-kumagai@hi-tech.ac.jp / shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp

web: https://researchmap.jp/Shun_Kumagai

1979 年の Belyi [2] の定理は $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の対象に $\hat{\mathbb{C}}^* = M_{0,4}$ の被覆としての特徴づけを与え、その基本群 $\pi_1(M_{0,4}) = \Pi_{0,4} \cong F_2$ に関する組み合わせ的对象である **デッサン** を用いることで $\hat{\Pi}_{0,4}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用における忠実性や不変量といった種々の観察 [18] をもたらした. 1991 年, Drinfel'd [6] は $\hat{\Pi}_{0,n}$ の組紐群を用いた表示におけるタイヒミュラー塔の射の可換性に関わるものとしてグロタンディーク・タイヒミュラー群 $\widehat{GT}$ を定義し、伴って Belyi の定理の帰結として $G_{\mathbb{Q}}$ を埋め込む $\text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ -部分群に対し、成り立つ関係式を示した. この結果は同時期に Ihara [16] によって組紐群の対称性の式として改めて示されており, Drinfel'd, Ihara の $\widehat{GT}$ -relation とよばれる.

2005 年に Möller [21] によって示された新たな $\widehat{GT}$ -relation は、モジュライ空間 $M_{2,0}$ に埋め込まれて $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたモデルを作る曲面族を用いて得られたものである. その構成は、一つは曲面上の正則二次微分のアフィン変形が定める擬等角変形の族がなすタイヒミュラー空間の正則等長な円盤埋め込みの像である、タイヒミュラー曲線としてのものである. これによって曲面族の軌道体としての構造は、正則二次微分の自己アフィン対称性を表す Veech 群 [32] のフックス群としてのふるまいで特徴づけられる. もう一つは次数、モノドロミー群、分岐軌道の情報を共有する分岐被覆の族であるフルヴィッツ空間 [28, 33] として代数的構造をもつものである. 折り紙のこれら二つの側面を背景とした議論が $G_{\mathbb{Q}}$ に対する新たなアプローチをもたらした. その組合せ的特徴づけから種々の関連対象の可視化を行いやすい一方で、研究上の動機づけや位置づけを求めると幅広い分野にわたる難解さを伴う折り紙について、一連の話題を構成する事項をまとめる.

2. タイヒミュラー空間、平坦曲面

本節ではモジュライ空間へのフックス群モデルの埋め込みとしてのタイヒミュラー曲線と、その構造を表す Veech 群について説明する. ここでは解析的有限型 $((g, n)$ 型) のリーマン面を扱い、とくに双曲型 $(2g - 2 + n < 0)$ のものを考えるものとする.

定義 1 リーマン面の間の向きを保つ同相写像 $f : R \rightarrow R_1$ を R を基点とする **標識付きリーマン面** という. 標識付きリーマン面 $f_1 : R \rightarrow R_1$, $f_2 : R \rightarrow R_2$ が **タイヒミュラー同値** $f_1 \sim_T f_2$ とは, $f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ がある双正則写像 $h : R_1 \rightarrow R_2$ にホモトピー同値であることをいう.

$$\begin{array}{ccc} & f_1 \nearrow & R_1 \\ R & \circ & \downarrow f_2 \circ f_1^{-1} \sim \exists h: \text{双正則} \\ & f_2 \searrow & R_2 \end{array}$$

双正則写像 $h : R \rightarrow R'$ による基点の取りかえは R, R' を基点とするタイヒミュラー同値類の間の一対一対応を与えている. 以下では基点 R を一つ固定するものとし,

$$T(R) := \{f : R \rightarrow R_1 : \text{標識付きリーマン面}\} / \sim_T, \quad (4)$$

を (g, n) 型の **タイヒミュラー空間** という. これについて以下のことが知られている [23, 10].

- $T(R)$ は単連結な複素 $(3g - 3 + n)$ -次元多様体の構造をもつ (Ahlfors-Bers).
- 写像類群 $\Pi(R) = \{\gamma : R \rightarrow R : \text{向きを保つ同相写像}\} / \text{ホモトピー}$ の作用

$$[\gamma]^* : [f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}], \quad [\gamma] \in \Pi(R), [f] \in T(R), \quad (5)$$

がなす群は $T(R)$ の正則自己同型群に一致する (Royden).

- 写像類群のタイヒミュラー空間への作用はいたるところ有限位数であり (Hurwitz), **モジュライ空間** $M(R) = \{(g, n) \text{ 型リーマン面}\} / \text{双正則}$ は $T(R)/\Pi(R)$ で表される複素 $(3g - 3 + n)$ -次元軌道体の構造をもつ.
- モジュライ空間 $M(R)$ は, $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0, |z| < 1, |w| < 1\}$ で局所的に自明化される **ノード** を許したリーマン面の双正則同値類を境界点として付加することでコンパクト化される射影多様体の構造をもつ (Deligne–Mumford, Bers[3]).

定義 2 ([10]) 平面上の**半並進**の群 $\text{HTrans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto \pm z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするアトラスを備えた曲面を**平坦曲面**という.

リーマン面 R とその上の正則二次微分 $\phi = \phi(z)dz^2$ に対し, 各 $p_0 \in R^* := R \setminus \text{Zero}(\phi)$ の座標近傍 (U, z) で **ϕ -座標**

$$\pm \zeta_\phi^{p_0}(p) := \pm \int_{p_0}^p \sqrt{\phi(z)} dz, \quad (6)$$

が $\sqrt{\phi(z)}$ の局所的な二つの分岐ごとに定義される. 座標近傍を共有する二点 p_0, p_1 に対し, その周りでの $\sqrt{\phi(z)}$ の分岐は高々符号を除いて一意であるから

$$\zeta_\phi^{p_0}(p) \pm \zeta_\phi^{p_1}(p) = \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\phi(z)} dz = \text{const}(p), \quad (7)$$

が成り立つ. このように ϕ -座標がなす R^* のアトラスの座標変換は半並進で, これをもって平坦曲面 (R, ϕ) という.

ユークリッド計量を ϕ -座標で引き戻して得られる (R^*, ϕ) 上の平坦計量を考える. 以下では面積有限, すなわち $\|\phi\| := \int_R |\phi(z)| dx dy < \infty$ を仮定するものとする, ϕ -座標は計量完備化 $\bar{R}$ における特異点集合 $p \in \text{Sing}(R, \phi) := \text{Zero}(\phi) \cup \partial R$ の各点周りで

$$\zeta_\phi \mapsto \frac{2}{k+2} \zeta_\phi^{\frac{k+2}{2}}, \quad k = \text{ord}_p(\phi) \geq -1, \quad (8)$$

の形になるよう一意に拡張される. とくに, 次数 k の特異点であることは角度 $(k+2)\pi$ の錐点であることに対応する.

定義 3 平坦曲面の間の向きを保つ同相写像 $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ がいたるところ局所的に平面アフィン写像, すなわちある $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ に対し

$$\zeta_\psi \circ F \circ \zeta_\phi^{-1}(\xi + \sqrt{-1}\eta) = (a\xi + c\eta + e) + \sqrt{-1}(b\xi + d\eta + f), \quad \forall \xi + \sqrt{-1}\eta \in \text{Im}(\zeta_\phi), \quad (9)$$

の形であるとき**アフィン変形**という. これに対し微分 $D_F := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ を返す対応は $\text{HTrans}(\mathbb{C})$ -不変なものとして定義できて, $\|\psi\| = |D_F| \|\phi\|$ をみたす. 自明な微

分 $D_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ をもつアフィン変形を**半並進**とよぶ. ここで半並進同値の意味で $(R, \phi) \cong (S, \psi)$ であるとき, F を (R, ϕ) の**アフィン写像**とよび, これに対し $D_F \in PSL_2(\mathbb{R})$ が成り立つ.

定理 4 (Teichmüller [1]) 任意の $[f : R \rightarrow S] \in T(R)$ に対しある $0 < k < 1$, R 上の正則二次微分 ϕ , S 上の正則二次微分 ψ , 代表元 $F = F_{[f]} \in [f]$ が存在して次が成り立つ.

- (1) $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ はアフィン変形 $\zeta_\psi \circ F \circ \zeta_\phi^{-1}(z) = \frac{z + k\bar{z}}{1 - k}$ である.
- (2) $K([f]) := \inf_{h \in [f]: \text{弱微分可能}} \frac{1 + \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty}{1 - \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty} = \frac{1 + k}{1 - k}$ の下限は $h = F$ で達成される.

さらに, (2) をみたすような F は半並進の合成を除き一意である.

各 $[f_1], [f_2] \in T(R)$ に対して $d_T([f_1], [f_2]) := \frac{1}{2} \log K([f_2 \circ f_1^{-1}])$ とおくと $T(R)$ 上の完備距離 (**タイヒミュラー距離**) を定める. 定理 4 より, R 上の正則二次微分 ϕ を固定するごとに, 次の写像 $\hat{\iota}_\phi$ が双曲距離とタイヒミュラー距離に関する等長埋め込みを定める.

$$\hat{\iota}_\phi : \mathbb{H} \rightarrow T(R) : t \mapsto [f_t] \text{ s.t. } f_t^* \phi = \operatorname{Re}(\phi) + t \operatorname{Im}(\phi). \quad (10)$$

補題 5 ([8]) 写像類 $[\gamma] \in \Pi(R)$ に対し, $\gamma^*(\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})) \cap \hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \neq \emptyset$ であるためには $F_{[\gamma]}$ が (R, ϕ) のアフィン写像であることが必要かつ十分である. さらに, このとき $\gamma^*(\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})) = \hat{\iota}_\phi(\mathbb{H})$ であってアフィン写像 $F_{[\gamma]}$ は次式で $\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \subset T(R)$ に作用する.

$$F_{[\gamma]}^* \hat{\iota}_\phi(t) = \hat{\iota}_\phi\left(\frac{-at + b}{ct - d}\right), \quad D_{F_{[\gamma]}} =: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{H}. \quad (11)$$

補題 5 より, 平坦曲面 (R, ϕ) が定める円盤埋め込み $\hat{\iota}_\phi(\mathbb{H}) \subset T(R)$ のモジュライ空間への射影は (R, ϕ) のアフィン写像の作用, すなわち (R, ϕ) の **Veech 群**

$$\Gamma(R, \phi) := \{D_F \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid F : (R, \phi) \text{ 上のアフィン写像}\}, \quad (12)$$

のメビウス変換作用が与えるフックス群モデル $\mathbb{H}/\Gamma(R, \phi)$ の鏡像に同一視される. ここで, 平坦曲面 (R, ϕ) の Veech 群 $\Gamma(R, \phi) < PSL(2, \mathbb{R})$ が双曲面積有限のとき, 代数曲線の埋め込み $\iota_\phi : \mathbb{H}/\Gamma(R, \phi) \hookrightarrow M(R)$ が定まる. これを**タイヒミュラー曲線**という.

注意 6 平坦曲面 (R, ϕ) に対し, $\phi = \omega^2$ をみたす R 上のアーベル微分 ω が存在するとき, これを**並進曲面** (R, ω) という. このとき ω -座標系が $\operatorname{Trans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするサブアトラスを定め, Veech 群は $SL(2, \mathbb{Z})$ の元として定義できる. 一般に平坦曲面 (R, ϕ) に対し, 局所的に定義されたアーベル微分 $\omega = \sqrt{\phi}$ の解析接続が作る**標準二重被覆** $(\tilde{R}, \omega^2) \rightarrow (R, \phi)$ が並進曲面の構造をもつ.

Veech [32] は多角形ビリヤード台上の折れ線軌道を調べる過程で平坦曲面 (R, ϕ) のモデルを用いて次の二分法を示し, タイヒミュラー曲線上の測地線流の対称性を表すものとして群 $\Gamma(R, \phi)$ を導入した.

定理 7 (Veech の二分法 [32]) 平坦曲面 (R, ϕ) 上と各 $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ に対し, θ 方向の測地線流 $c_\theta(q, t) : (R, \phi) \times \mathbb{R} \rightarrow (R, \phi)$ は次のいずれか一方をみたす.

- (1) $c_\theta(q, \cdot)$ は任意の $q \in R$ に対し周期的である.
- (2) $c_\theta(q, \cdot)$ は任意の $q \in R$ に対し周期を持たず, その軌道は (R, ϕ) 上一様に分布する.

各 $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ は定理 7 (1) の意味で周期的であるならば, その**タイヒミュラー測地線流**

$$g_\theta : (\hat{l}_\phi(\mathbb{H}), d_T) \times \mathbb{R} \rightarrow (\hat{l}_\phi(\mathbb{H}), d_T) :$$

$$g_\theta(\hat{l}_\phi(t), s) = \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \right)^* \hat{l}_\phi(t), \quad (13)$$

の $t \rightarrow +\infty$ の極限は θ 方向の円柱分解の各成分を縮約することで得られるノード付きリーマン面の構造で与えられる [14]. とくに (R, ϕ) の周期的方向に対する Veech 群 $\Gamma(R, \phi)$ の作用において, 各軌道が $\partial C(R, \phi) \subset \partial M(R)$ の各点と一対一に対応する.

3. デッサン, $G_{\mathbb{Q}}$, $\widehat{GT}$

本節では Grothendieck のデッサン, ならびにこれを用いた $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の議論について概要を述べる.

定理 8 (Belyĭ, 1979 [2]) リーマン面 R が $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された代数曲線のモデルをもつためには, 高々三点 $\{0, 1, \infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ を分岐値とする有理型関数 $\beta : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が存在することが必要かつ十分である.

上記の定理における有理型関数 β を **Belyĭ関数**あるいは**Belyĭ被覆**, これを許容するリーマン面 R (並びにその正則関数体における射影曲線のモデル) を **Belyĭ曲面 (曲線)**, これらの対 (R, β) を **Belyĭ対**という. 分岐被覆の一般論により, 以下の一連の対応物を備えた対象としてデッサンが定義される.

補題 9 (Grothendieck のデッサン [18]) 自然数 d に対し, 下記のそれぞれの同値類の間に一対一対応がある:

- (1) 次数 d の Belyĭ対 (R, β) ; 分岐軌道 $\{0, 1, \infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ を固定する被覆同値の類,
- (2) 二部グラフの位相的曲面への充填埋め込み (任意の連結補成分が位相的に円盤のもの) $G = (V_x \sqcup V_y, E) \hookrightarrow R$ で辺の数が $\#E = d$ なるもの; 二部グラフの同値類,
- (3) 推移的な並べ替え群を生成する並べ替え $m_x, m_y \in S_d$ の対; S_d -共役類,
- (4) 自由群 F_2 の位数 d の部分群 $H < F_2$; F_2 -共役類.

上記の各々を対応に沿って並立した対象として**デッサン**を考える. これを一つ取ったとき, 主として以下の役割で代表される:

- (1) 固定した三角群への同型 $\psi : F_2 \xrightarrow{\cong} \Delta(\infty, \infty, \infty)$ に対し, $\Gamma = \psi(H) < \Delta(\infty, \infty, \infty)$ が定める被覆 $\beta^* : R^* = \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}/\Delta(\infty, \infty, \infty) \cong \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} =: \hat{\mathbb{C}}^*$ によって複素構造を持ち上げて得られる対 (R^*, β^*) の完備化,

- (2) 二部グラフの充填埋め込み $(\{0\} \sqcup \{1\}, \{(0, 1)\}) \hookrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の β による持ち上げ,
- (3) $0, 1 \in \hat{\mathbb{C}}$ 周りの単純閉曲線 $c_0, c_1 \in \pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*)$ の β に関するモノドロミーが定める並び替え $m_x := m_\beta(c_x), m_y := m_\beta(c_y) \in S_d$ の対, あるいは左コセット集合 $H \backslash F_2$ への $x, y \in F_2$ の右作用が定める並び替え $m_x, m_y \in \text{Sym}(H \backslash F_2)$ の対,
- (4) 非分岐被覆 $\beta|_{R^*}, R^* := \beta^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)$ が誘導する準同型による, 基本群 $\pi_1(R^*)$ の $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*) \cong F_2$ への埋め込みの像 $H < F_2$, あるいは準同型写像 $m : F_2 \rightarrow S_d : (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ に対し $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$.

いま, 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ は $\bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$ の各多項式の係数への作用 $P \mapsto P^\sigma$ と座標への作用を通して Belyi 対に作用する. これは素イデアル $\mathfrak{p} \subset \bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$ で表される正則関数の芽の局所環 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} := (\bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N] \setminus \mathfrak{p})^{-1} \bar{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_N]$, および正則関数体 $K_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ に対しても係数への作用として引き継がれる. また, この作用は Belyi 関数が $0, 1, \infty$ に値を取ることにその重複度を保つ.

定理 10 (Jones [18]) デッサンにおける以下の量は $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の不変量である:

- Belyi 被覆 β の分岐指数のリスト $(m_1^0, m_2^0 \dots \mid m_1^1, m_2^1 \dots \mid m_1^\infty, m_2^\infty, \dots)$,
- Belyi 被覆の次数 d , 一様性, 正規性,
- Belyi 曲面の種数, 自己同型群,
- モノドロミー群 $m_\beta(F_2) = \langle m_x, m_y \rangle < S_d$ の同型類.

例 A ([9]) モジュラス $t \in \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ のトーラス $E_t = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus t\mathbb{Z})$ 上の楕円関数体 $\mathbb{C}(E_t)$ は微分方程式 $(\wp'_t)^2 = 4\wp_t^3 - g_2(t)\wp_t - g_3(t)$ をみたすワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp_t, \wp'_t$ の有理関数全体の体として表される. ここで g_2, g_3 はモジュラー形式

$$g_2(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{60}{(mt+n)^4}, \quad g_3(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{140}{(mt+n)^6}, \quad (14)$$

である. 一方で $\Delta(a, b) = a^3 - 27b^2 \neq 0$ をみたす任意の係数 $a, b \in \mathbb{C}$ に対し, 楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - ax - b$ は, モジュラー形式の性質に基づき次式で一意的に定まる $t \in \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}_+$ を用いて $\lambda^2 \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus t\mathbb{Z})$ として表される.

$$j(t) := \frac{1728g_2(t)^3}{g_2(t)^3 - 27g_3(t)^2} = \frac{1728a^3}{a^3 - 27b^2}, \quad \lambda^2 = \begin{cases} a/b & b \neq 0, \\ 1 & b = 0. \end{cases} \quad (15)$$

とくにモジュライ空間 $M_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ 全体をわたるとき, その各点は $\Delta(a, b) = a^3 - 27b^2 \neq 0$ なる任意の二元で生成される拡大体 $\mathbb{Q}(a, b) > \mathbb{Q}$ を定義体とする代数曲線をわたる代表元をもつ.

例 B 二つの楕円曲線 $C_\pm : Y^2 = X(X-1)(X \pm \sqrt{2})$ とそれぞれの上の Belyi 関数 $\beta(X, Y) = 4X^{-2}(1-X^{-2})$ の対は $(\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}) \in G_{\mathbb{Q}}$ で互いに写り合う. 図1に示すこれらのデッサンは分岐指数のリスト $(1, 1, 2, 4 \mid 2, 2, 4 \mid 8)$ をはじめ補題 10 の不変量を共有する.

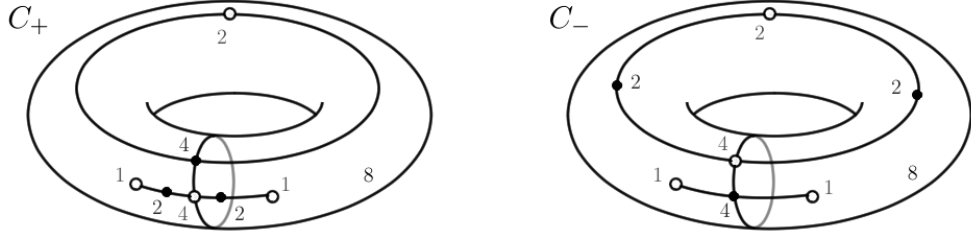


図 1: $(C_{\pm}, \beta)$ の定めるデッサン：数字は分岐指数を表す.

定義 11 ([29]) 群 G に対し, 指数有限の正規部分群の集合を $\mathcal{N}$ とかくものとし,

$$M(G_{\mathcal{N}}) := \{\phi_{NN'} : G/N' \rightarrow G/N : \text{射影} \mid N, N' \in \mathcal{N}, N > N'\}, \quad (16)$$

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G_N := \{(g_N N) \in \prod_{N \in \mathcal{N}} G/N \mid g_N N = \phi_{NN'}(g_{N'}) N, \forall \phi_{NN'} \in M(G_{\mathcal{N}})\}, \quad (17)$$

で定義される射影系の極限 $\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G_N$ を G の射有限完備化という. 例えば補題 9 を念頭におくと, 射有限群 $\hat{F}_2$ は正規 Belyi 被覆が定めるデッサンのモノドロミー群の無限直積の中で, 各々の被覆関係に両立するものを扱うものと考えられる.

Ihara [16, 17] に示された $G_{\mathbb{Q}}$ の $\hat{F}_2$ -自己同型群への埋め込み先の概要を述べる. まず, $\hat{\mathbb{C}}$ の向付き基点として $\vec{u} = 0\vec{1}$ を考えることで $(0, 1)$ を跨ぐ閉曲線がモノドロミーによって作用する設定を考える. このとき $\pi_1(\hat{\mathbb{C}}^*, \vec{u}) \cong F_2$ である. Belyi 対 (R, β) とその重複度 m の臨界点 $v_0 \in \beta^{-1}(0)$ に対し, その周りでの局所的ピュイズー級数表示 $\varphi\beta(z) = \sum a_n z^{\frac{n}{m}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ を与える埋め込み φ は m 通り存在する. いま, 0 周りのモノドロミー $x \in F_2$ は $z^{\frac{1}{m}}$ の分岐を 1 の m 乗根 $\zeta_m = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m})$ をかけて置き換え, とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用は $\sigma \cdot x = x^{\chi(\sigma)}$ (ここで $\chi_m(\sigma) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\chi_m(\sigma)}$ で定義される円分指標) で表される. 概観を次の図式で示す.

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xhookrightarrow{\varphi} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{x} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xleftarrow{x(\varphi)} & \bar{\mathbb{Q}}(z) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \beta & \mapsto & \sum a_n z^{\frac{n}{m}} & \mapsto & \sum a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}} & \longleftarrow & \beta \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\ \beta^\sigma & \mapsto & \sum \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \mapsto & \sum \sigma(a_n) \sigma(\zeta_m)^n z^{\frac{n}{m}} & \longleftarrow & \beta^\sigma \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xhookrightarrow{\varphi^\sigma} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{\sigma \cdot x} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xleftarrow{\sigma \cdot x(\varphi^\sigma)} & \bar{\mathbb{Q}}(z) \end{array}$$

ここで 0 周りの局所的ピュイズー級数表示 $\varphi\beta(z) = \sum a_n z^{\frac{n}{m}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ と β の重複度 l の臨界点 $v_1 \in \beta^{-1}(1)$ に対し, 基点の取り替え $p : \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \mapsto \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\}$ の像 $p\varphi\beta(z) = \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}} \in \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\}$ は次の関係にある.

$$\sum a_n z^{\frac{n}{m}} = \sum a_n \left(1 - \frac{1-z}{m} + \frac{(1-z)^2}{2m(m-1)} + \cdots \right)^n = \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}}. \quad (18)$$

いま, p は 1 周りのモノドロミー y と非可換である. $p^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ p \circ \sigma : \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ が定める非自明な対応 $\sum a_n z^{\frac{n}{m}} \mapsto \sum a'_n z^{\frac{n}{m}}$ によって埋め込み $\varphi : \bar{\mathbb{Q}}(z) \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\}$ を置

き換える $f_\sigma \in F_2$ の共役が生じ、ここで f_σ は交換子部分群 $F_2' < F_2$ に属する．とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用は $\sigma \cdot y = f_\sigma y^{\chi(\sigma)} f_\sigma^{-1}$ の形で表される．概観を次の図式で示す．

$$\begin{array}{ccccc}
& & \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xrightarrow{y} & \bar{\mathbb{Q}}(z) \\
& \swarrow \varphi & & & \searrow y(\varphi) \\
\bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} & & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} \xleftarrow{p} \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \\
\downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\
\sum a_n z^{\frac{n}{m}} & \longrightarrow & \sum b_n (1-z)^{\frac{n}{l}} & \longrightarrow & \sum b_n \zeta_l^n (1-z)^{\frac{n}{l}} \longleftarrow \sum a'_n z^{\frac{n}{m}} \\
\downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
\sum \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \longrightarrow & \sum \sigma(b_n) z^{\frac{n}{l}} & \longrightarrow & \sum \sigma(b_n) \sigma(\zeta_l)^n z^{\frac{n}{l}} \longleftarrow \sum \sigma(a'_n) z^{\frac{n}{m}} \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
\bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} & \xrightarrow{p} & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} & & \bar{\mathbb{Q}}\{\{1-z\}\} \xleftarrow{p} \bar{\mathbb{Q}}\{\{z\}\} \\
& \swarrow \varphi^\sigma & & & \searrow \sigma \cdot y(\varphi^\sigma) \\
& & \bar{\mathbb{Q}}(z) & \xrightarrow{\sigma \cdot y} & \bar{\mathbb{Q}}(z)
\end{array}$$

定義 12 自然数 n に対し、次のようにおく．

$$B_n := \left\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i & |i-j| \geq 2 \\ \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right. \right\rangle, \quad (19)$$

$$M(0, n) := B_n / \langle \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \cdots \tau_{n-1}, (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1})^2 \rangle, \quad (20)$$

$$x_{ij} := \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i^2 \tau_{i+1}^{-1} \cdots \tau_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1. \quad (21)$$

組紐群 B_n が定める対称群 S_n への全射準同型に関して $K(0, n) := \text{Ker}(M(0, n) \rightarrow S_n)$ とおくとき、これは $\hat{\Pi}_{0,n}$ と同型である [31]．

定理 13 ($\widehat{GT}$ -relation, Drinfel'd [6], Ihara [16]) 各群 G に対して $f = f(x, y) \in \hat{F}_2$ を写像 $f(\cdot, \cdot) : G \times G \rightarrow G$ と同一視するものとする．このとき、以下の関係式をみたす $(\lambda, f) \in (2\mathbb{Z} + 1) \times \hat{F}_2'$ が定める自己同型写像 $(\lambda, f) : (x, y) \mapsto (x^\lambda, f^{-1} y^\lambda f)$ がなす群 $\widehat{GT}$ を **グロタンディーク・タイヒミュラー群** という．

$$f(x, y) f(y, x) = 1, \quad (22)$$

$$f(z, x) z^{\frac{\lambda-1}{2}} f(y, x) y^{\frac{\lambda-1}{2}} f(x, y) x^{\frac{\lambda-1}{2}} = 1, \quad (23)$$

$$f(x_{12}, x_{23}) f(x_{34}, x_{45}) f(x_{51}, x_{12}) f(x_{23}, x_{34}) f(x_{45}, x_{51}) = 1. \quad (24)$$

このとき、 $G_{\mathbb{Q}}$ の $\hat{F}_2$ への作用は $\widehat{GT} < \text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ の部分群をなす．

ここで $G_{\mathbb{Q}} > \widehat{GT}$ であるか、とくに両者が一致するか否かは未解決である．Möller の結果 [21] は $G_{\mathbb{Q}} < G < \widehat{GT}$ となる群 G がみたす関係式を示したものに当たる．

4. 折り紙, Möller の結果

本節では折り紙の定義とそのタイヒミュラー曲線の表示を計算する具体的な方法、そしてこれらを用いて $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の新たな考察を行った Möller の結果について述べる．折り紙はデッサンと同一の組み合わせ的対象として定義され、一方で Belyi 曲面の代わりに以下の対象を定める点で異なるものである．

補題 14 ([15]) 自然数 d に対し, 下記のそれぞれの同値類の間に一対一対応がある:

- (1) トーラス E 上の一点で分岐する被覆 $p: R \rightarrow E$; 分岐軌道を保つ被覆同値の類,
- (2) 推移的な並べ替え群を生成する並べ替え $\gamma_h, \gamma_v \in S_d$ の対; S_d -共役類,
- (3) 自由群 F_2 の位数 d の部分群 $H < F_2$; F_2 -共役類,
- (4) 平面上の単位正方形セルの d 枚のコピーを辺で貼り合わせて得られる並進曲面; 並進同値類.

上記の各々を対応に沿って並立したものを考えるとき, 主に以下の役割で代表される.

- (1) $H < F_2 \cong \pi_1(E^*)$, $E^* := E \setminus \{[0]\}$ が定める非分岐被覆 $R^* \rightarrow E^*$ の完備化,
- (2) 水平, 鉛直二方向の単純閉曲線の被覆 p によるモノドロミー $m_x := m_p(z \mapsto z+1)$, $m_y := m_p(z \mapsto z + \sqrt{-1}) \in S_d$. あるいは左コセット集合 $H \backslash F_2$ への $x, y \in F_2$ の右作用が定める並べ替え $m_x, m_y \in \text{Sym}(H \backslash F_2)$,
- (3) 非分岐被覆 $p|_{R^*}$, $R^* := p^{-1}(E^*)$ が誘導する準同型による, 基本群 $\pi_1(R^*)$ の $\pi_1(E^*) \cong F_2$ への埋め込みの像 $H < F_2$, あるいは準同型写像 $m: F_2 \rightarrow S_d: (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ に対して $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$,
- (4) 単位正方形トーラス $E_{\sqrt{-1}} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ 上のアーベル微分 dz の被覆 p による R への持ち上げが定める並進曲面 $(R, (p^*dz)^2)$.

折り紙 $\mathcal{O}$ は並進曲面 $(R, \phi = \omega^2)$ として第 2 節に述べたようにタイヒミュラー空間への円盤埋め込みを定め, 対する写像類群の作用は $\mathcal{O}$ のアフィン写像によって与えられる. ここで ω -座標を普遍被覆面 $\mathbb{H} \rightarrow R^* \rightarrow E^*$ で持ち上げて解析接続した写像 $\text{dev}_\omega: (\mathbb{H}, p^*dz) \rightarrow \mathbb{C}$ (Thurston の **developing map** [12]) を通して, 折り紙上のアフィン写像は格子の補集合 $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ 上のアフィン写像への射影をもつ. とくに折り紙の Veech 群は $SL(2, \mathbb{Z})$ の有限指数部分群であることがしたが, とくに Belyi 被覆 $\beta_{\mathcal{O}}: \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ を得る. よって定理 8 の帰結として折り紙は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたタイヒミュラー曲線を与える. そのデッサンの例を図 2 に示す.

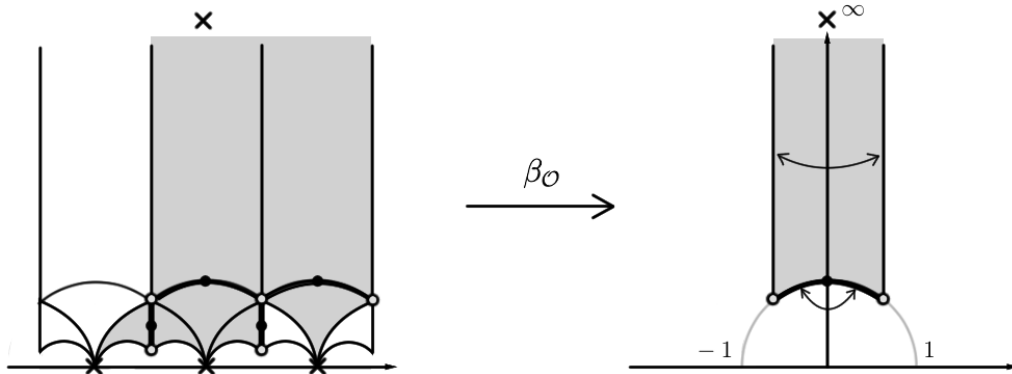


図 2: 折り紙のタイヒミュラー曲線のデッサンの例. 白, 黒点はそれぞれ補題 9 の意味で $0, 1 \in \hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ に対応する分岐点を表す.

命題 15 ([20]) 折り紙 $\mathcal{O}$ はその同値類ごとに以下の対象のそれぞれを一意に定める.

- (1) タイヒミューラー空間への正則等長な埋め込み $\hat{\iota}_{\mathcal{O}} : \mathbb{H} \hookrightarrow T(\mathcal{O})$,
- (2) $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された代数曲線 $\mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$,
- (3) 代数曲線のモジュライ空間への埋め込み $\iota_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \hookrightarrow M(\mathcal{O})$.

命題 16 (Schmithüsen [30]) $u : \mathbb{H} \rightarrow E^*$ を普遍被覆とする. このときある部分群 $\text{Aut}^+(F_2) < \text{Aut}(F_2)$ に対し, 水平方向に完全系列をなす次の可換図式がある.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \text{Gal}(\mathbb{H}/E^*) & \hookrightarrow & \text{Aff}^+(\mathbb{H}, u^*dz) & \xrightarrow{D} & SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow * \cong & \nearrow \psi & \downarrow \cong \\
 1 & \longrightarrow & \text{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \text{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \text{Out}^+(F_2) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

ここで $\text{Inn}(F_2) = \{w^* : z \mapsto wz w^{-1} \mid w \in F_2\}$, $\text{Out}^+(F_2) = \text{Aut}^+(F_2)/\text{Inn}(F_2)$ である. さらに, この図式のもとで折り紙 $H < F_2$ の Veech 群 $\Gamma(H) < SL(2, \mathbb{Z})$ は固定部分群 $\text{Stab}(H) < \text{Out}^+(F_2)$ に同型である.

折り紙の普遍 Veech 群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の一つの生成系 $\left\{ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を固定する. これに対し命題 16 のもと $\psi(\gamma_T) = T$, $\psi(\gamma_U) = U$ をみたす意味で代表する, 次の自己同型写像の組を用いることができる.

$$\gamma_T := \begin{pmatrix} x \mapsto x \\ y \mapsto xy \end{pmatrix}, \quad \gamma_U := \begin{pmatrix} x \mapsto y \\ y \mapsto x^{-1} \end{pmatrix} \in \text{Aut}^+(F_2). \quad (25)$$

系 17 折り紙 $\mathcal{O} : (x, y) \in S_d^2$, $H < F_2$ に対し $\text{Gen}_{F_2} H$, $\text{Rep}_{F_2} H \subset F_2$ を極小な生成系と左コセット代表系とする. このとき $A = A(T, U) \in SL(2, \mathbb{Z})$ が $\Gamma(\mathcal{O})$ に属するためには, ある $\rho \in \text{Rep}_{F_2} H$ があって任意の $g \in \text{Gen}_{F_2} H$ に対し $m(\rho^* A(\gamma_T, \gamma_U)g)(1) = 1$ をみたすことが必要かつ十分である.

例 C 次数 4 の折り紙 $\mathcal{S}_2 : m_x = (1\ 2)(3\ 4)$, $m_y = (2\ 3) \in S_4$ に対し, その基本群は $H = m^{-1}(\text{Stab}(1)) < F_2$ で与えられる. これに従い (x, y) の辞書式順序で H の元の枝探索を行うことで, $\text{Rep}_{F_2} H$, $\text{Gen}_{F_2} H$ の一つとして次が得られる.

$$\text{Rep}_{F_2} H = \{1, x, xy, xyx\}, \quad (26)$$

$$\text{Gen}_{F_2} H = \{y, x^2, xy^2x^{-1}, xyx^2y^{-1}x^{-1}, xyxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}\}. \quad (27)$$

系 17 の判定を $A(T, U) = T^2$ に対して行う例を示す. $\rho = xyx \in \text{Rep}_{F_2} H$ は任意の $g \in \text{Gen}_{F_2} H$, 例えば $g = y$ に対して

$$\rho^* A(\gamma_T, \gamma_U)g = (xyx)^*(\gamma_T \circ \gamma_U(y)) = xyx(x^2y)(xyx)^{-1}, \quad (28)$$

の $m : (x, y) \mapsto (m_x, m_y)$ による像が 1 を固定することを確認することができて, 結果として $T^2 \in \Gamma(\mathcal{S}_2)$ であることを得る. 同様の判定方法に基づき, (T, U) の辞書式順序

で $SL(2, \mathbb{Z})$ の元の枝探索を行うことで Veech 群の生成系, コセット代表系として次が得られる. 対応するタイヒミュラー曲線を図3に示す.

$$\text{Rep}_{SL(2, \mathbb{Z})} \Gamma(\mathcal{S}_2) = \{1, T, U, TU, UT, TUT\}, \quad (29)$$

$$\text{Gen}_{SL(2, \mathbb{Z})} \Gamma(\mathcal{S}_2) = \{T^2, UT^2U, UTUT^{-1}UT^{-1}, TUT^2UT^{-1}\}. \quad (30)$$

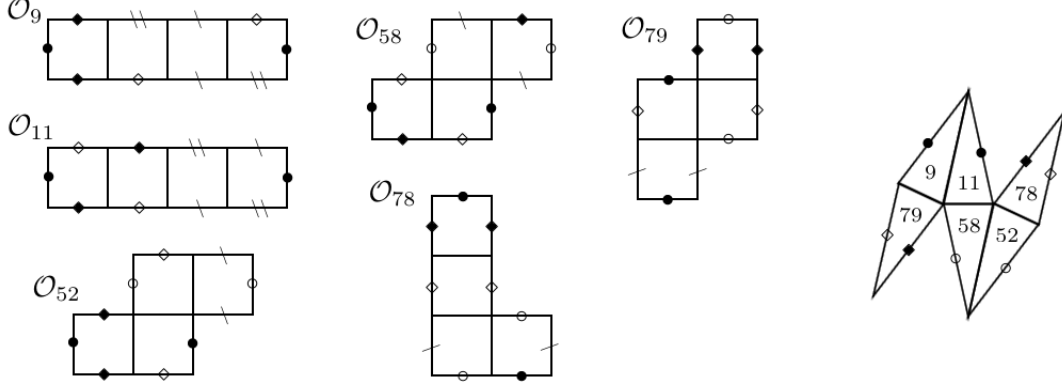


図 3: 折り紙 $\mathcal{S}_2$ のタイヒミュラー曲線 [19]. ここで $\mathcal{O}_{52} \cong \mathcal{S}_2$ であり, そのアフィン変形で与えられる各折り紙が代表する $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ のコピーを三角形で示した. 尖点は $\infty \in \overline{\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})}$ の逆像を表す. 各辺の記号は貼り合わせの対応を表す.

命題 18 (Möller [21]) 折り紙のタイヒミュラー曲線 $\iota_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \hookrightarrow M(\mathcal{O})$ は軌道体の間の射として, 自然な $G_{\mathbb{Q}}$ -作用が定義される対象である. とくに $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ とし, $\mathcal{O}$ を折り紙とすると $\mathcal{O}^{\sigma}$ は再び折り紙であって, $\iota_{\mathcal{O}^{\sigma}}(C(\mathcal{O})^{\sigma}) = \iota_{\mathcal{O}}(C(\mathcal{O}))$ が成り立つ.

Möller [21] の結果は命題 18 に基づき, 例 C の折り紙 $\mathcal{S}_2$ における $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の考察をもって $G_{\mathbb{Q}} < \text{Aut}^+(\hat{F}_2)$ のみならず新たな関係式を得たものである. 例 C の計算の結果として $\Gamma(\mathcal{S}_2)$ はモジュラー群 $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$ で指数 6 である. $\mathcal{S}_2$ は E_1, E の楕円対合と可換な超楕円対合をもち, 図 4 の被覆 $\mathcal{S}_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E$ は $P(X) := 4X(X-1)$ と $t \in \hat{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{H}/\Gamma(2)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : & \{Y^2 = (P(X) - 1)(P(X)^2 - (1 - t))\} \ni (X, Y) \\ \rightarrow E_1 : & \{Y^2 = (X^2 - 1)(X^2 - (1 - t))\} \ni (P(X), Y(2X - 1)) \\ \rightarrow E : & \{Y^2 = X(X - 1)(X - (1 - t))\} \ni (P(X)^2, Y(2X - 1)P(X)), \end{aligned}$$

と表される. $C(\mathcal{S}_2)$ の自己同型群は超楕円対合と $(X, Y) \mapsto (1 - X, Y)$ によって与えられ, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に同型である. 固定した $P_{\mathbb{C}}^1$ の向付き基点 $\vec{u} = 0\vec{1}$ に対して $\pi_1(C(\mathcal{S}_2), \vec{u}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes F_2$ と分割され, これに関して $\widehat{GT}$ が作用する.

各 x_{ij} を定義 12 における $\hat{\Pi}_{0,6}$ の生成元とし, 各 α_i を (27) 式で示した $\pi_1(\mathcal{S}_2)$ の i -番目の生成元における Dehn 捻りが表す $\Pi_{0,6}$ の元を表すものとする. ここで Birman-Hilden 表現による次の表示 [31] のもと, 続く定理が成り立つ.

$$\hat{\Pi}_{2,0} = \hat{B}_{0,6} / \langle \tau_5 \tau_4 \tau_3 \tau_2 \tau_1^2 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5, (\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4)^5 \rangle, \quad (31)$$

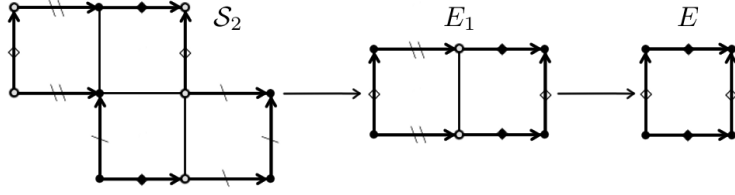


図 4: 折り紙の被覆の列 $S_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E$.

定理 19 (Möller [21]) 折り紙 S_2 の定めるタイヒミュラー曲線 $\iota_{S_2} : \mathbb{H}/\Gamma(S_2) \hookrightarrow M_{2,0}$ に対する $G_{\mathbb{Q}}$ -作用に両立する $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ の作用は $\hat{\Pi}_{2,0}$ 上で次の関係式をみたす：

$$\begin{aligned} & f(\alpha_3, (\alpha_1^2 \alpha_2)^4) f(\alpha_1^2, \alpha_2^2) f(\alpha_5^2, \alpha_4^2) \alpha_1^{-4\rho_2(\sigma)} \alpha_3^{-2\rho_2(\sigma)} \alpha_5^{-4\rho_2(\sigma)} f(\alpha_2 \alpha_4, \alpha_1^2 \alpha_3 \alpha_5^2) \\ &= x_{16}^{2\rho_2(\sigma)} (x_{46} x_{56})^{\rho_2(\sigma)} (x_{12} x_{13})^{\rho_2(\sigma)} (\alpha_2 \alpha_4)^{2\rho_2(\sigma)} (\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4)^{-2\rho_2(\sigma)}, \end{aligned} \quad (32)$$

ただし $\rho_2(\sigma)$ は $\sigma(\sqrt[n]{2}) = \zeta_n^{\rho_2(\sigma)} \sqrt[n]{2}$ で定義される Kummer コサイクル [25] を表す．関係式 (32) で定義される $\widehat{GT}$ の部分群は $G_{\mathbb{Q}}$ を包含する．

5. 付記

本節では上記の文脈に関連して，追加の議論と研究結果について述べる．

命題 18 で述べられたように，折り紙 $\mathcal{O}$ のタイヒミュラー曲線のデッサン $\beta_{\mathcal{O}}$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義される代数曲線のモジュラス $t \in \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$ が許容する各デッサンと $G_{\mathbb{Q}}$ -作用のもとで連動する関係にある． $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義された楕円曲線を与える t は例 A に見るように多様にあり，それぞれの上の Belyi 関数をもとに折り紙 $\iota_{\mathcal{O}}(t) \in M(\mathcal{O})$ 上の Belyi 関数を構成することができる．例えば $E_{\sqrt{-1}} : Y^2 = 4X^3 - X$ 上の Belyi 関数 $\beta_0(X, Y) := 4X^2$ は無限遠点で分岐する被覆を通じて図 5 に示すようなデッサンを与える．

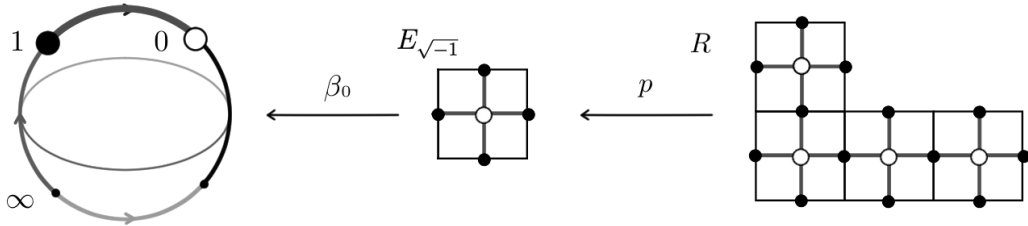


図 5: 折り紙の並進曲面モデル $\iota_{\mathcal{O}}(\sqrt{-1})$ が許容するデッサンの例．

系 20 折り紙における以下の量は $G_{\mathbb{Q}}$ の不変量である．

- Belyi 被覆 $\beta_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ が定めるデッサンの $G_{\mathbb{Q}}$ -不変量．
- モジュラス $t \in \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O})$ と $\iota_{\mathcal{O}}(t) \in M(\mathcal{O})$ のデッサンに関する (許容するかを含む) $G_{\mathbb{Q}}$ -不変量の組，
- 被覆 p の分岐指数のリスト $(m_1^{[0]}, m_2^{[0]}, \dots, m_n^{[0]})$ ，アーベル微分 $p^* dz$ の零点の位数のリスト，あるいは $[m_x, m_y] = m_x m_y m_x^{-1} m_y^{-1} \in S_d$ のサイクル長のリスト．

ここで折り紙のタイヒミュラー曲線として現れるデッサンの特徴づけ, ならびに具体的な構成方法を問う Veech 群の逆問題は本稿の文脈で. これは無限型の平坦曲面においては Przytycki-Schmithüsen-Valdez [27] によって解決されており, 有限型の設定特有の問題となっている.

定理 21 (Ellenberg, McReynolds [7], 2012) モジュラー群 $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$ の指数有限の任意の部分群であって $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ を含むものに対し, これを Veech 群として実現する折り紙が存在する.

さて, Grothendieck のレゴ・タイヒミュラーの予想において期待される $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の構成単位は射有限写像類群 $\hat{\Pi}_{0,4}, \hat{\Pi}_{1,1}, \hat{\Pi}_{0,5}$ であった. 折り紙は並進曲面の構造をもって $(1,1)$ 型の対象を扱うものであり, Möller の理論は楕円対合との関係から $(0,4)$ 型の対象への射の情報を控えて $G_{\mathbb{Q}}$ -作用を考察することで, これがみたす $(2,0)$ 型, $(0,6)$ 型における関係式を新たに得たものである. ここで $(0,4)$ 型の対象はデッサンが $\hat{\mathbb{C}}^* = M_{0,4}$ の被覆として扱っているものであるとともに, 定理 21 の Veech 群の逆問題における折り紙の構成にも現れる.

ここで $(0,4)$ 型の平坦曲面の構造は $(1,1)$ 型の並進曲面 $(E_{\sqrt{-1}}, dz)$ の楕円対合による商 $(E_{\sqrt{-1}}/\langle z \mapsto -z \rangle, dz^2)$ として自然に与えられる. その特異点集合 $\left\{ [0], [\frac{1}{2}], [\frac{\sqrt{-1}}{2}], [\frac{1+\sqrt{-1}}{2}] \right\}$ の上で分岐する被覆面は単位正方形セルを辺で貼り合わせて得られる平坦曲面である. これを **平坦折り紙** とよぶものとし, その Veech 群に関する結果を述べる.

補題 22 次数 d の折り紙 $(x, y) \in S_d^2$ と符号関数 $\varepsilon : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{\pm 1\}$ に対し,

$$\mathbf{x}(\pm i) = \pm x^{\pm 1}(i), \quad (33)$$

$$\mathbf{y}(\pm i) = \pm \varepsilon(i) y(i)^{\pm \varepsilon(i)} \varepsilon(y^{\pm \varepsilon(i)}), \quad (34)$$

が定める $2d$ 次の折り紙 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S_d^2$ は, 図 6 の折り紙の切り貼り操作が与える平坦折り紙の標準二重被覆面である. さらに, この構成は各 $\varepsilon(i) = -1$ をみたす i -番目の正方形セルにおける, 平坦折り紙上の測地的ドロネー三角形分割 [4] のフリップ操作を誘導する.

命題 23 平坦折り紙 $(x_1, y_1, \varepsilon_1), (x_2, y_2, \varepsilon_2) \in S_d^2 \times \{\pm 1\}^d$ が半並進同値であるためには, ある $\sigma \in \text{Sym}(\{\pm 1, \dots, \pm d\})$ があって次をみたすことが必要かつ十分である: $\delta := \text{sign}(\sigma) \in \{\pm 1\}^d$, $\bar{\sigma} := |\sigma(\cdot)| \in S_d$ とかくものとするとき, 任意の $i \in \{1, \dots, d\}$ に対し

- (1) $\delta(i) = \delta(x_1(i))$,
- (2) $x_2 \circ \bar{\sigma}(i) = \bar{\sigma} \circ x_1^{\delta(i)}$,
- (3) $\delta(\bar{\sigma}^{-1}(i)) \cdot \varepsilon_1(\bar{\sigma}^{-1}(i)) \cdot \varepsilon_2(i) = \delta(\bar{\sigma}^{-1}(y(i))) \cdot \varepsilon_1(\bar{\sigma}^{-1}(y(i))) \cdot \varepsilon_2(y(i))$,
- (4) $y_2(\bar{\sigma}(i)) = \bar{\sigma}(y_1^{\delta(i) \cdot \varepsilon_1(i) \cdot \varepsilon_2(\bar{\sigma}(i))}(i))$.

さらに, 補題 22 の対応 $o : (x, y, \varepsilon) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は平坦折り紙とその標準二重被覆として現れる折り紙の, 同値類の間の全単射を与える.

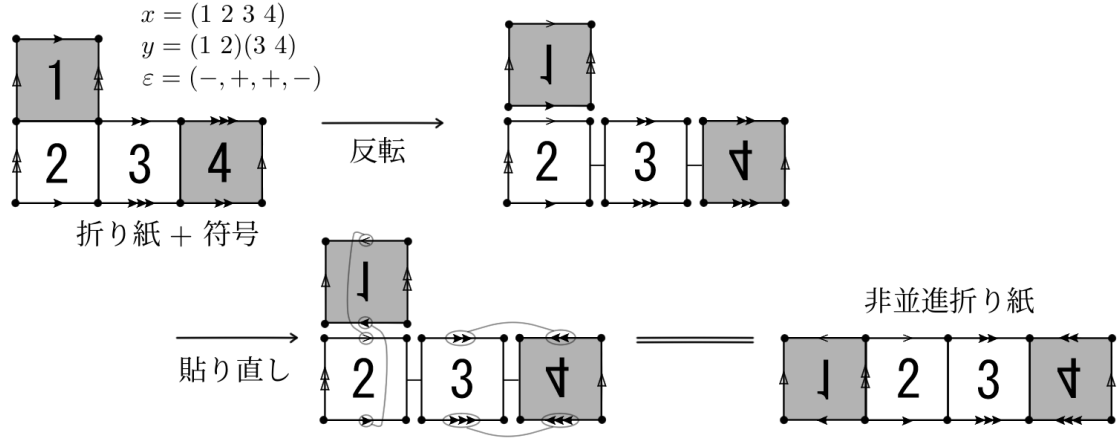


図 6: 折り紙の切り貼り操作: 折り紙の指定された正方形セルに対し, ω -座標に鏡映反転を施して適切に貼り直すことで並進曲面とならない平坦折り紙を得る.

定理 24 ([19]) ある $\sigma_T, \sigma_U \in S_{2d}$ が存在して次が成り立つ. $A = [T], [U] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ が平坦折り紙 (x, y, ε) の Veech 群に属するためには, 命題 23 の意味で $o^{-1} \sigma_A^* \gamma_A o(x, y, \varepsilon)$ が (x, y, ε) に同値な平坦折り紙であることが必要かつ十分である.

とくに平坦折り紙の Veech 群は折り紙のアフィン変形 (25) を局所的な $[T], [U] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ の作用を表すものとして扱うことができる. さらに [19] では平坦折り紙の同値類の分類とこれに作用する対称群としての $PSL(2, \mathbb{Z})$ の表現を行い, 枚数 7 まで, およそ 30000 の平坦折り紙のクラスにおける Veech 群の網羅的な計算結果が得られている.

参考文献

- [1] Ahlfors, L. V.: Lectures on Quasiconformal Mappings. *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (1966).
- [2] Belyĭ, G. V.: On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Izv. Akad. Nauk USSR* **43** (1979) 267–276; transl. *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 247–256.
- [3] Bers, L.: Deformations and moduli of Riemann Surfaces with nodes and signatures. *Math. Scand.*, **36** (1975), 12–16.
- [4] Bowman, J.: Teichmüller geodesics, Delaunay triangulations, and Veech groups. *Teichmüller Theory and Moduli Problems, Ramanujan Math. Society Lecture Notes Series*, Vol. 10 (2010), 113–129.
- [5] Degiovanni, P.: Moore and Seiberg equations, topological field theories and Galois theory. *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200** (1994), 359–368.
- [6] Drinfel’d, V. G.: On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Algebra i Analiz*, 2:4 (1990), 149–181; *Leningrad Math. J.*, 2:4 (1991), 829–860.
- [7] Ellenberg, J., McReynolds, D. B.: Arithmetic Veech sublattices of $SL(2, \mathbb{Z})$. *Duke Math. J.* **161**, no. 3 (2012), 415–429.

- [8] Earle, C. J., Gardiner, F. P.: Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), 1163–1190.
- [9] Freitag, E., Busam, R.: *Complex Analysis*, *Universitext*, Springer (2005).
- [10] Gardiner, F. P., Lakic, N.: *Quasiconformal Teichmüller Theory*, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* (2000).
- [11] Grothendieck, A.: Esquisse d’un Programme. (1984 manuscript) *Geometric Galois Actions*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242** (1997), 7–48.
- [12] Gutkin, E., Judge, C.: Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic. *Duke Math. J.* **103** (2000), 191–213..
- [13] Hatcher, A., Lochak, P., Schneps, L.: On the Teichmüller tower of mapping class groups, *J. Reine Angew. Math.*, **521** (2000), 1–24.
- [14] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **11** (2007), 293–349.
- [15] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: Dessins d’enfants and origami curves, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **13** (2009), 767–809.
- [16] Ihara, Y.: Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 99–120.
- [17] Ihara, Y.: On the embeddings of $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{GT}$. *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200** (1994), 289–306.
- [18] Jones, G. A., and Wolfart, J.: Dessin d’enfants on Riemann surfaces, *Springer Monographs in Mathematics*. Springer, Cham (2016).
- [19] Kumagai, S.: Calculation of Veech groups and Galois invariants of general origamis. *Kodai Math. J.* **47**(2) (2024), 137–161.
- [20] Lochak, P.: On arithmetic curves in the moduli space of curves. *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **4**(3) (2005), 443–508.
- [21] Möller, M.: Teichmüller curves, Galois actions and $\widehat{GT}$ -relations. *Math. Nachr.* **278**, no.9 (2005), 1061–1077.
- [22] Moore, G. W., Seiberg N.: Classical and quantum conformal field theory. *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 177–254.
- [23] Nag, S.: *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*. Wiley, New York, (1988).
- [24] 中村博昭 (述), 星野謙二 (記): 曲線の moduli 空間の基本群への Galois 作用. 第 12 回 整数論サマースクール報告集『基本群と Galois 表現』 (2005), 117–128.
- [25] Nakamura, H., Schneps, L.: On a subgroup of the Grothendieck–Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups. *Invent. Math.* **141** (2000), 503–560.
- [26] Oda, T.: Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves. *Geometric Galois Actions*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242** (1997), 85–95.
- [27] Przytycki, P., Schmithüsen, G., Valdez, F.: Veech groups of Loch Ness Monsters. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **61**, 2 (2011), 673–687.
- [28] Romagny, M., Wewers, S.: Hurwitz spaces. *Séminaires et Congrès*, **13** (2006), 313–341.
- [29] Ribes, L., Zalesskii, P: *Profinite groups*, Springer Berlin, Heidelberg (2010).
- [30] Schmithüsen, G.: An algorithm for finding the Veech group of an origami. *Experiment. Math.* **13**, no.4 (2004), 459–472.

- [31] Schneps, L.: The Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GT}$: a survey. Geometric Galois Actions, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **242** (2013), 183–204.
- [32] Veech, W. A.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. Invent. Math. **97** (1989), no. 3, 553—583.
- [33] Wewers, S.: Constructing Hurwitz spaces. Dissertation, Universität Essen (1998).

Hardy 族による平面領域の分類に関する Hasumi の定理について

林 実樹廣 (北海道大学 *)

成田 淳一郎 (大同大学 *)

瀬川 重男 (大同大学 *)

$[0, \infty)$ 上の非定数非負非減少凸函数を単に凸函数と呼ぶことにする. 複素球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 D と凸函数 Φ に対し, D 上の正則函数 f で $\Phi(\log^+ |f(z)|)$ が D 上で調和優函数を持つものの全体の族を $H^\Phi(D)$ と記す. さらに, $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 D で $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ (即ち, $H^\Phi(D)$ が定数函数のみ) となる D 全体の族を $\mathcal{O}_\Phi$ と記す. 以下, 記号などは [2] に従う. 標題の Hasumi(荷見) の定理とは次のことである:

定理 1 ([1], [2; XI 定理 3.5]). 2 つの凸函数 Φ, Ψ が, 任意の $s > 0$ に対し $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t+s)/\Phi(t) = 0$ をみたすとき, $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ (即ち, $\mathcal{O}_\Psi \subsetneq \mathcal{O}_\Phi$) である.

実数 $p (> 0)$ に対し $\Phi(t) = e^{pt}$ とする. このとき, $H^\Phi(D)$ は通常 $H^p(D)$ と記される D 上の Hardy 族であり, $\mathcal{O}_\Phi$ は $\mathcal{O}_p$ と略記される. 定理 1 から, Hardy 族による平面領域の分類

$$\bigcup_{q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{q > p} \mathcal{O}_q, \quad \mathcal{O}_G < \bigcap_{q > 0} \mathcal{O}_q, \quad \bigcup_{q < \infty} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_{AB}$$

が容易に導かれる. しかし, 実は定理 1 の証明に少し不備があることが確認された ([3]). 本講演では, その問題点およびその解決方法について報告したい.

定理 1 を証明するためには, $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ かつ $H^\Psi(D) \setminus \mathbb{C} \neq \emptyset$ をみたす領域 D を見付ければ良い. [1] で考察されたのは次のような領域である. $0 < \rho < \delta < 1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ は $0 < a_{n+1} < \rho a_n < a_n \leq 1$ ($n \geq 0$) をみたすとする. さらに, 各 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n \geq 0$) は非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 (有界閉集合 K が $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \subset G$ をみたす任意の領域 G に対し $H^\Phi(G \setminus K) = H^\Phi(G)$) とする. そこで

$$E := \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^\infty E_n \right), \quad D =: \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$$

とする. このとき, $f \in H^\Phi(D)$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ で正則となる.

命題 2 ([3]). 凸函数 Φ に対し, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の正則函数 f が $f \in H^\Phi(D)$ となるための必要十分条件は次の 2 条件

$$(\Phi.1) \quad \int_E \Phi(\log^+ |f(z)|) dm(z) < +\infty,$$

$$(\Phi.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Phi(\log^+ |f(z)|) dm_n(z) < +\infty$$

が成り立つことである. ここで, $C(a_n) = \{|z| = a_n\}$ とし, m (又は m_n) は $z = \infty$ における領域 D (又は $\{|z| > a_n\} \setminus (\sum_{i=0}^{n-1} E_i)$) の調和測度とする.

[1, 2] では, $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{E_n\}_{n=0}^\infty$ を上手く採って, 非定数 $f \in H^\Phi(D)$ について (Φ.1) の不成立により $H^\Phi(D) = \mathbb{C}$ を示している. さらに, $1/z \in H^\Psi(D)$, 即ち

$$(\Psi.1) \quad \int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) < +\infty$$

および

$$(\Psi.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+ |1/z|) dm_n(z) < +\infty$$

が示されれば定理 1 の証明は完結する. しかし, [1, 2] では, (Ψ.1) が成立することは証明されているが (Ψ.2) については全く言及されていない.

定理 1 の証明の 1 つの要は次の定理である:

定理 3 ([1], [2; XI 定理 2.7]). $0 < a < b, 0 < \delta < 1$ とする. $F (\subset \{|z| > b\})$ は非極有界閉集合で $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F$ は $z = \infty$ を含む領域になっているとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $E (\subset \{\delta a \leq |z| \leq a\})$ で

$$(1) \quad \mu(C(a)) - \mu_E(E) < \varepsilon, \quad \mu_E(F) - \mu(F) < \varepsilon$$

をみたすものが存在する. 但し, μ (又は μ_E) は $z = \infty$ における領域 $\{|z| > a\} \setminus F$ (又は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$) の調和測度とする.

定理 3 を次のように ‘精密化’ し, さらに $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{E_n\}_{n=0}^\infty$ の構成法を少し修正することで (Ψ.2) も成立させることが可能となり, 定理 1 の証明を完結出来る.

補題 4. $0 < a' < \delta a < a < b$ とし, F, μ は定理 3 と同じとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $E (\subset \{\delta a \leq |z| \leq a\})$ で

$$(1') \quad \mu(C(a)) - \nu_E(E) < \varepsilon, \quad \nu_E(C(a')) < \varepsilon$$

をみたすものが存在する. 但し, ν_E は $z = \infty$ における領域 $\{|z| > a'\} \setminus (E \cup F)$ の調和測度とする.

参考文献

- [1] M. Hasumi: *Hardy classes on plane domains*, Ark. Mat., **16**(1978), 213-227.
- [2] 荷見守助: リーマン面上のハーディ族, 内田老鶴圃, 2010.
- [3] 中井三留, 成田淳一郎, 瀬川重男: 調和優函数の存在の諸相, 大同大学紀要, **60**(2024), 11-88.

Characterization of asymptotically smooth curve

Katsuhiko MATSUZAKI (Waseda University)
Fei TAO (Waseda University)

1 Little Bloch and BMOA functions

A holomorphic function φ on the unit disk $\mathbb{D}$ is called a *Bloch function* if it satisfies $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |\varphi'(z)| < \infty$. The Banach space of all Bloch functions (modulo additive constants) is denoted by $B(\mathbb{D})$. If $\varphi \in B(\mathbb{D})$ vanishes at the boundary in the sense that $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |\varphi'(z)| = 0$, then φ is called a *little Bloch function*, and the closed subspace of all such functions is denoted by $B_0(\mathbb{D})$. Moreover, φ belongs to $BMOA(\mathbb{D})$ if φ lies in the Hardy space and its boundary function $\varphi|_{\mathbb{S}}$ on $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ belongs to BMO . The function φ is in the little subspace $VMOA(\mathbb{D})$ if $\varphi|_{\mathbb{S}}$ lies in VMO . These spaces are also characterized by the property that $(1 - |z|^2) |\varphi'(z)|^2 dx dy$ is a Carleson measure and a vanishing Carleson measure on $\mathbb{D}$, respectively.

It is known that $VMOA(\mathbb{D})$ is contained in both $BMOA(\mathbb{D})$ and $B_0(\mathbb{D})$. A natural question then arises: does $VMOA(\mathbb{D})$ coincide with $BMOA(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$? However, the known studies so far do not seem to detect any difference between them. For example, this includes characterizations of these function classes for φ given by a lacunary series $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ ($z \in \mathbb{D}$) with Hadamard gaps $\inf_k (n_{k+1}/n_k) > 1$, and also for random holomorphic functions $\varphi_{\omega}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n z^n$, where $\omega = (\omega_n)$ is a discrete stochastic process which is a sequence of random variables taking values in $\mathbb{S}$.

2 Symmetric and strongly quasisymmetric homeomorphisms

The universal Teichmüller space T is identified with the group $QS(\mathbb{S})$ of all normalized quasisymmetric self-homeomorphisms of $\mathbb{S}$. By conformal welding, every $h \in QS(\mathbb{S})$ can be represented as $h = g^{-1} \circ f|_{\mathbb{S}}$, where $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ is the normalized Riemann map onto a bounded quasidisk Ω , and $g : \mathbb{D}^* \rightarrow \Omega^*$ is the Riemann map between the complementary domains in $\widehat{\mathbb{C}}$. Then, $\varphi = \log f'$ belongs to $B(\mathbb{D})$, and the set $\mathcal{T}$ of all such φ forms a connected open subset of $B(\mathbb{D})$ containing the origin, which is regarded as the Bers fiber space over $T \cong QS(\mathbb{S})$. We denote this projection by $p : \mathcal{T} \rightarrow QS(\mathbb{S})$.

An element $h \in QS(\mathbb{S})$ is said to be *symmetric* if $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(e^{i(x+t)}) - h(e^{ix})}{h(e^{ix}) - h(e^{i(x-t)})} = 0$ uniformly. The subgroup of all such symmetric homeomorphisms is denoted by $S(\mathbb{S})$. Furthermore, $h \in QS(\mathbb{S})$ is called *strongly quasisymmetric* if it is absolutely continuous and its derivative h' is a Muckenhoupt A_{∞} -weight (implying $\log h' \in BMO(\mathbb{S})$). It is called *strongly symmetric* if $\log h' \in VMO(\mathbb{S})$. The corresponding subgroups are denoted by $SQS(\mathbb{S})$ and $SS(\mathbb{S})$, respectively. Then $SS(\mathbb{S})$ is contained in both $SQS(\mathbb{S})$ and $S(\mathbb{S})$.

Under the identification $QS(\mathbb{S}) \cong T$, we have that $S(\mathbb{S})$ corresponds to the asymptotically conformal Teichmüller space T_0 , $SQS(\mathbb{S})$ to the BMO Teichmüller space T_{BMO} , and $SS(\mathbb{S})$ to the VMO Teichmüller space T_{VMO} . Through the projection $p : \mathcal{T} \rightarrow QS(\mathbb{S})$, these spaces are related by $p(B_0(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = S(\mathbb{S})$, $p(BMOA(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = SQS(\mathbb{S})$, and $p(VMOA(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}) = SS(\mathbb{S})$.

These relationships between the subspaces of $\mathcal{T} \subset B(\mathbb{D})$ and $QS(\mathbb{S})$ show that the question about $VMOA(\mathbb{D}) \subset BMOA(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ is equivalent to asking whether the inclusion $SS(\mathbb{S}) \subset SQS(\mathbb{S}) \cap S(\mathbb{S})$ is strict. However, constructing an explicit element in this gap is difficult. For instance, while $\log |z - 1|$ on $\mathbb{S}$ lies in $BMO(\mathbb{S}) \setminus VMO(\mathbb{S})$, the integral of $|z - 1|$ near 1 does not hold a vanishing quasisymmetry quotient.

3 Asymptotically conformal chord-arc curves

Let $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ be a conformal homeomorphism. To characterize $\varphi = \log f'$, we consider the following geometric properties of the bounded Jordan curve $\Gamma = \partial\Omega$. For distinct points $a, b \in \Gamma$, the smaller sub-arc between a and b is denoted by $\gamma(a, b)$, and its length is denoted by $\ell(\gamma(a, b))$ if rectifiable.

Definition. A quasicircle Γ is said to be *asymptotically conformal* if

$$\lim_{|a-b| \rightarrow 0} \max_{w \in \gamma(a, b)} \frac{|a-w| + |w-b|}{|a-b|} = 1.$$

A rectifiable Γ is called *chord-arc* if there exists $C \geq 1$ such that $\ell(\gamma(a, b))/|a-b| \leq C$ for any $a, b \in \Gamma$, and *asymptotically smooth* if $\lim_{|a-b| \rightarrow 0} \ell(\gamma(a, b))/|a-b| = 1$.

The geometric characterization asserts that $\varphi = \log f' \in B_0(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ if and only if $\Gamma = f(\mathbb{S})$ is asymptotically conformal, and that $\varphi \in \text{VMOA}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ if and only if Γ is asymptotically smooth. In addition, φ lies in a certain open neighborhood of the origin in $\text{BMOA}(\mathbb{D})$ if and only if Γ is chord-arc. More generally, an element of $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{T}$ is characterized by the Bishop–Jones condition on Γ , which, roughly speaking, requires that from every point in the interior domain Ω bounded by Γ , a uniformly large portion of Γ is visible along a chord-arc curve.

By transforming the question about the inclusion relations between function spaces into one about geometric properties of the boundary curves of conformal maps, we provide an answer through an explicit example.

Theorem 1. *There exists an asymptotically conformal chord-arc curve that is not asymptotically smooth.*

Corollary 2. (1) *The inclusion $\text{VMOA}(\mathbb{D}) \subset \text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ is strict.* (2) *The inclusion $\text{SS}(\mathbb{S}) \subset \text{SQS}(\mathbb{S}) \cap \text{S}(\mathbb{S})$ is strict.*

Furthermore, we provide an additional geometric condition under which asymptotic conformality implies asymptotic smoothness for a chord-arc curve.

Definition. A chord-arc curve Γ is said to be *uniformly approximable* if, for every $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer $n \in \mathbb{N}$ such that every sub-arc $\gamma(a, b) \subset \Gamma$ with endpoints a, b admits a partition $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ along $\gamma(a, b)$ satisfying

$$(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n |a_i - a_{i-1}| \geq \ell(\gamma(a, b)).$$

Theorem 3. *A bounded chord-arc curve is asymptotically smooth if and only if it is asymptotically conformal and uniformly approximable.*

4 Further problems

We consider the intermediate closed subspace $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$ between $\text{VMOA}(\mathbb{D})$ and $\text{BMOA}(\mathbb{D})$, in view of whether the properties that hold for $\text{VMOA}(\mathbb{D})$ but not for $\text{BMOA}(\mathbb{D})$ still hold for $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$. Using equivalent characterizations of these spaces, we pose the following problems from the same perspective:

1. Is an asymptotically conformal quasicircle satisfying the Bishop–Jones condition necessarily chord-arc?
2. Is $L^\infty(\mathbb{S})$ dense in $\text{BMO}_0(\mathbb{S})$, the boundary extension of $\text{BMOA}(\mathbb{D}) \cap B_0(\mathbb{D})$? Is e^φ an A_2 -weight for every $\varphi \in \text{BMO}_0(\mathbb{S})$?
3. Does there exist a real-analytic global section of the Teichmüller projection onto the BMO_0 Teichmüller space T_{BMO_0} , which is identified with $\text{SQS}(\mathbb{S}) \cap \text{S}(\mathbb{S})$?

複素力学系に現れる有理型関数の一般化シュワルツ微分について

奥山裕介 (京都工芸繊維大学)*

1. 複素力学系に現れる有理型関数

以下 $f(z)$ を、複素アフィン直線 $\mathbb{C}$ 上の非定値有理型関数とする。 f の任意回数 n の反復合成 f^n がすべて定義できるような $\mathbb{P}^1$ の最大の部分集合を $V = V(f)$ として、 f のファトゥ集合を

$$F(f) := \{z \in V : \text{反復合成族 } (f^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ は } z \text{ で正規}\}$$

と定める。 f が複素射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 上まで有理型に拡張する場合は、 $\mathbb{P}^1$ 上の有理関数としての f の次数は > 1 とし、必要ならば $\mathbb{P}^1$ の射影変換による f の共役に f を取り替えて、 f は多項式であるか、または拡張した f に対し反復合成族 (f^n) は ∞ で正規でないとする。

自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対し f^p の固定点 $a \in \mathbb{P}^1$ (このとき $a \in V$) を、 f の周期 p の周期点とも呼ぶ。このとき有限集合 $\{f^j(a) \in \mathbb{C} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset V$ を a の周期 f 軌道と呼び、微係数

$$\lambda = \lambda_{f,a,p} := (f^p)'(a) (= \lambda_{f,f^j(a),p}) \in \mathbb{C}$$

をその乗法因子 (multiplier) と呼ぶ： $\lambda = 0$ 、 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ 、 λ が 1 の冪根、のそれぞれの場合に、 a の周期 f 軌道は超吸引的、超ではない吸引的、放物的と呼ばれ、 V の部分集合

$$\Omega = \left\{ z \in F(f) : \lim_{j \rightarrow \infty} f^{pj}(z) = f^{\exists j}(a) \right\}$$

をその (超吸引/超でない吸引/放物) 鉢と呼ぶ。さらに超吸引でない場合には、ケーニス・ポワンカレ・シュレーダー/アーベル方程式

$$\begin{cases} \Phi \circ f = \lambda^{1/p} \cdot \Phi & \text{if } \lambda \in \mathbb{D}^* \\ \Phi \circ f = \Phi + \frac{1}{pq} & \text{if } \lambda^q = 1 \text{ for } \exists q \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.1)$$

は Ω 上の有理型関数であって a の周期 f 軌道の (Ω でのある種の) 近くで単葉であるような解 Φ を持つ (そのような解の一意性については略す)。このような ϕ を、この周期 f 軌道に対する、 f に付随するケーニス・ポワンカレ・シュレーダー/アーベル関数と呼ぶ。

2. 一般化 (プレ) シュワルツ微分

$\mathbb{C}$ の開集合 U 上の非定値有理型関数 ϕ に対し、 U 上の有理型関数

$$T_\phi := \frac{\phi''}{\phi'}, \quad S_\phi := \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2$$

* e-mail: okuyama@kit.ac.jp
web: <http://yusuke.cajpn.org>

を ϕ のそれぞれプレシュワルツ微分（もしくは non-linearity）およびシュワルツ微分（もしくは non-projectivity）と呼ぶ：これらはそれぞれアフィン変換および射影変換に対し良い変換則を満たす（詳細は略す）。 Φ の任意高階導関数を用いた一般化（プレ）シュワルツ微分も種々考えられている。

3. Koenigs ... / Abel 関数 Φ の一般化 (pre) シュワルツ微分の近似公式

定理 1 ([1]). f は $\mathbb{C}$ 上の非定値有理型関数であって、 f が $\mathbb{P}^1$ の有理型関数の場合は、必要ならば $\mathbb{P}^1$ の射影変換による f の共役に f を取り替えて、 f は多項式であるか、または拡張した f に対し反復合成族 (f^n) は ∞ で正規でないとする。

f の、周期 p の周期点 a の周期 f 軌道が超でない吸引的または放物的なとき、その鉢を Ω として、 $\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$, この周期 f 軌道に対する f に付随するケーニス・ポワンカレ・シュレーダー／アーベル関数の一般化プレシュワルツ微分は

$$\text{locally uniformly on } \Omega, \quad \frac{\phi^{(t)}}{\phi'} = \frac{(f^n)^{(t)}}{(f^n)'} + \begin{cases} O(|\lambda|^{\frac{n}{p}}) & \text{if } \lambda \in \mathbb{D}^* \\ O(\frac{1}{n}) & \text{if } \lambda \text{ が } 1 \text{ の冪根} \end{cases} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

のように Ω 上 定量的広義一様 近似される。

注 1. (i) 超吸引的鉢上のこの種の広義一様定量的近似は既知 (Vigny-Okuyama[2])。

(ii) ジーゲル円盤／エルマン円環に対してはこの種の近似公式は定性的にも成り立たない。

(iii) $t = 2, 3$ の場合から Φ のシュワルツ微分の定量的広義一様近似も従う。

定理 1 の証明ではケーニス・ポワンカレ・シュレーダー／アーベル方程式 (1.1) を繰り返し微分して評価することになるが、その際以下の二点

- $\mathbb{Z}$ 係数の多変数の多項式列系 $A_{s,u} \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_s]$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u \in \{0, \dots, s\}$ の新たな recursive な微分方程式系： $A_{0,0} := 1$, and $\forall s \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_{s,u}(X_0, \dots, X_s) &= A_{s-1,u-1}(X_0, \dots, X_{s-1}) \cdot X_0 + \\ &\quad + \sum_{q=0}^{s-1} ((\partial_{X_q}(A_{s-1,u}))(X_0, \dots, X_{s-1})) \cdot X_{q+1} \quad \text{for } u \in \{0, \dots, s\} \end{aligned}$$

が現れ用いられること、および

- a の周期 f 軌道が放物的な場合には、その (放物鉢 Ω でのある種の) 近くで Φ が単葉であることに基づく、 $\mathbb{D}$ 上の正規化された単葉関数の係数評価（最終結果は de Branges の定理）が、上記の近似の局所一様定量性を得る際に本質的であること、

に注意しておく。

参考文献

- [1] OKUYAMA, Y. Equidistribution of the zeros of higher order derivatives in polynomial dynamics, *J. Geom. Anal.*, **34**, 1 (2024), Paper No. 8, 11.
- [2] OKUYAMA, Y. and VIGNY, G. Value distribution of derivatives in polynomial dynamics, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **41**, 12 (2021), 3780–3806.

次数 2 の超楕円関数による KP 方程式の解

綾野 孝則

(阪公大数学研)*¹

Victor M. Buchstaber (Steklov Mathematical Institute)

KP 方程式は水深が浅い場合の波の伝播を記述する偏微分方程式である。1977 年に, Krichever により, 代数曲線のテータ関数による KP 方程式の解が構成された。本発表では, 超楕円曲線のシグマ関数を用いて, KP 方程式の新しい解を構成する。

自然数 g に対して, x の多項式

$$f(x) = x^{2g+1} + \lambda_2 x^{2g} + \lambda_4 x^{2g-1} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

を考える。 $f(x)$ は重根を持たないとする。種数 g の超楕円曲線

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x) \right\}$$

を考える。 C 上の正則微分形式

$$\omega_i = -\frac{x^{g-i}}{2y} dx, \quad 1 \leq i \leq g$$

を考える。 $\lambda_0 = 1$ とする。 C 上の第 2 種微分形式

$$\eta_i = -\frac{1}{2y} \sum_{k=g-i+1}^{g+i-1} (k+i-g) \lambda_{2g+2i-2k-2} x^k dx, \quad 1 \leq i \leq g$$

を考える。 $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}_{i=1}^g$ を C 上の標準ホモロジー基底とする。周期行列を次で定義する。

$$2\omega' = \left(\int_{\mathbf{a}_j} \omega_i \right), \quad 2\omega'' = \left(\int_{\mathbf{b}_j} \omega_i \right), \quad -2\eta' = \left(\int_{\mathbf{a}_j} \eta_i \right), \quad -2\eta'' = \left(\int_{\mathbf{b}_j} \eta_i \right)$$

$\tau = (\omega')^{-1} \omega''$ とする。 $\tau \delta' + \delta'', \delta', \delta'' \in \mathbb{R}^g$ を $(\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}_{i=1}^g, \infty)$ に付随する Riemann 定数とする。虚数単位を $\mathbf{i}$ で表す。 $u = {}^t(u_1, u_3, \dots, u_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ に対して,

$$\theta \left[\begin{smallmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{smallmatrix} \right] (u, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \pi \mathbf{i} {}^t(n + \delta') \tau (n + \delta') + 2\pi \mathbf{i} {}^t(n + \delta') (u + \delta'') \}$$

とする (Riemann のテータ関数)。このとき, C に付随するシグマ関数は

$$\sigma(u) = \varepsilon \exp \left(\frac{1}{2} {}^t u \eta' (\omega')^{-1} u \right) \theta \left[\begin{smallmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{smallmatrix} \right] ((2\omega')^{-1} u, \tau)$$

で定義される。ここで, ε は 0 でないある定数である。

*¹ 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪公立大学 数学研究所

e-mail: ayano@omu.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/ayano75/>

本研究は JSPS 科研費 (課題番号: JP21K03296) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14H70, 14H81, 14K25, 32A20

キーワード: 超楕円関数, シグマ関数, 超楕円曲線, KP 方程式

Remark 1. シグマ関数の原点におけるべき級数展開の係数は、超楕円曲線 C の定義方程式の係数 λ_i の有理数係数の多項式になる．よって、シグマ関数を用いて微分方程式の解を構成出来れば、 λ_i を実数にとることで、微分方程式の実数値解を構成することができる．これにより、現実の物理現象を記述する解を構成することができる．

整数 $k \geq 2$ に対して、 $\wp_{i_1, \dots, i_k} = -\partial_{u_{i_1}} \cdots \partial_{u_{i_k}} \log \sigma$ とする．ここで、 $\partial_{u_l} = \partial/\partial u_l$ とした．次数を $\deg \wp_{i_1, \dots, i_k} = i_1 + \cdots + i_k$ と定義する．

Remark 2. $g \geq 3$ とする． $g \geq 4$ のときは、定数 $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq g-3$ をとる． $\lambda_{4g+2} \neq 0$ とする．このとき、関数

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = -2\wp_{2g-1, 2g-1}(a_1, \dots, a_{g-3}, \mathfrak{c}t_3, \mathfrak{d}t_2, t_1 + \mathfrak{e}t_2) - \mathfrak{f}$$

$$\mathfrak{c} = -16\lambda_{4g+2}, \quad \mathfrak{d} = 2\sqrt{-3\lambda_{4g+2}}, \quad \mathfrak{e} = \frac{\lambda_{4g}}{\sqrt{-3\lambda_{4g+2}}}, \quad \mathfrak{f} = \frac{2}{3}\lambda_{4g-2} + \frac{\lambda_{4g}^2}{18\lambda_{4g+2}}$$

は、次の KP 方程式を満たすことが知られている．

$$\partial_{t_1}(\partial_{t_3}\varphi + 6\varphi\partial_{t_1}\varphi + \partial_{t_1}^3\varphi) = \partial_{t_2}^2\varphi$$

この結果は [3] で証明なしで指摘され、[1] で厳密な証明が与えられた．

Lemma 3 ([2, Corollary 3.1.2]). $g \geq 1$ に対して、次が成り立つ．ただし、 $g = 1$ のときは、 $\wp_{1,3} = 0$ とおく．

$$\wp_{1,1,1,1} = (6\wp_{1,1} + 4\lambda_2)\wp_{1,1} + 4\wp_{1,3} + 2\lambda_4$$

本発表の主結果は以下である．

Theorem 4. $g \geq 2$ とする． $g \geq 3$ のときは、定数 $b_i \in \mathbb{C}$, $3 \leq i \leq g$ をとる．このとき、関数

$$\psi(t_1, t_2, t_3) = -2\wp_{1,1}(t_1 + 2\sqrt{\lambda_2}t_2, -4t_3, b_3, \dots, b_g)$$

は、次の KP 方程式を満たす．

$$\partial_{t_1}(\partial_{t_3}\psi + 6\psi\partial_{t_1}\psi + \partial_{t_1}^3\psi) = \partial_{t_2}^2\psi$$

参考文献

- [1] T. Ayano, V. M. Buchstaber, Hyperelliptic sigma functions and the Kadomtsev-Petviashvili equation, arXiv:2502.19972, (2025).
- [2] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskiĭ, D. V. Leĭkin, Hyperelliptic Kleinian Functions and Applications, Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–33.
- [3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, Uniformization of Jacobi Varieties of Trigonal Curves and Nonlinear Differential Equations, Funct. Anal. Appl. **34** (2000), 159–171.

AN EXAMPLE OF HOLOMORPHICALLY NONCONVEX LOCALLY PSEUDOCONVEX ANALYTIC SET IN $\mathbb{C}^3$

TAKEO OHSAWA

In the theory of several complex variables, it is well known that a complex manifold M is holomorphically convex if there exists a locally biholomorphic map $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ which is locally pseudoconvex in the sense that every point of $\mathbb{C}^n$ has a neighborhood whose preimage by π is holomorphically convex, or Stein equivalently in this situation. This basic fact is an immediate consequence Oka's solution of the Levi problem for Riemann domains over $\mathbb{C}^n$, which established that every connected component of the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ of $\mathbb{C}^n$ is holomorphically convex.

On the other hand, by a counterexample due to Fornaess, it is known that there exists a holomorphically nonconvex complex surface X with a locally pseudoconvex holomorphic map $p : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ whose fibers are 0-dimensional. Roughly speaking, X is constructed from a domain $\Omega_\varphi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1 \text{ and } e^{\varphi(z)} < |w|\}$, where φ is a subharmonic function on the disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ defined by

$$\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{m(\mu)} \log \left| z - \frac{1}{n(\mu)} \right|$$

with $m, n : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, in such a way that $\sup \varphi(z) < 1$.

More precisely, $\mathbb{C}^2$ is blown up at the points $\left(\frac{1}{m(\mu)}, 0\right)$ by the maps

$$(u, v) \mapsto \left(uv^{m(\mu)} + \frac{1}{n(\mu)}, v \right),$$

so that one can find a neighborhood U of the intersection of the exceptional set with the proper transform of the complex lines

$$\left\{ \left(\frac{1}{m(\mu)}, w \right); w \in \mathbb{C}, \mu = 1, 2, \dots \right\}$$

such that U can be patched with $\Omega_\varphi \setminus V$ for some neighborhood V of $\left\{ \left(\frac{1}{m(\mu)}, 0 \right); \mu = 1, 2, \dots \right\}$ to define a complex surface X with a locally pseudoconvex holomorphic map $p : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ in such a way that

$p^{-1}(z)$ are finite for all $z \in \mathbb{C}$ and X contains complex curves which are mapped biholomorphically onto

$$L_\mu := \left\{ \left(\frac{1}{m(\mu)}, w \right) ; w \in \mathbb{C} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

by p .

Holomorphic nonconvexity of X is an immediate consequence of the maximum modulus principle applied to the restrictions of holomorphic functions on X to $p^{-1}(L_\mu)$.

This example suggests, as well as counterexamples to the Serre problem on the Steinness of analytic fiber bundles with Stein fibers and bases, that there remains something to be explored on those non-Stein manifolds.

From such an interest, it might be still worthwhile to see whether or not the above mentioned patching procedure does not destroy the separatedness of the manifolds by holomorphic functions. This point is closely related to the following question which was raised by P. A. Griffiths in 1977.

Question. Let S be a locally closed complex submanifold of $\mathbb{C}^n$. Is S holomorphically convex if the inclusion map $S \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ is locally pseudoconvex ?

The purpose of the present note is to show that Fornaess's example can be modified to yield a negative answer to Griffiths's question.

More explicitly, we shall prove the following.

Theorem. Let $\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{-\mu} \log |z - 2^{-\mu}|$ and let $\Omega'_\varphi = \{(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}; e^{\varphi(z)} < |w| < e\}$. Then, Ω'_φ is biholomorphically equivalent to a dense open subset of a holomorphically nonconvex locally closed submanifold S of $\mathbb{C}^3$ such that the inclusion map $\Omega'_\varphi \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ is continuously extended to S by this correspondence as a locally pseudoconvex map $q : S \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfying $q^{-1}((2^{-\mu}, 0)) \cong \mathbb{D}$ for all μ .

Corollary. There exists a locally pseudoconvex but holomorphically nonconvex Riemann domain over $\mathbb{C}^2$ which is embeddable into $\mathbb{C}^3$ as a locally closed complex submanifold.

$\mathbb{C}^n$ 上の不分岐リーマン領域の境界距離関数

阿部 誠 (広島大*)・本田 竜広 (専修大商)

本稿は論文 [1] の内容の概要である.

$(E, \|\cdot\|)$ を複素ノルム空間とする. 任意の $x \in E$ と $\rho \in (0, +\infty]$ に対して, 集合 $\mathbf{B}(x, \rho) := \{z \in E \mid \|z - x\| < \rho\}$ を E 内の中心 x , 半径 ρ の開球という. 特に, 集合 $\mathbf{B} := \mathbf{B}(0, 1)$ を単位開球という.

(D, π) を E 上の (不分岐) Riemann 領域とする. (D, π) の (到達可能) 境界点全体を ∂D と書き, これを (D, π) の抽象境界という. $\check{D} := D \cup \partial D$ を (D, π) の抽象閉包といい, π の $\check{D}$ への拡張を $\check{\pi}$ と書く.

任意の $a \in D$ に対して, a の近傍 B が存在して $\pi(B) = \mathbf{B}(\pi(a), \rho)$ かつ $\pi|_B : B \rightarrow \mathbf{B}(\pi(a), \rho)$ が同相であるような $\rho \in (0, +\infty]$ の上限を $d(a) = d_{D, \|\cdot\|}(a)$ と書き, 関数 $d = d_{D, \|\cdot\|} : D \rightarrow (0, +\infty]$ をノルム $\|\cdot\|$ に関する (D, π) の境界距離関数という. D が連結かつ π が同相でないとき, 任意の $a \in D$ に対し $d(a) < +\infty$ であり, 関数 $d : D \rightarrow (0, +\infty)$ は連続である.

任意の $a \in D$ と $\rho \in (0, d(a)]$ に対して, $\pi(B) = \mathbf{B}(\pi(a), \rho)$ かつ $\pi|_B : B(a, \rho) \rightarrow \mathbf{B}(\pi(a), \rho)$ が同相であるような a の D における近傍 B が一意的に定まる. この B を $B(a, \rho)$ と書き, D 内の中心 a , 半径 ρ の開球という. 任意の $a \in D$ に対して, $W(a) := \bigcup_{x \in B(a, d(a))} B(x, d(x))$ とおく.

命題 1 ([2, Proposition 4.5]) 任意の $a \in D$ に対して, $\pi|_{W(a)} : W(a) \rightarrow \pi(W(a))$ は同相である.

任意の $(a, u) \in D \times \partial \mathbf{B}$ に対して, 次の 2 条件をみたす連続写像 $\Lambda : \mathbf{B}(u, \delta) \times [0, l) \rightarrow D$, $\delta > 0$, $l \in (0, +\infty]$, 全体の族を $\mathcal{C}(a, u)$ と書く:

- $\pi(\Lambda(v, t)) = \pi(a) + tv \quad ((v, t) \in \mathbf{B}(u, \delta) \times [0, l))$,
- $\Lambda(u, 0) = a$.

任意の $(a, u) \in D \times \partial \mathbf{B}$ に対して, $\mathcal{C}(a, u)$ に属する $\Lambda : \mathbf{B}(u, \delta) \times [0, l) \rightarrow D$, $\delta > 0$, が存在するような $l \in (0, +\infty]$ の上限を $l(a, u)$ と書くとき, 次の条件をみたす連続写像 $\lambda(a, u, \cdot) : [0, l(a, u)) \rightarrow D$ が定まる:

- 任意の $l_0 \in [0, l(a, u))$ に対して, $\mathcal{C}(a, u)$ に属する $\Lambda : \mathbf{B}(u, \delta_0) \times [0, l_0) \rightarrow D$, $\delta_0 > 0$, が存在して, $\lambda(a, u, t) = \Lambda(u, t) \quad (0 \leq t < l_0)$.

このとき, $d(a) \leq l(a, u)$ であり, 次のことが成り立つ:

- $\pi(\lambda(a, u, t)) = \pi(a) + tu \quad (0 \leq t < l(a, u))$,
- $\lambda(a, u, t) = (\pi|_{B(a, d(a))})^{-1}(\pi(a) + tu) \quad (0 \leq t < d(a))$.

$l(a, u) < +\infty$ の場合, 点 $q(a, u) := \pi(a) + l(a, u)u$ の E における任意の連結近傍 U に対して, 数 $l_U \in [0, l(a, u))$ が存在して, $l_U \leq t < l(a, u)$ のとき $\pi(a) + tu \in U$ が成り立つ. 集合 $\pi^{-1}(U)$ の $\lambda(a, u, \cdot)([l_U, l(a, u)))$ を含む連結成分を $C(U)$ と書くとき, $C(U)$ は l_U の選び方によらない. このとき, 族

$$r(a, u) := \{C(U) \mid U \text{ は } q(a, u) \text{ の連結近傍}\}$$

は D 上のフィルター基であり, $\lim \pi(r(a, u)) = q(a, u)$ をみたし, さらに, $r(a, u)$ は D において触点をもたない. すなわち, $r(a, u) \in \partial D$, $\check{\pi}(r(a, u)) = q(a, u)$.

命題 2 ([1, Proposition 2.2]) 任意の $a \in D$ に対して, 関数 $l(a, \cdot) : \partial \mathbf{B} \rightarrow (0, +\infty]$ は下半連続である.

命題 3 ([2, Lemma 4.12]) 任意の $a \in D$ に対して, $d(a) = \inf_{u \in \partial \mathbf{B}} l(a, u)$.

考察を $\dim E = n < \infty$ の場合に限定して, (D, π) を $E = \mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域とする. このとき, 射影 π が局所両正則であるような D の (有限次元) 複素多様体としての構造が定まる. $\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^n$ の任意のノルムとして, $d = d_{D, \|\cdot\|}$ を $\|\cdot\|$ に関する D の境界距離関数とする.

補題 4 ([1, Lemma 3.1]) $a \in D$, $d(a) < +\infty$ のとき, 点 $q_0 \in \partial \mathbf{B}(\pi(a), d(a))$, $r_0 \in \partial D$ が存在して, $\check{D}$ において,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow q_0 \\ z \in \mathbf{B}(\pi(a), d(a))}} (\pi|_{B(a, d(a))})^{-1}(z) = r_0.$$

補題 5 ([1, Lemma 3.2]) $a \in D$, $d(a) < +\infty$ のとき, 任意の $x \in B(a, d(a))$ に対して,

$$d(x) = \min \{ \|z - \pi(x)\| \mid z \in \check{\pi}(\partial D) \cap (\mathbb{C}^n \setminus \pi(W(a))) \}.$$

X を複素多様体, $u : X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ を上半連続関数とする. X の任意の相対コンパクト開集合 G と $\bar{G}$ の近傍で定義された任意の多重調和関数 h に対して, ∂G 上で $u \leq h$ ならば $\bar{G}$ 上でも $u \leq h$ であるとき, u は (藤田の意味で) 劣多重調和 (subpluriharmonic) であるという. 任意の点 $p \in X$ に対して, p の近傍 B が存在して $u|_B$ が劣多重調和であるとき, u は局所劣多重調和であるという. X が K 完備 (holomorphically spreadable) のとき, u が局所劣多重調和であることと u が劣多重調和であることは同値である (Văjăitu [7, Proposition 2]).

定理 6 ([1, Theorem 3.3]) (D, π) を $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域とする. このとき, $\mathbb{C}^n$ の任意のノルム $\|\cdot\|$ に関する (D, π) の境界距離関数 $d = d_{D, \|\cdot\|}$ について, 関数 $-\ln d$ は D で劣多重調和である.

注意 7 定理 6 は, Ślodkowski [6, Proposition 4.6] (D が単葉, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$), Pawlaschuk [4, Proposition 4.2.3] (D が単葉), Pawlaschuk · Zeron [5, Example 2.8] (D が単葉) の一般化であり, D が単葉のとき [2, Theorem 2.7] に含まれ, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ のとき Matsumoto [3, Theorem 1] に含まれる. ただし, $\|\cdot\|_2$ は $\mathbb{C}^n$ の Euclid ノルムを表す.

注意 8 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を複素前 Hilbert 空間, (D, π) を E 上の Riemann 領域とすると, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定める E のノルム $\|\cdot\|$ に関する (D, π) の境界距離関数 $d = d_{D, \|\cdot\|}$ について, 関数 $-\ln d$ は ([2, Definition 3.4] の意味で) D で局所劣多重調和である ([2, Theorem 5.4]).

謝辞 本研究は部分的に科研費 JP23K03136 の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] Abe, M., Honda, T.: Boundary distance functions of unramified Riemann domains over $\mathbb{C}^n$. Complex Anal. Oper. Theory **19**, Paper No. 10 (2025)
- [2] Abe, M., Honda, T., Shima, T.: Boundary distance functions of Riemann domains over pre-Hilbert spaces. Complex Anal. Oper. Theory **16**, Paper No. 88 (2022)
- [3] Matsumoto, K.: Pseudoconvex Riemann domains of general order over Stein manifolds. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **44**, 95–109 (1990)
- [4] Pawlaschuk, T.: On some classes of q -plurisubharmonic functions and q -pseudoconcave sets. Ph.D. thesis, Bergische Universität Wuppertal (2015)
- [5] Pawlaschuk, T., Zeron, E.S.: On convex hulls and pseudoconvex domains generated by q -plurisubharmonic functions, part II. Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **22**, 367–388 (2016)
- [6] Ślodkowski, Z.: Local maximum property and q -plurisubharmonic functions in uniform algebras. J. Math. Anal. Appl. **115**, 105–130 (1986)
- [7] Văjăitu, V.: A Levi problem for continuous strongly q -plurisubharmonic functions. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**, 573–578 (1999)

吉原の定義式に関する数式处理的考察

～ A_{19} 特異点を有する平面 6 次曲線の導出について～

高橋 正 (羽衣国際大学)*

2 次元複素射影空間における A_{19} 特異点をもつ平面 6 次曲線の定義式は、1979 年に、吉原により得られている。本発表では、この定義式をどのように導出できるかについてグレブナー基底および終結式を用いた計算によって求める方法を考察する。

1 はじめに

$\mathbb{P}^2$ において A_{19} 特異点をもつ平面 6 次曲線の定義式は、吉原により得られた。[1] この研究ではその定義式は記載されているがその導出方法は記載されていない。本発表では、この定義式をどのように導出できるかについて、定義式（多項式）の係数を、多項式環の計算によって数式処理の手法（グレブナー基底および終結式）を用いる方法を考察する。

2 特異点定義式の変形方法

A_n 型特異点をもつパラメータを有する特異点定義式に対しては、変数変換 $z = z' + y^n$ $n \in \mathbb{Z}^+$ を実行し、定義式の係数（パラメータ）がどのような条件の下で、原点における特異点のミルナー数がどのように変化するかを判定することができる。その際、係数の関係を同時に満たす条件を見出す方法として、グレブナー基底を計算する方法と終結式を計算する方法がある。

グレブナー基底を計算する方法は、計算が大規模になるが複数の条件を見出すことに有効である。それに対し 2 つの条件を求める際には終結式を計算する方法が有効である。以下に、それらを効率的に行なった 2 次元複素射影平面における A_{19} 特異点をもつ平面 6 次曲線の定義式の変形過程を示す。

3 特異点定義式の変形過程

まず、 $f_1 = x^4 z^2 + x^3(-2y^2 z + a_1 y z^2 + a_2 z^3) + x^2(y^4 + a_3 y^3 z + a_4 y^2 z^2 + a_5 y z^3 + a_6 z^4) + x(a_7 y^5 + a_8 y^4 z + a_9 y^3 z^2 + a_{10} y^2 z^3 + a_{11} y z^4 + a_{12} z^5) + a_{13} y^6 + a_{14} y^5 z + a_{15} y^4 z^2 + a_{16} y^3 z^3 + a_{17} y^2 z^4 + a_{18} y z^5 + a_{19} z^6$ とおき、 $x = 1$ とする ($\mathbb{P}^2$ の $[1, 0, 0]$ で考える)。

このとき、 $f_1 = 0$ で定義される 6 次曲線は、 $(1, 0, 0)$ で $A_i (i \geq 4)$ 特異点を有する（パラメータ $a_j (1 \leq j \leq 19)$ の条件によって、 i は変化する。最初の変数変換として $z = z' + y^2$ を実行し、 z' を再び z とすると、以下の f_2 を得る。

* 〒592-8344 大阪府堺市西区浜寺南町 1-89-1 羽衣国際大学 現代社会学部

e-mail: ttakahashi@hagoromo.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: 32G05

キーワード: Deformations of complex structures, Sextic curves, Singularity

$f_2 = z^2 + c_{5,0}y^5 + c_{3,1}y^3z + c_{6,0}y^6 + c_{7,0}y^7 + c_{4,1}y^4z + c_{8,0}y^8 + \cdots$ ($c_{i,j}$ は $y^i z^j$ の係数)
 ここで $G[\{c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}\}, \{a_{19}, \cdots, a_1\}]$ を $c_{5,0}, c_{3,1}, c_{6,0}, c_{7,0}, c_{4,1}, c_{8,0}, c_{9,0}$ の変数順序 $a_{19}, \cdots, a_1$ でのグレブナー基底とすると、グレブナー基底の共通解として、 $(1,0,0)$ で A_9 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

同様に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{5,1}}{2}y^5$ を実行し z' を再び z とすると以下の f_3 を得る。
 $f_3 = z^2 + c_{10,0}y^{10} + c_{11,0}y^{11} + c_{6,1}y^6z + c_{12,0}y^{12} + c_{13,0}y^{13} + \cdots$ ($c_{i,j}$ は $y^i z^j$ の係数)
 ここで $c_{10,0}, c_{11,0}, c_{6,1}, c_{12,0}, c_{13,0}$ の変数順序 $a_{19}, a_{18}, a_{17}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{10}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算するとそのグレブナー基底の共通解のなかで $[1,0,0]$ において A_{13} 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

次に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{7,1}}{2}y^7$ を実行し、 z' を再び z とすると以下の f_4 を得る。
 $f_4 = z^2 + c_{14,0}y^{14} + c_{15,0}y^{15} + \cdots$ ($c_{i,j}$ は $y^i z^j$ の係数)

ここで $c_{14,0}, c_{15,0}$ の変数順序 $a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_7, a_5, a_4$ でのグレブナー基底を計算すると、グレブナー基底の共通解のなかで $(1,0,0)$ において A_{15} 特異点を有するパラメータの適切な条件を見出すことができる。

次に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{8,1}}{2}y^8$ を実行し、 z' を再び z とすると以下の f_5 を得る。
 $f_5 = z^2 + c_{16,0}y^{16} + c_{17,0}y^{17} + \cdots$ ($c_{i,j}$ は $y^i z^j$ の係数) となる。この $c_{16,0}, c_{17,0}$ を因数分解すると適切な因子 (パラメータの条件多項式) を見出すことができる。その因子を h_{16}, h_{17} とする。ここで、 $R[\{h_{16}, h_{17}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{17} の終結式とすると、その終結式は変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。

同様に、変数変換 $z = z' - \frac{c_{9,1}}{2}y^9$ を実行し、 z' を再び z とすると以下の f_6 を得る。
 $f_6 = z^2 + c_{18,0}y^{18} + c_{19,0}y^{19} + \cdots$ ($c_{i,j}$ は $y^i z^j$ の係数) となる。この $c_{18,0}, c_{19,0}$ を因数分解すると適切な因子 (パラメータの条件多項式) を見出すことができる。その因子を h_{18}, h_{19} とする。 $R[\{h_{16}, h_{18}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{18} の終結式、 $R[\{h_{16}, h_{19}\}, a_{14}]$ を変数 a_{14} に関する多項式 h_{16}, h_{19} の終結式とすると、この2つの終結式も変数 a_{13}, a_7, a_5, a_4 の多項式となる。この3つの多項式を P, Q, R とする。この3つの多項式 P, Q, R に対し、変数 a_5 に対して、再度終結式を求めると $(1,0,0)$ で A_{19} 特異点を有するパラメータの条件を見出すことができる。

これらの得られた数を P, Q, R に代入することにより、吉原の定義式を得る。

4 謝辞

本研究の進めるにあたり大淵朗先生 (徳島大学)、泊昌孝先生 (日本大学) には、多くのご支援をいただきました。心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] H. Yoshihara. On plane rational curves. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 55(4):152–155, 1979.

過渡的ケーラー多様体上の有理型関数に対する ネヴァンリンナ理論

厚地 淳 (慶大理工)*

1 過渡的多様体

以下では、多様体はすべて連結とする。

M を リーマン多様体、 Δ_M を そのリーマン計量から定義されるラプラシアンとする。
熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_M u$ の最小基本解を $p(t, x, y)$ とする。

$$\int_0^\infty p(t, x, y) dt < \infty \quad (x \neq y, x, y \in M)$$

となるとき、 M を過渡的多様体 (transient manifold) と呼ぶことにする。このとき、 $G_M(x, y) := \int_0^\infty p(t, x, y) dt$ と置き、 M のグリーン関数と呼ぶ。すなわち、過渡的多様体とはグリーン関数が存在するリーマン多様体である。

M は与えられたリーマン計量に関し完備な過渡的多様体であるとする。任意の固定された $x_0 \in M$ に対し、

$$G_M(x_0, x) \rightarrow 0 \quad (d(x_0, x) \rightarrow \infty)$$

を満たすとき、 M は無限遠で正則 (regular at infinity) ということにする。無限遠で正則であるためには、端がある程度大きくなければならない。 M が放物的 (Grigoryan) あるいは小さい (Li-Tam) 端を持つならば、 M は過渡的であっても無限遠で正則ではない (次節を見よ)。

2 無限遠で正則なケーラー多様体

M を 完備ケーラー多様体とし、前節の意味で過渡的多様体とする。 $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ 。

例. $n = 1$ のとき。過渡的ケーラー多様体全体 $= O_G^c$ 。

Stoll, Griffiths-King らの意味での放物的多様体は、過渡的にも非過渡的にもなり得るものがある。(例. $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$))。

例 1. $n \geq 2$ とする。 M がリーマン多様体としてカルタン・アダマール多様体 (単連結、断面曲率が非正) ならば、無限遠で正則な過渡的多様体である。

2. M のリッチ曲率が非負で過渡的ならば、無限遠で正則な多様体である。

3. $M = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ とし、双曲計量から誘導される計量を考えると、曲率有界、完備過渡的であるが、無限遠で正則ではない。

* 〒 223-8522 神奈川県 横浜市港北区 日吉 3-14-1 慶應義塾大学理工学部数理科学科

e-mail: atsuji@math.keio.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:JP21K03299, JP25K07052) の助成を受けたものである。

関数論的に重要な例としては、プロパーに埋め込まれた $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体 (2 次元以上)、 $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) の有界強擬凸領域、超凸領域、ディリクレ問題の意味で正則な有界領域などは、適当な計量に関し無限遠で正則な過渡的多様体となる。

3 ネヴァンリンナの定理

M を無限遠で正則な過渡的ケーラー多様体とする. $x_0 \in M$ を任意に参照点として取り、 $\phi(x) := -\log G_M(x_0, x)$ によって、 M のエグゾースション関数を定義する. $B(r) := \{x \in M : \phi(x) < r\}$ と置く. 以下では、 $\phi = r$ の正則点 $r > 0$ a.e. について考える. $f : M \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を非定数正則写像とする.

$$\begin{aligned} m_{x_0}(r, a) &:= \int_{\partial B(r)} \log[f(x), a]^{-2} d\omega_r^{x_0}(x) \text{ 近接関数,} \\ N_{x_0}(r, a) &:= \int_{B(r)} G_r(x_0, x) d\nu_f^a(x) \text{ 個数関数,} \\ T_{x_0}(r) &:= \int_{B(r)} G_r(x_0, x) e_f(x) dV(x) \text{ 特性関数,} \\ N_1(r, x_0) &:= \int_{B(r)} G_r(x_0, x) d\nu_1(x), \quad N_{x_0}(r, \text{Ric}) := \int_{B(r)} G_r(x_0, x) R(x) dV(x), \\ N_G(r, x_0) &:= \int_{\partial B(r)} \log |\nabla \phi|^2(x) d\omega_r^{x_0}(x). \end{aligned}$$

ここで、 $[w, a] : \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ 上の弦距離、 $d\omega_r^{x_0}(x) : B(r)$ における x_0 に関する $\partial B(r)$ 上の調和測度、 $G_r(x_0, x) : B(r)$ 上のグリーン関数、 $e_f := \text{tr}_M(f^* g_{FS})$ 、 $dV(x) : M$ の体積測度、 $-R(x) := x$ におけるリッチ曲率の下限、 $d\nu_f^a : \frac{1}{2} \Delta_M \log[f, a]^{-2}$ のリース測度の負の部分などである. 詳細は講演中に与える. このように設定すると、まず第 1 主定理:

$$m_{x_0}(r, a) + N_{x_0}(r, a) = T_{x_0}(r) + \log[f(x_0), a]^{-2}$$

が得られ、さらに次の形の第 2 主定理も得られる.

[第 2 主定理] $a_1, \dots, a_q \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を異なる点とし、 $x_0 \in M$ は $f(x_0) \notin \{a_1, \dots, a_q\}$ 、 $e_f(x_0) \neq 0$ を満たすとする. $T_{x_0}(r) \uparrow \infty$ ($r \uparrow \infty$) ならば、ある対数測度有限な集合 $E \subset (0, \infty)$ の外で

$$\sum_{k=1}^q m_{x_0}(r, a_k) + N_1(r, x_0) \leq 2T_{x_0}(r) + N_{x_0}(r, \text{Ric}) + N_G(r, x_0) + O(\log T_{x_0}(r)) \quad (r \notin E)$$

が成り立つ.

$E \subset [0, \infty)$ が対数測度有限とは、 $\int_E \frac{dr}{\max\{r, 1\}} < \infty$ を満たすことである. なお、リッチ曲率が下に有界ならば、 $N_G(r, x_0)$ は r に関し有界となる.

$\mathbb{CP}^2$ の非特異複素曲線までの対数的 Fubini-Study 距離の Levi form の固有値

松本 和子 (東京理科大・創域理工)*

1. D を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) の (真部分) 領域, $\delta_{\partial D}$ を Fubini-Study 計量 ω_{FS} に関する境界距離関数とする. このとき, 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ は D 上多重劣調和であり,

$$i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_{\partial D}) \geq \frac{1}{3}\omega_{FS} \quad \text{on } D$$

という武内の不等式が成り立つ ([5], [6]). この不等式は $\mathbb{CP}^n$ 内の擬凸領域に関する種々の結果を導く際に基本的に重要である ([3], [4]).

「 $\mathbb{CP}^n$ ($n \geq 2$) には Levi 平坦な (補集合が擬凸である) 滑らかな実超曲面は存在しないであろう」という興味ある予想があり, $n \geq 3$ のときは曲面が C^2 級の場合に肯定的に解決されたが, $n = 2$ のときは曲面が実解析的の場合でさえ未解決である ([1], [4]).

今回, その非存在予想への応用の可能性を視野に入れて, $\mathbb{CP}^2$ 内の非特異複素曲線 S までの Fubini-Study 距離 δ_S に対し, $-\log \delta_S$ の Levi form を正確に計算し, 固有値を求めることができたので, その結果を報告する (特別な座標での法方向の結果は [2]).

2. $[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2]$ を $\mathbb{CP}^2$ の同次座標, (z_1, z_2) を $\mathbb{C}^2 \cong U_0 := \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid \zeta_0 \neq 0\}$ の非同次座標とし, 非特異複素曲線は $S = \{(t, f(t)) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in V\}$ と表されているとする ($V \subset \mathbb{C}$ は開集合, $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数).

$-\log \delta_S$ の Levi form の局所座標による成分表示は次の通りである.

定理 1 各 $p \in S$ に対し, p の近傍 $U_p \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ と, C^∞ 級の関数 $t_p : U_p \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ が存在して, $z \in U_p \setminus S$ に対し

$$\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) = \psi(\delta_S(z))g_{ij}(z) + [\varphi(\delta_S(z), t_p(z)) - \psi(\delta_S(z))]b_{ij}(z, t_p(z))$$

が成り立つ ($i, j = 1, 2$). ここで $(t_p(z), f(t_p(z)))$ は $z \in U_p$ に最も近い S の点を表す.

記号の定義は次の通りである.

- $|x| < \pi/2$, $t \in V \subset \mathbb{C}$ に対し,

$$\varphi(x, t) := \frac{\tan x}{2x} \cdot \frac{1 + \frac{|f''(t)|^2 \|F\|^6}{\|F \times F_t\|^6}}{1 - \frac{|f''(t)|^2 \|F\|^6}{\|F \times F_t\|^6} \cdot \tan^2 x}, \quad \psi(x) := \frac{\tan x + x(\tan^2 x - 1)}{4x^2 \tan x}.$$

- $t \in V \subset \mathbb{C}$ に対し, $F(t) := (1, t, f(t))$, $F_t(t) := (0, 1, f''(t))$, $F \times F_t = (tf'(t) - f(t), -f'(t), 1)$, $A(t) = (a(t), b(t), c(t)) := \langle F, F \rangle F_t - \langle F_t, F \rangle F$.

- $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ に対し, $Z := (1, z_1, z_2)$.

* 〒278-8510 野田市山崎 2641 東京理科大学 創域理工学部 数理科学科
e-mail: matsumoto_kazuko@rs.tus.ac.jp

- $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $t \in V$ に対し,

$$g_{ij}(z) := \frac{\partial^2 \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}, \quad (b_{ij})(z, t) := \frac{1}{\|A\|^2 \|Z\|^2} \begin{pmatrix} |b|^2 & \bar{b}c \\ \bar{c}b & |c|^2 \end{pmatrix}.$$

3. Levi form の固有値については次の結果が得られた.

定理 2 $z \in U_p$ に対し $\varphi^*(z) := \varphi(\delta_S(z), t(z))$, $\psi^*(z) := \psi(\delta_S(z))$ とおくと関数 φ^* , ψ^* は U_p で C^∞ 級であり, $i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_S)$ の Fubini-Study 計量 ω_{FS} に関する固有値になる.

定理 2 の前半は, 関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ の定義に現れる関数

$$\frac{\tan x}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{15} + \cdots, \quad \frac{\tan x + x(\tan^2 x - 1)}{4x^2 \tan x} = \frac{1}{3} + \frac{4x^2}{45} + \frac{32x^4}{945} + \cdots,$$

および $\tan^2 x$ が $|x| < \pi/2$ で解析的な偶関数であることと, 関数 δ_S^2 が U_p で C^∞ 級であることから従う. 後半は

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|A\| \|Z\|^2} \begin{pmatrix} \bar{b}\|Z\| & \bar{c}\|Z\| \\ az_2 - c & b - az_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

と変数変換すると, (ζ_1, ζ_2) , $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$, $z \in U_p$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \zeta_i \bar{\zeta}_j &= |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2, \\ \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 (-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \zeta_i \bar{\zeta}_j &= \varphi^*(z) |\eta_1|^2 + \psi^*(z) |\eta_2|^2 \end{aligned}$$

と表されることから従う.

4. 関数 $-\log \delta_S$ は S 上で $+\infty$ であるが, 定理 1 の右辺の関数は S 上でも定義され, S の近傍で C^∞ 級になる. また, Levi form の ω_{FS} に関する固有値は, 局所座標の取り方によらずに決まる. したがって, 次の大域的な結果が得られる.

定理 3 $\Omega \subseteq \mathbb{CP}^2$ を開集合, $S \subset \Omega$ を非特異複素曲線とする. このとき, S の近傍 $\Delta \subset \Omega$ が存在して, $i\partial\bar{\partial}(-\log \delta_S)$ は $\Delta \setminus S$ から Δ に自然に拡張され, Δ 上の C^∞ 級の形式になる. Levi form の 2 つの固有値も, Δ 上の C^∞ 級の関数とみなすことができる.

参考文献

- [1] A. Lins Neto, *A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 4, 1369–1385.
- [2] K. Matsumoto, *Takeuchi's equality for the Levi form of the Fubini-Study distance to complex submanifolds in complex projective spaces*, Kyushu J. Math. **72** (2018), no. 1, 107–121.
- [3] T. Ohsawa and N. Sibony, *Bounded p.s.h. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 1–8.
- [4] Y.-T. Siu, *Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3* , Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 3, 1217–1243.
- [5] A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159–181.
- [6] ———, *Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 323–357.

L^2 評価式, L^2 拡張定理と曲率の正値性

稲山貴大 (東京理科大学)*

2025 年 9 月 17 日

概 要

Hörmander の L^2 評価法や大沢–竹腰の L^2 拡張定理は複素解析学で重要な役割を果たしている．ここで，Hörmander の L^2 評価法とは，Hermite 計量が正値な曲率を持つとき， $\bar{\partial}$ 方程式が計量に関する L^2 ノルムの評価付きで解けることを保証する定理である．一方，大沢–竹腰の L^2 拡張定理とは，計量が正値な曲率を持つとき，部分多様体 (e.g. 超平面) で定義された L^2 正則関数が，全空間上の L^2 正則関数に， L^2 ノルムの評価付きで拡張できることを主張する定理である．近年これらの定理の逆が，様々な研究者により様々な方法で研究されてきた．本講演では，これらの進展について講演者の貢献を含む形で紹介する．時間があれば，今後の問題についても議論する予定である．

目 次

1	はじめに	1
2	中野/Griffiths 正値性	3
3	Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件	3
4	Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の逆	6
5	関連する問題，これからの問題	8

1 はじめに

概要で述べた Hörmander の L^2 評価法 [Hor65] と大沢–竹腰の L^2 拡張定理 [OT87] について，具体的に見ていく．まず，Hörmander の L^2 評価法について説明する．定理中の記号，定理の主張は [Dem], [Dem-book] の書き方に準拠する．

定理 1.1 ([Dem, Dem-book]) (X, ω) を完備ケーラー多様体と， ω をケーラー形式， $(E, h) \rightarrow X$ を中野正値な C^∞ 級計量 h を持つ X 上の正則ベクトル束 $E \rightarrow X$ とする．このとき，任意の $\bar{\partial}$ 閉な E 係数 (n, q) 形式 u ($q > 0$) であって $\int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega]^{-1} u, u \rangle_{\omega,h} dV_\omega < +\infty$ となるものに対し， E 係数 $(n, q-1)$ 形式 v で

* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学創域理工学部数理科学科

e-mail: inayama_takahiro@rs.tus.ac.jp

この研究は科学研究費助成事業，若手研究 (23K12978) の助成を受けています．

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32U05, Secondary 32A70, 32L20.

キーワード: Griffiths 正値性, 中野正値性, L^2 評価法, L^2 拡張定理

あって, $\bar{\partial}v = u$ かつ

$$\int_X |v|_{\omega,h}^2 dV_\omega \leq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega]^{-1}u, u \rangle_{\omega,h} dV_\omega \quad (1)$$

となるものが存在する.

簡潔に述べると, ベクトル束 (E, h) が中野正值なとき, $\bar{\partial}$ 方程式が不等式 (1) の形の L^2 ノルムの評価付きで解けることを主張している. この定理は複素解析学における最も基本的な定理の一つであり, 非常に重要な役割を果たしてきた.

続いて, 大沢–竹腰の L^2 拡張定理について述べる. 概要で述べた通り, 大沢–竹腰の L^2 拡張定理は, 部分多様体 (e.g. 超平面) で定義された L^2 正則関数が, 全空間上の L^2 正則関数に, L^2 ノルムの評価付きで拡張できることを主張する定理であり, こちらも様々な応用があることが知られている. 大沢–竹腰両氏によってある普遍的な定数により L^2 ノルムの評価が出来ることが発見されて以降, この定数の改良が様々な研究者によって行われ, 最終的に Blocki[Blo13], Guan–Zhou[GZ15] によってこの評価が最良化された. その後もこの最良 L^2 評価は特異計量に一般化されたり, sharper な評価に拡張されたりと様々な方向が模索されている. 今回は [GM24, GM25] によって得られた評価を紹介する.

定理 1.2 ([GM25]) (X, ω) を弱擬凸ケーラー多様体とする. また, $\psi < -T$ を X 上の quasi-psh 関数で, neat analytic singularities を持ち, また $Y := V(\mathcal{I}(\psi))$ に沿って log canonical singularities を持つものとする. また $E \rightarrow X$ を X 上の正則ベクトル束で, h を E 上の C^∞ 級計量とする. さらに, 以下の条件を仮定する:

- (1) $\sqrt{-1}\Theta_h + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E$ が中野の意味で $X \setminus \{\psi = -\infty\}$ 上成り立つ,
- (2) $\sqrt{-1}\Theta_h + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E + \frac{1}{s(-\psi)}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E$ が中野の意味で $X \setminus \{\psi = -\infty\}$ 上成り立つ.

このとき, 任意の $f \in H^0(Y^0, (K_X \otimes E)|_{Y^0})$ で

$$\int_{Y^0} |f|_{\omega,h}^2 dV_\omega[\psi] < +\infty$$

となるものに対し, ある $F \in H^0(X, K_X \otimes E)$ が存在し, $F|_{Y^0} = f$ かつ

$$\int_X c(-\psi)|F|_{\omega,h}^2 dV_\omega \leq \left(\frac{1}{\delta}c(T)e^{-T} + \int_T^\infty c(t_1)e^{-t_1}dt_1 \right) \int_{Y^0} |f|_{\omega,h}^2 dV_\omega[\psi]$$

が成立する.

細かい記号に関する説明は省略したが, 気になる読者の方々は是非原論文を参照していただきたい (ψ, c, s, δ, T 等を自明なものに取れば, よく知られる評価が出てくる). ちなみに, ベクトル束が直線束で有界擬凸領域の場合にシンプルな形で大沢–竹腰の L^2 拡張定理を述べると以下の通りとなる.

定理 1.3 ([Blo13, GZ15]) D を $D \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \{|z_n| < r\}$ for $r > 0$ を満たす有界擬凸領域とする. また, φ を Ω 上の多重劣調和関数で, H を $H := \Omega \cap \{z_n = 0\}$ で定まる超平面とする. このとき, $\int_H |f(z')|^2 e^{-\varphi(z',0)} d\lambda(z') < +\infty$ を満たす任意の L^2 正則関数に対して, ある Ω 上の正則関数 F が存在し, $F|_H = f$ かつ

$$\int_D |F(z', z_n)|^2 e^{-\varphi(z', z_n)} d\lambda(z', z_n) \leq \pi r^2 \int_H |f(z')|^2 e^{-\varphi(z',0)} d\lambda(z'),$$

を満たす.

この π が最良係数である. 今回重要となるのは, 計量が (何らかの意味で) 中野 (半) 正值であれば, (適切な意味で) 最良な L^2 拡張が出来るということである.

本誌でお話したいのは, これらの定理自身ではなく, ある意味でこれらの逆にあたる命題である. つまり, (特に正值とは仮定していない) 計量が Hörmander の L^2 評価法, または大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件を満たせば, その計量は”正值”になる, という主張である. これらの逆命題は, 純理論的な側面, 及び応用的な側面の両者から興味深いものだと思う. 本論にあたる前に, ここでいう”正值”の意味を明らかにしたい.

2 中野/Griffiths 正值性

(E, h) をベクトル束とその上の C^∞ 級計量, $\Theta_{E,h}$ を Chern 曲率とする. ある固定された点のまわりの局所座標 $(z_1, \dots, z_n)$ とその点での orthonormal frame $(e_1, \dots, e_r)$ を使って Chern 曲率を

$$\sqrt{-1}\Theta_h = \sum_{1 \leq j, k \leq n, 1 \leq \lambda, \mu \leq r} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu$$

と書く. よく知られた方法により, $TX \otimes E$ 上の Hermitian form $\tilde{\Theta}_h$ が, $\tau = \sum_{j,\lambda} \tau_{j\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} \otimes e_\lambda \in TX \otimes E$ に対し, 以下のように定まる:

$$\tilde{\Theta}_h(\tau, \tau) = \sum c_{jk\lambda\mu} \tau_{j\lambda} \bar{\tau}_{k\mu}.$$

任意の τ に対して $\tilde{\Theta}_h(\tau, \tau) \geq 0$ となるとき, h は中野半正值であるという (正值性も同様). また, 任意の $\xi \in TX, v \in E$ に対して $\tilde{\Theta}_h(\xi \otimes v, \xi \otimes v) \geq 0$ となるとき, h は Griffiths 半正值であるという (正值性も同様). 定義から, 中野正值性の方が強い条件であることが分かり, また真に強い概念であることも知られている (ベクトル束が直線束の場合, または多様体が一次元の場合は一致する). Hörmander の L^2 評価法, 大沢–竹腰の L^2 拡張定理, 及びコホモロジーの消滅定理等を導出するためには, 計量が中野正值でなければならないことが知られている.

3 Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件

本章では, 「計量が Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件を満たす」といったときの条件を詳しく述べる. 歴史的経緯についても軽く触れる.

筆者の知る限りでは、最初にこれらの逆命題が世に出てきたのは Berndtsson の論文 [Ber98] であると思われる。複素関数版の Prékopa の定理を示すにあたり、Berndtsson は $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数 φ に対して、任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ について $k\varphi$ に関して Hörmander の L^2 評価が成り立てば、 φ が劣調和になることを示している。何故思いついたのかは分からないが、非常に独創的なアイデアである。

続いて、Guan–Zhou は論文 [GZ15] で最良係数の L^2 拡張定理を証明した際、応用として Berndtsson の相対 Bergman 核の $\log$ 多重劣調和性の結果を、最良 L^2 拡張定理のある種の逆を用いることで簡潔に示した。このアイデアは非常に優秀で、今後の様々な研究の方向性を決定づけることとなる。

このアイデアは minimal extension property という名前で [HPS18] に輸入され、代数幾何学的な文脈で、ある種の順像層の正值性を示す方法として重要な役割を果たすこととなる。

一方 Deng–Wang–Zhang–Zhou は論文 [DWZZ24] にて、(上半連続な) 関数 φ について任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ について $k\varphi$ に関して (最良とは限らない) 大沢–竹腰の L^2 拡張定理が成り立てば、 φ 自身が多重劣調和関数になることを示した。これはいわば上の Berndtsson と Guan–Zhou の結果の融合/中間とも呼べるような結果である。ところで、今までは多重劣調和関数についてのみ述べてきたが、ベクトル束についても同様の条件/命題を考えることができる。

定義 3.1 (Multiple coarse L^p -extension condition [DNWZ23, DWZZ24]). (E, h) を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上のベクトル束と特異計量とし、 $p > 0$ とする。 (E, h) が次の条件を満たすとき、 (E, h) は *multiple coarse L^p -extension condition* を満たすという：任意の点 $z \in \Omega$ 、任意の元 $a \in E_z$ でノルムが有限 $|a|_{h_z} < +\infty$ なもの、及び任意の自然数 $m \geq 1$ に対して、ある $E^{\otimes m}$ の切断 f_m が存在し、 $f_m(z) = a^{\otimes m}$ かつ

$$\int_{\Omega} |f_m|^p \leq C_m |a^{\otimes m}|_{h^{\otimes m}}^p$$

が成り立つ。ここで、 C_m は z に無関係な定数で、 $\frac{1}{m} \log C_m \rightarrow 0$ を満たす。

Deng–Wang–Zhang–Zhou は彼らの論文で、 h^* が上半連続な特異計量 h が multiple coarse L^p -extension property を満たせば、 h が Griffiths 半正值であることを示した。(ここで特異計量 h が Griffiths 半正值であるとは、任意の E^* の局所正則切断 u に対し、 $\log |u|_{h^*}$ が多重劣調和関数となることをいう。)

筆者は大学院生時代上記の論文に非常に影響を受け、Hörmander の L^2 評価法版で上のような定理が成り立つかどうか考察した。まず最初の問題は、計量が特異計量である場合、定理 1.1 に表れる曲率作用素 $[\sqrt{-1}\Theta_h, \Lambda_\omega]$ (特に $\sqrt{-1}\Theta_h$) がそもそも定義できないという点である。筆者は細野元気氏と共同で、この問題を解決するために、twisted Hörmander condition という条件を論文 [HI21] で導入した。アイデアとしては、 ψ とい

う C^∞ 級強多重劣調和関数を h にかけ $he^{-\psi}$ という新たな計量を導入し、曲率作用素としては $e^{-\psi}$ の部分からくる $[\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi, \Lambda_\omega]$ の部分だけ考えるというものである。

定義 3.2 (twisted Hörmander condition, multiple L^p -estimate condition [HI21], [DNWZ23]). 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上のベクトル束と特異計量 (E, h) が *twisted Hörmander condition* を満たすとは、任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の強多重劣調和関数 ψ 、及び任意の $E^{\otimes m}$ 係数の閉 $(n, 1)$ 形式 v に対し、ある $E^{\otimes m}$ 係数 $(n, 0)$ 形式 u が存在し、 $\bar{\partial}u = v$ かつ

$$\int_{\Omega} |u|_{\omega, h^{\otimes m}}^2 e^{-\psi} \leq \int_{\Omega} \langle [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_{E^{\otimes m}}, \Lambda_\omega]^{-1} v, v \rangle_{\omega, h^{\otimes m}} e^{-\psi}$$

が成り立つ。ここで、 v は右辺の値が有限となるものを取ってきている。

この条件を世に出した後、Deng–Ning–Wang–Zhou が上記の右辺に定義 3.1 の C_m をかけ、2 を p に変えたものを導入し multiple L^p -estimate condition と呼び始めたが、あまり差はないため、混乱の恐れのない文脈では twisted Hörmander condition と multiple L^2 (or L^p)-estimate condition を特に区別せず使うこととする。

一方、Deng–Ning–Wang–Zhou は同論文にて上の条件の $m = 1$ のみを考えたものを *optimal L^p -estimate condition* と呼び、導入した（上の multiple coarse L^p -estimate condition で右辺に C_m をつけたのも、この条件との違いをより明確にするためかもしれない）。 $m = 1$ のみ考えても $m \in \mathbb{N}$ で $m \rightarrow \infty$ を考える場合と比べて主要な情報は得られなさそうな気がするが、実際には強力な結果が彼らによって得られた。詳細は次章以降で見えていく。

今後のため、既に書いた multiple L^p -estimate/extension condition 以外の 2 条件を [DNWZ23] に倣って以下に記す。簡単のため全て有界（擬凸）領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の条件として述べるが、一部はもう少し一般化された形でも述べられる。

定義 3.3 (Optimal L^p -estimate condition). 任意の強多重劣調和関数 ψ と任意の E 係数 $\bar{\partial}$ 閉 $(n, 1)$ 形式 v に対し、ある E 係数 $(n, 0)$ 形式 u が存在し、 $\bar{\partial}u = v$ かつ

$$\int_{\Omega} |u|_{\omega, h}^p e^{-\psi} \leq \int_{\Omega} \langle [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi, \Lambda_\omega]^{-1} v, v \rangle_{\omega, h}^{\frac{p}{2}} e^{-\psi}$$

が成り立つ。ここで、 v は右辺の値が有限となるものを取ってきている ^{*1}。

定義 3.4 (Optimal L^p -extension condition). 任意の $z \in \Omega, a \in E_z$ で $|a|_{h_z} = 1$ となるもの、また任意の holomorphic cylinder $P_{r,s,A}$ で $z + P_{r,s,A} \subset \Omega$ となるものに対して、ある $f \in H^0(z + P_{r,s,A}, E)$ が存在して $f(z) = a$ かつ

$$\frac{1}{|P_{r,s,A}|} \int_{z+P_{r,s,A}} |f|_h^p \leq 1$$

^{*1} 定義 3.2, 3.3 の v は C_c^∞ の元から取ってくるか L^2 の元から取ってくるか微妙な流儀の違いはあるが、ここでは混乱を避けるためあえて明示しない。結果に影響はない。

が成り立つ．ここで holomorphic cylinder $P_{r,s,A}$ とは, $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, $\mathbb{B}_s^m = \{z \in \mathbb{C}^m \mid |z| < s\}$, $A \in \mathbf{U}(n)$ に対して $P_{r,s,A} = A(\Delta_r \times \mathbb{B}_s^{n-1})$ で定義されるものである．

これは 1 点からの最良係数の L^p 拡張の条件に対応している．ここで holomorphic cylinder を考える理由は, 以下の技術的な補題による．

補題 3.5 ([DNW21, Lemma 3.1]) 上半連続な関数 φ が

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{|P_{r,s,A}|} \int_{z+P_{r,s,A}} \varphi$$

の形の平均値不等式を満たすとき, φ は多重劣調和となる．

以上をまとめると次のようになる．

	optimal	multiple (coarse)
L^p -estimate	Hosono–I., Deng–Ning–Wang–Zhou	Hosono–I.
L^p -extension	Guan–Zhou, HPS ^{*2} , DNWZ	Deng–Wang–Zhang–Zhou

(*2 Hacon–Popa–Schnell)

4 Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の逆

本章では, 前章で述べた条件を計量が満たすとき, 計量がどのような正值性を持つか述べる．これらが, 本誌で展開したい Hörmander の L^2 評価法/大沢–竹腰の L^2 拡張定理の逆にあたる命題である．特に何も述べない限り, $(E, h) \rightarrow \Omega$ は有界領域 Ω 上のベクトル束と (特異) 計量とする．

まず, Optimal L^p -estimate condition の逆について述べる．

定理 4.1 ([GZ15, HPS18, DNWZ23]) h を h^* が上半連続な特異計量とする．このとき, (E, h) が optimal L^p -extension condition を満たせば, (E, h) は Griffiths 半正となる．

証明は基本的には Jensen の不等式を上手く使うというもので, 非常にシンプルである．前章でも述べた通り, Guan–Zhou によってこのアイデアが見出され, Hacon–Popa–Schnell によって minimal extension property という名前で定式化され代数幾何学的な文脈で応用された後, Deng–Ning–Wang–Zhou によって今の形でまとめられた．

Multiple coarse L^p -estimate condition の逆についても, ほぼ同様にして次の結果が得られる．

定理 4.2 ([DNWZ23, DWZZ24]) h を h^* が上半連続な特異計量とする．このとき, (E, h) が multiple coarse L^p -estimate condition を満たせば, (E, h) は Griffiths 半正となる．

以上の結果をまとめると、計量が大沢–竹腰の L^2 拡張定理的な条件を満たせば、計量が Griffiths の意味で半正値性を持つことが分かる．一方で、定理 1.2 の条件を見ると、計量は中野正値性が仮定されている．そこで、計量が上述の条件を満たすとき、Griffiths 正値性よりも強い中野正値性が従うのか、という疑問が自然に思いつく．これは実際、論文 [DWZZ24] にて著者等によって提起された問題である．筆者は細野元気氏と共同で、論文 [HI21] にて反例を構成することに成功した．

定理 4.3 ([HI21]) $\mathbb{P}^n (n \geq 2)$ 上に下記の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

で定まるベクトル束 Q を考える．また $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$ 上の標準的なユークリッド計量 h_0 の商から定まる計量 h_q を考える．このとき、 h_q は multiple L^2 -extension condition を満たすが、中野半正値ではない．

証明のポイントは、multiple L^2 -extension condition は商にも遺伝するという点にある．この例によって、大沢–竹腰の L^2 拡張定理に相当する条件は Griffiths 半正値性を導くが、中野半正値性は導かない、つまり Griffiths 半正値性以上に強く、中野半正値性よりも真に弱い条件であるということが分かる（optimal L^2 -extension condition についても同様である）．

続いて、Hörmander の L^2 評価法の条件について考察する．筆者は論文 [HI21] にて、multiple L^2 -estimate condition の逆について、以下の形で定理を証明した．

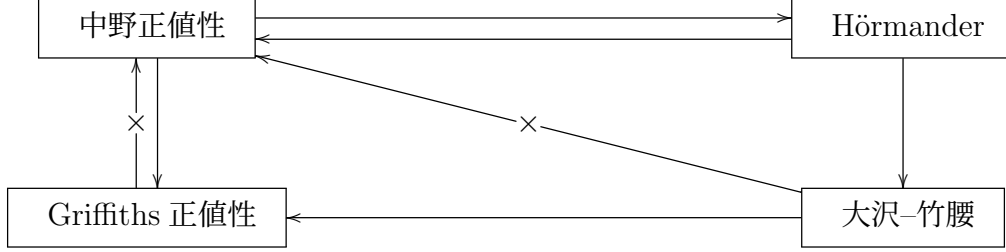
定理 4.4 ([HI21]) $\log |\bullet|_h$ が局所ヘルダー連続であると仮定する．このとき、 (E, h) が multiple L^2 -estimate condition を満たせば、 (E, h) は Griffiths 半正値となる．

その後、Deng–Ning–Wang–Zhou [DNWZ23] によって、“局所ヘルダー連続”が“連続”へ、“ L^2 ”が“ L^p ”へ一般化された．当然このような結果があると、Hörmander の L^2 評価法の条件から中野正値性は従うのか、という問いが考えられる．これは、我々の論文 [HI21] の Quesiton3.10 にて述べられている．その後この問題は Deng–Ning–Wang–Zhou によって（驚くべきことに）肯定的に解決された．詳しく述べると以下の通りとなる．

定理 4.5 ([DNWZ23]) C^∞ 級計量 h が optimal L^2 -estimate condition を満たすとき、 h は中野半正値となる．

これはつまり、 C^∞ 級計量については（twisted 分の差は除いて）Hörmander の L^2 評価の完全な逆が成り立つことを示している．すなわち C^∞ 級計量について、中野半正値であることと、（twisted 版の）Hörmander の L^2 評価が成り立つことは同値ということとなる．上記で見たように、大沢–竹腰の L^2 拡張定理の条件が Griffiths 半正値性しか導かなかったのに比べると、Hörmander の L^2 評価の条件は真に強い条件だということが分かる．

以上の関係をまとめると次のようになる (optimal と multiple coarse の違いは無視している)。



5 関連する問題，これからの問題

最後に，関連する問題について述べる．まず，乗数部分加群層 $\mathcal{E}(h)$ の接続性の問題がある．ここで乗数部分加群層とは，特異計量 h に対して，

$$\mathcal{E}(h)_x := \{s \in \mathcal{O}(E)_x \mid |s|_h^2 \in L^1_{\text{loc}(x)}\}$$

で定義される層，つまり h に関して局所二乗可積分な局所正則切断の芽のなす層である．直線束の場合は乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ と呼ばれ，Nadel によって導入された [Nad90]．さらに，Nadel は同論文で，特異計量が半正值性を持つ場合，乗数イデアル層が接続となることを示した．Hörmander の L^2 評価法を巧みに用いることで証明できるが，詳しくは原論文か [Dem] 等を参照していただきたい．

この Nadel の結果をベクトル束に一般化することを考える．そのために，まずベクトル束の特異計量の中野（半）正值性を定義する必要がある．この試みは，de Cataldo によって最初に行われた．de Cataldo は特異計量の中野正值性を，中野正值な C^∞ 計量の近似列のある種の収束先として定義し， $\mathcal{E}(h)$ の接続性を示した．この特異計量の定義は現状あまり採用されていないが，それでも Guan–Mi–Yuan [GMY24]，I.松村 [IM24] 等によって種々の一般化や応用が研究されている．他の定義としては，定義 3.3 の optimal L^2 -estimate condition を使うものが知られている．3 章で説明した通り，twisted Hörmander condition を導入した当初の目的が Hörmander の L^2 評価法の条件を特異計量に対して定義したかったということを考えると，自然な発想ではある．この定義で実際に C^∞ 級計量の場合中野正值性と同値になることは，定理 4.5 により保証されている．私は博士論文の一部で，この条件を用い，Stein 座標等と上手く組み合わせることで，特異計量の中野正值性の一般的な定義を一つ確立した [Ina22]．以上が，特異計量の中野正值性に対して現状知られている二つの主流な定義である．[IM24] の書き方に倣って書くと，以下の通りとなる．

定義 5.1 ([IM24]). ω をエルミート計量， h を h^* が上半連続な特異計量とする．以下

の条件が成り立つとき、特異計量の意味で

$$\sqrt{-1}\Theta_h \geq_{\text{Nak.}}^s 0$$

と書く：以下を満たすデータ $(\{X_j\}_{j=1}^\infty, \{\Sigma_{j,s}\}_{j,s=1}^\infty, \{h_{j,s}\}_{j,s=1}^\infty)$

- $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ は $X_j \Subset X_{j+1} \Subset X$ を満たす X の開被覆である,
- $\Sigma_{j,s} \subset X_j$ は X_j の (proper closed) 解析的部分集合である:
- $h_{j,s}$ は $E|_{X_j \setminus \Sigma_{j,s}}$ の C^2 計量であって, $h_{j,s}^*$ は X 上, 上に局所有界である

が, 次の条件 (a), (b) を満たしている

(a) $\Sigma_j := \bigcup_{s=1}^\infty \Sigma_{j,s}$ とする. 任意の点 $x \in X_j \setminus \Sigma_j$ と元 $e \in E_x$ に対し,

$$|e|_{h_{j,s}} \nearrow |e|_h \text{ as } s \nearrow \infty$$

が成り立つ,

(b) $\overline{X_j}$ 上の連続関数 $\lambda_{j,s}, \lambda_j$ が存在し,

- $0 \leq \lambda_{j,s} \leq \lambda_j$ が X_j 上成り立つ,
- $\lambda_{j,s} \rightarrow 0$ が a.e. で X_j 上成り立つ,
- $\sqrt{-1}\Theta_h \geq_{\text{Nak.}} -\lambda_{j,s}\omega \otimes \text{Id}_{E_{h_{j,s}}}$ が任意の点 $x \in X_j \setminus \Sigma_j$ について成り立つ.

定義 5.2 ([IM24]). h を h^* が上半連続な特異計量とする. 以下の条件が成り立つとき, 特異計量の意味で

$$\sqrt{-1}\Theta_h \geq_{\text{Nak.}}^{L^2} 0$$

と書く: 任意の $E|_\Omega \cong \Omega \times \mathbb{C}^r$ を満たす Stein 座標, Ω 上の Kähler 形式 ω_Ω , 強多重劣調和関数 ψ , $\bar{\partial}$ 閉な $v \in L_{n,q}^2(\Omega, E; \omega_\Omega, h e^{-\psi})$ で $\int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E, \Lambda_{\omega_\Omega}]^{-1}v, v \rangle_{\omega_\Omega, h} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega} < +\infty$ となるものに対し, ある $u \in L_{n,q-1}^2(\Omega, E; \omega_\Omega, h e^{-\psi})$ が存在し, $\bar{\partial}u = v$ かつ

$$\int_\Omega |u|_{\omega_\Omega, h}^2 e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega} \leq \int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E, \Lambda_{\omega_\Omega}]^{-1}v, v \rangle_{\omega_\Omega, h} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega}$$

が成り立つ.

混乱を避けるためこれ以上細かく述べることはしないが, 細かい記号の説明や背景等が気になる方は当該論文を参照していただきたい (半正値性だけでなく, 連続な $(1,1)$ 形式 θ に対して曲率が θ 以上という概念も定義できる). 簡潔に述べると, 定義 5.1 は下から単調増加する中野半正値な (正確には少々負値性を許容した) C^∞ 級計量が存在するという仮定した定義であり, 定義 5.2 は各 Stein 座標上で twisted 型の Hörmander の L^2 評価法 (optimal L^2 -estimate condition) が成り立つことを仮定した定義である. 定義 5.1 は近似列の意味で中野正値, 定義 5.2 は L^2 評価の意味で中野正値と呼ばれたりする. ちなみに我々によって, 定義 5.1 が成り立つならば, 定義 5.2 が成り立つことが証明されている. これを読んだ読者の中には, どのようにしてこの定義を確かめるのかと

疑問に思う方もいるかもしれないが、代数幾何学的な設定で定まる標準的な順像層が、定義 5.1 または定義 5.2 の意味で中野正值であることが証明できる。例えば、 $f: X \rightarrow Y$ を proper Kähler fibration とし、 $(L, h) \rightarrow X$ を半正值な特異計量 h を持つ X 上の直線束としたとき、 $f_*(\mathcal{O}_X(K_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(h))$ が定義 5.2 の意味で中野正值であることが証明できる（論文 [HPS18] では、これが Griffiths 半正值であることが証明されている）。詳しくは [IM24] および [IMW24] を確認していただきたい。

乗数部分加群層の接続性の話に戻ると、特異計量 h が定義 5.1 または定義 5.2 の意味で中野正值であれば、対応する乗数部分加群層 $\mathcal{E}(h)$ が接続となることが知られている（定義 5.1 の場合は [IM24]、定義 5.2 の場合は [HI21, Ina22]）。これは自然と想定される結果で、というのも Nadel や de Cataldo による証明はいずれも Hörmander の L^2 評価法を用いるものであり、定義 5.1 及び定義 5.2 からは Hörmander の L^2 評価法が自然に従うからである。

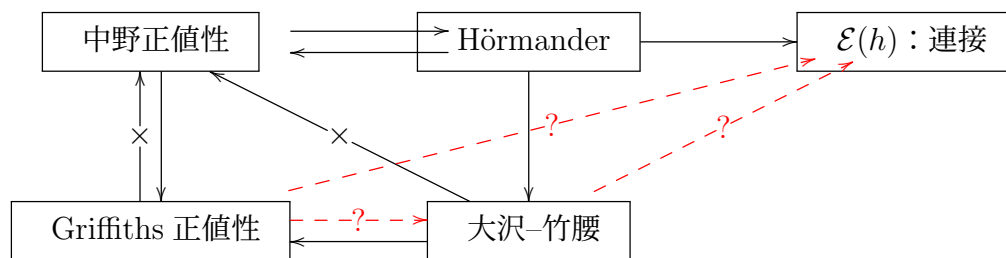
ここで問題となるのは、 h が Griffiths 半正值しか持たない場合に、 $\mathcal{E}(h)$ が接続層になるのか、ということである。これは実際に論文 [Ina22b] にて筆者によって提起された予想である。中野正值性の場合との一番の違いは、Hörmander の L^2 評価法が使えない点にある。これは C^∞ 級計量の場合ですらそうで、というのも、定理 4.5 により、計量が中野正值であることと、その計量に関して（twisted 型の）Hörmander の L^2 評価ができることが同値だからである。そのため、この予想解決のためには、根本的に新しいアイデアが必要となる。とはいえ、ある程度部分的な結果も分かっている。まず、筆者自身によって、 $\det h$ の特異点が孤立していれば、 $\mathcal{E}(h)$ が接続となることが証明されている。この仮定は様々な数学者によって弱められており、例えば Yongpan Zou は論文 [Zou22] にて、 $\det h$ が解析的特異点を持てば、 $\mathcal{E}(h)$ が接続となることを証明した。しかしこれらの結果はいずれも Hörmander の L^2 評価法を”より”上手く使うという手法で証明されており、完全に解決するには更に新しいアイデアが必要となるであろう。

最後に、これからの問題についていくつか述べて本論を終わりにしたい。まず、特異計量の中野正值性の定義である。定義 5.1 も定義 5.2 も近似列の存在や L^2 評価を前提としており、それ故これらは最も理想的な定義とは言えない。各点の周りでいくつか局所正則切断を取り、Griffiths 半正值性のように素朴に定義する方法が理想的であると多くの人が考えていると思われるが、結実には至っていない。実際に Dror Varolin によってそのような新たな定義が提唱されたりもしたが、gap が指摘されたようである。これに関して個人的な考えを述べると、純理論的には、いずれ理想的な定義が見つかり、そこから定義 5.1 や 5.2 が”定理”として導かれるのが理想だとは思いますが、現状かなり難しい問題だと思われる。一方応用的側面としては、現状の定義でもある程度良いだろうと考えている。例えばある種の順像層が理想的な定義の上で中野正值であることを示しても、そこから導きたいのは Hörmander の L^2 評価や、そこからのコホモロジーの消滅定理等であり、「理想的な定義の意味で中野正值」 $\implies$ 「 L^2 の意味で中野正值」の部分は純粋な一

般論だからである．少なくとも C^∞ 級計量の場合は通常の意味で中野正值であることと L^2 の意味で中野正值であることは同値なので，特異計量が L^2 の意味で中野正值であれば C^∞ 級計量の場合に期待されるような種々の性質が成り立つことが示されている以上 ([Ina22])，理論を回す上で計量に関して Hörmander 型の L^2 評価が出来ていれば一旦中野正值ということで落ち着くというのは，それほど悪いものでもないだろうと思う．

次に， h が Griffiths 半正值のときの $\mathcal{E}(h)$ の接続性の問題である．上述した通りこれ自体未解決で解くべき問題ではあるが，これは次の方針で考えることもできる．まず，計量が Griffiths 半正值であれば最良係数の大沢–竹腰の L^2 拡張定理が成り立つかという問題を考える（これは一部の数学者は正しいと信じているようである）．次に，大沢–竹腰の L^2 拡張定理を使って $\mathcal{E}(h)$ の接続性が言えるかという問題を考える．このどちらも正しいければ，上記の予想は解決でき，またそれぞれ独立した問題であるため，どちらか片方だけ証明できるだけでも十分な進展であるように思える．しかしどちらも根拠らしい根拠がない状況なので，全くの筋違いかもしれない．

以上をまとめると次のようになる．



参考文献

- [Ber98] B. Berndtsson, *Prekopa’s theorem and Kiselman’s minimum principle for plurisubharmonic functions*, Math. Ann. **312** (1998), 785–792.
- [Blo13] Z. Błocki, *Suita conjecture and the Ohsawa–Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. **193**, (2013), 149–158.
- [deC98] M. A. A. de Cataldo, *Singular Hermitian metrics on vector bundles*, J. Reine Angew. Math. **502** (1998), 93–122.
- [Dem] J.-P. Demailly, *Analytic methods in algebraic geometry*, Surveys of Modern Mathematics, vol. 1, International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012.
- [Dem-book] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.
- [DNW21] F. Deng, J. Ning, and Z. Wang, *Characterizations of plurisubharmonic functions*, Sci. China Math. **64**, (2021), 1959–1970.
- [DNWZ23] F. Deng, J. Ning, Z. Wang, and X. Zhou, *Positivity of holomorphic vector bundles in terms of L^p -estimates for $\bar{\partial}$* , Math. Ann. **385** (2023), 575–607.

- [DWZZ24] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang, and X. Zhou, *New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves*, American Journal of Mathematics **146**, (2024), no. 3, 751–768.
- [GM24] Q. Guan, Z. Mi, and Z. Yuan, *Optimal L^2 extension for holomorphic vector bundles with singular Hermitian metrics*, Peking Math J (2024).
- [GM25] Q. Guan, Z. Mi, and Z. Yuan, *Guan–Zhou’s unified version of optimal L^2 extension theorem on weakly pseudoconvex Kähler manifolds* J. Math. Soc. Japan **77** (2025), no. 1, 167–188.
- [GZ15] Q. Guan and X. Zhou, *A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 3, 1139–1208.
- [HPS18] C. Hacon, M. Popa, and C. Schnell, *Algebraic fiber spaces over Abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Paun*, Contemp. Math. **712** (2018), 143–195.
- [Hor65] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.
- [HI21] G. Hosono and T. Inayama, *A converse of Hörmander’s L^2 -estimate and new positivity notions for vector bundles*, Sci. China Math. **64** (2021), 1745–1756.
- [Ina22] T. Inayama, *Nakano positivity of singular Hermitian metrics and vanishing theorems of Demailly–Nadel–Nakano type*, Algebraic Geometry **9** (2022), 69–92.
- [Ina22b] T. Inayama, *Singular Hermitian metrics with isolated singularities*, Nagoya Math. J. **248** (2022), 980–989.
- [IM24] T. Inayama, S. Matsumura, *Nakano positivity of singular Hermitian metrics: Approximations and applications*, arXiv:2402.06883.
- [IMW24] T. Inayama, S. Matsumura, and Y. Watanabe, *Singular Nakano positivity of direct image sheaves of adjoint bundles*, arXiv:2407.11412.
- [Nad90] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.
- [OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195**, (1987), no. 2, 197–204.
- [Zou22] Y. Zou, *Note on the singular Hermitian metrics with analytic singularities*, arXiv:2209.05053.