日本数学会

2025年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2025年9月

於　名古屋大学

日本数学会

2025年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2025年9月

於　名古屋大学

無 限 可 積 分 系

9月16日(火)　第VII会場

9:30〜11:45

			(分)	頁
1	重富尚太 (九大IMI) 梶原健司 (九大IMI) 鍛冶静雄 (九大IMI・京大理)	カライドサイクルの存在証明	(15)	1
2	S. M. Mihalache (東大数理) 持田知朗 (東北大理)	From polygon equations to simplex equations	(15)	3
3	澁川陽一 (北大理) D. Ferri (Univ. of Turin)	箙上のヤン・バクスター方程式とガーサイド理論 (1)	(15)	5
4	澁川陽一 (北大理) D. Ferri (Univ. of Turin)	箙上のヤン・バクスター方程式とガーサイド理論 (2)	(15)	7
5	河本陽介 (岡山大環境生命) A. I. Bufetov (Steklov Math. Inst. RAS, etc.)	Boundary Feller–Dynkin processes associated with Laguerre processes	(15)	9
6	大久保勇輔 (摂南大工)	N=1 超対称 Virasoro 代数と自由 fermion 代数の直和の q-変形における Kac 行列式	(15)	11
7	井上玲 (千葉大理) 国場敦夫 (東大総合文化) 寺嶋侑二 (東北大理) 八木絢彌 (清華大)	トーラス上の量子化 6 頂点模型	(15)	13
8	大島利雄 (東大*)	超平面配置に対数的特異点をもつ Pfaff 系の変換	(15)	15

14:15〜15:20

			(分)	頁
9	渋川元樹 (北見工大工) 土見怜史 (近畿大総合理工)	A degeneration of the generalized Zwegers' μ-function according to the Ramanujan difference equation	(15)	17
10	大山陽介 (徳島大理工)	Connection problems on q-Lommel functions	(15)	19
11	新井由美 (お茶の水女大人間文化)	On q-middle convolution and generalized q-hypergeometric equation	(15)	21
12	藤井大計 (神戸大理) 信川喬彦 (皇學館大教育)	Kajihara の q 超幾何関数 $\Phi^m_{1,1}$, $\Phi^m_{2,0}$ の線形関係式	(15)	23

15:30〜16:30　特別講演

	間瀬崇史 (東大数理)	Exact calculation of degrees for lattice equations		25

9月17日(水)　第VII会場

9:30〜10:35

			(分)	頁
13	島崎達史 (神戸大理) 信川喬彦 (皇學館大教育) 藤井大計 (神戸大理)	Grothendieck 多項式の特殊値と超幾何函数との関係	(15)	43

14 新川恵理子 (東北大MathCCS)
青影一哉 (有明工高専)
山田裕史 (立教大理)
Virasoro action on Schur Q-functions and Pfaffian identities ····· (15) 45

15 濱中真志 (名大多元数理)
Shangshuai Li (上海大)
Shan-Chi Huang (名大多元数理)
Da-Jun Zhang (上海大)
4 次元 Wess–Zumino–Witten 模型のソリトン解と共鳴 ····· (15) 47

16 髙﨑金久 (阪公大数学研・京大*)
Large BKP vs. B-Toda in Lax–Sato form ····· (15) 49

10:45〜11:45　特別講演

児玉裕治 (Ohio State Univ.)♭
KP solitons and the Schottky uniformization ····· 51

カライドサイクルの存在証明

重富尚太　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)[*1]
梶原健司　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)
鍛冶静雄　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所/京都大学理学研究科)

概　　要

カライドサイクルとは，k 個の合同な等面四面体から作られる環状リンク機構である．この機構の特徴の一つとして，バブルリングのように変形する点が挙げられる．この動きを離散曲線の変形として捉えれば，それは可積分系で記述できることが知られているが，そもそもこの機構が存在するかは未証明であった．本講演では，繋ぐ四面体の数 k が 6 以上であれば，カライドサイクルが存在する事を証明する．

1. 背景

カライドサイクルは捩率角一定離散曲線としてモデル化可能で，その変形が可積分系で記述できることが知られている [1, 2]．一方で，半離散 sine-Gordon 方程式・半離散 mKdV 方程式に従って変形する捩率角一定離散曲線の明示公式も楕円テータ函数で構成されている [2] が，曲線が閉じるようなパラメータの存在については，一部を除いて数値実験でしか確認されていなかった．

楕円テータ函数の周期格子を $\Omega = \mathbb{Z} + iy\mathbb{Z},\ y > 0$ と取り，パラメータ $r \in \mathbb{R} \setminus (1/2\mathbb{Z})$, $v \in \mathbb{R} \setminus (y\mathbb{Z})$ と時間変数 $t \in \mathbb{R}$，仮想的な変数 $z \in \mathbb{C}$ に対して τ 函数を

$$\begin{aligned} F_n(t,z) &= \alpha_2 \exp\left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3-\Delta_1}z + \frac{C}{2}tz\right)\vartheta_2\left(\mu_n - \frac{1}{2}iv + it\right), \\ H_n(t,z) &= \frac{u_2}{\alpha_2 s_2}R_1^{-n}R_3^{-n}\exp\left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3-\Delta_1}z + \frac{C}{2}tz + \Gamma it\right)\vartheta_4\left(\mu_n - \frac{1}{2}iv - 2r + it\right), \end{aligned} \tag{1}$$

で定め，空間離散曲線 γ を

$$\gamma_n(t) = \left(\frac{H_n + H_n^*}{F_n},\quad \frac{H_n - H_n^*}{iF_n},\quad n - 2\frac{\partial \log F_n}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} \in \mathbb{R}^3,\ (n \in \mathbb{Z}) \tag{2}$$

で定める．(ただし，$C, \Gamma, \alpha_2, R_1, R_3, \Delta_1, \Delta_3, u_2, s_2$ は，v, r, y と楕円テータ函数を用いて表される定数.) このとき γ は n, t によらずセグメント長 $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ と捩率角 λ が一定になっている [2]．また，離散フレネ枠や曲率角 κ と捩率角 λ も τ 函数により明示的に構成できる．

四面体数 k のカライドサイクルの変形をモデル化するには，$\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$，つまり，

$$\begin{aligned} \left.\frac{H_{n+k}}{F_{n+k}}\right|_{z=0} &= \left.\frac{H_n}{F_n}\right|_{z=0}, \\ n+k-2\left.\frac{\partial \log F_{n+k}}{\partial z}\right|_{z=0} &= n - 2\left.\frac{\partial \log F_n}{\partial z}\right|_{z=0}, \end{aligned} \tag{3}$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ で成立するようなパラメータ v, r, y を見つける必要がある．

[*1] e-mail: s-shigetomi@imi.kyushu-u.ac.jp

2. γ が閉曲線になるパラメータの存在証明

本研究では，$k \geq 6$ であれば (3) を満たすパラメータが存在することを証明した．したがって，任意の $k \geq 6$ の四面体からなるカライドサイクルの存在が示されたことになる．

Theorem 1. $k \geq 6$ を固定する．あるパラメータ v, r, y が存在して，(2) で定まる捩率角一定離散曲線について，任意の $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ で $\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$ が成立する．

証明の概略は以下の通りである：曲線 (2) に対して，まず曲率角 κ が周期 k を持つことから，$m := kv/y$ の整数性が要求される．m が整数であるという条件の下，楕円テータ函数の擬周期を使って (3) を書き直すと，

$$\exp(\pi i m)\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k}+\frac{r}{iy};\frac{i}{y}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k}+\frac{r}{iy};\frac{i}{y}\right)}{\vartheta_1\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k}+\frac{r}{iy};\frac{i}{y}\right)\vartheta_3\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k}+\frac{r}{iy};\frac{i}{y}\right)}\right]^k - 1 = 0, \tag{4}$$

$$(\Delta_3 + \Delta_1)\, k - 4\pi i m = 0, \tag{5}$$

を得る．次に，m が整数であるという条件下で (5) を考える．y がある範囲にあるとき，(5) を満たす $r = r(y)$ が一意的に定まり，$r(y)$ は楕円積分で明示的に求められる．さらに，楕円テータ函数の無限積による表示 [3] を使い (4) を書き直し，$r(y)$ を (4) に代入すると，$m \geq 3$ なら (4) を満たす y が存在することが言える．最後に，カライドサイクルの形状を保つような m の変換を考えることで $0 < m \leq k/2$ を仮定できることを確かめ，$k \geq 6$ なら (4),(5) を満たす r, y, v が存在することが示される．

証明中の計算は複雑なため，詳細は講演で提示する．証明中に登場する整数 m は自己絡み数などとの関連が示唆されており，今後は幾何学的な意味を検討したい．

参考文献

[1] S. Kaji, K. Kajiwara and H. Park, Linkage Mechanisms Governed by Integrable Deformations of Discrete Space Curves. In Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures, N. Euler and M. C. Nucci (eds.), Volume 2, CRC Press, 2019, 356–381, https://doi.org/10.1201/9780429263743.

[2] S. Kaji, K. Kajiwara and S. Shigetomi, An explicit construction of Kaleidocycles by elliptic theta functions, arXiv:2308.04977.

[3] S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta vocabulary I, Journal of Geometry and Physics, 94:19–31, 2015.

From polygon equations to simplex equations

Serban Matei Mihalache　(東京大学)[*1]
持田　知朗　(東北大学)[*2]

1 はじめに

Kashaev と Sergeev [3] は pentagon equation の解とその dual の解がとある交換条件を満たすとき，それらから tetrahedron equation と 4-simplex equation の解が導出できることを示した．Dimakis と Müller-Hoissen [2] は pentagon equation を拡張して polygon equation を定義し，上記の 4-simplex equation 導出の一般化を行った．その他，4-simplex equation 側の議論には Dimakis と Korepanov [1] によるものもあるが，tetrahedron equation 側の一般化は未知である．さらに交換条件については各 n に対して個別には導出できるものの，一般次元についてまとまった記述はされていない．

本稿ではこの問題に対して，交換条件の明示的な記述とともに Kashaev と Sergeev による二つの simplex equation の解の導出を一般次元へと拡張する．具体的には $(2n+1)$-gon equation の解とその dual の解が交換条件を満たすとき，そこから $(2n-1)$-simplex equation と $2n$-simplex equation の解が得られることを紹介する．

2 Simplex and polygon equations

ここでは簡単に simplex equatin と奇数次の polygon equation (odd-gon equation) を紹介する．以下，ある体 $\Bbbk$ 上のベクトル空間 V を固定し，線形写像やテンソル積等は全て $\Bbbk$ 上のものであると仮定する．

定義 1 (Simplex equation)**.** 自然数 n に対して，n-simplex equaiton とは線形写像 $R\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ に関する $V^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}$ 上の次の方程式のことをいう：

$$R_{a_1} R_{a_2} \cdots R_{a_{n+1}} = R_{a_{n+1}} \cdots R_{a_2} R_{a_1}.$$

ここに，各添字 $a_i = [\, a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}\,]$ は多重指数で R がどの成分に作用するかを表し，次の行列 A_n により帰納的に与えられる：

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} + [\, n\,]_{n,n-1} & \\ n & & & \end{array}\right], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

但し，$[k]_{i,j}$ で成分が全て k の $i \times j$ 行列を表す．

定義 2 (Polygon (odd-gon) equation)**.** 自然数 n に対して，$(2n+1)$-gon equaiton (resp. その dual) とは線形写像 $T\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ に関する $V^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}$ 上の次の方程式のことを

[*1] e-mail: mateimihalache@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
[*2] e-mail: tomorou.mochida.r5@dc.tohoku.ac.jp

いう：

$$T_{b_1}T_{b_2}\cdots T_{b_{n+1}} = T_{c_n}T_{c_{n-1}}\cdots T_{c_1} \quad (\text{resp. } T_{b_{n+1}}T_{b_n}\cdots T_{b_1} = T_{c_1}T_{c_2}\cdots T_{c_n}).$$

ここに，各添字 $b_i = [\,b_{i,1},\ldots,b_{i,n}\,]$, $c_j = [\,c_{j,1},\ldots,c_{j,n}\,]$ はそれぞれ次の行列 B_{2n+1}, C_{2n+1} により与えられる：

$$B_{2n+1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A_n, \quad C_{2n+1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 2 & & & \\ \vdots & & C_{2n-1} + [\,n\,]_{n-1,n-1} & \\ n & & & \end{array}\right], \quad C_3 = [\,1\,].$$

3 主結果

定理 3. T を $(2n+1)$-gon equation，S をその dual の解とし，次の交換条件を満たすとする：

$$T_{d_{n+1}}S_{e_n}\cdots T_{d_2}S_{e_1}T_{d_1} = S_{f_1}T_{g_1}S_{f_2}\cdots T_{g_n}S_{f_{n+1}}.$$

但し，

$$e_{i,j} = i + (j-1)n, \quad g_{i,j} = j + (i-1)n \quad (1 \le i, j \le n),$$

$$D_{2n+1} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & \\ 1+n & & D_{2n-1} + \widetilde{D}_{2n+1} & \\ \vdots & & & \\ 1+(n-1)n & & & \end{array}\right], \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\left(\left[\widetilde{D}_{2n+1}\right]_{i,j} = \begin{cases} n+i & \text{if } i \le j, \\ n+i-1 & \text{if } j < i \end{cases} \quad (1 \le i \le n,\, 1 \le j \le n-1) \right),$$

$$F_{2n+1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1+n & \cdots & 1+(n-1)n \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & F_{2n-1} + \begin{bmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{bmatrix} & \\ \vdots & & & \\ n & & & \end{array}\right], \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

このとき，

$$R_{2n} = P_{1,2}P_{3,4}\cdots P_{2n-1,2n}T_{2,4,\ldots,2n}S_{1,3,\ldots,2n-1},$$
$$R_{2n-1} = P_{2,3}P_{4,5}\cdots P_{2n-2,2n-1}S_{1,2,4,\ldots,2n-2}T_{1,3,5,\ldots,2n-1}$$

はそれぞれ $2n$-simplex equation, $(2n-1)$-simplex equation の解である．ここに，$P\colon V \otimes V \ni x \otimes y \to y \otimes x \in V \otimes V$.

参考文献

[1] A. Dimakis and I. G. Korepanov. “Grassmannian-parameterized solutions to direct-sum polygon and simplex equations”. In: *J. Math. Phys.* 62.5 (2021).

[2] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen. “Simplex and polygon equations”. In: *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 11 (2015), pp. 042, 49.

[3] R. M. Kashaev and S. M. Sergeev. “On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations”. In: *Comm. Math. Phys.* 195.2 (1998), pp. 309–319.

箙上のヤン・バクスター方程式とガーサイド理論 (1)

箙上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造圏・構造亜群

澁川　陽一　(北海道大学)[*1]
Davide Ferri　(University of Turin)

概　要

文献 [3] に従い，箙上のヤン・バクスター方程式の (適切な性質をもつ) 解が定める構造圏のガーサイド理論的性質について報告する．箙上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造亜群のガーサイド理論的性質についても合わせて報告する．

1　箙上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造圏

頂点集合 Λ を固定した箙 (クイバー) 全体は，ファイバー積に関してテンソル圏をなす．このテンソル圏におけるヤン・バクスター方程式 (ブレイド関係式)

$$(\sigma\otimes 1)\circ(1\otimes\sigma)\circ(\sigma\otimes 1)=(1\otimes\sigma)\circ(\sigma\otimes 1)\circ(1\otimes\sigma)$$

の箙 $\mathscr{A}$ 上の解 $\sigma:\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$ が次の 2 つの性質を満たすとする．

非退化 (nondegenerate)　$\sigma(a,b)=(a\rightharpoonup b, a\leftharpoonup b)$ $((a,b)\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{A})$ と書くとき，写像
$a\rightharpoonup_ : {}_{t(a)}\mathscr{A}\to{}_{s(a)}\mathscr{A}$, $_\leftharpoonup b:\mathscr{A}_{s(b)}\to\mathscr{A}_{t(b)}$ が任意の $a,b\in\mathscr{A}$ に対し全単射．

対合的 (involutive)　$\sigma^2=1_{\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}}$．

ここで，$a\in\mathscr{A}$ に対し，その source を $s(a)\in\Lambda$，target を $t(a)\in\Lambda$ と書いた．また，${}_\lambda\mathscr{A}$ は $s(a)=\lambda(\in\Lambda)$ となる $a\in\mathscr{A}$ 全体，$\mathscr{A}_\lambda$ は $t(a)=\lambda$ となる $a\in\mathscr{A}$ 全体を表す．

このような解 $\sigma:\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$ に対し，$a\star b:=(a\rightharpoonup_)^{-1}(b)$ とする $(b\in{}_{s(a)}\mathscr{A})$．

定理 1. 構造圏 $\mathscr{C}(\sigma)$ を，箙 $\mathscr{A}$ から定まる自由圏の剰余圏として

$$\mathscr{C}(\sigma)=\langle\mathscr{A}\mid\{x|y\sim(x\rightharpoonup y)|(x\leftharpoonup y)\mid(x,y)\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}\}\rangle$$

と定めると，次が成り立つ [3].

(1.1) 写像 $j:\mathscr{A}\ni a\mapsto[a]\in\mathscr{C}(\sigma)$ は埋め込み．
(1.2) $\mathscr{C}(\sigma)=\langle\mathscr{A}\mid\{x|(x\star y)\sim y|(y\star x)\mid x\neq y\in\mathscr{A}, s(x)=s(y)\}\rangle$．
(1.3) $\mathscr{C}(\sigma)$ は非自明な可逆元を持たない．
(1.4) $\mathscr{C}(\sigma)$ は左簡約的．すなわち，$fg=fg'\Rightarrow g=g'$．

[*1] 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目　北海道大学理学部数学
本研究は科研費 (課題番号:JP17K05187, JP23K03062) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 08A50, 16T25
キーワード：ヤン・バクスター方程式, 箙 (クイバー), ガーサイド理論

(1.5) $\mathscr{C}(\sigma)$ はガーサイド族 E をもつ (E は射の部分集合).

定理 1 より，$\mathscr{C}(\sigma)$ の射 f は，E-標準分解と呼ばれる次のような分解を一意的に持つ.

$$\begin{aligned}&f = f_1 f_2 \cdots f_p \quad (f_i \in E \setminus \mathbf{1}_{\mathscr{C}(\sigma)}),\\ &s \preccurlyeq g f_i f_{i+1}, s \in E \Rightarrow s \preccurlyeq g f_i \ (\forall i = 1, 2, \ldots, p-1).\end{aligned}$$

ただし，$x \preccurlyeq y$ $(x, y \in \mathscr{C}(\sigma)) \Leftrightarrow \exists x' \in \mathscr{C}(\sigma); xx' = y$. また，剰余圏 $\mathscr{C}(\sigma)$ の恒等射全体を $\mathbf{1}_{\mathscr{C}(\sigma)}$ と表す.

2 構造亜群

Λ 上の箙 $\mathscr{A}$ に対し，その反転箙を $\overline{\mathscr{A}}$ と書き，その射を表すのに $\bar{x}$ $(x \in \mathscr{A})$ という記号を用いる．さらに，double と呼ばれる Λ 上の箙 $D(\mathscr{A})$ を $D(\mathscr{A}) = \mathscr{A} \sqcup \overline{\mathscr{A}}$ と定める．箙 $\mathscr{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解 $\sigma : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ から，その構造亜群 $\mathscr{G}(\sigma)$ を，箙 $D(\mathscr{A})$ から定まる自由圏の剰余圏として

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\sigma) = \langle D(\mathscr{A}) \mid \{x|y \sim (x \rightharpoonup y) | (x \leftharpoonup y) \mid (x, y) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}\} \cup \\ \cup \{x|\bar{x} \sim 1_{s(x)}, \bar{x}|x \sim 1_{t(x)} \mid x \in \mathscr{A}\}\rangle\end{aligned}$$

と定義する [1]．ただし 1_λ $(\lambda \in \Lambda)$ は恒等射である.

この定義により構造亜群 $\mathscr{G}(\sigma)$ は亜群となっている.

定理 2. 解 σ が非退化かつ対合的である場合，構造圏 $\mathscr{C}(\sigma)$ から構造亜群 $\mathscr{G}(\sigma)$ への injective な関手 $\iota : \mathscr{C}(\sigma) \to \mathscr{G}(\sigma)$ が存在し，構造亜群 $\mathscr{G}(\sigma)$ の射は $\iota(\mathscr{C}(\sigma))$ の商として，$\iota(x)^{-1}\iota(y)$ $(x, y \in \mathscr{C}(\sigma))$ の形に表される．さらに，構造亜群 $\mathscr{G}(\sigma)$ の $\iota(x)\iota(y)^{-1}$ の形に表される射 f は，次のような対称的 E-標準分解を一意的に持つ [3].

$$\begin{aligned}&f = \bar{f}_q \bar{f}_{q-1} \cdots \bar{f}_1 g_1 g_2 \cdots g_p \quad (f_i, g_j \in E \setminus \mathbf{1}_{\mathscr{C}(\sigma)}),\\ &s \preccurlyeq g f_i f_{i+1}, s \in E, g \in \mathscr{C}(\sigma) \Rightarrow s \preccurlyeq g f_i \ (\forall i = 1, 2, \ldots, q-1),\\ &s \preccurlyeq g g_i g_{i+1}, s \in E, g \in \mathscr{C}(\sigma) \Rightarrow s \preccurlyeq g g_i \ (\forall i = 1, 2, \ldots, p-1),\\ &h' \preccurlyeq h f_1, h' \preccurlyeq h g_1 \ (h, h' \in \mathscr{C}(\sigma)) \Rightarrow h' \preccurlyeq h.\end{aligned}$$

参考文献

[1] Andruskiewitsch, N.: On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation. With an appendix by Mitsuhiro Takeuchi. Selecta Math. (N.S.) 11 (2005), no. 2, 203-246.

[2] Dehornoy, P.; Digne, F.; Godelle, E.; Krammer, D.; Michel, J.: Foundations of Garside theory. EMS Tracts Math., 22, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.

[3] Ferri, D.; Shibukawa, Y.: Structure groupoids of quiver-theoretic Yang-Baxter maps. Preprint, 2025, arXiv:2503.10327.

箙上のヤン・バクスター方程式とガーサイド理論 (2)

圏の箙表示を用いた箙上のヤン・バクスター方程式の解の構成

澁川　陽一　　(北海道大学)[*1]
Davide Ferri　(University of Turin)

概　　要

文献 [2] に従い，箙の定める自由圏の剰余圏が適切な性質をもっている場合，この剰余圏から箙上のヤン・バクスター方程式の解が構成できることを報告する．

1　箙上のヤン・バクスター方程式の解の構成

箙 $\mathscr{A}$ から定まる自由圏の剰余圏 $\mathscr{C} = \langle \mathscr{A} \mid R \rangle$ に次の条件を仮定する (cf. [1, XIII.2.4])．

(1.1) R の関係はすべて $a|v \sim b|w$ の形をしており $(a, b, v, w \in \mathscr{A})$，$\mathscr{A}$ の長さ 2 の道 $a|v$ は，関係 R に高々 1 回現れる．

(1.2) $s(a) = s(b)$ である $a, b \in \mathscr{A}$ $(a \neq b)$ に対し，$a|v \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|v \in R$) となる $v, w \in \mathscr{A}$ がただ 1 つ存在する $(v = a \star' b, w = b \star' a$ と書く$)$．

(1.2)' $t(a) = t(b)$ である $a, b \in \mathscr{A}$ $(a \neq b)$ に対し，$v|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim v|a \in R$) となる $v, w \in \mathscr{A}$ がただ 1 つ存在する．

(1.3) 各 $a \in \mathscr{A}$ に対し，次の条件を満たす $z_a \in {}_{t(a)}\mathscr{A}$ がただ 1 つ存在する．

(a) 各 $v \in {}_{t(a)}\mathscr{A} \setminus \{z_a\}$ に対し，$a|v \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|v \in R$) となる $b \in {}_{s(a)}\mathscr{A} \setminus \{a\}, w \in \mathscr{A}$ が存在する．

(b) ある $b, w \in \mathscr{A}$ に対し $a|z_a \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|z_a \in R$) ならば，$b = a, w = z_a$.

(1.3)' 各 $a \in \mathscr{A}$ に対し，次の条件を満たす $z^a \in \mathscr{A}_{s(a)}$ がただ 1 つ存在する．

(a) 各 $v \in \mathscr{A}_{s(a)} \setminus \{z^a\}$ に対し，$v|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim v|a \in R$) となる $b \in \mathscr{A}_{t(a)} \setminus \{a\}, w \in \mathscr{A}$ が存在する．

(b) ある $b, w \in \mathscr{A}$ に対し $z^a|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim z^a|a \in R$) ならば，$b = a, w = z^a$.

(1.4) $a, b, c \in \mathscr{A}$ $(s(a) = s(b) = s(c), a \neq b, a \neq c, b \neq c$ (pairwise distinct)) に対し

$$(a \star' b) \star' (a \star' c) = (b \star' a) \star' (b \star' c).$$

このとき，各 $a \in \mathscr{A}$ に対して写像 $a \star _ : {}_{s(a)}\mathscr{A} \ni b \mapsto a \star b \in {}_{t(a)}\mathscr{A}$ を

$$b \neq a \text{ のとき } a \star b = a \star' b; b = a \text{ のとき } a \star b = z_a$$

[*1] 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目　北海道大学理学部数学
本研究は科研費 (課題番号:JP17K05187, JP23K03062) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 16T25
キーワード：ヤン・バクスター方程式, 箙 (クイバー)，圏の箙表示

と定義すると，条件 (1.1), (1.3) より，この写像は全単射となる．さらに，$(a,b) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ に対し $(a \rightharpoonup b, a \leftharpoonup b) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ を

$$a \rightharpoonup b = (a \star _)^{-1}(b), a \leftharpoonup b = (a \rightharpoonup b) \star a$$

と定める．

定理 3. $\sigma : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \ni (a,b) \mapsto (a \rightharpoonup b, a \leftharpoonup b) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ は箙 $\mathscr{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解で，非退化かつ対合的となる [2].

2 定理 3 の証明

まず，σ がヤン・バクスター方程式の解となるための十分条件を $\star$ で表す．

命題 4. 次が成り立つとき，$\sigma : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \ni (a,b) \mapsto (a \rightharpoonup b, a \leftharpoonup b) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ はヤン・バクスター方程式の解となる．

$$a,b,c \in \mathscr{A}\ (s(a) = s(b) = s(c)) \Rightarrow (a \star b) \star (a \star c) = (b \star a) \star (b \star c).$$

$\star$ の定義と条件 (1.4) より，$s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす pairwise distinct な $a,b,c \in \mathscr{A}$ について，上の条件の成立がわかる．また，$a = b$ の場合は自明に成り立つ．

条件 (1.2) を用いると，$a \neq b \in \mathscr{A}$ に対し ${}_{t(a \star' b)}\mathscr{A} = {}_{t(b \star' a)}\mathscr{A}$ となる．講演ではこれを用いることで，$a = c \neq b$ の場合，および $b = c \neq a$ の場合に，命題 4 の条件が証明できることを説明する予定である．

3 例

3 つの頂点 $\{1,2,3\}$ を持つ箙 $\mathscr{A}$ の矢の集合を $\{1 \to 2, 2 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 2, 3 \to 1, 1 \to 3\}$ とする．剰余圏

$$\langle \mathscr{A} \mid \{(1 \to 2 \to 1, 1 \to 3 \to 1), (2 \to 3 \to 2, 2 \to 1 \to 2), (3 \to 1 \to 3, 3 \to 2 \to 3)\} \rangle$$

は条件 (1.1) – (1.4) をすべて満たす (特に，条件 (1.4) は自明に成り立つ)．よって，この剰余圏から非退化かつ対合的な箙 $\mathscr{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解が構成できる．

参考文献

[1] Dehornoy, P.; Digne, F.; Godelle, E.; Krammer, D.; Michel, J.: Foundations of Garside theory. EMS Tracts Math., 22, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.

[2] Ferri, D.; Shibukawa, Y.: Structure groupoids of quiver-theoretic Yang-Baxter maps. Preprint, 2025, arXiv:2503.10327.

Boundary Feller-Dynkin processes associated with Laguerre processes

河本陽介 (岡山大学)[*1]
Alexander Bufetov (Steklov Math. Inst. RAS, St. Petersburg State Univ., CNRS Marseille)[*2]

1 背景

空間 W^N と，その間の Markov 核 $\Lambda_N^{N+1} : W^{N+1} \dashrightarrow W^N$ から成る射影系 $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N\in\mathbb{N}}$ を考える．W^N 上の Markov 過程 $\mathbf{X}^N$ の族 $\{\mathbf{X}^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ がこの系に関して一貫的である，つまり，$\mathbf{X}^N$ の Markov 半群 T_t^N について，intertwining 関係式

$$T_t^{N+1}\Lambda_N^{N+1} = \Lambda_N^{N+1}T_t^N \quad (t \geq 0)$$

が任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して成り立つとする．このとき，$\{\mathbf{X}^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の極限過程を調べたい．Borodin-Olshanski は，極限過程を射影系の境界（射影極限）上に構成する intertwining 法を確立し [2]，Gelfand-Tsetlin グラフなど離散空間上の確率過程の族に適用した．

Assiotis は intertwining 法を次の連続空間に適用した [1]．W^N を N 次元 Weyl chamber の閉包とする．また，$\mathbf{x} \in W^{N+1}$ に対し，$W^{N,N+1}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in W^N; x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y_N \leq x_{N+1}\}$ 上の確率測度を

$$\Lambda_N^{N+1}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) := N! \cdot \frac{\Delta_N(\mathbf{y})}{\Delta_{N+1}(\mathbf{x})}\mathbf{1}_{W^{N,N+1}(\mathbf{x})}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

として Markov 核 Λ_N^{N+1} を定める（$\Delta_N(\mathbf{y}) = \prod_{1\leq i<j\leq N}(y_j - y_i)$ は Vandermonde 行列式）．Dyson Brown 運動など，ランダム行列に関係するいくつかの確率過程は，このようにして得られる射影系 $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N\in\mathbb{N}}$ に関して一貫的であることが知られている．Assiotis は，この射影系に intertwining 法を用い，対応する極限過程をある具体的な境界上に構成した．

一方，ランダム行列理論に現れる他の古典的な確率過程として，（パラメータを固定した）Laguerre 過程があるが，これは $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N\in\mathbb{N}}$ に関して一貫性を持たない．そこで我々は以前，このような確率過程が intertwining 関係を持つような射影系を導入した．この系に関する極限過程の構成が今回の主題である．

[*1] 〒700-8530 岡山市北区津島中三丁目 1 番 1 号
e-mail: y-kawamoto@okayama-u.ac.jp
web: https://www.mtds.okayama-u.ac.jp/faculty_members/kawamoto/index.html
[*2] e-mail: bufetov@mi.ras.ru,
本研究は科研費 (課題番号:JP21K13812) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 60B20, 60J60
キーワード：the method of intertwiners, intertwining 関係式, ランダム行列, Laguerre 過程

2 主定理

α を非負整数とする．$W^N_{\geq} = W^N \cap [0,\infty)^N$ とし，Markov 核 $\Lambda^N_{\alpha,N} : W^N_{\geq} \dashrightarrow W^N_{\geq}$ を

$$\Lambda^N_{\alpha,N}(\mathbf{z}, d\mathbf{y}) = (\alpha+1)_N \Big(\prod_{k=1}^N \frac{y_k^\alpha}{z_k^{\alpha+1}} \Big) \frac{\Delta_N(\mathbf{y})}{\Delta_N(\mathbf{z})} \mathbf{1}_{W^{N,N}_{\geq}(\mathbf{z})}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

で与える（$W^{N,N}_{\geq}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{y} \in W^N_{\geq} ; 0 \leq y_1 \leq z_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_N \leq z_N\}$ とおいた）．さらに $\Lambda^{N+1}_{\alpha,N} := \Lambda^{N+1}_N \Lambda^N_{\alpha,N}$ とすると，これは Markov 核 $W^{N+1}_{\geq} \dashrightarrow W^N_{\geq}$ を与える．射影系 $\{W^N_{\geq}, \Lambda^{N+1}_{\alpha,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ の境界は $\Omega := \{(\boldsymbol{\alpha}, \gamma) ; \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0, \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \leq \gamma\}$ であり，$\Lambda^\Omega_{\alpha,N+1}\Lambda^{N+1}_{\alpha,N} = \Lambda^\Omega_{\alpha,N}$ を満たす Markov 核 $\Lambda^\Omega_{\alpha,N} : \Omega \dashrightarrow W^N_{\geq}$ が存在する．

定理 1. [4] Markov (Feller-Dynkin) 半群の族 $\{T^N_{\alpha,t}\}_{N\in\mathbb{N}}$ が $\{W^N_{\geq}, \Lambda^{N+1}_{\alpha,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ に関して一貫的であるとする．このとき，Ω 上の Markov (Feller-Dynkin) 半群 $T^\Omega_{\alpha,t}$ が一意に存在して以下を満たす．

$$T^\Omega_{\alpha,t}\Lambda^\Omega_{\alpha,N} = \Lambda^\Omega_{\alpha,N} T^N_{\alpha,t}$$

この定理により，次の一貫的な確率過程の族に対応する極限過程が得られる．

- N 次元 α-Laguerre 過程は，確率微分方程式

$$dX^i_t = \sqrt{2X^i_t} dB^i_t + \Big(-X^i_t + \alpha + 1 + \sum_{j\neq i}^N \frac{2X^i_t}{X^i_t - X^j_t} \Big) dt, \qquad 1 \leq i \leq N$$

  の解で与えられる（B^i 達は独立な Brown 運動）．α-Laguerre 過程の族は射影系 $\{W^N_{\geq}, \Lambda^{N+1}_{\alpha,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ に対して一貫的である [3, 5].
- Laguerre 過程の一貫性を示した [3] の手法を用いると，次で定まる N 次元確率過程の族の一貫性もわかる [4]: $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$ に対し

$$dX^i_t = \sqrt{2X^i_t(1+X^i_t)} dB^i_t + \Big((2-2N-\mathfrak{s})X^i_t + (\alpha+1) + \sum_{j\neq i}^N \frac{2X^i_t(1+X^i_t)}{X^i_t - X^j_t} \Big) dt.$$

参考文献

[1] Assiotis, T.: Hua-Pickrell diffusions and Feller processes on the boundary of the graph of spectra, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **56**, No. 2, 1251–1283 (2020).

[2] Borodin, A., Olshanski, G.: Markov processes on the path space of the Gelfand-Tsetlin graph and on its boundary, J. Funct. Anal. **263**, 248–303 (2012).

[3] Bufetov, A. I., Kawamoto, Y.: The intertwining property for Laguerre processes with a fixed parameter, J. Stat. Phys. **192**, article number 58 (2025).

[4] Bufetov, A. I., Kawamoto, Y.: Boundary Feller-Dynkin processes associated with Laguerre processes and Pickrell diffusions, preprint.

[5] Kawamoto, Y., Shibukawa, G.; The intertwining property for β-Laguerre processes and integral operators for Jack polynomials, arXiv:2505.23139.

$N=1$ 超対称 Virasoro 代数と自由 Fermion 代数の直和の q-変形における Kac 行列式

大久保勇輔　(摂南大学)*

[1] において, 量子トロイダル $\mathfrak{gl}_2$ 代数のある自由場表示から, $N=1$ 超対称 Virasoro 代数 SVir と 1 成分の自由 Fermion 代数 F の直和 $\mathsf{SVir}\oplus\mathsf{F}$ の q-変形が現れることを発見した. これは, 量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数から q-変形 Virasoro 代数を得る方法と同じ手法を適用することで得ることができる. 得られる代数は次のようになる.

定義. q と d を, 任意の整数 $n,m\in\mathbb{Z}$ ($n\neq 0$ または $m\neq 0$) に対して $q^nd^m\neq 1$ を満たす複素パラメータとする. さらに

$$q_1=q^{-1}d,\quad q_2=q^2,\quad q_3=q^{-1}d^{-1}$$

とおく. 次の関係式を満たす生成元 $W_{i,\mu}$ ($\mu\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, $i=1,2$) と $\mathcal{T}_n$ ($n\in\mathbb{Z}$) によって生成される代数を A とする. 関係式は母関数 $W_i(z)=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}W_{i,\mu}z^{-\mu-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{T}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}_nz^{-n}$ を用いて,

$$\begin{aligned}
W_i(z)W_i(w)+W_i(w)W_i(z)&=qz^{-1}\delta\left(\frac{q_2w}{z}\right)+q^{-1}z^{-1}\delta\Big(\frac{w}{q_2z}\Big),\\
q_1\cdot f\left(q_1;\frac{w}{z}\right)W_1(z)W_2(w)+f\left(q_1^{-1};\frac{z}{w}\right)W_2(w)W_1(z)&=\delta\Big(\frac{q_1w}{z}\Big)w^{-1}\mathcal{T}(w),\\
g\left(\frac{w}{z}\right)\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w)-g\left(\frac{z}{w}\right)\mathcal{T}(w)\mathcal{T}(z)&=\mathcal{C}\cdot\left(\delta\Big(\frac{w}{q_2z}\Big)-\delta\left(\frac{q_2w}{z}\right)\right),\\
q_1\cdot f\left(q_1;\frac{w}{z}\right)W_1(z)\mathcal{T}(w)-f\left(q_1^{-1};\frac{z}{w}\right)\mathcal{T}(w)W_1(z)&\\
=q(q_1-q_1^{-1})\delta\Big(\frac{q_1w}{q_2z}\Big)W_2(w),&\\
q_1^{-1}\cdot f\Big(q_1^{-1};\frac{q_1w}{z}\Big)W_2(z)\mathcal{T}(w)-f\Big(q_1;\frac{z}{q_1w}\Big)\mathcal{T}(w)W_2(z)&\\
=-q^{-1}(q_1-q_1^{-1})\delta\left(\frac{q_2w}{z}\right)W_1(q_1w).&
\end{aligned}$$

と書ける. ここで,

$$\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n,\quad f(\xi;z)=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi^n-\frac{q_1^n+q_3^n}{(1+q_2^{-n})}\right)\frac{z^n}{n}\right\},$$
$$g(z)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{(1-q_1^{2n})(1-q_1^{-n}q_3^n)}{n(1+q_2^{-n})}z^n\right),\quad \mathcal{C}=-\frac{(1-q_1^2)(1-q_1^{-1}q_3)}{1-q_2^{-1}}$$

とした.

* e-mail: yusuke.ohkubo.math@gmail.com
本研究は科研費 (課題番号:21K13803) の助成を受けたものである。

$\mathcal{T}(z)$ は [1] における $\mathcal{T}_{12}(q_1;z)$ であり, q-変形 Virasoro 代数と同じ関係式を満たしている. 代数 A の自由場表示からは, もう一つの可換な q-変形 Virasoro 代数を生成することもでき, それらの退化極限は, $\mathsf{SVir}\oplus\mathsf{F}$ に埋め込まれている非自明で可換な 2 つの Virasoro 代数に一致する. 本公演では, この代数 A の Kac 行列式についての予想を与える.

最高ウエイトベクトル $|h\rangle$ を

$$W_{i,\mu}|h\rangle=\mathcal{T}_n|h\rangle=0\quad(\mu,n>0,\ i=1,2),\qquad \mathcal{T}_0|h\rangle=h|h\rangle$$

によって定め, $|h\rangle$ に代数 A を作用させて得られる最高ウエイト表現を考える. さらに,

$$\mu_1>\mu_2>\cdots>0,\quad \nu_1>\nu_2>\cdots>0,\quad n_1\geq n_2\geq\cdots>0$$

を満たす半整数の有限列 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\ldots)$ と整数の有限列 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\ldots)$ に対して

$$|h;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n}\rangle=W_{1,-\mu_1}W_{1,-\mu_2}\cdots W_{2,-\mu_1}W_{2,-\mu_2}\cdots\mathcal{T}_{-n_1}\mathcal{T}_{-n_2}\cdots|h\rangle$$

とおく. 双対空間においても, 同様に $\langle h;\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{n}|$ を定める. これを用いて, Kac 行列式を

$$det\,K_N=det\left(\langle h;\boldsymbol{\mu}^{(1)},\boldsymbol{\nu}^{(1)},\boldsymbol{n}^{(1)}|h;\boldsymbol{\mu}^{(2)},\boldsymbol{\nu}^{(2)},\boldsymbol{n}^{(2)}\rangle\right)_{|\boldsymbol{\mu}^{(1)}|+|\boldsymbol{\nu}^{(1)}|+|\boldsymbol{n}^{(1)}|=|\boldsymbol{\mu}^{(2)}|+|\boldsymbol{\nu}^{(2)}|+|\boldsymbol{n}^{(2)}|=N}$$

と定義する. ここで, $|\boldsymbol{\mu}|=\mu_1+\mu_2+\cdots$ などとした.

予想. $N\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$det\,K_N=(\text{const.})\times\prod_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ rs\leq N\\ r-s=even}}\left(h^2-h_{r,s}^2\right)^{\widetilde{P}(N-\frac{rs}{2})},$$

$$h_{r,s}=q_1^{\frac{r}{2}}q_3^{\frac{s}{2}}+q_1^{-\frac{r}{2}}q_3^{-\frac{s}{2}}$$

となる. ここで, $\widetilde{P}(N)$ は

$$\sum_{N\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}}\widetilde{P}(N)z^N=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-z^{k-\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k}$$

によって定まる整数とする.

参考文献

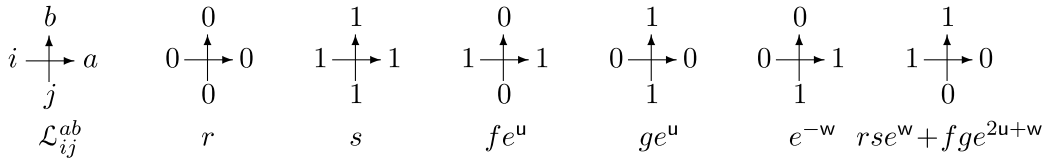
[1] Y. Ohkubo, "Direct Sum Structure of the Super Virasoro Algebra and a Fermion Algebra Arising from the Quantum Toroidal $\mathfrak{gl}_2$," arXiv:2505.02926.

7

トーラス上の量子化6頂点模型

井上 玲 (千葉大理)
国場 敦夫 (東大総合文化)
寺嶋 侑二 (東北大理)
八木 絢彌 (清華大学)

量子化 6 頂点模型 (quantized 6-vertex model，q-6v 模型と略記する) は，6 頂点模型の重みを q ワイル代数 $\mathcal{W}(q)$ の元を用いて非可換化した模型として [3] で導入された．2 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ と複素数パラメータ r, s, f, g に対し，作用素 $\mathcal{L}(r, s, f, g; q) \in \mathrm{End}(V \otimes V) \otimes \mathcal{W}(q)$ によって以下のように定義される．



辺上の $0, 1$ はそれぞれ v_0, v_1 を表し，q ワイル代数の生成元 $e^{\pm\mathsf{u}}, e^{\pm\mathsf{w}}$ は q 交換関係 $e^{\mathsf{u}}e^{\mathsf{w}} = qe^{\mathsf{w}}e^{\mathsf{u}}$ を満たす.（もともとの）6 頂点模型の対称性が Yang-Baxter 方程式で表されるのに対し，q-6v 模型の対称性は四面体方程式で表される．その一つである $RLLL$ 関係式

$$R_{456}\mathcal{L}_{236}\mathcal{L}_{135}\mathcal{L}_{124} = \mathcal{L}_{124}\mathcal{L}_{135}\mathcal{L}_{236}R_{456} \tag{1}$$

は [3] で示された．ここで R 作用素 R_{ijk} は四面体方程式

$$R_{456}R_{236}R_{135}R_{124} = R_{124}R_{135}R_{236}R_{456}$$

の解である．[3] で漸化式を用いて構成された R 作用素は，[2] で量子クラスター代数の変異列から再構成され，量子ダイログ関数を用いて定式化された.

本講演の主題は，トーラス上の向き付き配線図 G の各交点（交点では必ず 2 本の線が交わるものとする）に作用素 $\mathcal{L}$ を配置して得られる G 上の q-6v 模型について，可換な作用素を構成することである [1]．異なる交点の q ワイル代数は可換とする．トーラスの基本領域を固定してトーラスのホモロジーサイクルに対応する 2 つのスペクトルパラメータ x, y を導入し，この配線図に対するモノドロミー行列 $\mathcal{T}(x, y)$ と，そのトレースである層転送行列 (layer transfer matrix) $T_G(x, y)$ を定義する．$m \times n$ 正方格子の場合は図 1 から次のように定める．

$$\mathcal{T}(x,y)(v_{\mathbf{i}} \otimes v_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{a}\in\{0,1\}^m, \mathbf{b}\in\{0,1\}^n} x^{|\mathbf{a}|}y^{|\mathbf{b}|} v_{\mathbf{a}} \otimes v_{\mathbf{b}} \otimes T_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{\mathbf{a},\mathbf{b}},$$

$$T_G(x,y) = \mathrm{Tr}_{V^{\otimes m}\otimes V^{\otimes n}}\left(\mathcal{T}(x,y)\right) = \sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^m, \mathbf{j}\in\{0,1\}^n} T_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{\mathbf{i},\mathbf{j}}\, x^{|\mathbf{i}|}y^{|\mathbf{j}|}.$$

ただし $|\mathbf{a}| = \sum_k a_k$ などとする．一般の配線図 G については，基本領域の境界における矢の出入りによって $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ の定義が少し異なる（ここでは割愛する）．配線図の線と基本領域の境界との交差数を N とする．以下がこの講演の主定理である．

1

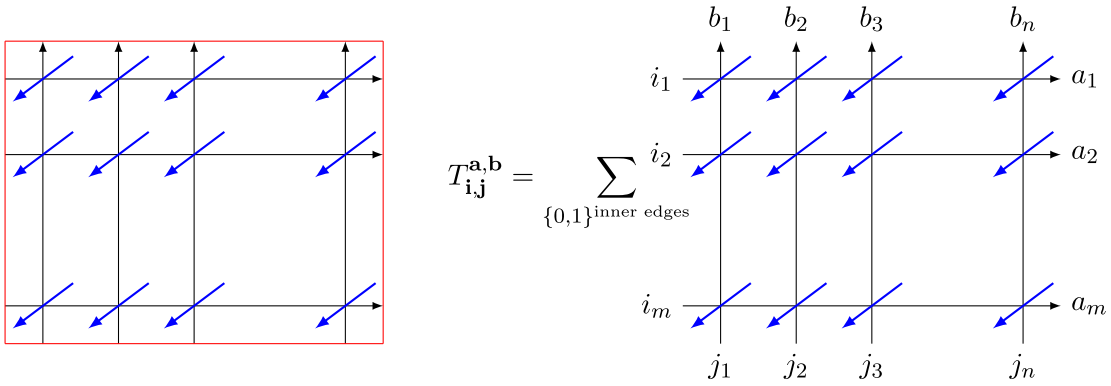


図 1. 正方格子上の量子化 6 頂点模型.（青矢印は q ワイル代数の無限次元表現に対応する．赤枠はトーラス上の基本領域を表す.）

Theorem 1. 配線図 G が「*admissible*」というある条件を満たすとき，任意の x, y, u, w について

$$R\Big(\frac{xw}{yu}\Big)\mathcal{T}(u,w)\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}(x,y)\mathcal{T}(u,w)R\Big(\frac{xw}{yu}\Big) \tag{2}$$

が成り立つ．$R(z)$ は量子群 $U_{-q}(\widehat{sl}_N)$ に付随する量子 R 行列とゲージ同値で，特に *generic* な z に対し $R(z)$ は可逆である．よって層転送行列は可換，つまり $[T_G(x,y), T_G(u,w)] = 0$ が成立する．

層転送行列 $T_G(x,y)$ は $\mathcal{W}(q)$ の元を係数にもつ x, y の 2 変数ローラン多項式となり，係数たちが可換な作用素の族を成す．1 次元周期格子上の 6 頂点模型では（1 種類の）Yang-Baxter 関係式から直ちに可換な転送行列が得られるのに対し，配線図 G 上の q-6V 模型では作用素 $\mathcal{L}(r,s,f,g;q)$ の満たす 4 種類の四面体方程式と 2 種類の反転関係式を用いて層転送行列の可換性が示される．これらの関係式が整合的に使える条件を admissible とよんでいる．層転送行列は基本領域の並進移動，およびトーラスへの $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用に関して不変である．また $RLLL$ 関係式 (1) は admissible な配線図の Yang-Baxter 変換を与える．

配線図 G と $\mathcal{W}(q)$ のパラメータ q を様々にとることによっていろいろな模型が構成でき，Theorem 1 により可換な作用素が系統的に構成できる．論文 [1] では，q-6v 模型から自由パラフェルミオン模型，相対論的量子戸田格子などが得られている．q-6v 模型はダイマー模型として表すこともでき，頂点模型，量子クラスター代数，ダイマー模型の間のいろいろな関係が見える．

References

[1] R. Inoue, A. Kuniba, Y. Terashima, J. Yagi, *Quantized six-vertex model on a torus*, arXiv:2505.08924.

[2] R. Inoue, A. Kuniba, X. Sun, Y. Terashima, J. Yagi, *Solutions of tetrahedron equation from quantum cluster algebra associated with symmetric butterfly quiver*, SIGMA **20**, 113, 45 pages (2024).

[3] A. Kuniba, S. Matsuike, A. Yoneyama, *New solutions to the tetrahedron equation associated with quantized six-vertex models*, Commun. Math. Phys. Volume 401, 3247–3276 (2023).

超平面配置に対数的特異点をもつ Pfaff 系の変換

大島 利雄　(東大・名誉教授)*

1. 超平面配置　$\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \ni H = \{f_H(x) = 0 \mid x \in V := \mathbb{C}^n\}$,　$f_H(x)$ は $x = (x_1, \dots, x_n)$ の 1 次式

$$\mathcal{L} = L(\mathcal{A}) := \Big\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \Big\},$$

$$\mathcal{L}^{(k)} = L(\mathcal{A})^{(k)} := \{S \in L(\mathcal{A}) \mid \operatorname{codim} S = k\}; \quad \mathcal{L}^{(0)} = V, \quad \mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{A}.$$

• $S,\ S' \in \mathcal{L}$ and $x \in V \setminus \{0\}$:

$$\mathcal{L}^{(k)}_{\subset S} := \{T \in \mathcal{L}^{(k)} \mid T \subset S\}, \quad \mathcal{L}^{(k)}_{\supset S} := \{T \in \mathcal{L}^{(k)} \mid T \supset S\}, \quad \mathcal{A}_S := \mathcal{L}^{(1)}_{\supset S},$$

$$S \perp S' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \#\mathcal{A}_{H \cap H'} = 2 \quad (\forall H \in S,\ \forall H' \in S'),$$

$$\langle x, S\rangle := \{tx + y \mid t \in \mathbb{C},\ y \in S\}, \quad \mathcal{A}_x := \{H \in \mathcal{A} \mid \langle x, H\rangle = V\}, \quad \mathcal{A}^c_x := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x,$$

$$S : x\textbf{-closed} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle x, S\rangle = S, \quad \mathcal{L} : x\text{-closed} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle x, S\rangle \in \mathcal{L} \quad (\forall S \in \mathcal{L}),$$

$$\operatorname{mc}_x \mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\langle x, S\rangle \mid \operatorname{codim}\langle x, S\rangle = 1,\ S \in \mathcal{L}^{(2)}\}.$$

2. Pfaff 系　$\mathcal{M} : du = \Omega u$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \Omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d\log f_H, \quad A_H \in M(N, \mathbb{C}), \quad \Omega \wedge \Omega = 0 \ (\textbf{積分可能条件})$$

定義 1（一般留数行列）. $A_S := \sum_{H \in \mathcal{A}_S} A_H \quad (S \in \mathcal{L})$

注意 1. $\Omega \wedge \Omega = 0 \ \Leftrightarrow\ [A_H, A_S] = 0 \quad (\mathcal{A} \ni \forall H \supset \forall S \in \mathcal{L}^{(2)})$

定理 1. $\Omega \wedge \Omega = 0 \ \Rightarrow\ [A_S, A_T] = 0 \quad (S, T \in \mathcal{L} \text{ with } S \subset T \text{ or } S \supset T \text{ or } S \perp T)$

例 1. braid 配置, Type A_n : $\bigcup_{1 \le i < j \le n} \big\{\{x_i = x_j\}\big\}$: KZ 型

2. Type B_n : $\big\{\{x_i = \pm x_j\}, \{x_k = 0\} \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\big\}$

3. $\bigcup_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,n\}} \big\{\{\sum_{i \in I} x_i = 0\}\big\}$: Level 1 の一般超幾何系（[MO]）

3. Pfaff 系の変換　$\Omega \mapsto$?

1. addition　$\operatorname{Ad}(f^{\lambda}_{H'})$:　$u \mapsto f^{\lambda}_{H'} u,\ \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \cup \{H'\}$

2. 座標変換, 制限 : $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2, \dots), \quad (c, x_2, x_3, \dots),$

$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots,)\ \ (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \quad (\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots)$ ($\Leftarrow$ 非斉次 KZ), etc.

3. 境界値 : $H \in \mathcal{A}$ 上の Pfaff 型への写像

$\forall S \in \mathcal{L}^{(2)}_{\subset H}$ が境界方程式が定義される空間 H の超平面となる.

4. middle convolution : $\operatorname{mc}_{x,\mu} \mathcal{M}$: $d\bar{u} = \overline{\Omega}\bar{u},\ \overline{\Omega} = \sum_{H \in \operatorname{mc}_x \mathcal{A}} \bar{A}_H d\log f_H$

$\mathcal{A}_x = \{H_1, \dots, H_p\},\ \mathcal{A}^c_x = \{H'_1, \dots, H'_q\}, \quad f_{H_i} = x - a_i(y) \ \ \big((x, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\big)$

$\mathcal{A} : x$-closed (としてよい),　$\bar{A}_H\ (H \in \mathcal{A}_x)$ は [DR],　$\bar{A}_{H'}\ (H' \in \mathcal{A}^c_x)$ は [Ha],　$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$

$\tilde{u} := \big(\partial_x^{1-\mu} \frac{(\partial_x f_{H_i})u}{f_{H_i}}\big)_{i=1,\dots,p}$ の満たす Pfaff 系 : $\widetilde{\Omega} = \sum \tilde{A}_H d\log f_H,\ \tilde{A}_H \in M(pN, \mathbb{C})$

* e-mail: oshima@ms.u-tokyo.ac.jp

$\bar{A}_H$: $\ker A_i$ $(i=1,\dots,p)$ と $\ker(\sum A_i+\mu)$ に同型な $\mathbb{C}^{pN}$ の $\forall\tilde{A}_H$-不変部分空間が存在するので，それらの直和による商空間に $\tilde{A}_H$ が引き起こす線形変換の行列 $\bar{A}_H$ が定まる．

定義 2. 可換で対角化可能な正方行列 $B_1,\dots,B_r$ に対し，（同時）固有値 $\lambda_{1,\nu},\dots,\lambda_{r,\nu}$ とその重複度 m_ν のリストを $[B_1:\cdots:B_r]=\{[\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{r,1}]_{m_1},\dots\}$ と表す．

定理 2. $\mathrm{mc}_{x,\mu}$ は可換な留数行列 A_S の組の同時固有値分解の上記リストの変換を定める．

$$[\tilde{A}_S]=[A_S+\mu]_{\#(\mathcal{A}_S\cap\mathcal{A}_x)}+\sum_{\substack{\langle x,T\rangle=\langle x,S\rangle,\ S\neq T\\ T\in\mathcal{L}^{(\mathrm{codim}\langle x,S\rangle+1)}}}[A_T]_{\#(\mathcal{A}_T\cap\mathcal{A}_x)-1}+[A_{\langle x,S\rangle}]_k$$

定義 3. $S\in\mathcal{L}$: split for $\mathcal{M}\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ A_HA_{H'}=0\ \ (\forall H,\,H'\in\mathcal{A}_S,\ H\neq H')$

定理 3. i) $H,\,H'\in\mathcal{A}_x,\ A_HA_{H'}=0\ \Rightarrow\ \bar{A}_H\bar{A}_{H'}=0$

ii) x-closed でない $S\in\mathcal{L}^{(2)}$ が $\mathcal{M}$ に対して split $\Rightarrow$ S は $\mathrm{mc}_{x,\mu}\mathcal{M}$ に対しても split

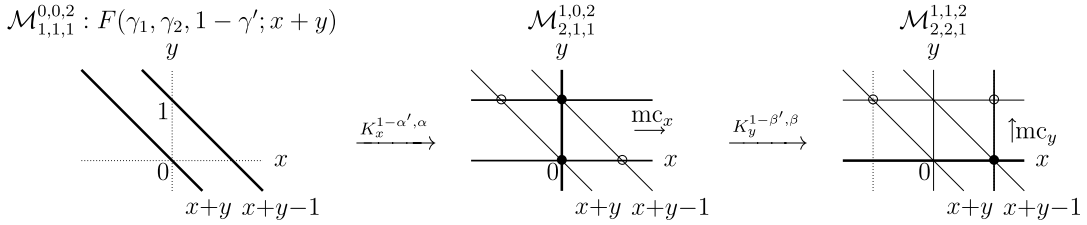
iii) $H\in(\mathrm{mc}_x\mathcal{A})\cap A_x^c$，$A_H=0$, さらに $\forall S\in\mathcal{L}^{(2)}_{\subset H}$ が $\mathcal{M}$ に対して split $\Rightarrow$ $\bar{A}_H=0$

例 4. $\mathcal{M}^{p,q,r}_{p',q',r'}:F^{p,q,r}_{p',q',r'}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\alpha}&\boldsymbol{\beta}&\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\alpha}'&\boldsymbol{\beta}'&\boldsymbol{\gamma}'\end{smallmatrix};x,y\right):=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\boldsymbol{\alpha})_m(\boldsymbol{\beta})_n(\boldsymbol{\gamma})_{m+n}}{(1-\boldsymbol{\alpha}')_m(1-\boldsymbol{\beta}')_n(1-\boldsymbol{\gamma}')_{m+n}}x^my^n$

$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^p$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^q$ etc. $(\boldsymbol{\alpha}')_1=(\boldsymbol{\beta}')_1=0$, $(1-\boldsymbol{\alpha})_m:=(1-\alpha_1)_m\cdots(1-\alpha_p)_m$

$L:=r-r'=p'-p=q'-q$ (確定特異点型一般超幾何 [MO]) : $L=0\Rightarrow$ KZ 型

特異集合 $(L=1)$, $K^{\mu,\lambda}_x:=\mathrm{Ad}(x^{-\mu})\circ\mathrm{mc}_{x,\mu-\lambda}\circ\mathrm{Ad}(x^{\lambda})$



注意 2. i) 任意の超平面配置に対し，それを含む超平面配置 $\mathcal{A}$ に対数特異点を持つ既約 Pfaff 系で，A_H $(H\in\mathcal{A})$ がスカラー行列でないものが存在する．

ii) braid 配置や B_n 型超平面配置は, x_i-closed $(\forall i)$

iii) $\mathcal{A}\supset\big\{\{x=0\},\{y=0\},\{x+y=0\},\{x+y=1\}\big\}$ で，x-closed, y-closed かつ $\#\mathcal{A}<\infty$ となる超平面配置 $\mathcal{A}$ は存在しない．

参考文献

[DR] Dettweiler, T. and Reiter, S., An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[Ha] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Studies in Pure Math.* **62** (2012), 109–136.

[MO] Heo-Matsubara, S-J. and Oshima, T., Generalized hypergeometric functions with several variables, Indag. Math. **36**(2) (2025), 507–566.

[Ok] Oshima, T., Middle convolution of KZ-type equations and single-elimination tournaments, ArXiv.2504.09003.

A degeneration of the generalized Zwegers' μ-function according to the Ramanujan difference equation

渋川 元樹　(北見工業大学・工)[*1]
土見 怜史　(近畿大学・総合理工)[*2]

概　　要

Shibukawa-Tsuchimi [ST1] で導入した Zwegers μ 函数 [Z] の1パラメーター変形の退化極限に相当する little μ 函数を導入し, その諸公式を与える. 特に little μ 函数は Ramanujan 方程式の原点周りの形式解 (基本解) の q-Borel 変換と q-Laplace 変換の合成の像に一致する.

適当な複素数 $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s,x$ について, q 超幾何函数を次で定める:

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};q,x\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\dots,a_r)_n}{(b_1,\dots,b_s,q)_n}\left((-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{s-r+1}x^n,$$
$$ {}_r\psi_s\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};q,x\right):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(a_1,\dots,a_r)_n}{(b_1,\dots,b_s)_n}\left((-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{s-r}x^n.$$

ただし, $q=e^{2\pi i\tau}$, $i:=\sqrt{-1}$, $\mathrm{Im}(\tau)>0$ かつ

$$(a_1,\dots,a_r)_n=(a_1,\dots,a_r;q)_n:=(a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n\quad(n\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}),$$
$$(x)_\infty=(x;q)_\infty:=\prod_{j=0}^{\infty}(1-xq^j),\quad (x)_n=(x;q)_n:=\frac{(x;q)_\infty}{(q^nx;q)_\infty}.$$

定義 1. (1) [ST1], [ST2] 複素数 α, $a=q^\alpha$, $x/a,y\in\mathbb{C}^\times\backslash q^{\mathbb{Z}}$ について, 一般化 μ 函数 $\hat{\mu}(x,y;a)$ を次で定める:

$$\hat{\mu}(x,y;a):=iq^{-\frac{1}{8}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{(ax)_\infty}{(x)_\infty\theta_q(-y)}{}_1\psi_2\left(\begin{matrix}x\\ 0,ax\end{matrix};q,\frac{q}{y}\right).$$

ただし,

$$\theta_q(-x)=(q,x,q/x)_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^nq^{\frac{n}{2}}x^n.$$

(2) 複素数 $x,y\in\mathbb{C}^\times\backslash q^{\mathbb{Z}}$ について, little μ 函数 $l\hat{\mu}(x,y)$ を次で定める:

$$l\hat{\mu}(x,y):=iq^{-\frac{1}{8}}\frac{1}{(x)_\infty\theta_q(-qy)}{}_1\psi_2\left(\begin{matrix}x\\ 0,0\end{matrix};q,\frac{1}{y}\right).$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 21K13808, 25KJ0371) の助成を受けたものである.
キーワード：Zwegers' μ-function, q-hypergeometric function, q-Borel transform, q-Laplace transform, connection formulas
[*1] 〒090-0015 北海道北見市公園町 165 北見工業大学工学部
e-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp
[*2] 〒657-8501 大阪府東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科
e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

定理 2.

$$l\hat{\mu}(x,y)=\lim_{a\to 0}(xy)^{-\frac{\alpha}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\hat{\mu}(x,qy;a).$$

Ramanujan 方程式:

$$\left[T_x^2-T_x-qxy\right]f(x)=0$$

の原点周りの形式解:

$$\widetilde{f_0}(x)={}_2\phi_0\left(\begin{matrix}0,0\\-\end{matrix};q,xy\right)$$

の q-Borel 変換, q-Laplace 変換 [RSZ] :

$$\mathcal{B}_q^+(f)(\xi):=\sum_{n\geq 0}a_nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\xi^n,\quad \mathcal{L}_q^+(f)(x,\lambda):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{f(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n/x)}$$

の合成の像

$$f_0(x,\lambda):=\mathcal{L}_q^+\circ\mathcal{B}_q^+\left(\widetilde{f_0}\right)(x,\lambda).$$

に一致する.

定理 3.

$$f_0(x,-x/y)=iq^{\frac{1}{8}}l\hat{\mu}(x,y).$$

little μ 函数 $l\hat{\mu}(x,y)$ について次のような公式が成り立つ.

定理 4.

$$\begin{aligned}
l\hat{\mu}(x,y)&=l\hat{\mu}(qx,y)-xyl\hat{\mu}(x/q,y),\\
l\hat{\mu}(x,y)&=l\hat{\mu}(qx,y/q)=l\hat{\mu}(y,x),\\
l\hat{\mu}(x,y)&=iq^{-\frac{1}{8}}\frac{1}{(x)_\infty\theta_q(-qy)}{}_0\psi_2\left(\begin{matrix}\\q/x,0\end{matrix};q,\frac{q^2y}{x}\right),\\
\lim_{y\to 1}(1-y)l\hat{\mu}(x,y)&=iq^{-\frac{1}{8}}\frac{1}{(q)_\infty\theta_q(-qx)}{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}\\0\end{matrix};q,q^2x\right),\\
l\hat{\mu}(x,y)&=\frac{1}{c_1}\frac{\theta_q(-x/c_1)\theta_q(-1/c_1y)\theta_q(-x/q^2c_2y)\theta_q(-qc_2)}{\theta_q(-x)\theta_q(-qy)\theta_q(-x/q^2c_1c_2y)\theta_q(-c_1/c_2)}l\hat{\mu}(x/c_1,yc_1)\\
&\quad+\frac{1}{c_2}\frac{\theta_q(-x/c_2)\theta_q(-1/c_2y)\theta_q(-x/q^2c_1y)\theta_q(-qc_1)}{\theta_q(-x)\theta_q(-qy)\theta_q(-x/q^2c_2c_1y)\theta_q(-c_2/c_1)}l\hat{\mu}(x/c_2,yc_2)\\
&=l\hat{\mu}(x/c,yc)-\frac{iq^{-\frac{1}{8}}\theta_q(-c)\theta_q(-yc/x)(q)_\infty^2}{\theta_q(-xq)\theta_q(-yq)\theta_q(-c/x)\theta_q(-yc)}{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\0\end{matrix};q,xyq\right).
\end{aligned}$$

参考文献

[RSZ] Ramis, J. P., Sauloy J. and Zhang C., *Local Analytic Classification of q-difference Equations*, Astérisque **355**, (2013).

[ST1] Shibukawa, G. and Tsuchimi, S., *A generalization of Zwegers' μ-function according to the q-Hermite–Weber difference equation*, SIGMA, **19** (2023) 014 pp23.

[ST2] Shibukawa, G. and Tsuchimi, S., *A generalization of Zwegers' multivariable μ-function*, pp18, arXiv:2503.11955.

[Z] Zwegers S. P., *Mock theta functions*, Thesis, Universiteit Utrecht (2002).

Connection problems on q-Lommel functions

大山 陽介（徳島大学大学院社会産業理工学研究部）[1]

1. Lommel 函数　E. Lommel は k, μ を任意定数とする非斉次 Bessel 方程式

$$\nabla_\nu y = \left[(x\frac{d}{dx} - \nu)(x\frac{d}{dx} + \nu) + x^2\right] y = kx^{\mu+1}, \tag{1}$$

を考察して

$$s_{\mu,\nu}(x) = \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}x^2\right)$$

がその一つの解であることを示し，さらに無限遠での漸近展開

$$S_{\mu,\nu}(x) = x^{\mu-1}\,{}_3F_0\left(1, \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2}; \left(\frac{2}{x}\right)^2\right)$$

を用いて，次の接続公式を得た（Watson の本を参照）：

$$S_{\mu,\nu}(x) \sim s_{\mu,\nu}(x) + \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sin\nu\pi} \times \left[\cos\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi \cdot J_{-\nu}(x) - \cos\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi \cdot J_\nu(x)\right].$$

以下ではこの Lommel 函数の q-類似を考察する。

2. 記号　q-階乗積 $(a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$,　$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j)$,
$(a_1, a_2, ..., a_m; q)_n = \prod_{j=1}^{m}(a_j;q)_n$　$(n = 0, 1, 2, ..$ or $n = \infty)$.
テータ函数 は $\theta_q(x) := \theta(x) = (q, -x, -q/x; q)_\infty$. また，$q$-超幾何級数：

$${}_r\phi_s(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; q, x) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_n}{(b_1, \ldots, b_s; q)_n (q;q)_n} \left\{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}^{1+s-r} x^n.$$

3. 第一 q-Lommel 函数

$q^\mu = q/a$ とする。 第一 q-Bessel 方程式とその解は

$$\nabla_q^{(1)} y(x) = ay(q^2x) - (a+q)y(qx) + q(1-x)y(x) = 0,$$

$$y_1^{(1)}(x) = {}_2\phi_1(0, 0; a; q; x), \quad y_2^{(1)}(x) = x^\mu\,{}_2\phi_1(0, 0; q^2/a; q; x).$$

$b = q^\kappa$ として，非斉次方程式 $\nabla_q^{(1)} y(x) = kx^\kappa$ の解空間は，q-擬定数 $c_j(xq) = c_j(x)$ $(j = 1, 2)$ を用いて

$$y = c_1(x)y_1^{(1)} + c_2(x)y_2^{(1)} + \frac{k}{(b-1)(ab-q)} x^\kappa\,{}_3\phi_2(0, 0, q; ab, bq; q, x),$$

[1]本研究は科研費 (課題番号:19K03566) の助成を受けたものである．また，Changgui ZHANG (Lille) との共同研究である

そこで次の関数を第一 q-Lommel 函数と呼ぶ：

$$s^{(1)}_{a,b}(x) = x^{\kappa}\,{}_3\phi_2(0,0,q;ab,bq;q,x)$$

$q^{\lambda} = b/q$ とする。無限遠での形式解として

$$S^{(1)}_{a,b}(x) = x^{\lambda}\,{}_3\phi_0\left(q,\frac{q}{b},\frac{q^2}{ab};-;q,\frac{ab^2}{q^3x}\right)$$

を取ると $y = -\dfrac{k}{q}S^{(1)}(x)$ は非斉次方程式 $\nabla^{(1)}_q y(x) = kx^{\kappa}$ を満たす。

3. 接続問題　q^m-Borel 変換 $\mathcal{B}^+_{q^m} : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[\xi]]$ を次で定義する。defined by

$$\mathcal{B}^+_{q^m}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{mn(n-1)/2}\tau^n.$$

また，p-Laplace 変換 $\mathcal{L}^+_{p,\lambda}$ を Jackson 積分で定める（$p = q^m$ で用いる）：

$$\mathcal{L}^+_{p,\lambda}(\varphi)(x) := \frac{1}{1-p}\int_0^{\lambda\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\theta_p(\tau/x)}\frac{d_p\tau}{\tau} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\varphi(p^n\lambda)}{\theta_p(p^n\lambda/x)}.$$

$y(x) = {}_3\phi_0\,(q,q/b,q^2/ab;-;q,x)$ に対して，$v_0(\xi) = \mathcal{B}^+_{q^2}(y)(\xi)$ を取ると収束級数になり，${}_3\phi_2$ に関する Thomae の接続公式の極限をとれば

$$\begin{aligned}{}_3\phi_2\left(q,\frac{q}{b},\frac{q^2}{ab};0,0;q,x\right) &= -\frac{(q/b,q^2/ab;q)_\infty}{(q/ab,1/b;q)_\infty}\frac{1}{x}{}_1\phi_2\left(\begin{matrix}q\\ab,qb\end{matrix};q,\frac{qab^2}{x}\right)\\ &+\frac{(q,q^2/ab;q)_\infty}{(b,q/a;q)_\infty}\frac{\theta(-qx/b)}{\theta(-x)}{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\a\end{matrix};q,\frac{qa}{x}\right)\\ &+\frac{(q,q/b;q)_\infty}{(a/q,ab/q;q)_\infty}\frac{\theta(-q^2/ax)}{\theta(-x)}{}_0\phi_1\left(\begin{matrix}-\\q^2/a\end{matrix};q,\frac{q^3}{ax}\right).\end{aligned}$$

したがって発散級数 $y(x)$ の q-Stokes 問題は次のように解ける:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+_{q^2,\lambda}\circ\mathcal{B}^+_{q^2}(\tilde{S}^{(1)}_{a,b})(x) &= -\frac{1}{q^2x}\frac{\lambda}{qx}\frac{(q/b,q^2/ab;q)_\infty}{(q/ab,1/b;q)_\infty}{}_2\phi_2\left(\begin{matrix}q,0\\qb,ab\end{matrix};q,\frac{ab^2}{qx}\right)\\ &+\frac{(q,q^2/ab;q)_\infty}{(b,q/a;q)_\infty}\frac{\theta(q\lambda/b)\theta_{q^2}(q^4x/\lambda b^2)}{\theta(\lambda)\theta_{q^2}(q^2x/\lambda)}{}_1\phi_1\left(\begin{matrix}0\\a\end{matrix};q,\frac{ab}{qx}\right)\\ &+\frac{(q,q/b;q)_\infty}{(a/q,ab/q;q)_\infty}\frac{\theta(q^2\lambda/ab)\theta_{q^2}(q^6x/\lambda a^2b^2)}{\theta(\lambda)\theta_{q^2}(q^2x/\lambda)}{}_1\phi_1\left(\begin{matrix}0\\q^2/a\end{matrix};q,\frac{b}{x}\right).\end{aligned}$$

本質的に，この式が q-Lommel 函数の接続を与える。なお，斉次の場合の接続問題は C.Zhang(2003) によって解かれている。この予稿では第一 q-Bessel 方程式に限ったが，Borel 変換が異なるだけで第二，第三も同様にできる。q-Bessel 以外の他の q-超幾何でも同様であるが，扱いが面倒になる。

■文献：

G. N. Watson; A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2ed, Cambridge, 1944; §10 · 7, 345–352.

C. Zhang; Sur les fonctions q-Bessel de Jackson, *J. Approx. Theory* **122** (2003), 208–223.

On q-middle convolution and generalized q-hypergeometric equation

新井 由美　(お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)

Middle convolution は Katz により導入され，Dettweiler と Reiter によりフックス型微分方程式に対して定式化された．坂井・山口 [3] は middle convolution の q 類似として，q-convolution およびを q-middle convolution を導入した．新井・竹村 [1] では q-convolution および q-middle convolution を具体的な q 差分方程式に適用し，Heine の q 超幾何方程式と変異版 q 超幾何方程式，またこれらの積分表示解を得た．これらの計算を行った際，坂井・山口の q-convolution に改良の余地があることがわかり，新井・竹村 [2] で q-convolution の再定式化を行った．この再定式化には，addition と q-middle convolution を繰り返し適用して次々と q 差分方程式を得る計算がしやすくなるという利点がある．[2] では，再定式化された q-convolution および q-middle convolution を用いて [1] での計算を一部やり直すとともに，その結果に対してさらに addition と q-middle convolution を施して 3 階の一般化 q 超幾何方程式を導出し，変異版 q 超幾何方程式を 3 階に拡張した．本研究の目的は，q-convolution によって得た Heine の q 超幾何方程式に対して addition と q-middle convolution を繰り返し適用して n 階の一般化 q 超幾何方程式を得ることである．

関数 $y(x)=x^{\mu_0}(\alpha x;q)_\infty/(\beta x;q)_\infty$ $(\alpha\neq\beta)$ が満たす q 差分方程式

$$\frac{y(qx)-y(x)}{-x}=\Big[\frac{B_0}{x}+\frac{B_1}{x-1/\alpha}\Big]y(x),\ B_0=1-q^{\mu_0},B_1=q^{\mu_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

での行列の組 (B_0,B_1) に対して，再定式化した q-convolution $c^q_{\lambda_0}$ を施すと 2×2 行列の組 $(G_0^{[2]},G_1^{[2]})$ が得られる．それによる方程式

$$\frac{\widetilde{Y}(qx)-\widetilde{Y}(x)}{-x}=\Big[\frac{G_0^{[2]}}{x}+\frac{G_1^{[2]}}{x-1/\alpha}\Big]\widetilde{Y}(x),\quad \widetilde{Y}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{y}_0(x)\\ \widetilde{y}_1(x)\end{pmatrix}\tag{1}$$

は Heine の q 超幾何方程式に対応する．組 $(G_0^{[2]},G_1^{[2]})$ に対して addition add_{μ_1} を施し，さらに q-convolution $c^q_{\lambda_1}$ を行う．これにより 4×4 行列の組が得られるが，商空間で適切な基底をとると 3×3 行列の組 $(\overline{G}_0^{[3]},\overline{G}_1^{[3]})$ が得られる (q-middle convolution $mc^q_{\lambda_1}$)．q 差分方程式

$$\frac{1}{-x}\begin{pmatrix}g_1^{[3]}(qx)-g_1^{[3]}(x)\\ g_2^{[3]}(qx)-g_2^{[3]}(x)\\ g_3^{[3]}(qx)-g_3^{[3]}(x)\end{pmatrix}=\left[\frac{\overline{G}_0^{[3]}}{x}+\frac{\overline{G}_1^{[3]}}{x-1/\alpha}\right]\begin{pmatrix}g_1^{[3]}(x)\\ g_2^{[3]}(x)\\ g_3^{[3]}(x)\end{pmatrix}\tag{2}$$

から導出される単独 3 階 q 差分方程式は，すべての係数が x の 1 次式の一般化 q 超幾何方程式である．ここまでの計算の詳細については [2] を参照されたい．行列の組 $(\overline{G}_0^{[3]},\overline{G}_1^{[3]})$ に対してさらに addition と q-middle convolution を繰り返した結果が以下の Proposition 1 と Theorem 2 であり，これが本講演の主結果である．

Proposition 1　Heine の q 超幾何方程式 (1) での行列の組 $(G_0^{[2]}, G_1^{[2]})$ に対して $mc^q_{\lambda_m} \circ add_{\mu_m}$ を $m = 1$ から $m = n-2$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 3})$ まで順に施して得られる $n \times n$ 行列の組 $(\overline{G}_0^{[n]}, \overline{G}_1^{[n]})$ は次で与えられる：

$$\overline{G}_0^{[n]} = \begin{pmatrix} a_{11}^{[n]} & a_{12}^{[n]} & & & \\ & a_{22}^{[n]} & a_{23}^{[n]} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & a_{n-1,n-1}^{[n]} & a_{n-1,n}^{[n]} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \overline{G}_1^{[n]} = \begin{pmatrix} & & \mathrm{O} & & \\ & & \vdots & & \\ & & \mathrm{O} & & \\ b_1^{[n]} & b_2^{[n]} & \cdots & b_{n-1}^{[n]} & b_n^{[n]} \end{pmatrix}.$$

行列 $\overline{G}_0^{[n]}$ のすべての要素と $\overline{G}_1^{[n]}$ の $b_1^{[n]}$ は，関数 $y(x) = x^{\mu_0}(\alpha x; q)_\infty/(\beta x; q)_\infty$ に含まれる μ_0, α, β と，addition で使用される $\mu_1, \ldots, \mu_{n-2}$ および q-convolution で使用される $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ を用いて明示的に書ける．$\overline{G}_1^{[n]}$ の $b_2^{[n]}, \ldots, b_n^{[n]}$ は漸化式で表される．

Theorem 2　q 差分方程式

$$-\frac{1}{x}\begin{pmatrix} g_1^{[n]}(qx) - g_1^{[n]}(x) \\ \vdots \\ g_n^{[n]}(qx) - g_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\overline{G}_0^{[n]}}{x} + \frac{\overline{G}_1^{[n]}}{x - 1/\alpha}\right]\begin{pmatrix} g_1^{[n]}(x) \\ \vdots \\ g_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

から導出される $g_1^{[n]}(x)$ に関する単独 n 階 q 差分方程式はすべての係数が x の 1 次式であり，これは一般化 q 超幾何方程式である．

方程式 (3) の各解は $n-1$ 重の Jackson 積分で与えられ，特に $g_1^{[n]}(x)$ はある積分核 $K_{\lambda_i}(u, v)$ $(i = 0, \ldots, n-2)$ と関数 $y(x) = x^{\mu_0}(\alpha x; q)_\infty/(\beta x; q)_\infty$ を用いて

$$\begin{aligned} g_1^{[n]}(x) = &\int_0^{\xi_{n-2}\infty} \frac{K_{\lambda_{n-2}}(x, s_{n-2})}{s_{n-2}} s_{n-2}^{\mu_{n-2}} \int_0^{\xi_{n-3}\infty} \frac{K_{\lambda_{n-3}}(s_{n-2}, s_{n-3})}{s_{n-3}} s_{n-3}^{\mu_{n-3}} \\ &\cdots \int_0^{\xi_1\infty} \frac{K_{\lambda_1}(s_2, s_1)}{s_1} s_1^{\mu_1} \int_0^{\xi_0\infty} \frac{K_{\lambda_0}(s_1, s_0)}{s_0} y(s_0)\, d_q s_0\, d_q s_1 \ \ldots d_q s_{n-3}\, d_q s_{n-2} \end{aligned}$$

と書ける．

参考文献

[1] Y. Arai, K. Takemura, On q-middle convolution and q-hypergeometric equations, *SIGMA* **19** (2023), 037, 40 pages.

[2] Y. Arai, K. Takemura, Reformulation of q-middle convolution and application, arXiv:2503.11214.

[3] H. Sakai, M. Yamaguchi, Spectral types of linear q-difference equations and q-analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Notices* **2017** (2017), 1975–2013.

Kajihara の q 超幾何関数 $\Phi^m_{1,1}$, $\Phi^m_{2,0}$ の線形関係式

藤井 大計　(神戸大学)[*1]
信川 喬彦　(皇學館大学)[*2]

本講演では, q 超幾何方程式の接続問題の研究 (*cf.* [1, 2, 3, 4, 8]) から得られた Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi^m_{1,1}$, $\Phi^m_{2,0}$ の線形関係式について述べる.

[8] において, Kajihara の q 超幾何関数 $W^{M,2}$ の満たす方程式 E_M およびその退化が導出された. この方程式は変異版 q 超幾何方程式 [4] の多変数拡張である. [3] において, 方程式 E_M の解の線形関係式が導出された. この関係式の適当な退化極限を取ることで, Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi^m_{1,1}$, $\Phi^m_{2,0}$ の線形関係式を与えることができる.

複素数 q を $0<|q|<1$ ととり固定する. Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi^m_{n,r}$ [5, 6, 7] は次で与えられる:

$$\begin{aligned}&\Phi^m_{n,r}\left(\begin{array}{c|c|c|c}\{a_i\}_{1\le i\le m}\\ \{x_i\}_{1\le i\le m}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\{b_k\}_{1\le k\le n}\\ \{d_k\}_{1\le k\le n}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\{c_s\}_{1\le s\le r}\\ \{e_s\}_{1\le s\le r}\end{array}\middle| u\right)\\ &=\sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge0})^m}u^{|l|}\frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{l_i}}{(qx_i/x_j)_{l_i}}\left(\prod_{k=1}^n\prod_{i=1}^m\frac{(b_kx_i)_{l_i}}{(d_kx_i)_{l_i}}\right)\left(\prod_{s=1}^r\frac{(c_s)_{|l|}}{(e_s)_{|l|}}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

ここで, $(x)_\infty=\prod_{k=0}^\infty(1-xq^k)$, $(x)_n=(x)_\infty/(q^nx)_\infty$ である. Kajihara の q 超幾何級数は, Macdonald-Ruijsenaars 理論に背景を持つ多重 q 超幾何級数であり, 双対変換公式を持つ. この関数が満たす方程式について不明な点が多かったが, [8] において, $W^{M,2}$ が満たす方程式が与えられた. この方程式の接続問題を考えることは自然であり, 本講演の結果はこのような背景から得られたものである.

関数 F_0, F_∞ を

$$\begin{aligned}F_0\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)&=\frac{q^{\alpha-1}}{a_1^\alpha}\frac{(q^\alpha b_1/a_1,a_3/b_1)_\infty}{(q^\alpha,qb_3/a_1,qb_1/a_1)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qa_i/a_1)_\infty}{(qb_i/b_1)_\infty}\\&\quad\times\Phi^M_{1,1}\left(\begin{array}{c|c|c}\{a_i/b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{a_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\{1/b_3\}\\ \{q/b_1\}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\{qb_1/a_1\}\\ \{q^{\alpha+1}b_1/a_1\}\end{array}\middle| a_3/b_1\right),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}F_\infty\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)&=\frac{(q^{1-\alpha},b_2/b_1,qb_1/b_2)_\infty}{(qb_1/a_1,qb_2/a_1,qb_1/a_2,qb_2/a_2)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qb_1/b_i,qb_2/b_i)_\infty}{(qb_1/a_i,qb_2/a_i)_\infty}\\&\quad\times\Phi^M_{2,0}\left(\begin{array}{c|c|c}\{a_j/b_j\}_{3\le i\le M+2}\\ \{1/b_i\}_{3\le i\le M+2}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\{a_1,a_2\}\\ \{b_1,b_2\}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\end{array}\middle| q^{\alpha-1}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

とおく. ただし, $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ とする.

[*1] 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1　神戸大学大学院理学研究科
e-mail: tfujii@math.kobe-u.ac.jp
[*2] 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704　皇學館大学教育学部
e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp
キーワード：q 超幾何級数, q 差分方程式, 接続問題

Theorem 1. 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{M+2} \check{D}_k F_0 \left(\begin{array}{c} a_k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2} \end{array} \right) = 0, \tag{4}$$

$$F_0 \left(\begin{array}{c} a_p, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2} \end{array} \right)$$
$$= \sum_{\substack{1\le k\le M+2 \\ k\neq r}} \check{L}_{k,p} \times F_\infty \left(\begin{array}{c} a_r, a_k, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1} \dots, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2} \end{array} \right). \tag{5}$$

ここで $\theta(x) = (x)_\infty (q/x)_\infty$ であり,

$$\check{D}_k = a_k^{\alpha+1} \prod_{i=1}^{M+2} \theta(a_k/b_i) \prod_{\substack{1\le i\le M+2 \\ i\neq k}} \theta(a_k/a_i)^{-1}, \tag{6}$$

$$\check{L}_{k,p} = \frac{1}{qb_k} \left(\frac{q}{a_p}\right)^\alpha \frac{\theta(q^{\alpha+1} b_k/a_p)}{\theta(q^\alpha)} \prod_{\substack{1\le j\le M+2 \\ j\neq p}} \theta\left(\frac{a_j}{b_k}\right) \prod_{\substack{1\le j\le M+2 \\ j\neq k}} \theta\left(\frac{b_j}{b_k}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Remark 2. $M = 1$ の場合は, 2 次の変異版 q 超幾何方程式の解の接続公式を与える. これは, balanced q 超幾何級数 ${}_3\phi_2$ の 3 項間関係式と等価である.

参考文献

[1] Y. Arai, K. Takemura, On q-middle convolution and q-hypergeometric equations, SIGMA **19**, 061, 40 pages (2023).

[2] T. Fujii, T. Nobukawa, Hypergeometric solutions for variants of q-hypergeometric equation, arXiv:2207.12777.

[3] T. Fujii, T. Nobukawa, Connection formula for the Jackson integral of Riemann-Papperitz type. arXiv:2404.00969.

[4] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q-hypergeometric equation, Funk. Ekvac. **65**, 187-211 (2022).

[5] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, Adv. Math. **187**, no. 1, 53-97 (2004).

[6] Y. Kajihara, A unified approach to transformations for multiple basic hypergeometric series of type A, in: Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations - RIMS 2015, in: Adv. Stud. Pure Math. **76**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 247-274 (2018).

[7] Y. Kajihara, M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series : An approach from the Cauchy determinant. Indag. Math. **14**, 395-421 (2003).

[8] T. Nobukawa, Jackson integral representation for Kajihara's q-hypergeometric series and an extension of the q-Riemann-Papperitz system, arXiv:2402.14358.

Exact calculation of degrees for lattice equations

間瀬 崇史　(東京大学大学院数理科学研究科)*

1 はじめに

まず, 差分方程式の次数増大に関する基本的な知識を復習する. なお, 本稿は主にプレプリント [10] に基づいている. [10] で導入された新しい概念や用語の大半には日本語訳がまだない. いくつかの語には日本語訳をつけたが, 多くの用語は英語のまま用いる.

1.1 差分方程式の次数増大

差分方程式の次数増大とは, 方程式の各項を初期値の有理関数として書いた際の, 次数の増大度のことである. 次数増大による離散系の可積分性判定は, 精度が非常に良いことが経験的に知られている.

例 1.1. 方程式

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 1}{x_{n-2}}$$

を考える. x_0, x_1 を初期値と思うと, 各 x_n は初期値の有理関数として書ける. 例えば

$$x_2 = \frac{x_1^2+1}{x_0}, \quad x_3 = \frac{(x_1^2+1)^2 + x_0^2}{x_0^2 x_1}, \quad x_4 = \frac{(x_1^2+1)^3 + 2x_0^2(x_1^2+1) + x_0^4}{x_0^3 x_1^2}$$

である. 有理関数の次数を, (共通因子を約分した後の) 分子・分母の次数のうち大きいほうとして定義する. 今回は, 分子の次数が常に分母より 1 だけ大きくなるので, 次数は

$$\deg x_2 = 2, \quad \deg x_3 = 4, \quad \deg x_4 = 6$$

であり, $n \geq 2$ に対して $\deg x_n = 2(n-1)$ となる. 方程式の代数的エントロピー [1] は

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\deg x_n\right) = 0$$

となる. 代数的エントロピーが 0 になる (次数増大が高々多項式的になる) ため, 次数増大による判定では, この方程式は可積分と判定される. 実際, この方程式は保存量 $H = \frac{x_{n+1}^2 + x_n^2 + 1}{x_{n+1} x_n}$ を用いて線形化できるため, 可積分であると考えるのが自然である.

この例は, Laurent 現象 (各項の分母が単項式になる性質 [2]) のおかげで, 厳密な次数の計算が容易である. しかし, 次数増大の計算は難しく, 一般的手法は知られていない.

例 1.2 (広田の離散 KdV 方程式 [7])**.** $\lambda \neq 0$ を定数として, 格子方程式 (偏差分方程式)

$$x_{n,m} = x_{n-1,m-1} + \frac{1}{x_{n,m-1}} - \frac{\lambda}{x_{n-1,m}}$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科
本研究は科研費 (課題番号: 23K12996) の助成を受けたものである.

を考える．この方程式は $\lambda = 1$ のとき可積分, $\lambda \neq 1$ のとき非可積分になる．$n = 0$ と $m = 0$ の部分を初期値とみなして, 第 1 象限における $x_{n,m}$ の次数を計算すると

•	13	37	61	85	109	133
•	11	31	51	71	91	109
•	9	25	41	57	71	85
•	7	19	31	41	51	61
•	5	13	19	25	31	37
•	3	5	7	9	11	13
•	•	•	•	•	•	•

$\lambda = 1$ (可積分)

•	13	61	193	494	1097	2197
•	11	46	130	299	601	1097
•	9	33	82	167	299	494
•	7	22	47	82	130	193
•	5	13	22	33	46	61
•	3	5	7	9	11	13
•	•	•	•	•	•	•

$\lambda = 2$ (非可積分)

となる．$\lambda = 1$ (可積分) のとき $\deg x_{n,m} = 4nm - 2\max(n, m) + 1$ であり [11], 2 次関数的増大である．$\lambda = 2$ (非可積分) のとき $\deg x_{n,n} \propto 4^n$ であり, 指数関数的増大である．

1.2 Total degree と Individual degree

格子方程式の次数増大は, 初期値問題 (領域) の選び方に大きく依存する [6]．格子方程式の可積分性判定として次数増大を用いる際に重要なのは, 病的な領域を考えないことと, 次数として total degree ではなく individual degree を用いることである．

定義 1.3. *Total degree* とは, すべての初期値が次数 1 だと考えたときの次数である．*Individual degree* とは, 任意に固定した 1 つの初期値についての次数である．

1.3 特異点閉じ込め

特異点閉じ込めは, 離散系の可積分性判定法として歴史上最初に提唱された [3]．現代では, 特異点閉じ込めによる可積分性判定は精度があまり良くないことが知られている [5]．

例 1.4. k を 2 以上の偶数として, 次の方程式を考える:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{1}{x_n^k}.$$

α を一般的なパラメータとして, 自由度 1 の初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, 0)$ を考える．ここから方程式を発展させると $(x_n, x_{n+1}) = (0, \infty)$ となり, α の情報が失われる結果, 自由度が下がる．すなわち, 方程式は特異点に突入したとみなす．この先を計算するため, 無限小パラメータ ε を導入して, 初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, \varepsilon)$ から計算を始める．すると

$$x_{n+1} = \varepsilon^{-k} + o\left(\varepsilon^{-k}\right), \quad x_{n+2} = -\varepsilon + o(\varepsilon), \quad x_{n+3} = \alpha + o(1)$$

となり, 初期値 α の情報が復活する．特に $(x_{n+2}, x_{n+3})\Big|_{\varepsilon=0} = (0, \alpha)$ の自由度が 1 に戻る．よって, 方程式のこの特異点は閉じ込められる．特異点パターンとは, 特異点の値と重複度を並べたものであり, 今回は $(0, \infty^k, 0)$ である．

また, 初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, \infty)$ から始めると, 周期 2 のパターン $(\infty, \mathrm{reg}, \infty, \mathrm{reg}, \cdots)$ が得られる (reg は α に依存する量で, 逆方向にも ∞ が周期 2 で出現)．α の情報が失われないので厳密には特異点ではないが, Halburd の手法でこのパターンは重要になる．

1.4 Halburd の手法

Halburd の手法は, 特異点パターンから次数を直接計算する手法である [4]. ここでは, 上で計算した特異点閉じ込めの情報を用いて, 方程式の次数を計算していく.

例 1.5. 例 1.4 と同じ方程式を考える. 初期値を $x_0 = u$ (一般的な複素数値), $x_1 = z$ (変数) と取り, x_n を z の 1 変数有理関数と考え, その次数 $\deg_z x_n(z)$ を計算する.

1 変数有理関数 $x_n(z)$ の, 値 0 と ∞ の逆像の個数をそれぞれ $d_n(0)$, $d_n(\infty)$ とする:

$$d_n(0) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) = 0\}, \quad d_n(\infty) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) = \infty\}.$$

ただし, 本稿において, 逆像の個数は常に重複度を込めて数えると約束する. 代数閉体上の 1 変数有理関数の次数は, どの値に対しても $\mathbb{P}^1$ 上での逆像の個数と等しい. すなわち

$$d_n(0) = d_n(\infty) = \deg_z x_n(z).$$

が成立する. これを用いて次数を計算するため, $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して, いつ $x_n(z^*) = 0, \infty$ になるか調べる. 例 1.4 の計算より, 方程式は次のようなパターンを持つ:

- $(0, \infty^k, 0)$. (閉じ込められる特異点パターン)
- $(\infty, \mathrm{reg}, \infty, \mathrm{reg}, \cdots)$. (周期 2)

よって, もし「$x_n(z^*)$ が spontaneous に 0 になった」とすると,[*1] 上の特異点パターンから

$$x_n(z^*) = 0, \quad x_{n+1}(z^*) = \infty^k, \quad x_{n+2}(z^*) = 0, \quad x_m(z^*) \neq 0, \infty \ (m \neq n, n+1, n+2)$$

となるはずである.[*2] また, $z^* = \infty$ の場合は, 周期 2 のパターンに従って

$$x_m(z^*) = \infty \ (m \text{ が奇数}), \quad x_m(z^*) \neq 0, \infty \ (m \text{ が偶数})$$

となる. 実際, $x_n(z^*)$ が 0 や ∞ になる可能性は, これらで尽くされている.[*3]

ここまでの情報を用いて, 次数 $\deg_z x_n(z)$ を計算する. 逆像の個数を数えるため,

$$Z_n = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) \text{ が spontaneous に } 0 \text{ になる }\}$$

とおく.[*4] すると, 0 と ∞ の逆像の個数を数えることで, $n \geq 0$ に対して次数は

$$\begin{aligned} \deg_z x_n(z) = d_n(0) &= Z_n + Z_{n-2}, \\ &= d_n(\infty) = kZ_{n-1} + \frac{1 - (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

と書ける. このように次数を表示した式を, *degree relation* と呼ぶ. ここで, 各項の対応は

[*1] 「$x_n(z^*)$ が spontaneous に 0 になる」の定義は, 本稿では与えない.

[*2] この主張自体は正しいが, 特異点閉じ込めの計算からこれを厳密に示すことは容易ではない.

[*3] この主張自体も正しいが, 特異点閉じ込めの計算からこれを厳密に示すことは容易ではない.

[*4] 次数を計算するにあたって重要なのは, 「spontaneous に 0 になること」の具体的な定義ではなく, Z_n が厳密に定義できるという事実である. Z_n の厳密な定義は Halburd の手法の厳密性についての問題点のひとつであり, 本稿では厳密な定義を与えることはしない. なお, 格子方程式の場合に Z_n に相当するものが厳密に定義できるということは, 本稿の主結果である定理 4.4 の主張のひとつである.

- Z_{n-2}: 特異点パターン $(x_{n-2}=0,\ x_{n-1}=\infty^k,\ x_n=0)$,
- Z_{n-1}: 特異点パターン $(x_{n-1}=0,\ x_n=\infty^k,\ x_{n+1}=0)$,
- Z_n: 特異点パターン $(x_n=0,\ x_{n+1}=\infty^k,\ x_{n+2}=0)$,
- $\frac{1-(-1)^n}{2}$: 周期 2 のパターン $(x_0=u,\ x_1=\infty,\ x_2=\mathrm{reg},\ x_3=\infty,\cdots)$

となっている. Degree relation の右辺が等しいため, 連立して, 線形な発展方程式

$$Z_n+Z_{n-2}=kZ_{n-1}+\frac{1-(-1)^n}{2}$$

を得る. $x_0(z)=u$, $x_1(z)=z$ より $Z_0=0$, $Z_1=1$ なので, 上の式は Z_n について解ける. そして, Z_n がわかれば次数も求まる. 実際に計算を行うと, 次数増大は次のようになる:

$$\deg_z x_n(z)\sim\begin{cases}\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^n & (k\geq 4)\\ n^2 & (k=2).\end{cases}$$

2 格子方程式の次数の計算

この章では, Halburd の手法を格子方程式に拡張して, 格子方程式の次数をどう計算するのか, 例を用いて解説する. ただし, 厳密性の担保はこの章では行わない. 章の最後に, 厳密性を保証するためにどのような問題を解決しなければならないのかを議論する.

2.1 例: 特異点閉じ込めを通過する非可積分格子方程式の次数の計算

k を 2 以上の偶数として, 次の方程式を考える:

$$x_{t,n}=-x_{t-1,n-1}+\frac{a}{x_{t-1,n}^k}+\frac{b}{x_{t,n-1}^k}.$$

この方程式は, 特異点閉じ込めを通過する非可積分な格子方程式の最初の例であり [8], $\begin{bmatrix}x_{t,n+1}=\infty^k & x_{t+1,n+1}=0\\ x_{t,n}=0 & x_{t+1,n}=\infty^k\end{bmatrix}$ という閉じ込められる特異点を持つ. その意味は,

$$\begin{array}{cccccc}\vdots & & & & & \\ x_{t-1,n+2} & & & & & \\ x_{t-1,n+1} & & & & & \\ x_{t-1,n} & x_{t,n}=\varepsilon & & & & \\ & x_{t,n-1} & x_{t+1,n-1} & x_{t+2,n-1} & \cdots & \end{array}$$

という初期値から始めて $\varepsilon\to 0$ とした際,

$$\begin{array}{cccc}x_{t-1,n+2} & \mathrm{reg} & \mathrm{reg} & \mathrm{reg}\\ x_{t-1,n+1} & \infty^k & 0 & \mathrm{reg}\\ x_{t-1,n} & 0 & \infty^k & \mathrm{reg}\\ & x_{t,n-1} & x_{t+1,n-1} & x_{t+2,n-1}\end{array}$$

というパターンが得られるという意味である. ただし, 「reg」は ε 以外の初期値に依存する何らかの有限値という意味である. また, ここに書かれていない右上の部分については計算する必要はない (この先で何が起こるのかは気にしない) とする.

なお, 格子方程式の自由度は非常に大きく, 特異点閉じ込めの定義も定まっていない. 実際, 離散 KdV 方程式などの初等的な方程式であっても, 非常に複雑なパターンが出現するという報告がある [12, 13]. 本稿での特異点閉じ込めの定義では, 余次元 1 の初期条件のみを考えるため, そのような複雑なパターンは出現しない.

例として, 領域 $H \subset \mathbb{Z}^2$ と 1 つの初期値 z を

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & & & \iddots \\ x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \\ x_{00} & z & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{array}$$

と固定し, z についての individual degree を計算する. 常差分のときと同様, z 以外の初期値に一般的な $\mathbb{C}$ 値を代入すると, 各項は z に関する 1 変数有理関数になる: $x_{t,n} = x_{t,n}(z)$.

各 $(t,n) \in H$ に対して, $x_{t,n}(z)$ の 0 と ∞ の逆像の個数を $d_{t,n}(0)$, $d_{t,n}(\infty)$ とする:

$$d_{t,n}(0) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_{t,n}(z^*) = 0\}, \quad d_{t,n}(\infty) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_{t,n}(z^*) = \infty\}.$$

常差分のときと同様, 重要なのは, $x_{t,n}(z)$ の次数が

$$\deg_z x_{t,n}(z) = d_{t,n}(0) = d_{t,n}(\infty)$$

と 2 通りの方法で表されることである. さまざまな値 $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を z に代入した際, $x_{t,n}(z^*)$ がいつ 0 や ∞ になるのかを, 特異点閉じ込めの情報を用いて特定していく.

実は, $x_{t,n}(z^*)$ が 0 や ∞ になるのは, 次の 3 通りの可能性しかない.

1. $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になると, 特異点閉じ込めと対応するパターンが出現:
$$\begin{bmatrix} x_{t,n+1}(z^*) = \infty^k & x_{t+1,n+1}(z^*) = 0 \\ x_{t,n}(z^*) = 0 & x_{t+1,n}(z^*) = \infty^k \end{bmatrix}.$$
2. $z^* = 0$ の場合, 閉じ込められないパターンが出現:
$$\begin{bmatrix} \vdots & & & \iddots \\ x_{02} & & \infty^k & \\ x_{01} & \infty^k & & \\ x_{00} & z = 0 & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}.$$
このパターンは場所が固定されている. 上のパターンとの違いは, 初期値 x_{02} が $z = 0$ の影響を受けない点にある. ここが ∞^k にならないせいで, x_{21} が 0 にならず, x_{22} が有限値にならない.
3. $z^* = \infty$ の場合, 閉じ込められないパターンが出現:
$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ & & & & \iddots \\ x_{03} & & & & \\ x_{02} & & & \infty & \\ x_{01} & & \infty & & \\ x_{00} & z = \infty & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix}.$$

$x_{t,n}(z^*)$ が 0 や ∞ になる可能性がこれらのケースで尽くされていることを認めて

$$Z_{t,n} := (\#\text{ of “spontaneous occurrences of } x_{t,n}(z) = 0\text{”})$$

とおくと, 次のような degree relation が導出できる $(t, n \geq 0)$:

$$\begin{aligned}\deg_z x_{t,n}(z) &= d_{t,n}(0) = Z_{t,n} + Z_{t-1,n-1} + \delta_{n,0}^{t,1} \\ &= d_{t,n}(\infty) = kZ_{t-1,n} + kZ_{t,n-1} + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}).\end{aligned}$$

ここで δ は Kronecker デルタであり, 各項の対応は以下のようになっている:

- 項 $Z_{s,m}$ は, パターン $\begin{bmatrix} \infty^k & 0 \\ x_{s,m} = 0 & \infty^k \end{bmatrix}$ における 0 や ∞ に対応する.
- 項 $\delta_{n,0}^{t,1}$ は, パターン $z^* = 0$ における値 0 に対応する.
- 項 $\delta_{t-1,n}$ は, パターン $z^* = 0$ における値 ∞ に対応する.
- 項 $k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0})$ は, パターン $z^* = \infty$ における値 ∞ に対応する.

この degree relation の右辺 2 つを連立することで, $Z_{t,n}$ についての線形発展方程式

$$\begin{aligned}Z_{t,n} &= kZ_{t-1,n} + kZ_{t,n-1} - Z_{t-1,n-1} - \delta_{n,0}^{t,1} + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}), \\ Z_{t_0,n_0} &= 0 \quad (t_0 = 0 \text{ or } n_0 = 0)\end{aligned}$$

が得られる. 2 つめの式は, $t = 0$ や $n = 0$ の部分で $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になることができない (閉じ込められるパターンが始まらない) という事実に対応している. この式から, $t, n \to +\infty$ としたときに $Z_{t,n}$ が指数関数的に増大するということがわかり, 結局, この方程式の次数は指数増大であることが従う.

例として $k = 2$ の場合に $Z_{t,n}$ と $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算すると, 以下のようになる:

$Z_{t,n}$:

0	128	1536	10816	58336	266592	1086392	4067660
0	64	672	4208	20456	85188	319198	1107036
0	32	288	1576	6808	25542	87181	277910
0	16	120	560	2108	7016	21556	62552
0	8	48	184	585	1692	4608	12024
0	4	18	52	134	328	776	1792
0	2	5	10	20	40	80	160
0	0	0	0	0	0	0	0

$\deg_z x_{t,n}(z)$:

0	128	1600	11488	62544	287048	1171580	4386858
0	64	704	4496	22032	91996	344740	1194217
0	32	304	1696	7368	27650	94197	299466
0	16	128	608	2292	7601	23248	67160
0	8	52	202	637	1826	4936	12800
0	4	20	57	144	348	816	1872
0	2	5	10	20	40	80	160
0	1	0	0	0	0	0	0

2.2 厳密性を保証するために解決すべき問題

§2.1 で見た計算例では, いくつかの場所で数学的に厳密な議論を行っていない.[*5] この計算手法を厳密なものとするためには, 以下の問題点を解決しなければならない.

1. $x_{t,n}(z^*)$ が値 0 や ∞ を取る可能性が, 上で見た 3 通り以外に存在しないことを, どのようにして厳密に示すか？
2. 「$x_{t,n}(z)$ が spontaneous に 0 になる」の厳密な定義は何か？
3. $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になったとき, パターン $\begin{bmatrix} x_{t,n+1}=\infty^k & x_{t+1,n+1}=0 \\ x_{t,n}=0 & x_{t+1,n}=\infty^k \end{bmatrix}$ が必ず出現することを, どうやって厳密に示すか？
4. Degree relation が, $Z_{t,n}$ についての線形方程式系として解けるための条件は何か？
5. そもそも, 格子方程式において特異点の定義は何か？
   例えば [12, 13] で格子方程式の特異点パターンとして非常に複雑なものが報告されているが, 今の設定でそのようなものが出現しないことを, どう厳密に示すか？

本稿では, これらの問題を解決することで, 格子方程式の厳密な次数計算手法を与える.

3 Constant singularity

簡単のため, 本稿では quad equation という形の方程式のみを扱う. Quad equation とは, 文字 B, C, D についての有理関数 $\Phi = \Phi(B, C, D) \in \mathbb{C}(B, C, D)$ を用いて

$$x_{t,n} = \Phi(x_{t-1,n}, x_{t,n-1}, x_{t-1,n-1})$$

と定義されるような格子方程式である.[*6] 方程式を考える領域 $H \subset \mathbb{Z}^2$ は, 病的ではなく, どの点の値も初期値から有限回の計算によって求められるという条件を満たすならば何でもよい.[*7] 領域 H を指定すると, 初期境界 (初期値を与えなければならない部分) が

$$H_0 = \{(t, n) \in H \mid (t-1, n-1) \notin H\}$$

と定まり, すべての (t, n) に対して, $x_{t,n}$ は初期値の有理関数として一意的に書ける. ひとつの初期値 z を任意に固定して, 文字 z についての次数 $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算する.

§1.4 や §2.1 の計算では, z 以外の初期値を一般的な $\mathbb{C}$ 値と思い, 値 $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を代入した際に $x_{t,n}(z^*)$ が特定の値になるかどうか調べた. ここからは, 代入する値 z^* がどの変数に依存するか明確にするため, すべての初期値を文字変数として扱う.

定義 3.1 ($\mathbb{K}$)**.** z 以外の初期値を変数とする有理関数体を $\mathbb{K}$ とおく. すなわち

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}\left(x_{t',n'} \mid (t', n') \in H_0;\ x_{t',n'} \neq z\right)$$

[*5] 例 1.5 での計算も同様である.

[*6] 可積分系の分野においては, Φ の次数が B, C, D についてそれぞれ 1 次であることを要求することも多いが, 本稿ではそのような条件は仮定しない. ただし, Φ が B, C, D すべてに依存することは仮定しておく.

[*7] 本稿では, 細かい領域の条件については立ち入らない. 課すべき条件については, [6] や [10] を参照せよ.

である. また, 体 $\mathbb{K}$ の代数閉包を $\overline{\mathbb{K}}$ と書く.

ここからは, $x_{t,n}(z)$ は $\mathbb{K}$ 係数有理関数と考え, z には $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ の元を代入する. 体 $\overline{\mathbb{K}}$ 上で考えると, $x_{t,n}(z)$ の次数は逆像の個数と一致する. つまり, 任意の $\alpha \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対して

$$\deg_z x_{t,n}(z) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right) \mid x_{t,n}(z^*) = \alpha\}$$

が成立する. 特に重要なのが $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となる場合であり, ここから, 本稿における「特異点」「特異点パターン」の定義が従う.

定義 3.2 (constant singularity)**.** $(t,n) \in H$, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ とする. $x_{t,n}(z^*)$ が *constant singularity* とは, $x_{t,n}(z^*) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となることである. $x_{t,n}(z^*) = x^*$ が constant singularity のとき, その重複度を, 1 変数有理関数 $x_{t,n}(z)$ の $z = z^*$ における値 x^* の重複度として定める. ただし, $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity でないとき, 重複度は 0 と考える.

定義 3.3 (constant singularity pattern)**.** $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する *constant singularity pattern* とは, 次の 3 つのデータのことである.

1. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるような $(t,n) \in H$ 全体のなす集合.
2. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるときの, constant singularity の値.
3. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるときの, constant singularity の重複度.

ただし, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ が 1 つも constant singularity を生成しないときは, constant singularity pattern とはみなさない.

今後, constant singularity pattern を単に「特異点パターン」や「パターン」と言う.

定義 3.4. $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する特異点パターンを考える.

- パターンが *fixed* とは, $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となることである. 特異点パターンが fixed でないとき, *movable* という.
- パターンが *confining* とは, パターンに含まれる constant singularity が有限個しかないことである. 特異点パターンが confining でないとき, *non-confining* という.
- パターンが *solitary* とは, パターンがただ 1 つの constant singularity を持つことである. 特異点パターンが solitary ならば, 必ず confining になる.

例 3.5. §2.1 で扱った方程式の特異点パターンは, 以下の 5 種類である.

1. $\begin{bmatrix} \infty^k & 0 \\ x_{t,n}(z^*) = 0 & \infty^k \end{bmatrix}$. (movable, confining, non-solitary)

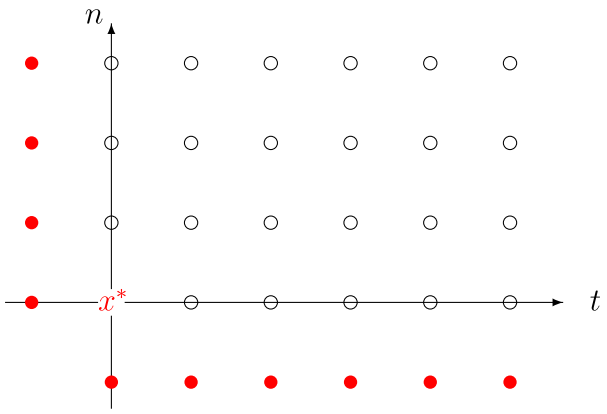


図 1　Basic pattern を定める領域と初期値.

2. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \iddots \\ x_{02} & & \infty^k & \\ x_{01} & \infty^k & & \\ x_{00} & z=0 & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}$. (fixed, non-confining, non-solitary)

3. $\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ x_{03} & & & & \iddots \\ x_{02} & & & \infty & \\ x_{01} & & \infty & & \\ x_{00} & z=\infty & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix}$. (fixed, non-confining, non-solitary)

4. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \\ x_{02} & & & \\ x_{01} & & & \\ x_{00} & z=\alpha & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}$. ($\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$; fixed, confining, solitary)

5. $\left[x_{t,n}(z^*) = \alpha\right]$. ($\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$; movable, confining, solitary)

これらのパターンが他の constant singularity を持たず, なおかつ特異点パターンがこの 5 種類しかないことを厳密に示すためには, 何らかの手法が必要である. 本稿 §4 と §5 において, 特異点パターンを厳密に計算するための定理や命題を紹介する.

定義 3.6 (basic pattern)**.** 領域 H^{basic} を

$$H^{\text{basic}} = (\mathbb{Z}_{\geq -1})^2 \setminus \{(-1,-1)\}$$

で定め, $z = x_{0,0}$ とする. $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対応する *basic pattern* とは, 領域 H^{basic} において, $z = x^*$ に対応する fixed pattern のことである. (図 1)

Basic pattern は, §2.1 で見た特異点閉じ込めの計算と大まかに対応している.

定義 3.7 (∂-factor condition)**.** 方程式 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が *∂-factor condition* を満たすとは, 次の 2 条件を満たすことである:

- $\partial_B\Phi$ と $\partial_B\frac{1}{\Phi}$ の分子に, C と D のみを含む既約因子がない.[*8]
- 上の条件で B と C をすべて入れ替えたもの.

すなわち, 方程式が ∂-factor condition を満たすとき, $\partial_B\Phi$ と $\partial_B\frac{1}{\Phi}$ や分子の既約因子として可能なのは, 以下の 3 種類の形である:

- 変数 B に依存するもの. (つまり B で微分して 0 にならないもの)
- $C - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)
- $D - \beta$. ($\beta \in \mathbb{C}$)

定義 3.8 (basic pattern condition)**.** 方程式 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が, $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して *basic pattern condition* を満たすとは, 関係式

$$\Phi(B, C, D) = x^*$$

が, B と C のみを含む既約因子を持たないということである. ただし, 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の既約因子とは, $\Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ を既約な表示とする際の

- 多項式 $\Phi_1 - x^*\Phi_2 \in \mathbb{C}[B, C, D]$ の既約因子 ($x^* \in \mathbb{C}$ のとき)
- 多項式 $\Phi_2 \in \mathbb{C}[B, C, D]$ の既約因子 ($x^* = \infty$ のとき)

のことである.

すなわち, 方程式が $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して basic pattern condition を満たすとき, 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の既約因子として可能なのは, 以下の 3 種類の形である:

- 変数 D に依存するもの. (つまり D で微分して 0 にならないもの)
- $B - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)
- $C - \beta$. ($\beta \in \mathbb{C}$)

4 主結果

定理 4.1. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する特異点パターンを考える. このとき, H の部分集合

$$\{(t, n) \in H \mid x_{t,n}(z^*) : \text{constant singularity}\}$$

には, 最小元が存在する. ただし, 順序は格子 $\mathbb{Z}^2$ の直積順序で考える.

[*8] ∂_X で変数 X による偏微分を表す.

定義 4.2 (first singularity, starting value)**.** 定理 4.1 で存在が保証される最小元に対応する constant singularity を, この特異点パターンの *first singularity* という. また, first singularity の値を, このパターンの *starting value* という.

定理 4.3. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する特異点パターンを考える. この特異点パターンの first singularity を $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, その重複度を r とし, 方程式 Φ は x^* に対して basic pattern condition を満たすとする. このとき, 特異点パターンの

$$\{(s,m) \in H \mid s \geq t;\ m \geq t\}$$

の部分は, x^* に対応する basic pattern を (t,n) だけ平行移動したものと一致する. ただし, basic pattern に比べて, z^* に対応するパターンでは重複度がすべて r 倍される.

定理 4.4. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とする.

- $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_L\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $S \neq 0$ とする. 次数を計算する際, これらの値の逆像の個数を用いる. $\alpha_1, \ldots, \alpha_L$ を, singular value と呼ぶ.
- 設定した singular value を含む特異点パターンがすべて得られているとする. そのようなパターンのうち, movable pattern の starting value 全体を $\beta_1, \ldots, \beta_I \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, fixed pattern の starting value 全体を $\gamma_1, \ldots, \gamma_L \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とおく.
- 方程式 Φ は, $\beta_1, \ldots, \beta_I$ に対して basic pattern condition を満たすとする.
- 領域 H^{basic} において, 値 β_i に対応する basic pattern を考える. この basic pattern における, constant singularity $x_{s,m}(\beta_i) = \alpha_j$ の重複度を

  $$\mathrm{mult}_{s,m}^{\mathrm{basic},\beta_i}(\alpha_j)$$

  とおく. ($x_{s,m}(\beta_i) \neq \alpha_j$ や $(s,m) \notin H^{\mathrm{basic}}$ の場合は, この重複度は 0 と定める)
- 領域 H において, $z = \gamma_\ell$ に対応する fixed pattern を考える. このパターンにおける constant singularity $x_{t,n}(\gamma_\ell) = \alpha_j$ の重複度を

  $$\mathrm{mult}_{t,n}^{\gamma_\ell}(\alpha_j)$$

  とおく. ($x_{t,n}(\gamma_\ell) \neq \alpha_j$ の場合は, この重複度は 0 と定める)

以上の仮定のもとで, 各 $j = 1, \ldots, J$ に対して, 次の degree relation が成立する:

$$\deg_z x_{t,n}(z) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{(s,m)\in H} \mathrm{mult}_{t-s,n-m}^{\mathrm{basic},\beta_i}(\alpha_j) Z_{s,m}(\beta_i) + \sum_{\ell=1}^{L} \mathrm{mult}_{t,n}^{\gamma_\ell}(\alpha_j).$$

ただし, $Z_{s,m}(\beta_i)$ は「spontaneous occurrence of $x_{s,m}(z) = \beta_i$」を引き起こすような $z \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ の数 (重複度込み) であり, [10] において厳密に定義されている.[*9]

[*9] 本稿では $Z_{s,m}(\beta_i)$ の具体的定義は与えない. 重要なのは $Z_{s,m}(\beta_i)$ が厳密に定義できるという事実だけであり, 次数を計算する際, その具体的な定義は用いられない.

定理 4.5. 定理 4.4 と同じ仮定・記号を用いる.

- $I \geq L$ とする. つまり, starting value の数が singular value の数よりも多いとする. このとき, degree relation のみから次数を完全に特定することは不可能である. すなわち, degree relation は, 線形方程式系として under-determining である.
- $\{\beta_1, \ldots, \beta_I\} \subsetneq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_L\}$ とする. すなわち, 考えている movable pattern の starting value はすべて singular value であり, かつ movable pattern の starting value とはならない singular value が存在するとする. このとき, degree relation は各項の次数を完全に決定する. つまり, degree relation を解いて次数が計算できる.

注意 4.6. 次数を計算する際, $\{\beta_1, \ldots, \beta_I\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_L\}$ と取る, つまり starting value を singular value に含めるのが普通である. この状況では, movable pattern の starting value にならない $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 値の存在が, degree relation が解けるための必要十分条件である.

5 特異点パターンの計算

本章では, 特異点パターンの計算に役立つ命題を紹介する.

命題 5.1. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する特異点パターンを考える. $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を constant singularity とする. $(s, m) \in H$, $s > t$ が条件

$$x_{s,m}(z^*),\ x_{s,m-1}(z^*),\ x_{s,m-2}(z^*),\ \cdots \text{ はいずれも constant singularity でない}$$

を満たすとする. このとき, $x_{s+1,m}$, $x_{s+1,m-1}$, $x_{s+1,m-2}$, $\cdots$ のうち最初に初期値となるものを w とおくと, $x_{s+1,m}(z^*)$, $x_{s+1,m-1}(z^*)$, $x_{s+1,m-2}(z^*)$, $\cdots$ はすべて文字 w に依存する. 特にこれらは constant singularity ではない. (図 2)

命題 5.2. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathbb{K}}\right)$ に対応する特異点パターンを考える. このパターンの first singularity を $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする. $(s, m) \in H$ が $t \leq s$ と $n \leq m$ を満たすとし,

$$x_{t,m+1}(z^*), x_{t+1,m+1}(z^*), \cdots, x_{s,m+1}(z^*), x_{s+1,m+1}(z^*), x_{s+1,m}(z^*), \ldots, x_{s+1,n+1}(z^*), x_{s+1,n}(z^*)$$

はいずれも constant singularity ではないとする (図 3). このとき, このパターンの constant singularity はすべて以下の範囲にある:

$$\{(u, \ell) \in H \mid t \leq u \leq s;\ n \leq \ell \leq m\}.$$

注意 5.3. この命題は confining pattern の計算に役立つ. 特異点閉じ込めの計算を行った際, 特異点が一度閉じ込められてしまえば, その先には永遠に constant singularity が出現しないということが保証される. 実際, §2.1 における特異点閉じ込めの計算において

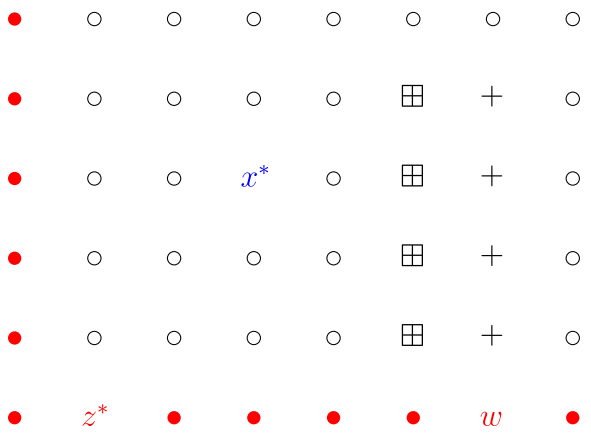


図 2　命題 5.1 の状況．「田」の部分が constant singularity でないならば，「+」の部分は変数 w に依存する (特に constant singularity ではない)．この命題を帰納的に用いると，「田」より右の部分に constant singularity が存在しないことがわかる．

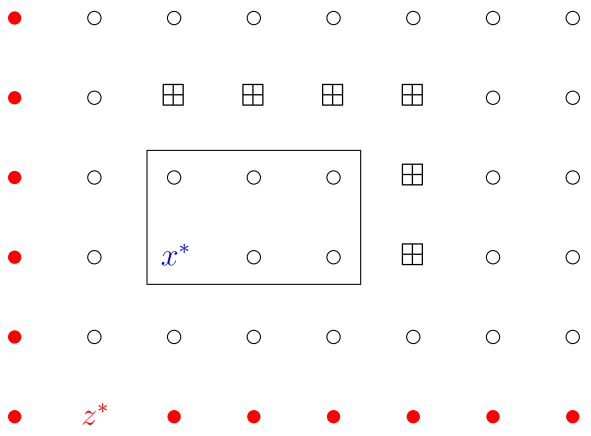


図 3　命題 5.2 の状況．「田」の部分が constant singularity でないならば，constant singularity は四角で囲まれた部分のみに存在しうる．

「reg」と書かれた部分より先を計算しなかったのは，その先に constant singularity が一切出現しないことがこの命題によって保証されるからである．なお，これは格子方程式特有の事情である．実際，常差分方程式には周期的なパターンがしばしば出現する．

命題 5.4. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとし，$x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする．さらに，方程式を定める 3 変数有理関数 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が条件

$$\Phi(x^*, C, D),\ \Phi(B, x^*, D),\ \Phi(B, C, x^*) \text{ はいずれも定数 } (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ の元}) \text{ ではない}$$

を満たすとする．このとき，$z = x^*$ に対応する fixed pattern は solitary である．特に，x^* に対応する basic pattern も solitary である．

この命題の条件を満たす $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は計算で特定できる．重要なのは non-solitary な

パターンなので, この命題の条件を満たさない x^* に対応する basic pattern を計算する.

命題 5.5. $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が, どんな movable pattern の starting value にもならないとする. このとき α は, 何らかの non-solitary なパターンに constant singularity として出現する.

命題 5.6. 方程式 Φ は ∂-factor condition を満たすとし, $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする. このとき, 次の 2 条件は同値である:

- x^* はどの movable pattern の starting value にもならない.
- 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の任意の既約因子は, $B - \alpha$, $C - \beta$, $D - \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$ の形のどれかである.

方程式にとって重要なのは, non-solitary パターンに出現する値である. ここまでの命題を用いると, 方程式の次数を求める操作として, 例えば以下の手続きが考えられる.

1. 命題 5.4 を用いて, non-solitary パターンを生成する可能性のある $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ をすべて求める. (x^* の候補は有限個しかない)
2. 各 x^* に対して, 対応する basic pattern を計算する (命題 5.1, 5.2 が役に立つ). 計算した basic pattern のうち, solitary でないものに出現する値のリストを作る.
3. 出現するそれぞれの値 α に対して命題 5.6 を適用して, movable pattern の starting value として出現するかどうかを調べる.
4. 特異点パターンの情報をもとに, degree relation を書く. Movable pattern の starting value にならない値があれば, degree relation を解いて次数が計算できる.

6 計算例

6.1 離散 mKdV 方程式

パラメータ $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, $k^4 \neq 1$ に対して, 離散 mKdV 方程式

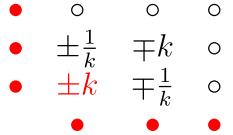
$$(1 - x_{t-1,n-1}x_{t-1,n})\left(kx_{t,n} - \frac{x_{t,n-1}}{k}\right) = (1 - x_{t,n-1}x_{t-1,n-1})\left(kx_{t-1,n-1} - \frac{x_{t-1,n}}{k}\right)$$

を考える [9]. Φ を

$$\Phi = \Phi(B, C, D) = \frac{D(BC - k^2) + B - C}{k^2 D(B - C) + BC - k^2},$$

で定義すると, 方程式は $x_{t,n} = \Phi(x_{t-1,n}, x_{t,n-1}, x_{t-1,n-1})$ と書ける.

Φ や $\frac{1}{\Phi}$ を微分すると, 方程式が ∂-factor condition を満たすことがわかる. また, 命題 5.4 を用いると, 値 $\pm k$, $\pm\frac{1}{k}$ 以外から始まる fixed pattern は solitary であることがわかる. よって以下, 値 $\pm k$, $\pm\frac{1}{k}$ に注目して次数を計算する. 値 $\pm k$ から始まる basic pattern は



である.[*10] 命題 5.6 を用いると, $\pm\frac{1}{k}$ から始まる movable pattern はないことがわかる. さらに, 方程式は任意の $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \left\{\pm\frac{1}{k}\right\}$ に対して basic pattern condition を満たす.

以下, 領域 $H \subset \mathbb{Z}^2$ と 1 つの初期値 z を

$$\begin{array}{cccc:c} \vdots & & & & \iddots \\ x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \\ x_{00} & z & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{array}$$

のように固定し, z についての individual degree $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算する.

この初期値のもとで, 方程式の特異点パターンの完全なリストは以下のようになる: [*11]

1. $\left[x_{t,n}(z^*) = \gamma\right]$. (solitary; $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \left\{\pm k,\ \pm\frac{1}{k}\right\}$; movable or fixed)
2. $\begin{bmatrix} & \pm\frac{1}{k} & \mp k \\ x_{t,n}(z^*) = \pm k & & \mp\frac{1}{k} \end{bmatrix}$. (confining, movable; $t, n \geq 1$)
3. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \iddots \\ x_{02} & & \pm\frac{1}{k} & \\ x_{01} & \pm\frac{1}{k} & & \\ x_{00} & z^* = \pm k & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)
4. $\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ x_{03} & & & & \iddots \\ x_{02} & & & \pm\frac{1}{k} & \\ x_{01} & & \pm\frac{1}{k} & & \\ x_{00} & z^* = \pm\frac{1}{k} & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)

この方程式は $\pm\frac{1}{k}$ から始まる movable pattern を持たないので, degree relation を解いて次数が計算できる.

特異点パターンのデータをもとに degree relation を導出すると, $t, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \deg_z x_{t,n}(z) &= Z_{t,n}(k) + Z_{t-1,n-1}(-k) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\#\text{ of preimages of } k) \\ &= Z_{t,n}(-k) + Z_{t-1,n-1}(k) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\text{of } -k) \\ &= Z_{t-1,n}(-k) + Z_{t,n-1}(k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && \left(\text{of } \frac{1}{k}\right) \\ &= Z_{t-1,n}(k) + Z_{t,n-1}(-k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && \left(\text{of } -\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

[*10] これ以上先に constant singularity が出現しないことを示すために, 命題 5.2 を用いる.

[*11] Movable pattern については既に上で計算が終わっており, $z^* = \pm k, \pm\frac{1}{k}$ 以外に対応する fixed pattern はすべて solitary なので, ここで新たに必要になるのは $z^* = \pm k, \pm\frac{1}{k}$ に対応する fixed pattern の計算だけである. 命題 5.1 と帰納法を用いることで, これらのパターンを厳密に計算することができる.

となる．ただし，$Z_{t,n}(\pm k)$ は「spontaneous occurrence of $x_{t,n}(z) = \pm k$」の数であり，厳密に定義できることが定理 4.4 で保証されている．また，$t < 0$ や $n < 0$ に対しては $Z_{t,n}(\pm k) = 0$ と定義している．

$\pm k$ の対称性を用いると $Z_{t,n}(k) = Z_{t,n}(-k)$ がわかり，ここから線形な発展方程式

$$Z_{t,n}(k) = Z_{t-1,n}(k) + Z_{t,n-1}(k) - Z_{t-1,n-1}(k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) - \delta_{n,0}^{t,1}$$

が得られる．この表示から，$Z_{t,n}(k)$ と $\deg_z x_{t,n}(z)$ が高々多項式的増大であることがわかる．実際に計算を行うと以下のようになり，次数増大が多項式的であることがわかる．

$$Z_{t,n}(\pm k)\colon \begin{matrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad \deg_z x_{t,n}(z)\colon \begin{matrix} 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

6.2　特異点閉じ込めを通過しない非可積分方程式

k を 3 以上の奇数として，次の方程式を考える [8]:

$$x_{t,n} = -x_{t-1,n-1} + \frac{a}{x_{t-1,n}^k} + \frac{b}{x_{t,n-1}^k}.$$

§2.1 と違って今回は k が奇数であるため，この方程式には閉じ込められない特異点がある．§6.1 と同じ領域・初期値を考え，z についての individual degree を計算する．

§4 や §5 の結果を用いて計算を行うと，方程式の特異点パターンのリストは以下となる．

1. $\left[x_{t,n}(z^*) = \gamma\right]$. (solitary; $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$; movable or fixed)
2. $\begin{bmatrix} & & \ddots & \ddots \\ & \infty^k & 0 & \ddots \\ \infty^k & 0 & \infty^k & \\ x_{t,n}(z^*) = 0 & \infty^k & & \end{bmatrix}$. (non-confining, movable; $t, n \geq 1$)
3. $\begin{bmatrix} \vdots & & \ddots \\ x_{02} & \infty^k & \\ x_{01} & \infty^k & \\ x_{00} \quad z^* = 0 & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)
4. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \\ x_{03} & & & \ddots \\ x_{02} & & \infty & \\ x_{01} & \infty & & \\ x_{00} \quad z^* = \infty & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)

なお, k が偶数のときとの違いは, 0 から始まる movable pattern が non-confining になることだけである. いずれにせよ, ∞ から始まる movable pattern は存在しないので, degree relation を解いて次数を求めることができる.

特異点パターンのデータをもとに degree relation を導出すると, $t, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\deg_z x_{t,n}(z) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} Z_{t-\ell,n-\ell}(0) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\#\text{ of preimages of } 0)\\ &= k\sum_{\ell=0}^{+\infty} (Z_{t-1-\ell,n-\ell}(0) + Z_{t-\ell,n-1-\ell}(0)) + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && (\text{of } \infty)\end{aligned}$$

となる. ただし, $Z_{t,n}(0)$ は「spontaneous occurrence of $x_{t,n}(z) = 0$」の数であり, 厳密に定義できることが定理 4.4 で保証されている. $t < 0$ や $n < 0$ に対して $Z_{t,n}(0) = 0$ と定義しているため, $\sum_{\ell=0}^{\infty}$ は実際は有限和である. $(1, 1)$ 方向に差分を取ると, $t, n \geq 1$ に対して

$$Z_{t,n}(0) - \delta_{n-1,0}^{t-1,1} = kZ_{t-1,n}(0) + kZ_{t,n-1}(0) + k\delta_{n-1,0}^{t-1,0}$$

となる. ここから, 次数増大が指数関数的であることが従う.

例えば $k = 3$ に対して計算を行うと, 以下のようになる:

$Z_{t,n}(0)$:

0	2187	46656	566433	5143824	38854242	257926032	1554996366
0	729	13365	142155	1148175	7807590	47121102	260406090
0	243	3726	34020	240570	1454355	7899444	39680928
0	81	999	7614	46170	244215	1178793	5327532
0	27	252	1539	7776	35235	148716	597051
0	9	57	261	1053	3969	14337	50301
0	3	10	30	90	270	810	2430
0	0	0	0	0	0	0	0

.

$\deg_z x_{t,n}(z)$:

0	2187	47385	580041	5289786	40037463	265982067	1603619592
0	729	13608	145962	1183221	8056035	48623226	268557796
0	243	3807	35046	248445	1502124	8151706	40896039
0	81	1026	7875	47769	252262	1215111	5480307
0	27	261	1599	8047	36318	152775	611658
0	9	60	271	1083	4059	14607	51111
0	3	10	30	90	270	810	2430
0	1	0	0	0	0	0	0

.

参考文献

[1] M. P. Bellon, C.-M. Viallet, Algebraic entropy, *Communications in Mathematical Physics* 204 (1999): 425–437. https://doi.org/10.1007/s002200050652

[2] S. Fomin, A. Zelevinsky 2002, The Laurent phenomenon, *Advances in Applied Mathematics* 28 (2002): 119–144. https://doi.org/10.1006/aama.2001.0770

[3] B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou, Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Physical Review Letters* 67 (1991): 1825–1828. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1825

[4] R. G. Halburd, Elementary exact calculations of degree growth and entropy for discrete equations, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473 (2017): 20160831. https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0831

[5] J. Hietarinta, C. Viallet, Singularity confinement and chaos in discrete systems, *Physical Review Letters* 81 (1998): 325–328. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.325

[6] J. Hietarinta, T. Mase, R. Willox, Algebraic entropy computations for lattice equations: why initial value problems do matter, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52 (2019): 49LT01. https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab5238

[7] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. I: A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan* 43 (1977): 1424–1433. https://doi.org/10.1143/JPSJ.43.1424

[8] M. Kanki, T. Mase, T. Tokihiro, Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49 (2016): 23LT01. https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/23/23LT01

[9] D. Levi, R. I. Yamilov, On a nonlinear integrable difference equation on the square, *Ufimskiĭ Matematicheskiĭ Zhurnal* 1 (2009): 101–105. http://mathnet.ru/eng/ufa/v1/i2/p101

[10] T. Mase, Exact calculation of degrees for lattice equations: a singularity approach, *preprint*, arXiv:2402.16206.

[11] S. Tremblay, B. Grammaticos, A. Ramani, Integrable lattice equations and their growth properties, *Physics letters A* 278 (2001): 319–324. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00806-9

[12] D. Um, R. Willox, B. Grammaticos, A. Ramani, On the singularity structure of the discrete KdV equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 53 (2020): 114001. https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab72af

[13] D. Um, A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, J. Satsuma, On the singularities of the discrete Korteweg-deVries equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 54 (2021): 095201. https://doi.org/10.1088/1751-8121/abd8f4

Grothendieck 多項式の特殊値と超幾何函数との関係

島崎　達史　(神戸大学)[*1]
信川　喬彦　(皇學館大学)[*2]
藤井　大計　(神戸大学)[*3]

Grothendieck 多項式は，Schur 多項式の K 理論版として Lascoux–Schützenberger [4] により定義された．Schur 多項式に対する Weyl の恒等式の一般化が Ikeda–Naruse [3] により示されており，本講演ではこれを Grothendieck 多項式の定義とする．論文 [1] に基づき，その特殊値と Gauss および Holman の超幾何函数との関係を紹介する．

非負整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ を非負整数の分割とする．論文 [3] により，Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x \mid \beta)$ は次の表示をもつ:

$$G_\lambda(x \mid \beta) = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j}(1+\beta x_i)^{j-1} \right|_{n\times n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}. \tag{1}$$

ここで，変数 $x \in \mathbb{C}^n$ およびパラメータ $\beta \in \mathbb{C}$ とする．上式において $\beta = 0$ とすると，Grothendieck 多項式は Schur 多項式に一致する．即ち，$G_\lambda(x \mid 0) = s_\lambda(x)$ である．

式 (1) において，Schur 多項式のフック長公式および Lenart [5] による Grothendieck 多項式の Schur 多項式への展開を用いると，次が得られる．

Proposition 1 ([1])**.** 分割 $\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$ および $\lambda = (1^k, 0, \ldots, 0)$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ に対して，それぞれ次が成り立つ．

$$(1)\ G_{(k)}(1, 1, \ldots, 1 \mid \beta) = \binom{n+k-1}{k} {}_2F_1\left(\begin{matrix} k,\ 1-n \\ k+1 \end{matrix}; -\beta\right).$$

$$(2)\ G_{(1^k)}(1, 1, \ldots, 1 \mid \beta) = \binom{n}{k} {}_2F_1\left(\begin{matrix} k,\ k-n \\ k+1 \end{matrix}; -\beta\right).$$

式 (1) に対し，変数の主特殊化 $(x_1, \ldots, x_n) = (1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})$ $(q \in \mathbb{C}, |q| < 1)$ を行い，行列式の列線型性から次が得られる．

Theorem 2 ([1])**.** 任意の分割 λ に対して，次が成り立つ．

$$G_\lambda(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1} \mid \beta) = \sum_{k_1=0}^{0}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{n-1}\binom{0}{k_1}\binom{1}{k_2}\cdots\binom{n-1}{k_n}\beta^{k_1+\cdots+k_n} \times \prod_{1\le i<j\le n}\frac{q^{\lambda_j+n-j+k_j} - q^{\lambda_i+n-i+k_i}}{q^{n-j} - q^{n-i}}. \tag{2}$$

[*1] 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1　神戸大学大学院理学研究科
e-mail: tsimazak@math.kobe-u.ac.jp
[*2] 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704　皇學館大学教育学部
e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp
[*3] 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1　神戸大学大学院理学研究科
e-mail: tfujii@math.kobe-u.ac.jp
キーワード：Grothendieck 多項式，超幾何函数，Weyl の公式

式 (2) において $q \to 1$ の極限と $\beta = 1$ の特殊化を考えると，次の集合値半標準盤の個数 $|\mathrm{SVT}(\lambda, n)|$ の明示公式が得られる．

Corollary 3 ([1])**.** 任意の分割 λ に対して，次が成り立つ．

$$|\mathrm{SVT}(\lambda, n)| = \sum_{k_1=0}^{0} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{n-1} \binom{0}{k_1} \binom{1}{k_2} \cdots \binom{n-1}{k_n} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + k_i - k_j + j - i}{j - i}.$$

他方，式 (2) は以下の Holman の超幾何函数 $F^{(n)}$ とよばれる多重超幾何函数 [2] を用いて表すことができる:

$$\begin{aligned} &F^{(n)}((A_{ij})_{(n-1)\times(n-1)} | (a_{ij})_{n\times u} | (b_{ij})_{n\times v} | (z_{i1})_{n\times 1}) \\ &= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{A_{ij} + k_i - k_j}{A_{ij}} \right) \left(\prod_{j=1}^{u} \prod_{i=1}^{n} (a_{ij})_{k_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{v} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(b_{ij})_{k_i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} z_{i1}^{k_i} \right), \end{aligned}$$

ここで，行列 $(A_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ は次の通りである．

$$(A_{ij})_{(n-1)\times(n-1)} = \begin{pmatrix} A_{12} & & & \\ A_{13} & A_{23} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Holman の超幾何函数は，ユニタリ群 $U(n+1)$ の表現論に現れることで知られている．

Theorem 4 ([1])**.** 任意の分割 λ に対して，半標準盤の個数 $|\mathrm{SST}(\lambda, n)|$ を用いると，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &G_\lambda(1, 1, \ldots, 1 \mid \beta) \\ &= |\mathrm{SST}(\lambda, n)| \times F^{(n)} \left(\begin{pmatrix} A_{12} & & & \\ A_{13} & A_{23} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n-1,n} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -n+1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta \\ \vdots \\ -\beta \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

ここで，$A_{ij} = \lambda_i - \lambda_j + j - i$ とする．

参考文献

[1] T. Fujii, T. Nobukawa, and T. Shimazaki, *Special values of Grothendieck polynomials in terms of hypergeometric functions*, Hiroshima Mathematical Journal, in press, arXiv:2402.07424.

[2] W. J. Holman III, *Summation Theorems for Hypergeometric Series in U(n)*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **11**(3): 523–532, 1980.

[3] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions*, Advances in Mathematics, **243**: 22–66, 2013.

[4] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **295**(11): 629–633, 1982.

[5] C. Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Annals of Combinatorics, **4**: 67–82, 2000.

Virasoro Action on Schur Q-Functions and Pfaffian Identities

Kazuya Aokage (Ariake College)[*1]
Eriko Shinkawa (Tohoku University)[*2]
HiroFumi Yamada (Rikkyo University)[*3]

1 Schur Q-Functions and Their Definitions

Schur Q-functions were originally introduced by Schur in the context of projective representations of symmetric groups. We begin by reviewing their definitions and fundamental properties.

Let a partition be a finite sequence of integers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ such that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0$. The size of λ is $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$, and its length is denoted by $\ell(\lambda)$. A partition with distinct parts is called a *strict partition*, and we write $\mathcal{SP}(n)$ for the set of strict partitions of n. Let $V = \mathbb{C}[t_j : j \geq 1, \text{ odd}]$ be the polynomial ring graded by $\deg t_j = j$, and write $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(n)$, where $V(n)$ denotes the space of homogeneous polynomials of degree n. Define an inner product on V by $\langle F, G \rangle = F(2\widetilde{\partial})\, \overline{G}(t)\big|_{t=0}$, where $2\widetilde{\partial} = \left(2\partial_1, \frac{2}{3}\partial_3, \frac{2}{5}\partial_5, \ldots\right)$ with $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$.

Put $\xi(t,u) = \sum_{j \geq 1,\ \text{odd}} t_j u^j$ and define $q_n(t) \in V(n)$ by

$$e^{\xi(t,u)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) u^n.$$

For integers a, b with $a > b > 0$, define

$$Q_{ab}(t) := q_a(t) q_b(t) + 2 \sum_{i=1}^{b} (-1)^i q_{a+i}(t) q_{b-i}(t), \quad Q_{ba}(t) := -Q_{ab}(t).$$

Given a strict partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m})$, the associated Schur Q-function is defined by the Pfaffian

$$Q_\lambda(t) := \mathrm{Pf}\left(Q_{\lambda_i \lambda_j}(t)\right)_{1 \leq i,j \leq 2m}.$$

The Schur Q-function $Q_\lambda(t)$ is homogeneous of degree $|\lambda|$, and the collection $\{Q_\lambda(t) \mid |\lambda| = n\}$, indexed by strict partitions, forms an orthogonal basis for $V(n)$ with respect to the above inner product.

2 Quadratic Relations for Schur Q-Functions

For $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}) \in \mathcal{SP}$, Schur Q-functions satisfy the following quadratic relations:

[*1] Department of Mathematics, National Institute of Technology, Ariake College, Fukuoka 836-8585
e-mail: aokage@ariake-nct.ac.jp
[*2] Mathematical Science Center for Co-creative Society, Tohoku University, Sendai 980-8577
e-mail: eriko.shinkawa.e8@tohoku.ac.jp
[*3] Department of Mathematics, Faculty of Science, Rikkyo University, Tokyo 171-8501
e-mail: hfyamada@rikkyo.ac.jp
This work was supported by KAKENHI (Grant No. 17K05180, 24K06859).
2020 Mathematics Subject Classification: 17B68, 05E10.
Keywords: Schur Q-functions, Virasoro operators, integrable systems.

Theorem 1. ([1])
For $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m})$,

$$\sum_{i=2}^{2m} (-1)^i \partial_1 Q_{\lambda_1,\lambda_i} \partial_1 Q_{\lambda_2,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{2m}} = 0,$$
$$\sum_{i=2}^{2m} (-1)^i \left(\partial_1 Q_{\lambda_1,\lambda_i} \partial_3 Q_{\lambda_2,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{2m}} + \partial_3 Q_{\lambda_1,\lambda_i} \partial_1 Q_{\lambda_2,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_{2m}} \right) = 0.$$

When $m = 2$, the first identity in Theorem 1 coincides with the classical Plücker relation that characterizes the Grassmannian as a projective variety. This observation suggests the possibility of a geometric interpretation underlying the formulas in Theorem 1.

3 Virasoro Operators and Main Results

For a positive odd integer j, put $a_j = \sqrt{2}\partial_j$ and $a_{-j} = \frac{j}{\sqrt{2}} t_j$ so that they satisfy the Heisenberg relation as operators on V :

$$[a_j, a_i] = j\delta_{j+i,0}.$$

For an integer k, put

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} : a_{-j} a_{j+2k} : + \frac{1}{8} \delta_{k,0},$$

where

$$: a_j a_i : = \begin{cases} a_j a_i & \text{if } j \leq i, \\ a_i a_j & \text{if } j > i \end{cases}$$

is the normal ordering.

Theorem 2. ([1])
Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m})$ be a strict partition. Then for any $k \geq 1$

$$L_k Q_\lambda = \sum_{i=1}^{2m} (\lambda_i - k)\, Q_{\lambda - 2k\epsilon_i},$$

where $\lambda - 2k\epsilon_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 2k, \ldots, \lambda_{2m})$.

Theorem 3. ([2])
Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$ be a positive integer sequence. Then

$$L_{-k} Q_\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i + k)\, Q_{\alpha + 2k\epsilon_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (k-i) Q_{\alpha, 2k-i, i}, \quad k \geq 1.$$

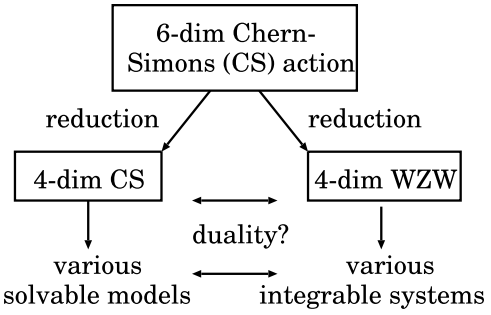
References

[1] Kazuya Aokage, Eriko Shinkawa, and Hiro Fumi Yamada. Pfaffian identities and Virasoro operators. Letters in Mathematical Physics, Vol. 110, No. 6, pp. 1381-1389, 2020.

[2] Kazuya Aokage, Eriko Shinkawa, and Hiro Fumi Yamada. Virasoro action on the the Q-functions. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), Vol. 17, 2021.

4次元Wess-Zumino-Witten模型のソリトン解と共鳴

Shangshuai Li*, 浜中 真志†(登壇者) and Shan-Chi Huang†, Da-Jun Zhang* ()



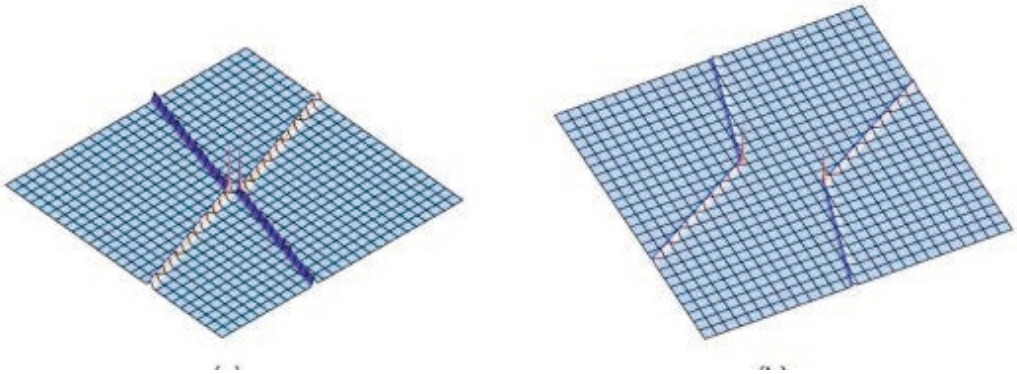
4次元Wess-Zumino-Witten(4dWZW)模型は2次元WZW模型の高次元版であり, 共形場理論としての側面を持つ [13, 9, 15]. 一方、4次元WZW模型の運動方程式はヤンの方程式(反自己双対ヤン・ミルズ(=ASDYM)方程式と等価)であり, ツイスター理論としての側面を持つ [14]. 特にsplit計量$(++--)$の場合はこの模型はN=2開弦理論の弦の場の理論を記述し [17], また次元還元からさまざまな可積分方程式を与えることが知られている(Ward予想)[18]. 一方, 2017年頃Costello氏＆Witten氏＆山崎雅人氏は, 可解系のスペクトルパラメータの起源を突き詰めることで, 4次元チャーンサイモンズ理論(4dCS)がさまざまな可解系(スピン系やカイラル模型など)を生み出す親玉であることを見出した [3, 2]. さらに2020年頃にCostello氏の示唆を受けてBittleston氏＆Skinner氏が6次元チャーンサイモンズ理論(6dCS)から4dCSと4dWZWがそれぞれ違う方向へのリダクション過程で得られることを証明した [1]. この(6dCS→4dCS/4dWZW)の枠組みこそが可積分系の統一理論ではなかろうかと多くの研究者が考えており世界的に活発な研究がなされている. またこのようなダブル・ファイブレーションの状況においては4dCSと4dWZWの間に興味深い対応関係が成り立つことが予想される [7]. これは上述の広範囲にわたる可解系と可積分系の間の未知の対応関係を予言しており大変興味深い.

ヤンの方程式(反自己双対ヤン・ミルズ方程式)のソリトン解はこれまでいくつかの例が知られていたが, ダルブー変換により構成されたWronskian解 [16] から得られるソリトン解 [4] が大変興味深い性質を持つ. まずヤン・ミルズ理論の枠組みで, ゲージ群のランクが2の場合に, 作用密度が実数値でかつ3次元超平面上に局在する(余次元1の)1ソリトンが見出された [5]. 次いでnソリトン解の漸近的振る舞いがKPソリトンと類似した「n個の1ソリトンの非線形重ね合わせ」であることが見出され, 位相のずれ(phase-shift)も計算された [6]. こうして佐藤理論との接点が解のレベルで初めて明らかになったが, さらに4dWZW模型の作用密度についてもこれらの解の振る舞いが明らかにされ, やはりKPソリトンと類似したものであることが分かった [8]. 実数値KPソリトンの分類は児玉裕治氏たちによってpositive Grassmannianの言葉で見事に与えられており [11], ASDYMソリトンの分類への道筋に光明が差している. KPソリトンのソリトングラフの基本要素は「Y字型」ソリトンであり, これは位相のずれ無限大の極限で与えられる共鳴状態であるとも解釈できる.

この研究は大幸財団, 伊藤忠兵衛基金, 市原国際奨学財団から助成を受けていました.

* 上海大学 数学教室
† 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

この講演では, 4次元WZW模型のソリトン解を紹介し, 2ソリトン解のLarge phase-shift極限(共鳴極限)を議論する[10]. その結果, KPソリトンと違って, 2つのY字型ソリトンの繋がった共鳴状態ではなく, 2つのV字型ソリトンの繋がった共鳴状態となることが分かった(下図). またこれとは逆符号の場合のLarge phase-shift極限を取ると, mKdV方程式などで見られるDouble Pole共鳴状態が現れることが分かった. これらの共鳴現象はKPソリトンと異なり大変興味深いが, ASDYM方程式から次元還元で得られる方程式で見られる共鳴現象と類似である. なお[10]で議論されるソリトン解はbinary Darboux変換で構成されたGrammian型の解である. コーシー行列によるアプローチ[12]との関係も明らかにされている[10]. 余力があれば, これらの現象のN=2弦理論における解釈や今後の研究方向(4次元Chern-Simons理論との関連や非可換空間への拡張など)についても議論したい[7].



参考文献

[1] R. Bittleston and D. Skinner, JHEP **02**, 227 (2023) [arXiv:2011.04638].

[2] K. Costello, E. Witten and M. Yamazaki, ICCM Not. **06**, no.1, 46-119 (2018) [arXiv:1709.09993]; ICCM Not. **06**, no.1, 120-146 (2018) [arXiv:1802.01579].

[3] K. Costello and M. Yamazaki, "Gauge Theory And Integrability, III," [arXiv:1908.02289].

[4] C. R. Gilson, M. Hamanaka, S. C. Huang and J. J. Nimmo, J. Phys. A **53**, 404002 (2020).

[5] M. Hamanaka and S. C. Huang, JHEP **10**, 101 (2020) [arXiv:2004.09248].

[6] M. Hamanaka and S. C. Huang, JHEP **01**, 039 (2022) [arXiv:2106.01353].

[7] M. Hamanaka and S. C. Huang, doi:10.46298/ocnmp.14167 [arXiv:2408.16554].

[8] M. Hamanaka, S. C. Huang and H. Kanno, PTEP **2023**, 043B03 (2023).

[9] T. Inami, H Kanno,T. Ueno and C.S. Xiong, Phys. Lett. B **399** (1997) 97.

[10] S. Li, M. Hamanaka, S. C. Huang and D. J. Zhang, Phys. Rev. D **111**, 086023 (2025).

[11] Y. Kodama, *KP Solitons and the Grassmannians*, (Springer, 2017)

[12] S. Li, C. Qu, X. Yi and D. j. Zhang, Stud. Appl. Math. **148**, 1703-1721 (2022).

[13] A.Losev, G.Moore, N.Nekrasov, S.Shatashvili, Nucl.Phys.B Proc.Suppl. **46**,130 (1996).

[14] L.J. Mason, N.M. Woodhouse, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*, (Oxford).

[15] V.P. Nair and J. Schiff, Nucl. Phys. B **371** (1992) 329.

[16] J. J. C. Nimmo, C. R. Gilson and Y. Ohta, Theor. Math. Phys. **122**, 239 (2000).

[17] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. B **367** (1991) 83.

[18] R.S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.

Large BKP vs. B-Toda in Lax-Sato form

高崎金久　(大阪公立大学数学研究所)

s を離散変数，$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots)$ を連続変数の組とする．**大BKP** (**large BKP**) 階層は Jimbo-Miwa[1]，Kac-van de Leur[2] によって導入され[1]，τ 函数 $\tau(s,\boldsymbol{t})$ に対する双線形方程式

$$\begin{aligned}&\oint z^{s-s'}e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',z)}\tau(s-1,\boldsymbol{t}-[z^{-1}])\tau(s'+1,\boldsymbol{t}'+[z^{-1}])\frac{dz}{2\pi iz}\\ &+\oint z^{s'-s}e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},z)}\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[z^{-1}])\tau(s'-1,\boldsymbol{t}'-[z^{-1}])\frac{dz}{2\pi iz}=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{s+s'}\right)\end{aligned}\qquad(\clubsuit)$$

で定義される．ここで $[z]=(z,z^2/2,\cdots,z^k/k,\cdots)$, $\xi(\boldsymbol{t},z)=t_1z+t_2z^2+\cdots$ という慣用の記法を用いている．Guan ら [4] は波動函数

$$\Psi_+(s,\boldsymbol{t},z)=\frac{\tau(s-1,\boldsymbol{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}z^se^{\xi(\boldsymbol{t},z)},\quad \Psi_-(s,\boldsymbol{t},z)=\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\boldsymbol{t})}z^{-s-1}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

を導入し，着付け作用素 $S_\pm=a_0^\pm+a_1^\pm\Lambda^{-1}+a_2^\pm\Lambda^{-2}+\cdots$ $(\Lambda=e^{\partial/\partial s})$ を

$$\Psi_+(s,\boldsymbol{t},z)=S_+z^se^{\xi(\boldsymbol{t},z)},\quad \Psi_-(s,\boldsymbol{t},z)=S_-z^{-s-1}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

が成り立つように定めて，$(\clubsuit)$ を $S_\pm$ に対する作用素方程式

$$S_+(\boldsymbol{t})e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',\Lambda)}\Lambda^{-1}S_-(\boldsymbol{t}')+S_+(\boldsymbol{t})^*e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},\Lambda^{-1})}\Lambda S_-(\boldsymbol{t}')^*=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(1-(-1)^n)\Lambda^n\qquad(\spadesuit)$$

に書き直した．ここで * は差分作用素の形式的共役を表す．たとえば $(a(s)\Lambda^n)^*=\Lambda^{-n}\cdot a(s)=a(s-n)\Lambda^{-n}$ となる．これから $S_\pm$ に対する時間発展の方程式（佐藤方程式）やラックス作用素

$$L_+=S_+\Lambda S_+,\quad L_-=S_-^*\Lambda^{-1}S_-^{*-1}$$

に対するラックス方程式が得られる（いずれも具体的な形は省く）．

Guan らはこのラックス-佐藤形式を用いて Zabrodin らの**B型戸田階層**（B-Toda hierarchy）[5, 6] との対応関係も論じた．B 型戸田階層は 2 次元戸田階層の 2 つのラックス作用素 $L=u_0\Lambda+u_1+u_2\Lambda^{-1}+\cdots$, $\bar{L}=\bar{u}_0\Lambda^{-1}+\bar{u}_1+\bar{u}_2\Lambda+\cdots$ （それぞれ L_+,L_- に対応する）に対して

$$L^*(\Lambda-\Lambda^{-1})=(\Lambda-\Lambda^{-1})\bar{L}$$

という束縛条件を課すことによって得られる．その帰結として $L,\bar{L}$ の主導係数は**バランス条件** $u_0=\bar{u}_0$ を満たす．さらに，この束縛条件を保つために，2 次元戸田階層の 2 系列の時間変数 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots)$, $\bar{\boldsymbol{t}}=(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\cdots)$ も反対角線 $\boldsymbol{t}+\bar{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}$ の上に制限される．残された時間変数 $t_1,t_2,\cdots$ に関するラックス方程式と佐藤方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial t_k}=[A_k,L],\quad \frac{\partial\bar{L}}{\partial t_k}=[A_k,\bar{L}],$$
$$\frac{\partial W}{\partial t_k}=A_kW-W\Lambda^k,\quad \frac{\partial\bar{W}}{\partial t_k}=A_k\bar{W}+\bar{W}\Lambda^{-k}$$

科学研究費補助金基盤研究 (C)No. 24K06724

[1] Kac-van de Leur[2] はそれを**フェルミオン的BKP階層**と呼んだ．大 BKP 階層という名称はそれまで知られていた BKP 階層（**小BKP階層**）と区別するために Orlov-Shiota-Takasaki[3] によって導入された．

という形になる．ここで A_k は

$$A_k^*(\Lambda-\Lambda^{-1})=-(\Lambda-\Lambda^{-1})A_k$$

という条件を満たす有限階差分作用素（佐藤方程式自体から定まる）である．$W,\bar{W}$ は $W=w_0+w_1\Lambda^{-1}+w_2\Lambda^{-2}+\cdots$, $\bar{W}=\bar{w}_0+\bar{w}_1\Lambda+\bar{w}_2\Lambda^2+\cdots$ という形の差分作用素で，着付け関係 $L=W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L}=\bar{W}\Lambda^{-1}\bar{W}^{-1}$ が成り立つ．

このB型戸田階層の定式化をGuanらの大BKP階層の記述と見比べれば，以下のことがわかる．1は2つの論文[4, 5]から読み取れる．2,3が本講演の主結果である．

1. $W,\bar{W}$ は $S_\pm$ と
$$S_+=W(1-\Lambda^{-2})^{-1/2},\quad S_-=(1-\Lambda^{-2})^{-1/2}\bar{W}^*$$
という関係で結ばれていて
$$W^*(\Lambda-\Lambda^{-1})\bar{W}=\Lambda-\Lambda^{-1}$$
という束縛条件を満たす．その帰結として**バランス条件** $w_0(s)\bar{w}_0(s-1)=1$ が成り立つ．こうして佐藤方程式においても大BKP階層とB型戸田階層は対応している．

2. $U=W^{-1}\bar{W}$ は微分方程式
$$\frac{\partial U}{\partial t_k}=\Lambda^kU+U\Lambda^k$$
と代数的関係式
$$U^*(\Lambda-\Lambda^{-1})=(\Lambda-\Lambda^{-1})U \tag{♡}$$
を満たす．特に $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$ における初期値 $U_0=U(\mathbf{0})$ はこの代数的関係式を満たし，U は
$$U=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_k\Lambda^k\right)U_0\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t_k\Lambda^{-k}\right) \tag{♢}$$
と表せる．

3. 逆に，$U_0^*(\Lambda-\Lambda^{-1})=(\Lambda-\Lambda^{-1})U_0$ を満たす差分作用素 U_0 に対して U を (♢) によって定めれば，U は (♡) を満たす．この U を
$$U=W^{-1}\bar{W}$$
というように因子分解すれば（ゲージ変換 $W\to gW$, $\bar{W}\to g\bar{W}$ を利用して，バランス条件を満たすように $W,\bar{W}$ を選び直せる），$W,\bar{W}$ は佐藤方程式を満たし，$L=W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L}=\bar{W}\Lambda^{-1}\bar{W}^{-1}$ はB型戸田階層の解を与える．

参考文献

[1] M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943–1001.

[2] V. Kac and J. van de Leur, CRM Proc. Lecture Notes **14** (1998), 159–202. arXiv:solv-int/9706006.

[3] A. Yu. Orlov, T. Shiota and K. Takasaki, arXiv:1201.4518.

[4] W. Guan, S. Wang, W. Rui and J. Cheng, arXiv:2404.09815.

[5] I. Krichever and A. Zabrodin, Physica **D453** (2023), 133827. arXiv:2210.12534.

[6] V. Prokofev and A. Zabrodin, Theor. Math. Phys. **217:2** (2023), 1673–1688. arXiv:2303.17467.

KP Solitons and the Schottky Uniformization

Yuji Kodama (Ohio State University)*

Abstract

Real and regular soliton solutions of the KP hierarchy have been classified in terms of the totally nonnegative (TNN) Grassmannians. These solitons are referred to as KP solitons, and they are expressed as singular (tropical) limits of shifted Riemann theta functions. In this talk, for each element of the TNN Grassmannian, we construct a Schottky group, which uniformizes the Riemann surface associated with a real finite-gap solution. Then we show that the KP solitons are obtained by degenerating these finite-gap solutions.

The talk is based on a collaborative work with Takashi Ichikawa (Saga University) [11].

1. Introduction

It is known that solutions of the KP equation can be constructed from *any* algebraic curves (Riemann surfaces) [19]. A solution from a smooth curve is a *quasi-periodic* solution, and some soliton solutions can be constructed by rational (tropical) limits of the curve with only ordinary double points, i.e. a singular Riemann surface with nodal singularities (see e.g. [21, 26, 2]). In particular, the cases corresponding to the KdV and nonlinear Schödinger equations are well-studied, in which the algebraic curves are given by the hyperelliptic curves (see e.g. [2, 21]). Recently, there are several papers dealing with some non-hyperelliptic cases, e.g. so-called (n, s)-curves, where the authors construct the Klein σ-functions over these curves (see e.g. [3, 18, 20, 22]). It seems, however, that almost no result has been reported for the cases with more general algebraic curves. Because of the difficulty in finding a canonical homological basis for the general algebraic curves, it may be quite complicated to compute explicitly a rational limit of these curves and the corresponding Riemann theta functions (see [22]). On the other hand, a large number of *real* and *regular* soliton solutions of the KP hierarchy, referred to as *KP solitons*, has been classified in terms of totally nonnegative (TNN) Grassmannian $\mathrm{Gr}(N, M)_{\geq 0}$ (see e.g. [16, 15, 13]). We also mention that recently, there are some progress on the study concerned with the connections between the algebraic-geometric solutions and these soliton solutions [1, 23, 24, 17].

In this talk, we first give a brief review of the KP solitons with combinatorial aspects of the TNN Grassmannians. In particular, we describe some details of the so-called Ɪ-*diagram*, introduced by Postnikov [25], which provides a parametrization of the KP solitons. In [14], we identify singular Riemann surfaces for the KP solitons, and introduce the *M-theta function* defined on the singular Riemann surface. The M-theta function is obtained by singular (rational) limit of the Riemann theta function, and it gives the τ-function of the KP soliton.

2010 Mathematics Subject Classification: 05A05, 30F10, 14H42, 35Q51.
Keywords: .

* e-mail: kodama@math.ohio-state.edu

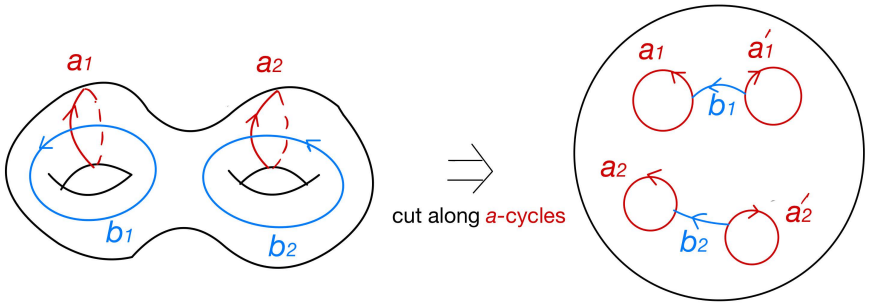
Then using the Schottky uniformization theory [9], we construct real smooth Riemann surfaces associated with finite gap solutions of the KP equation. In particular, we show that the $\mathcal{J}$-diagram in the TNN Grassmanian theory is quite useful for the construction. More precisely, the $\mathcal{J}$-diagram can provide the information about a canonical homological basis for the smooth Riemann surface.

2. The compact Riemann surface and the theta function

Let $\mathcal{R}_g$ be a smooth compact Riemann surface of genus g. Let $H_1(\mathcal{R}_g, \mathbb{Z})$ be the homology group of $\mathcal{R}_g$, and a set $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ be a canonical basis in $H_1(\mathcal{R}_g, \mathbb{Z})$, that is, we have the intersection products,

$$a_j \circ a_k = 0, \quad b_j \circ b_k = 0, \quad a_j \circ b_k = \delta_{j,k}.$$

It is well-known that any compact Riemann surface of genus g is homeomorphic to a sphere with g handles (see e.g. [5]). The left panel of the figure below shows a Riemann surface of genus 2. Cutting the Riemann surface along the a-cycles, we



obtain the manifold $\mathbb{CP}^1$ with $2g$ holes, as shown in the right panel of the figure. This implies that the Riemann surface can be obtained by identifying each pair of a- and a'-cycles. The identification can be expressed by a Schottky group [6] as shown in Section 6, which is the main theme in the present note.

Given a set of canonical basis of $H_1(\mathcal{R}_g, \mathbb{Z})$, we have the holomorphic differentials $\{\omega_j : j = 1, \ldots, g\}$ normalized by the conditions,

$$\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{j,k}, \qquad (1 \le j, k \le g).$$

The integrals over the b-cycles given by

$$\Omega_{j,k} := \oint_{b_j} \omega_k, \qquad (1 \le j < k \le g) \tag{2.1}$$

define the $g \times g$ period matrix $\Omega = (\Omega_{j,k})$, which is symmetric and $\mathrm{Im}(\Omega) > 0$. Then the Riemann theta function associated with $\mathcal{R}_g$ is defined by

$$\vartheta_g(\mathbf{z}; \Omega) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp 2\pi i \left(\frac{1}{2} \mathbf{m}^T \Omega \mathbf{m} + \mathbf{m}^T \mathbf{z} \right), \tag{2.2}$$

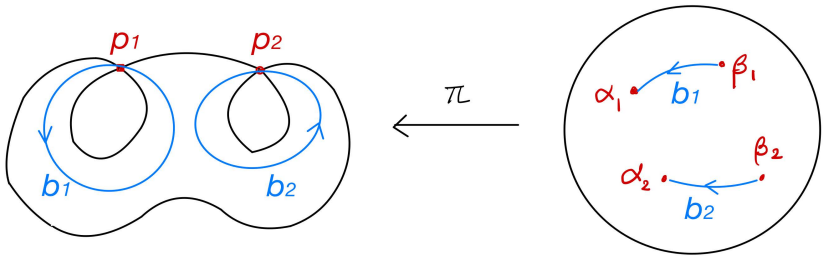
for $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$, and $\mathbf{m}^T$ is the transpose of the column vector $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g$.

2.1. The Riemann theta function on a singular curve

In [21] (Chapter 5, p.3.243), Mumford considered the theta function on singular curve. Let $\widetilde{\mathcal{R}}_g$ be a singular Riemann surface of (arithmetic) genus g corresponding to the curve $\mathcal{C}$, and let S be the set of singular points, $S = \{p_1, \ldots, p_g\} \subset \widetilde{\mathcal{R}}_g$. Assume that the singularities of $\widetilde{\mathcal{R}}_g$ are only ordinary double points $p_1, \ldots, p_g$ and that $\widetilde{\mathcal{R}}_g$ has normalization

$$\pi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}_g \quad \text{with} \quad \pi^{-1}(p_i) = \{\alpha_i, \beta_i\} \tag{2.3}$$

That is, $\widetilde{\mathcal{R}}_g$ is just $\mathbb{CP}^1$ with g pairs of points $\{\alpha_i, \beta_i\}$ identified. Figure below shows the case with $g = 2$. The singular Riemann surface $\widetilde{\mathcal{R}}_g$ is obtained by



pinching all a-cycles as shown in the figure.

By pinching a-cycles, the holomorphic differentials $\{\omega_k : k = 1, \ldots, g\}$ take the limits [12, 10] (see also Section 6.1),

$$\omega_k \longrightarrow \widetilde{\omega}_k = \frac{dz}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-\alpha_k} - \frac{1}{z-\beta_k}\right). \tag{2.4}$$

Then the period matrix in (2.1) becomes

$$\Omega_{j,k} \longrightarrow \widetilde{\Omega}_{j,k} := \int_{\beta_j}^{\alpha_j} \widetilde{\omega}_k = \frac{1}{2\pi i} \ln C_{j,k} \qquad \mathrm{mod}(\mathbb{Z}), \tag{2.5}$$

where $C_{j,k}$ is given by the cross-ratio $[\alpha_j, \beta_j; \alpha_k, \beta_k]$,

$$C_{j,k} = [\alpha_j, \beta_j; \alpha_k, \beta_k] := \frac{(\alpha_j - \alpha_k)(\beta_j - \beta_k)}{(\alpha_j - \beta_k)(\beta_j - \alpha_k)}. \tag{2.6}$$

Note in particular that the diagonal parts of the period matrix Ω has the limits

$$\mathrm{Im}\ \Omega_{i,i} \longrightarrow \infty \quad \text{for} \quad 1 \le i \le g, \tag{2.7}$$

Then the limit of the ϑ-function (2.2) is just 1, which corresponds to the choice $\mathbf{m}^T = (0, \ldots, 0)$. To obtain a nontrivial example, we consider the shifts

$$z_i \longrightarrow z_i - \frac{1}{2}\Omega_{i,i}, \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, g,$$

which then gives the Riemann theta function with shifted variable $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$,

$$\vartheta_g(\mathbf{z};\Omega) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp 2\pi i \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{g} m_i(m_i-1)\Omega_{i,i} + \sum_{i<j} m_i m_j \Omega_{i,j} + \sum_{i=1}^{g} m_i z_i \right). \tag{2.8}$$

Then the limit $\Omega_{j,j} \to +i\infty$ for all $j = 1, \ldots, g$ leads to

$$\begin{aligned} \vartheta_g(\mathbf{z};\Omega) \;\longrightarrow\; \tilde{\vartheta}_g(\mathbf{z};\tilde{\Omega}) &:= \sum_{\mathbf{m}\in\{0,1\}^g} \exp 2\pi i \left(\sum_{j<k} m_j m_k \tilde{\Omega}_{j,k} + \sum_{n=1}^{g} m_n z_n \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{g} e^{2\pi i z_n} + \sum_{j<k} C_{j,k} e^{2\pi i(z_j+z_k)} + \ldots + \left(\prod_{j<k} C_{j,k} \right) e^{2\pi i \sum_{n=1}^{g} z_n}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

Note that the infinite sum of exponential terms in the ϑ-function (2.8) becomes a *finite* sum of 2^g exponential terms with $m_i \in \{0,1\}$, if all $C_{j,k} \neq 0$ for $j < k$. The function $\tilde{\vartheta}_g$ is referred to as the M-theta function [14].

Remark 2.1. *When all the pairs $\{\alpha_k, \beta_k\}$ are real and $\alpha_k < \beta_k$ w.l.o.g., one should note that the cross ratio $C_{j,k}$ in* (2.6) *takes the signs depending on the orders of the pairs, i.e.*

(i) *if $\alpha_j < \beta_j < \alpha_k < \beta_k$ or $\alpha_j < \alpha_k < \beta_k < \beta_j$, then $C_{j,k} > 0$,*

(ii) *if $\alpha_j < \alpha_k < \beta_j < \beta_k$, then $C_{j,k} < 0$, and*

(iii) *if $\alpha_j = \alpha_k$ or/and $\beta_j = \beta_k$, then $C_{j,k} = 0$.*

The case (ii) *will be important when we discuss the regularity of the soliton solutions (see also* [8]*). Also note that the case* (iii) *implies that the off-diagonal element $\widetilde{\Omega}_{j,k}$ takes $+i\infty$, in addition to the diagonal elements in the singular limit* (2.7)*.*

3. The KP equation

In this section, we give a brief summary of the KP solitons for the purpose of the present paper (see e.g. [13] for the details). The KP equation is a nonlinear partial differential equation in the form,

$$\partial_x(-4\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u) + 3\partial_y^2 u = 0, \tag{3.1}$$

where $\partial_z^k := \frac{\partial^k}{\partial z^k}$ for $z = x, y, t$. The solution of the KP equation is given in the following form,

$$u(x,y,t) = 2\partial_x^2 \ln \tau(x,y,t), \tag{3.2}$$

where $\tau(x,y,t)$ is called the τ-function of the KP equation.

3.1. Soliton solutions

The soliton solutions are constructed as follows: Let $\{f_i(x,y,t) : 1 \le i \le N\}$ be a set of linearly independent functions $f_i(x,y,t)$ satisfying the following system of linear equations,

$$\partial_y f_i = \partial_x^2 f_i, \quad \text{and} \quad \partial_t f_i = \partial_x^3 f_i \qquad i = 1, \dots, N. \tag{3.3}$$

The Wronskian $\mathrm{Wr}(f_1, \dots, f_N)$ with respect to the x-variable gives a τ-function, that is, the function $u(x,y,t)$ in (3.2) is a solution of the KP equation,

$$\tau(x,y,t) = \mathrm{Wr}(f_1, f_2, \dots, f_N). \tag{3.4}$$

(See, e.g. [13] for the details.)

As a fundamental set of the solutions of (3.3), we take the exponential functions $E_j(x,y,t)$ for $j = 1, \dots, M$ $(M > N)$, i.e.

$$E_j(x,y,t) = e^{\xi_j(x,y,t)} \quad \text{with} \quad \xi_j(x,y,t) := \kappa_j x + \kappa_j^2 y + \kappa_j^3 t. \tag{3.5}$$

where κ_j's are arbitrary real constants. In this paper, we consider the regular soliton solutions, for which we assume the ordering

$$\kappa_1 \ < \ \kappa_2 \ < \ \cdots \ < \ \kappa_M. \tag{3.6}$$

For the soliton solutions, we consider $f_i(x,y,t)$ as a linear combination of the exponential solutions,

$$f_i(x,y,t) = \sum_{j=1}^{M} a_{i,j} E_j(x,y,t) \qquad \text{for} \qquad i = 1, \dots, N. \tag{3.7}$$

where $A := (a_{i,j})$ is an $N \times M$ constant matrix of full rank, $\mathrm{rank}(A) = N$. Then the τ-function (3.4) is expressed by

$$\tau(x,y,t) = |AE(x,y,t)^T|, \tag{3.8}$$

where $E(x,y,t)^T$ is the transpose of the $N \times M$ matrix $E(x,y,t)$ defined by

$$E(x,y,t) = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_M \\ \kappa_1 E_1 & \kappa_2 E_2 & \cdots & \kappa_M E_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_1^{N-1} E_1 & \kappa_2^{N-1} E_2 & \cdots & \kappa_M^{N-1} E_M \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Note here that the set of exponential functions $\{E_1, \dots, E_M\}$ gives a basis of M-dimensional space of the null space of the operator $\prod_{i=1}^{M}(\partial_x - \kappa_i)$, and we call it a *basia* of the KP soliton. Then the set of functions $\{f_1, \dots, f_N\}$ represents an N-dimensional subspace of M-dimensional space spanned by the exponential functions. This leads naturally to the structure of a finite real Grassmannian $\mathrm{Gr}(N,M)$, the set of N-dimensional subspaces in $\mathbb{R}^M$. Then the $N \times M$ matrix A of full rank can be identified as a point of $\mathrm{Gr}(N,M)$, and throughout the paper we assume A to be in the reduced row echelon form (RREF).

Definition 3.1. *An $N \times M$ matrix A in RREF is irreducible, if*

(a) *in each row, there is at least one nonzero element besides the pivot, and*

(b) *there is no zero column.*

This implies that the first pivot is located at $(1,1)$ entry, and the last pivot should be at (N, i_N) with $N \le i_N < M$.

The τ-function in (3.8) can be expressed as the following formula using the Binet-Cauchy lemma (see e.g. [13]),

$$\tau(x,y,t) = \sum_{I \in \binom{[M]}{N}} \Delta_I(A) E_I(x,y,t), \tag{3.10}$$

where $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_N\}$ is an N element subset in $[M] := \{1, 2, \ldots, M\}$, $\Delta_I(A)$ is the $N \times N$ minor with the column vectors indexed by $I = \{i_1, \ldots, i_N\}$, and $E_I(x,y,t)$ is the $N \times N$ determinant of the same set of the columns in (3.9), which is given by

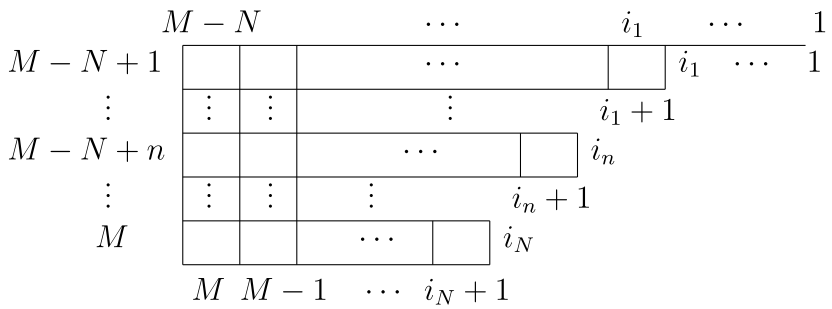
$$E_I = \prod_{k<l} (\kappa_{i_l} - \kappa_{i_k})\, E_{i_1} \cdots E_{i_N} = \prod_{k<l} (\kappa_{i_l} - \kappa_{i_k}) \exp\left(\xi_{i_1} + \cdots + \xi_{i_N}\right). \tag{3.11}$$

The minor $\Delta_I(A)$ is also called the Plücker coordinate, and the τ-function represents a point of $\mathrm{Gr}(N,M)$ in the sense of the Plücker embedding, $\mathrm{Gr}(N,M) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^N \mathbb{C}^M) : A \mapsto \{\Delta_I(A) : I \in \binom{[M]}{N}\}$. It is then obvious that if all the minors of A are nonnegative, the τ-function (3.10) is sign-definite, i.e. the solution u in (3.2) is *regular*. The $\mathrm{Gr}(M,N)$ consisting of these elements is called the totally nonnegative (TNN) Grassmannian, denoted by $\mathrm{Gr}(N,M)_{\ge 0}$. Then the following theorem for the *necessary* condition of the regularity was proven in [16].

Theorem 3.2. *The soliton solution generated by the τ-function* (3.10) *is regular if and only if the matrix A is in* $\mathrm{Gr(N,M)}_{\ge 0}$.

4. Combinatorics for the TNN Grassmannians

We here provide a brief summary of combinatorial description of the TNN Grassmannian $\mathrm{Gr}(N,M)_{\ge 0}$ (see also [13] for the details). Each element $A \in \mathrm{Gr}(N,M)$ is expressed as an $N \times M$ matrix in the reduced row echelon form. Let $\{i_1, \ldots, i_N\}$ be the pivot set of the matrix A. Then the Young diagram corresponding to the pivot set is obtained as follows: Consider a lattice path starting from the top right corner and ending at the bottom left corner with the label $\{1, \ldots, M\}$, so that the pivot indices appear at the vertical paths as shown in the diagram below.



We recall that the partitions λ are in bijection with N-element subset $I \subset [M]$, i.e. we have $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N$ with

$$\lambda_k = M - N - (i_k - k) \qquad \text{for} \quad k = 1, \ldots, N.$$

The irreducible element $A \in \mathrm{Gr}(N, M)_{\geq 0}$ defines the *irreducible* Young diagram, which has $\lambda_1 = M - N$ and $\lambda_N \geq 1$.

4.1. The Le-diagram

In [25], Postnikov introduced the Le-diagram (called *Le*-diagram), which gives a unique parametrization of the element $A \in \mathrm{Gr}(N, M)_{\geq 0}$.

Definition 4.1. *A Le-diagram is a decorated Young diagram with ◯ in some boxes, which satisfies the property (called Le-property): If there is ◯, then all the boxes either to its left or above it are all ◯. That is, there is no such ◯, which has an empty box to its left and an empty box above it. We also say that a Le-diagram is irreducible, if each column and row has at least one empty box (i.e no zero column or/and no zero row). See the left diagram in Example 4.3 below.*

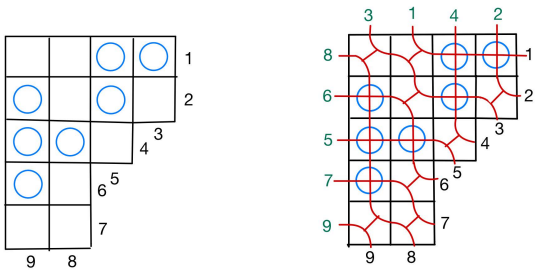
Then Postnikov proved the following theorem.

Theorem 4.2. *There is a bijection between the set of irreducible Le-diagram and the set of derangements of the symmetric group S_M.*

Here the derangement associated to the Le-diagram can be found by constructing a *pipedream* on the diagram as follows (see [13] for the details): Starting from a Le-diagram, we replace a blank box with a box containing elbow-pipes connected by a bridge and replace a box with ◯ by a box containing crossing pipes as shown below. Then we label the southeast (input) boundary of the Le-diagram from 1 to

M starting from the top corner to the bottom corner of the boundary. We place a pipe with the index of the input edge from the southeast (output) boundary to the northwest boundary, and then label each northwest edge according to the index of the pipe. Then the derangement σ with a pair (i, j) in $\sigma(i) = j$ can be found on the opposite sides of the boundary.

Example 4.3. *Below shows a Le-diagram and its pipedream, The derangement*



corresponding to the pipedream is $(8, 6, 2, 5, 4, 7, 9, 1, 3)$ *in one-line notation.*

One can also show the following proposition from the ⅃-diagram.

Proposition 4.1. *Given an irreducible ⅃-diagram, the zero entries of $A \in Gr(N,M)_{\geq 0}$ can be determined as follows: Consider a box at (i_k, j) with ◯ whose south-east conner is a point of the boundary of the diagram, and recall the ⅃-property. We have two cases as shown in the figure below.*

(a) *The k-th row, say $A_{k,\bullet}$, of the matrix A has the structure,*

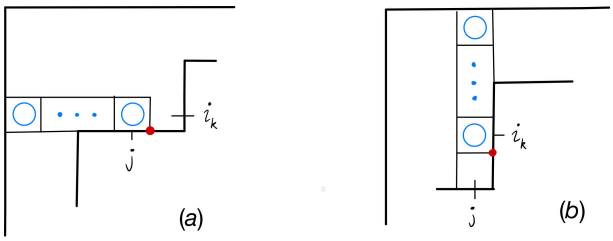
$$A_{k,\bullet} = (\ldots, 0, 1, \ldots, *, 0, 0, \ldots, 0),$$

that is, the pivot "1" is at (k, i_k) and the nonzero element marked by "$*$" is at $(k, j-1)$. The entries $A_{k,l}$ for $j \leq l \leq M$ are all zero.

(b) *The j-th column, say $A_{\bullet,j}$, of the matrix A has the structure,*

$$(A_{\bullet,j})^T = (0, 0, \ldots, 0, *, \ldots),$$

that is, the entries $A_{l,j} = 0$ for $1 \leq l \leq k$ are all zero.



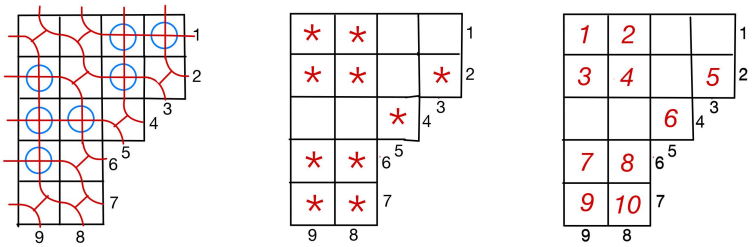
Proof. Using Theorem 5.6 in [16] about the vanishing minors, one can show

(a) the minor $\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-1},j,i_{k+1},\ldots,i_N}(A) = 0$, and

(b) the minor $\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_l,j,i_{l+1},\ldots,i_N}(A) = 0$,

which imply the equations in the proposition. Note that there is a case $j > i_{k+1}$ in (a). This can can be also proven in the same way. □

Example 4.4. *Consider the example 4.3. The middle diagram in the figure below shows the nonzero entries other than pivots in the matrix A, e.g. $A_{2,8} \neq 0$ and $A_{3,5} \neq 0$. Each empty box gives zero entry of A, e.g. $A_{1,5} = A_{3,8} = 0$.*



Each star in the middle diagram implies that there is a path $[i, j]$ through the pipedream from the pivot index i at the east boundary to the non-pivot index j at the south boundary of the ⅃-diagram.

For $A \in \mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$, we define the matroid,

$$\mathcal{M}(A) = \left\{ I \in \binom{[M]}{N} : \Delta_I(A) \right\}. \tag{4.1}$$

Let I_0 be the lexicographically minimum element of $\mathcal{M}(A)$. Then we have the decomposition,

$$\mathcal{M}(A) = \bigcup_{n=0}^{N} \mathcal{M}_n(A), \tag{4.2}$$

where

$$\mathcal{M}_n(A) := \{ J \in \mathcal{M}(A) : |J \cap I_0| = N - n \}.$$

Note that $\mathcal{M}_0(A) = I_0$. We also define $P_1(A)$ as the set of pairs $[i,j]$,

$$P_1(A) := \{ [i,j] : i \in I_0 \setminus J, j \in J \setminus I_0 \text{ for } J \in \mathcal{M}_1(A) \} \tag{4.3}$$

This implies that $P_1(A)$ is identified as the set of nonzero entries in A besides the pivots, that is, $[i_k, j_l] \in P_1(A)$ represents

(a) $i_k \in I_0 \setminus J$ is the k-th pivot of A, i.e. $A_{k,i_k} = 1$,

(b) $j_l \in J \setminus I_0$ is the nonzero element A_{k,j_l} in the k-th row.

One can define the order in $P_1(A)$: Let ℓ be a bijection satisfying the following order,

(1) $\ell([i,k]) < \ell([i,l])$, if $k > l$,

(2) $\ell([i,\bullet]) < \ell([j,\bullet])$, if $i < j$.

Then the elements of $P_1(A)$ can be uniquely numbered from 1 to $|P_1(A)|$, i.e.

$$1 \ \leq \ \ell([i,j]) \ \leq \ g, \quad \text{for} \ \ [i,j] \in P_1(A), \tag{4.4}$$

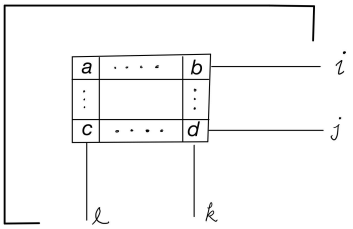
where $g = |P_1(A)|$. Note that (4.4) gives the ordering of the singular points in the nomalization (2.3),

$$\pi^{-1}(p_l) = \{\kappa_i, \kappa_j\} \quad \text{for} \quad l = \ell([i,j]), \ \text{and} \ 1 \leq l \leq g. \tag{4.5}$$

As will be shown in the next section, the number g gives the genus of the Riemann surface associated with the KP soliton. We remark that the ordering in (4.5) can be obtained from the ⅃-diagram as shown in the right diagram in Example 4.4, and we call the diagram *O⅃-diagram*.

From the *O⅃*-diagram, we can also show the following proposition on the sign of the coefficient $C_{p,q}$.

Proposition 4.2. *In the O⅃-diagram, consider a rectangular section whose conner boxes are marked a, b, c and d with $a < b < c < d$ as shown in the figure below. We also assign a pair of parameters (κ_p, κ_q) to each box according to the boundary indices of the ⅃-diagram. Then we have that*



$$a = (\kappa_i, \kappa_l)$$
$$b = (\kappa_i, \kappa_k)$$
$$c = (\kappa_j, \kappa_l)$$
$$d = (\kappa_j, \kappa_k)$$

(i) $C_{a,b} = C_{a,c} = C_{cd} = C_{b,d} = 0$, *and* $C_{a,d} > 0, C_{b,c} < 0$,

(ii) *if one of the conner boxes is empty (no numbered) or the box* $\boxed{d}$ *is outside of the* $O\text{Ш}$*-diagram, then either* $C_{a,d} > 0$ *or* $C_{b,c} > 0$.

Proof. Note that in the Ш-diagram, the indices $\{i, j\}$ are pivots, and $\{k, l\}$ are non-pivots. Also we have $\kappa_i < \kappa_j < \kappa_k < \kappa_l$. Then the proof is just the computation of the coefficients given by the cross ratio (2.6). For example, the coefficient $C_{a,d}$ is calculated as

$$C_{a,b} = \frac{(\kappa_i - \kappa_j)(\kappa_l - \kappa_k)}{(\kappa_i - \kappa_k)(\kappa_j - \kappa_l)} > 0$$

It is also easy to show that for the case where $\boxed{d}$ is outside the diagram, we have $C_{b,c} > 0$ (in this case note that $\kappa_i < \kappa_k < \kappa_j < \kappa_l$). □

Example 4.5. *Consider Example 4.4. The following six coefficients are only negative*

$$C_{2,3},\ C_{2,7},\ C_{2,9},\ C_{4,7},\ C_{4,9},\ C_{8,9}\ <\ 0.$$

All other coefficients for $1 \le p < q \le 10$ *are* $C_{p,q} \ge 0$.

5. The τ-function as the M-theta function

The τ-function (3.10) can be expressed as

$$\begin{aligned}\tau(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{J \in \mathcal{M}_n(A)} \Delta_J(A) E_J(x,y,t) \qquad (5.1)\\ &= \Delta_{I_0}(A) E_{I_0}(x,y,t) \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{J \in \mathcal{M}_n(A)} \frac{\Delta_J(A) E_J}{\Delta_{I_0}(A) E_{I_0}}\right)\end{aligned}$$

Since the solution is given by the second derivative of $\ln \tau$, one can take the τ-function in the following form,

$$\tau(x,y,t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{J \in \mathcal{M}_n(A)} \Delta_J(A) \frac{E_J(x,y,t)}{E_{I_0}(x,y,t)}. \qquad (5.2)$$

where we have taken $\Delta_{I_0}(A) = 1$ for the pivot set I_0.

Then the following theorem is proven in [14].

Theorem 5.1. *Given irreducible $A \in Gr(N,M)_{\geq 0}$, the τ-function* (5.2) *is the M-theta function* (2.9)*, i.e.*

$$\begin{aligned}\tau(x,y,t) = \vartheta_g(\mathbf{z};\widetilde{\Omega}) &= \sum_{m\in\{0,1\}^g} \exp 2\pi i \left(\sum_{i<j} m_i m_j \tilde{\Omega}_{i,j} + \sum_{j=1}^g m_j z_j\right) \\ &= 1 + \sum_{p=1}^g e^{\tilde{\phi}_p} + \sum_{p<q} C_{p,q} e^{\tilde{\phi}_p+\tilde{\phi}_q} + \cdots + \left(\prod_{p<q} C_{p,q}\right) e^{\sum_{l=1}^g \tilde{\phi}_l},\end{aligned}$$

where $g = |P_1(A)|$ and $2\pi i z_p = \tilde{\phi}_p(x,y,t) = \phi_p(x,y,t) + \phi_p^0$, and for $p = \ell([i_k, j_l^{(k)}])$ with the ordering ℓ in $P_1(A)$,

$$\begin{aligned}\phi_p &= \xi_{j_m^{(k)}} - \xi_{i_k} = (\kappa_{j_m^{(k)}} - \kappa_{i_k})x + (\kappa_{j_m^{(k)}}^2 - \kappa_{i_k}^2)y + (\kappa_{j_m^{(k)}}^3 - \kappa_{i_k}^3)t, \\ e^{\phi_p^0} &= a_{k,j_m^{(k)}} \frac{\prod_{l\neq k}(\kappa_{i_l} - \kappa_{j_m^{(k)}})}{\prod_{l\neq k}(\kappa_{i_l} - \kappa_{i_k})}, \\ C_{p,q} &= \exp\left(2\pi i\, \tilde{\Omega}_{p,q}\right) = \frac{(\kappa_{i_k} - \kappa_{i_l})(\kappa_{j_m^{(k)}} - \kappa_{j_n^{(l)}})}{(\kappa_{i_k} - \kappa_{j_n^{(l)}})(\kappa_{j_m^{(k)}} - \kappa_{i_l})}.\end{aligned}$$

Here $q = \ell([i_l, j_n^{(l)}])$, and $a_{k,j_m^{(k)}}$ is the entry in A corresponding to the element $[i_k, j_m^{(k)}] \in P_1(A)$.

As shown in [8], the sign of $a_{k,j_m^{(k)}}$ is determined by the positivity of $e^{\phi_p^0}$, that is, it is the sign of the product in the equation.

5.1. Example

Consider the $O\mathrm{J}$-diagram $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$. This implies $g = 4$, and the number in each box of the diagram is assigned by $l = \ell([i,j])$ for $[i,j] \in P_1(A)$ with $A \in \mathrm{Gr}(2,4)_{\geq 0}$, i.e.

$$1 = \ell([1,4]), \quad 2 = \ell([1,3]), \quad 3 = \ell([2,4]), \quad 4 = \ell([2,3]). \tag{5.3}$$

In terms of the normalization (2.3), this ordering means $\pi^{-1}(p_l) = \{\alpha_l, \beta_l\}$ for $l = 1,\ldots,4$, e.g., $\pi^{-1}(p_2) = \{\kappa_1, \kappa_3\}$ (see (4.5)). Then the coefficients $C_{j,k}$ in (2.6) are calculated as $C_{1,2} = C_{1,3} = C_{2,4} = C_{3,4} = 0$, and

$$C_{1,4} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_4 - \kappa_3)}{(\kappa_1 - \kappa_3)(\kappa_4 - \kappa_2)} > 0, \qquad C_{2,3} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_3 - \kappa_4)}{(\kappa_1 - \kappa_4)(\kappa_3 - \kappa_2)} < 0.$$

The matrix $A \in \mathrm{Gr}(2,4)_{\geq 0}$ corresponding to the diagram is given by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix}.$$

The signs of the entries $a_{i,j}$ are determined by the positivity of $\exp\phi_l^0$, i.e.

$$\begin{aligned} e^{\phi_1^0} &= a_{1,4}\frac{\kappa_2 - \kappa_4}{\kappa_2 - \kappa_1} > 0, \qquad e^{\phi_2^0} = a_{1,3}\frac{\kappa_2 - \kappa_3}{\kappa_2 - \kappa_1} > 0, \\ e^{\phi_3^0} &= a_{2,4}\frac{\kappa_1 - \kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_2} > 0, \qquad e^{\phi_4^0} = a_{2,3}\frac{\kappa_1 - \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_2} > 0, \end{aligned}$$

that is, using $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$, we have $a_{1,4} < 0, a_{1,3} < 0, a_{2,4} > 0$ and $a_{2,3} > 0$. Notice here that these signs are *not* enough for the total nonnegativity of A (the additional condition is determined by the regularity of the solution [16], see below).

Then the M-theta function (i.e. the τ-function) in Theorem 5.1 is given by

$$\tau = 1 + e^{\widetilde{\phi}_1} + e^{\widetilde{\phi}_2} + e^{\widetilde{\phi}_3} + e^{\widetilde{\phi}_4} + C_{1,4}e^{\widetilde{\phi}_1+\widetilde{\phi}_4} + C_{2,3}e^{\widetilde{\phi}_2+\widetilde{\phi}_3}, \tag{5.4}$$

where the exponents are given by $\widetilde{\phi}_l = \phi_l + \phi_l^0$ with $\phi_l = \xi_j(x,y,t) - \xi_i(x,y,t)$ in (3.5) for $l = \ell([i,j]) = 1, \dots, 4$,

$$\phi_1 = \xi_4 - \xi_1, \quad \phi_2 = \xi_3 - \xi_1, \quad \phi_3 = \xi_4 - \xi_2, \quad \phi_4 = \xi_3 - \xi_2,$$

One should note here that we have a linear relation among the phase functions ϕ_i's, i.e.

$$\phi_1 + \phi_4 = \phi_2 + \phi_3 = (\xi_3 + \xi_4) - (\xi_1 + \xi_2).$$

Then the last two terms in the τ-function (5.4) becomes

$$\left(C_{1,4}e^{\phi_1^0+\phi_4^0} + C_{2,3}e^{\phi_2^0+\phi_3^0}\right)e^{\phi_1+\phi_4} = (a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3})\frac{\kappa_3-\kappa_4}{\kappa_1-\kappa_2}e^{\phi_1+\phi_4}.$$

This implies that for the regular soliton solution, we need to choose appropriate constants $\phi_1^0, \dots, \phi_4^0$ so that $a_{1,3}a_{2,4} - a_{14}a_{2,3} \geq 0$, i.e. $A \in \mathrm{Gr}(2,4)_{\geq 0}$.

6. The Schottky uniformization

The main question in the present paper is to construct a smooth compact Riemann surface $\mathcal{R}_g$ associated with the KP soliton whose M-theta function $\widetilde{\vartheta}_g$ is obtained by taking a tropical (singular) limit of $\mathcal{R}_g$. We answer to this question using the Schottky uniformization theorem [6, 2]. A Schottky group is defined as a finitely generated, discontinuous subgroup of $SL_2(\mathbb{C})$ which are free and purely loxodromic [2]. In this paper, we consider a special case of the Schottky group, which is generated by purely hyperbolic Möbius transformations in $SL_2(\mathbb{R})$. It was shown in [6] that any compact Riemann surface $\mathcal{R}$ can be uniformized by the Schottky group Γ, which can be represented as

$$\mathcal{R} \;\cong\; \Omega(\Gamma)/\Gamma,$$

where $\Omega(\Gamma)$ is the set of discontinuity of Γ (see also [2]).

In order to define our Schottky group Γ_A for $A \in \mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$, we start with the following definition.

Definition 6.1. *For each element $[i,j] \in P_1(A)$, we define a pair of real numbers $\{\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}\}$ with the order,*

(a) *$\kappa_k < \kappa_{k,\bullet} < \kappa_l < \kappa_{l,\bullet}$ for all $k < l \in [M]$, and*

(b) *$\kappa_{k,p} < \kappa_{k,q}$, when $p > q$ and for $k \in [M]$.*

Let $\gamma_{[i,j]}$ be the hyperbolic Möbius transform on $\mathbb{CP}^1$ having two fixed points $\{\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}\}$, which is defined by

$$\frac{\gamma_{[i,j]}(z) - \kappa_{i,j}}{\gamma_{[i,j]}(z) - \kappa_{j,i}} = \mu_{i,j} \frac{z - \kappa_{i,j}}{z - \kappa_{j,i}}, \tag{6.1}$$

where $\mu_{i,j}$ is the multiplier which is symmetric real constant with $0 < \mu_{[i,j]} < 1$. Then the fixed points $\kappa_{i,j}$ and $\kappa_{j,i}$ are attractive and repulsive, respectively. Then we define the Schottky group Γ_A associated with $A \in \mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$ as a Fuchsian group given by

$$\Gamma_A := \langle\ \gamma_{[i,j]} \in PSL_2(\mathbb{R}) : [i,j] \in P_1(A)\ \rangle. \tag{6.2}$$

where $\gamma_{[i,j]}$ in (6.1) is expressed as

$$\gamma_{[i,j]} = \frac{1}{(\kappa_{i,j} - \kappa_{j,i})\sqrt{\mu_{i,j}}} \begin{pmatrix} \kappa_{i,j} - \mu_{i,j}\kappa_{j,i} & -\kappa_{i,j}\kappa_{j,i}(1-\mu_{i,j}) \\ 1 - \mu_{i,j} & -(\kappa_{j,i} - \mu_{i,j}\kappa_{i,j}) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

In Section 6.1 below, we directly construct $\gamma_{[i,j]}$ as a deformation of the singular curve (Riemann surface) associated with each element $A \in \mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$.

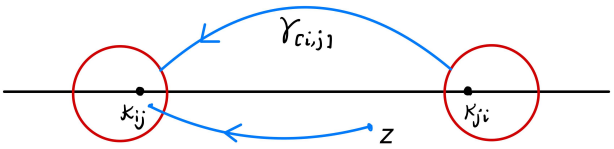
The isometric circle $I(\gamma_{[i,j]})$ of $\gamma_{[i,j]}$ in (6.3) is then given by

$$|(1-\mu_{i,j})z - (\kappa_{i,j} - \mu_{i,j}\kappa_{j,i})| = (\kappa_{j,i} - \kappa_{i,j})\sqrt{\mu_{i,j}},$$

whose center and radius are

$$\text{Center} = \frac{\kappa_{i,j} - \mu_{i,j}\kappa_{j,i}}{1-\mu_{i,j}}, \qquad \text{Radius} = \frac{\kappa_{j,i} - \kappa_{i,j}}{1-\mu_{i,j}}\sqrt{\mu_{i,j}}. \tag{6.4}$$

Taking $\mu_{i,j}$ small enough, one can assume that all the isometric circles are disjoint. Note that $\gamma_{[i,j]}$ maps outside of the isometric circle $I(\gamma^{-1}_{[i,j]})$ into the interior of $I(\gamma_{[i,j]})$, see the figure below.



The (isometric) fundamental region, denoted by $\mathcal{F}(\Gamma_A)$, of Γ_A is given by $\mathbb{CP}^1$ with $2g$ holes of isometric circles, i.e.

$$\mathcal{F}(\Gamma_A) := \mathrm{Ext}\left(\bigcup_{[i,j]\in P_1(A)} \overline{\mathrm{Int}\ \left(I(\gamma_{[i,j]})\right)} \cup \mathrm{Int}\ \left(I(\gamma^{-1}_{[i,j]})\right) \right), \tag{6.5}$$

where $\mathrm{Ext}(D)$ means the set of exterior points of the set D, and $\mathrm{Int}(I(\gamma))$ represents the interior points of the isometric circle $I(\gamma)$.

For each $[i,j] \in P_1(A)$, let $\omega_{[i,j]}$ be the differentials on $\Omega(\Gamma_A)$, the set of discontinuity of Γ_A, defined by

$$\omega_{[i,j]} = \frac{dz}{2\pi i} \sum_{\gamma \in \Gamma_A/\langle\gamma_{[i,j]}\rangle} \left(\frac{1}{z - \gamma(\kappa_{i,j})} - \frac{1}{z - \gamma(\kappa_{j,i})} \right), \tag{6.6}$$

where γ runs through all representatives of the right coset classes of Γ_A by its cyclic subgroup $\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$ generated by $\gamma_{[i,j]}$. Here $\Omega(\Gamma_A)$ can be expressed as $\Omega(\Gamma_A) = \cup_{\gamma\in\Gamma_A}\gamma(\mathcal{F}(\Gamma_A))$. It is also known [6, 2] that the infinite sum in (6.6) converges absolutely for sufficiently small $\mu_{i,j}$. Then we have the lemma.

Lemma 6.1. *The differentials $\omega_{[i,j]}$ are holomorphic on $\Omega(\Gamma_A)$,*

$$\omega_{[i,j]}(z) = \omega_{[i,j]}(\gamma(z)) \qquad \textit{for any} \quad \gamma \in \Gamma_A.$$

Proof. Let α be a differential given by

$$\alpha(z) = \left(\frac{1}{z-A} - \frac{1}{z-B}\right) dz = \frac{A-B}{(z-A)(z-B)}\, dz.$$

Then for $\sigma \in \Gamma_A$, we have

$$\alpha(\sigma(z)) = \frac{\sigma^{-1}(A) - \sigma^{-1}(B)}{(z-\sigma^{-1}(A))(z-\sigma^{-1}(B))}\, dz.$$

Then taking $A = \gamma(\kappa_{i,j})$ and $B = \gamma(\kappa_{j,i})$, and then $\sigma^{-1}\gamma \in \Gamma_A/\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$. Summing over all the element in $\Gamma_A/\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$ gives a proof. □

Then we have the following proposition.

Proposition 6.1. *The period integrals of the differentials are given by*

$$\oint_{a_{[i,j]}} \omega_{[k,l]} = \begin{cases} 1, & \textit{if} \ \ [i,j] = [k,l], \\ 0, & \textit{if} \ \ [i,j] \neq [k,l]. \end{cases}$$

$$\oint_{b_{[i,j]}} \omega_{[k,l]} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma\in\langle\gamma_{[i,j]}\rangle\backslash\Gamma_A/\langle\gamma_{[k,l]}\rangle} \ln\left[\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}; \gamma(\kappa_{k,l}), \gamma(\kappa_{l,k})\right], \tag{6.7}$$

where $[\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}; \gamma(\kappa_{k,l}), \gamma(\kappa_{l,k})]$ is the cross ratio given by

$$[\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}; \gamma(\kappa_{k,l}), \gamma(\kappa_{l,k})] := \frac{(\kappa_{i,j} - \gamma(\kappa_{k,l}))(\kappa_{j,i} - \gamma(\kappa_{l,k}))}{(\kappa_{i,j} - \gamma(\kappa_{l,k}))(\kappa_{j,i} - \gamma(\kappa_{k,l}))},$$

which takes $\mu_{i,j}$ when $[i,j] = [k,l]$ and $\gamma \in \langle\gamma_{[i,j]}\rangle$.

Proof. The period integral over $a_{[i,j]}$ are obvious, and this implies that $\omega_{[i,j]}$ is normalized. The integral over $b_{[i,j]}$ gives a period integral over b-cycle. For a point a on the isometric circle $I(\gamma_{[i,j]}^{-1})$, i.e. $\gamma_{[i,j]}(a) \in I(\gamma_{[i,j]})$, the integral gives

$$\begin{aligned} \int_{b_{[i,j]}} \omega_{[k,l]} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma\in\Gamma_A/\langle\gamma_{[k,l]}\rangle} \ln \left.\frac{z-\gamma(\kappa_{k,l})}{z-\gamma(\kappa_{l,k})}\right|_a^{\gamma_{[i,j]}(a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma\in\Gamma_A/\langle\gamma_{[k,l]}\rangle} \ln \frac{(\gamma_{[i,j]}(a) - \gamma(\kappa_{k,l}))(a - \gamma(\kappa_{l,k}))}{(\gamma_{[i,j]}(a) - \gamma(\kappa_{l,k}))(a - \gamma(\kappa_{k,l}))}. \end{aligned}$$

Here, if $[i,j]=[k,l]$ and $\gamma\in\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$, then by (6.1),

$$\frac{(\gamma_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{k,l}))(a-\gamma(\kappa_{l,k}))}{(\gamma_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{l,k}))(a-\gamma(\kappa_{k,l}))}=\frac{(\gamma_{[i,j]}(a)-\kappa_{i,j})(a-\kappa_{j,i})}{(\gamma_{[i,j]}(a)-\kappa_{j,i})(a-\kappa_{i,j})}=\mu_{i,j}.$$

Since $\lim_{n\to\infty}\gamma^n_{[i,j]}(a)=\kappa_{i,j}$, $\lim_{n\to\infty}\gamma^{-n}_{[i,j]}(a)=\kappa_{j,i}$, if $[i,j]\neq[k,l]$ or $\gamma\notin\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$, then

$$\begin{aligned}\prod_{n\in\mathbb{Z}}&\left(\frac{(\gamma_{[i,j]}(a)-\gamma^{-n}_{[i,j]}\gamma(\kappa_{k,l}))(a-\gamma^{-n}_{[i,j]}\gamma(\kappa_{l,k}))}{(\gamma_{[i,j]}(a)-\gamma^{-n}_{[i,j]}\gamma(\kappa_{l,k}))(a-\gamma^{-n}_{[i,j]}\gamma(\kappa_{k,l}))}\right)\\ &=\prod_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{(\gamma^{n+1}_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{k,l}))(\gamma^{n}_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{l,k}))}{(\gamma^{n+1}_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{l,k}))(\gamma^{n}_{[i,j]}(a)-\gamma(\kappa_{k,l}))}\right)\\ &=\frac{(\kappa_{i,j}-\gamma(\kappa_{k,l}))(\kappa_{j,i}-\gamma(\kappa_{l,k}))}{(\kappa_{i,j}-\gamma(\kappa_{l,k}))(\kappa_{j,i}-\gamma(\kappa_{k,l}))}\end{aligned}$$

which completes the proof. □

As the summary of these results, we now give the main theorem.

Theorem 6.2. *Given irreducible $A\in Gr(N,M)_{\geq 0}$, a real compact Riemann surface $\mathcal{R}_g$ can be constructed by the Schottky group Γ_A defined in* (6.2) *with* (6.3)*, i.e.*

$$\mathcal{R}_g\cong\Omega(\Gamma_A)/\Gamma_A,$$

where $g=|P_1(A)|$ in (4.3) *and $\Omega(\Gamma_A)$ is the set of discontinuity of Γ_A. The ϑ-function defined on $\mathcal{R}_g$ is given by* (2.2) *with the period matrix in* (6.7)*.*

6.1. From TNN Grassmannians to graphs

In this section, we explain how one can construct the Schottky group by deforming a singular curve associated with an element $A\in\mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$ for the KP soliton.

Let us first define an oriented graph $\Delta_A(V,E)$ associated with the element $A\in\mathrm{Gr}(N,M)_{\geq 0}$, whose the set of vertices V and the set of oriented edges E are given as follows:

(a) $V:=\{v_0,v_k\,(k\in[M])\}$,

(b) $E:=\{e_k\,(k\in[M]),\ e_{[i,j]}\,([i,j]\in P_1(A)\}$,

where each edge e_k is from v_0 to v_k, and $e_{[i,j]}$ from v_i to v_j. Then the set of closed paths $e_i\cdot e_{[i,j]}\cdot e_j^{-1}$ forms the fundamental group $\pi_1(\Delta_A,v_0)$ with the base point v_0. The homological group $H_1(\Delta_A;\mathbb{Z})$ is then given by abelianization of π and the dimension is $\dim H_1(\Delta,\mathbb{Z})=|P_1(A)|$. Note that these closed paths are related to the $b_{[i,j]}$-cycles defined in the ɹ-diagram (see Section 4).

We call algebraic curves defined over $\mathbb{R}$ *real curves*, and construct a singular real curve $\mathcal{C}_A$ with dual graph Δ_A and a family of real curves $\mathcal{R}_A$ as deformations of $\mathcal{C}_A$. Denote by $\mathbb{RP}^1$ the real projective line $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ which is identified with an oriented circle according to the increase of real numbers. Put $\mathcal{P}_{v_0}=\mathbb{RP}^1$ with counter-clockwise orientation, and take points κ_k $(k\in[M])$ on $\mathcal{P}_{v_0}\setminus\{\infty\}$ with the ordering (3.6).

For each vertex v_k ($k \in [M]$), put $\mathcal{P}_{v_k} = \mathbb{RP}^1$ with counter-clockwise orientation, and take points $\lambda_k \in \mathcal{P}_{v_k} \setminus \{\infty\}$ and $\lambda_{k,l} \in \mathcal{P}_{v_k} \setminus \{\infty\}$ if $[k,l] \in P_1(A)$ or $[l,k] \in P_1(A)$ such that $\lambda_{k,l} < \lambda_k$ and $\lambda_{k,l} < \lambda_{k,m}$ for $l > m$. Then the singular real curve $\mathcal{C}_A$ with dual graph Δ_A is obtained as a union of $\mathcal{P}_{v_0}$ and $\mathcal{P}_{v_k}$ ($k \in [M]$) by identifying

$$\kappa_k = \lambda_k \ (k \in [M]), \qquad \lambda_{i,j} = \lambda_{j,i} \ ([i,j] \in P_1(A)),$$

and hence the (arithmetic) genus of $\mathcal{C}_A$ is $g = |P_1(A)|$. For small positive parameters ν_k ($k \in [M]$) and $\nu_{i,j} = \nu_{j,i}$ ($[i,j] \in P_1(A)$), let $\mathcal{R}_A$ be a family of real curves as deformations of $\mathcal{C}_A$ obtained by gluing

$$\mathcal{C}_A \setminus \{\text{neighborhoods of singular points}\}$$

under the relations

$$(z_0 - \kappa_k)(z_k - \lambda_k) = -\nu_k, \tag{6.5}$$

and

$$(z_i - \lambda_{i,j})(z_j - \lambda_{j,i}) = -\nu_{i,j}, \tag{6.6}$$

where z_i are the coordinates of $\mathcal{P}_{v_i}$. By these relations, for $[i,j] \in P_1(A)$, if $z, w \in \mathcal{P}_{v_0} = \mathbb{RP}^1$ are related as

$$z \in \mathcal{P}_{v_0} \quad \overset{(6.5)}{\longmapsto} \quad z_i \in \mathcal{P}_{v_i} \quad \overset{(6.6)}{\longmapsto} \quad z_j \in \mathcal{P}_{v_j} \quad \overset{(6.5)}{\longmapsto} \quad w \in \mathcal{P}_{v_0},$$

then we have

$$w - \kappa_j = -\frac{\nu_j}{z_j - \lambda_j} = \frac{a\nu_j(z - \kappa_i) - \nu_i\nu_j}{(ab + \nu_{i,j})(z - \kappa_i) - bs_i}$$

where $a = \lambda_i - \lambda_{i,j}$ and $b = \lambda_j - \lambda_{j,i}$. This gives the Möbius transform $\gamma : z \mapsto w = \gamma(z)$ on $\mathcal{P}_{v_0}$ with $\gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\nu_i\nu_j\nu_{i,j}}} \begin{pmatrix} c\kappa_j + a\nu_j & -c\kappa_i\kappa_j - \nu_i\nu_j - a\kappa_i\nu_j - b\kappa_j\nu_i \\ c & -c\kappa_i - b\nu_i \end{pmatrix},$$

where $c = ab + \nu_{i,j}$. Then introducing the Schottky parameters $\{\kappa_{i,j}, \kappa_{j,i}, \mu_{i,j}\}$ in terms of $\{a\nu_j, b\nu_i, c\}$, we have $\gamma = \gamma_{[i,j]}$ defined in (6.3). We can also see

$$\kappa_{k,l} - \kappa_k = \Theta(\nu_k), \qquad \mu_{i,j} = \Theta(\nu_i\nu_{i,j}\nu_j),$$

where $f = \Theta(g)$ means that there exists positive constants c_1, c_2 satisfying $c_1|g| \leq |f| \leq c_2|g|$ asymptotically. Therefore, $\mathcal{R}_A$ with sufficiently small $\nu_k, \nu_{i,j} > 0$ gives a family of real curves which are Schottky uniformized by real Schottky groups Γ_A with free generators $\gamma_{[i,j]}$ ($[i,j] \in P_1(A)$). Furthermore, under $\nu_k, \nu_{i,j} \to 0$, $\kappa_{i,j} \to \kappa_i$, $\kappa_{j,i} \to \kappa_j$ and $\gamma(\kappa_{i,j}) - \gamma(\kappa_{j,i}) \to 0$ for any $\gamma \in (\Gamma_A \setminus \langle\gamma_{[i,j]}\rangle)/\langle\gamma_{[i,j]}\rangle$. Thereore, the differentials $\omega_{[i,j]}$ given in (6.4) has the limit

$$\omega_{[i,j]} \quad \longrightarrow \quad \frac{dz}{2\pi i}\left(\frac{1}{z - \kappa_i} - \frac{1}{z - \kappa_j}\right),$$

and by Proposition 6.1, the period matrix has the limit

$$\exp\left(2\pi i \oint_{b_{[i,j]}} \omega_{[k,l]}\right) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (i=k \text{ or } j=l), \\ [\kappa_i,\kappa_j;\kappa_k,\kappa_l] & (i\neq k \text{ and } j\neq l). \end{cases}$$

Taking appropriate pairs $\{\alpha_j,\beta_j\}$ in the normalization in Section 2.1, we recover the limits in (2.4) and (2.5).

6.2. Quasi-periodic solutions

In this section, we just recall [2] that a quasi-periodic solution can be obtained by the theta function (2.2) using the Schottky group. In [2] (Section 5.5 in p.160), the solution $u(x,y,t)$ of the KP equation is given by

$$u(x,y,t) = 2\,\partial_x^2 \,\ln\,\vartheta_g(\mathbf{U}^1 x + \mathbf{U}^2 y + \mathbf{U}^3 t + \mathbf{D};\,\Omega_A) + 2C$$

where $\mathbf{U}^k = (U^k_{[i,j]} : [i,j] \in P_1(A))$ for $k=1,2,3$ are g-dimensional vectors given by

$$U^k_{[i,j]} := \sum_{\gamma\in\Gamma_A/\langle\gamma_{[i,j]}\rangle} \left(\gamma(\kappa_{i,j})^k - \gamma(\kappa_{j,i})^k\right).$$

The period matrix Ω_A is given by (6.7), and $\mathbf{D}$ is an arbitrary constant vector. The constant C is computed as

$$C = \sum_{[i,j]\in P_1(A)} \left(\frac{(\kappa_{j,i}-\kappa_{i,j})\sqrt{\mu_{i,j}}}{1-\mu_{i.j}}\right)^2.$$

Now it is easy to confirm that the solution $u(x,y,t)$ leads to the KP soliton in the limit with $\kappa_{i,j}\to\kappa_i$, $\kappa_{j,i}\to\kappa_j$ and $\mu_{i,j}\to 0$.

Remark 6.3. *In general, our construction of a real compact Riemann surface $\mathcal{R}$ does not give the so-called* M*-curve* [4]*, which requires that on $\mathcal{R}$, the involution σ must have a maximum number of orvals chosen from the homological basis. Here the involution σ acts on $H_1(\mathcal{R};\mathbb{Z}) = \langle a_j, b_j; j=1,\ldots,g\rangle$ by*

$$\sigma(a_j) = a_j, \quad \sigma(b_j) = -b_j, \qquad \text{for } j=1,\ldots,g.$$

In the case that the Riemann surface is not an M*-curve, the quasi-periodic solution of the KP equation is not regular* [4] *(Theorem in p.271). We will discuss in more details in a forth-coming paper* [11].

7. Examples

Here we give two examples, and show the fundamental domains $\mathcal{F}(\Gamma_A)$.

7.1. The cases of $\mathbf{Gr}(2,4)_{\geq 0}$

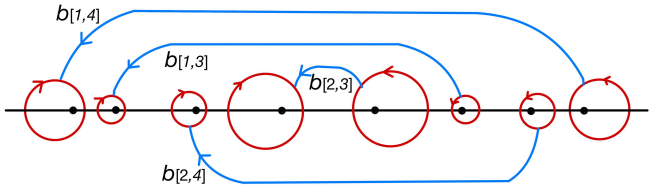
(a) **The cases with $g=4$:** Consider the case with the $O\Delta$-diagram $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$. Then we have

$$P_1(A) = \{[1,4],[1,3],[2,4],[2,3]\}, \quad \text{i.e.} \quad g=4.$$

The element $\gamma_{[i,k]}$ in the Schottky group Γ_A are defined by (6.3), where

$$\kappa_{1,4} < \kappa_{1,3} < \kappa_{2,4} < \kappa_{2,3} < \kappa_{3,2} < \kappa_{3,1} < \kappa_{4,2} < \kappa_{4,1}.$$

The fundamental domain $\mathcal{F}(\Gamma_A)$ is shown in the figure below, that is, $\mathcal{F}(\Gamma_A)$ is the domain outside the isometric circles. In the figure, the dots on the real line are $\kappa_{k,l}$, and the b-cycles show the actions of the group elements $\gamma_{i,j]}$ for $[i,j] \in P_1(A)$.



We consider the limit $\mu_{i,j} \to 0$ but keep all $\kappa_{k.l}$ distinct. Then the limit gives a 4-soliton solution of Hirota-type (see e.g. [7]), i.e. 4 line solitons without resonance. However, this solution is *not* regular as one can see from the matrix $\tilde{A}$ obtained by the limit, i.e. $\widetilde{A} \notin \mathrm{Gr}(4,8)_{\geq 0}$ [8],

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & a_{[1,4]} \\ & 1 & & & & a_{[1,3]} & & \\ & & 1 & & & & a_{[2,4]} & \\ & & & 1 & a_{[2,3]} & & & \end{pmatrix}$$

where $a_{[i,j]}$ are nonzero constants, and all other entries except pivots are zero. The corresponding M-theta function can be computed by follwoing Section 5. Then taking further limits $\kappa_{i,j} \to \kappa_i$ and $\kappa_{j,i} \to \kappa_j$, we obtain the regular solution with

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix}$$

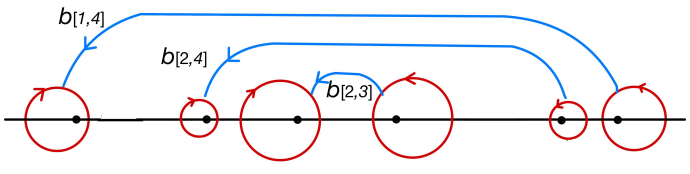
where $a_{1,3}, a_{1,4} < 0$, $a_{2,3}, a_{2,4} > 0$ and $a_{13}a_{2,4} - a_{2,3}a_{1,4} \geq 0$ for $A \in \mathrm{Gr}(2,4)_{\geq 0}$

(b) **A case with $g = 3$:** Consider the $O\Pi$-diagram $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$, which gives

$$P_1(A) = \{[1,4], [2,4], [2,3]\}.$$

The Schottky parameters $\{\kappa_{i,j}; [i,j] \in P_1(A)\}$ are given by

$$\kappa_{1,4} < \kappa_{2,4} < \kappa_{2,3} < \kappa_{3,1} < \kappa_{4,2} < \kappa_{4,1}.$$



The limit with $\mu_{i,j} \to 0$ (keeping $\kappa_{i,j}$ distinct) gives the matrix

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & a_{[1,4]} \\ & 1 & & a_{[2,4]} & \\ & & 1 & a_{[2,3]} & \end{pmatrix}$$

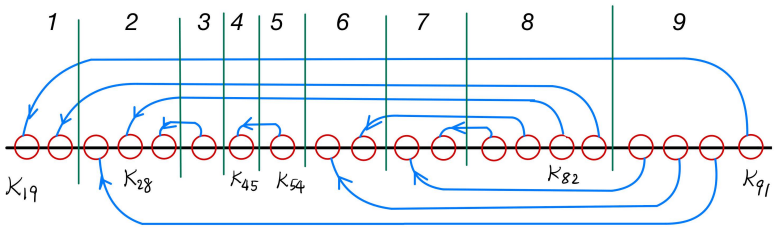
which gives a 3-soliton solution without resonance (i.e. Hirota-type), and it is regular if $a_{[1,4]} > 0$, $a_{[2,4]} < 0$ and $a_{[2,3]} > 0$. The corresponding matrix $A \in \mathrm{Gr}(2,4)_{\geq 0}$ is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix}$$

where $a_{1,4} < 0$ and $a_{2,3}, a_{2,4} > 0$. We also note that the quasi-periodic solution is regular, and the Riemann surface in this case is an M-curve of genus 3.

7.2. A case in $\mathbf{Gr}(5,9)_{\geq 0}$

Here we just illustrate the fundamental domain $\mathcal{F}(\Gamma_A)$ for Example 4.4 (see the figure below). The quasi-periodic solution associated with the Riemann surface uniformized by the Schottky group may not be regular.



References

[1] S. Abenda and P. Grinevich, Rational degenerations of M-curve, totally positive Grassmannians and KP2-solitons Comm. Math. Phys. **361** (2018) 1029–1081.

[2] E.B. Belokolos, A.I. Bobenko V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994).

[3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski and D. V. Leikin, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Rev. Math. Math. Phys. **10**, (1997) 1-103.

[4] B. A. Dubrovin and S. M. Natanzon, Real theta-function solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation, Math. USSR Izvestiya, **32** (1989) 269-288.

[5] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **71** 2nd Edition (Springer-Verlag, New York, 1991).

[6] L. R. Ford, *An introduction to the theory of automorphic functions*, (G. BELL & SONS, London, 1915).

[7] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[8] S. Huang, Y. Kodama, and C. Li, Non-crossing permutations for the KP solitons under the Gelf́and-Dickey reductions and the vertex operators, (arXiv:2407.01900).

[9] T. Ichikawa, generalized Tate curve and integral Teichmüler modular forms, Amer. J. Math. **122** (2000) 1139-74.

[10] T. Ichikawa, Periods of tropical curves and associated KP solutions, Commun. Math. Phys. **402** (2023) 1707-23.

[11] T. Ichikawa and Y. Kodama, KP soliton and the Schottky uniformization, (in preparation).

[12] C. Kalla, Breathers and solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations as degenerations of algebro-geometric solutions. J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 335210, 31 pages.

[13] Y. Kodama, *KP solitons and the Grassmannians: Combinatorics and Geometry of Two-Dimensional Wave Patterns*, Springer Briefs in Mathematical Physics 22, (Springer, Singapore 2017).

[14] Y. Kodama, KP solitons and the Riemann theta functions, Lett. Math. Phys. **114** (2024) 41, 22 pages.

[15] Y. Kodama, L. Williams, KP solitons and total positivity for the Grassmannian, Invent. Math. **198**, (2014) 647-699.

[16] Y. Kodama, L. Williams, The Deodhar decomposition of the Grassmannian and the regularity of KP solitons, Adv. Math. **244** (2013) 979-1032.

[17] Y. Kodama and Y. Xie, Space curves and solitons of the KP hierarchy. I. The ℓ-th generalized KdV hierarchy, SIGMA **17** (2021) 024, 43 pages.

[18] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, The sigma function for trigonal cyclic curves, Lett. Math. Phys. **109** (2019) 423-447.

[19] I.M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry Funct. Anal. Appl., **11** (1977), 12-26.

[20] S. Matsutani and J. Komeda, Sigma functions for a space curve of type $(3, 4, 5)$. J. Geom. Symmetry Phys. **30**, (2013) 75-91,

[21] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II: Jacobian theta functions and differential equations*, Progress in Mathematics **43** (Birkhäuser, 1984)

[22] A. Nakayashiki, On algebraic expansions of sigma functions for (n, s) curves, Asian J. Math. **14**, (2010) 175-212,

[23] A. Nakayashiki, On reducible degeneration of hyperelliptic curves and soliton solutions, SIGMA, **15** (2019), 009, 18 pages.

[24] A. Nakayashiki, Vertex operators of the KP hierarchy and singular algebraic curves, Lett. Math. Phys. **114** (2024), 82, 36 pages.

[25] A. Postnikov, Total positivity, Grassmannians, and networks, (arXiv:math.CO/0609764).

[26] G. Segal and G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 61 (1985), 5-65.