

✿ 日本数学会

2025年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

(1日目／9月16日)

2025年9月

於 名古屋大学

カライドサイクルの存在証明

重富尚太 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*¹

梶原健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

鍛冶静雄 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所/京都大学理学研究科)

概要

カライドサイクルとは、 k 個の合同な等面四面体から作られる環状リンク機構である。この機構の特徴の一つとして、バブルリングのように変形する点が挙げられる。この動きを離散曲線の変形として捉えれば、それは可積分系で記述できることが知られているが、そもそもこの機構が存在するかは未証明であった。本講演では、繋ぐ四面体の数 k が 6 以上であれば、カライドサイクルが存在する事を証明する。

1. 背景

カライドサイクルは振率角一定離散曲線としてモデル化可能で、その変形が可積分系で記述できることが知られている [1, 2]。一方で、半離散 sine-Gordon 方程式・半離散 mKdV 方程式に従って変形する振率角一定離散曲線の明示公式も楕円テータ函数で構成されている [2] が、曲線が閉じるようなパラメータの存在については、一部を除いて数値実験でしか確認されていなかった。

楕円テータ函数の周期格子を $\Omega = \mathbb{Z} + iy\mathbb{Z}$, $y > 0$ と取り、パラメータ $r \in \mathbb{R} \setminus (1/2\mathbb{Z})$, $v \in \mathbb{R} \setminus (y\mathbb{Z})$ と時間変数 $t \in \mathbb{R}$, 仮想的な変数 $z \in \mathbb{C}$ に対して τ 函数を

$$F_n(t, z) = \alpha_2 \exp \left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3 - \Delta_1} z + \frac{C}{2} tz \right) \vartheta_2 \left(\mu_n - \frac{1}{2}iv + it \right), \quad (1)$$

$$H_n(t, z) = \frac{u_2}{\alpha_2 s_2} R_1^{-n} R_3^{-n} \exp \left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3 - \Delta_1} z + \frac{C}{2} tz + \Gamma it \right) \vartheta_4 \left(\mu_n - \frac{1}{2}iv - 2r + it \right),$$

で定め、空間離散曲線 γ を

$$\gamma_n(t) = \left(\frac{H_n + H_n^*}{F_n}, \quad \frac{H_n - H_n^*}{iF_n}, \quad n - 2 \frac{\partial \log F_n}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \in \mathbb{R}^3, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

で定める。(ただし、 $C, \Gamma, \alpha_2, R_1, R_3, \Delta_1, \Delta_3, u_2, s_2$ は、 v, r, y と楕円テータ函数を用いて表される定数。) このとき γ は n, t によらずセグメント長 $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ と振率角 λ が一定になっている [2]。また、離散フレネ粹や曲率角 κ と振率角 λ も τ 函数により明示的に構成できる。

四面体数 k のカライドサイクルの変形をモデル化するには、 $\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$, つまり、

$$\begin{aligned} \frac{H_{n+k}}{F_{n+k}} \Big|_{z=0} &= \frac{H_n}{F_n} \Big|_{z=0}, \\ n+k - 2 \frac{\partial \log F_{n+k}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= n - 2 \frac{\partial \log F_n}{\partial z} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (3)$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ で成立するようなパラメータ v, r, y を見つける必要がある。

*¹ e-mail: s-shigetomi@imi.kyushu-u.ac.jp

2. γ が閉曲線になるパラメータの存在証明

本研究では、 $k \geq 6$ であれば(3)を満たすパラメータが存在することを証明した。したがって、任意の $k \geq 6$ の四面体からなるカライドサイクルの存在が示されたことになる。

Theorem 1. $k \geq 6$ を固定する。あるパラメータ v, r, y が存在して、(2)で定まる振率角一定離散曲線について、任意の $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ で $\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$ が成立する。

証明の概略は以下の通りである：曲線(2)に対して、まず曲率角 κ が周期 k を持つことから、 $m := kv/y$ の整数性が要求される。 m が整数であるという条件の下、楕円テータ函数の擬周期を使って(3)を書き直すと、

$$\exp(\pi im) \left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right)}{\vartheta_1\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right) \vartheta_3\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right)} \right]^k - 1 = 0, \quad (4)$$

$$(\Delta_3 + \Delta_1)k - 4\pi im = 0, \quad (5)$$

を得る。次に、 m が整数であるという条件下で(5)を考える。 y がある範囲にあるとき、(5)を満たす $r = r(y)$ が一意的に定まり、 $r(y)$ は楕円積分で明示的に求められる。さらに、楕円テータ函数の無限積による表示[3]を使い(4)を書き直し、 $r(y)$ を(4)に代入すると、 $m \geq 3$ なら(4)を満たす y が存在することが言える。最後に、カライドサイクルの形状を保つような m の変換を考えることで $0 < m \leq k/2$ を仮定できることを確かめ、 $k \geq 6$ なら(4),(5)を満たす r, y, v が存在することが示される。

証明中の計算は複雑なため、詳細は講演で提示する。証明中に登場する整数 m は自己絡み数などとの関連が示唆されており、今後は幾何学的な意味を検討したい。

参考文献

- [1] S. Kaji, K. Kajiwara and H. Park, Linkage Mechanisms Governed by Integrable Deformations of Discrete Space Curves. In Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures, N. Euler and M. C. Nucci (eds.), Volume 2, CRC Press, 2019, 356–381, <https://doi.org/10.1201/9780429263743>.
- [2] S. Kaji, K. Kajiwara and S. Shigetomi, An explicit construction of Kaleidocycles by elliptic theta functions, arXiv:2308.04977.
- [3] S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta vocabulary I, Journal of Geometry and Physics, 94:19–31, 2015.

From polygon equations to simplex equations

Serban Matei Mihalache (東京大学)*¹

持田 知朗 (東北大学)*²

1 はじめに

Kashaev と Sergeev [3] は pentagon equation の解とその dual の解がとある交換条件を満たすとき、それらから tetrahedron equation と 4-simplex equation の解が導出できることを示した。Dimakis と Müller-Hoissen [2] は pentagon equation を拡張して polygon equation を定義し、上記の 4-simplex equation 導出の一般化を行った。その他、4-simplex equation 側の議論には Dimakis と Korepanov [1] によるものもあるが、tetrahedron equation 側の一般化は未知である。さらに交換条件については各 n に対して個別には導出できるものの、一般次元についてまとめた記述はされていない。

本稿ではこの問題に対して、交換条件の明示的な記述とともに Kashaev と Sergeev による二つの simplex equation の解の導出を一般次元へと拡張する。具体的には $(2n+1)$ -gon equation の解とその dual の解が交換条件を満たすとき、そこから $(2n-1)$ -simplex equation と $2n$ -simplex equation の解が得られることを紹介する。

2 Simplex and polygon equations

ここでは簡単に simplex equation と奇数次の polygon equation (odd-gon equation) を紹介する。以下、ある体 $\mathbb{k}$ 上のベクトル空間 V を固定し、線形写像やテンソル積等は全て $\mathbb{k}$ 上のものと仮定する。

定義 1 (Simplex equation). 自然数 n に対して、 n -simplex equation とは線形写像 $R: V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ に関する $V^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}$ 上の次の方程式のことをいう：

$$R_{a_1} R_{a_2} \cdots R_{a_{n+1}} = R_{a_{n+1}} \cdots R_{a_2} R_{a_1}.$$

ここに、各添字 $a_i = [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}]$ は多重指数で R がどの成分に作用するかを表し、次の行列 A_n により帰納的に与えられる：

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ \vdots & & & \\ n & & & \end{array} \right], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

但し、 $[k]_{i,j}$ で成分が全て k の $i \times j$ 行列を表す。

定義 2 (Polygon (odd-gon) equation). 自然数 n に対して、 $(2n+1)$ -gon equation (resp. その dual) とは線形写像 $T: V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ に関する $V^{\otimes \frac{n(n+1)}{2}}$ 上の次の方程式のことを

*¹e-mail: mateimihalache@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

*²e-mail: tomorou.mochida.r5@dc.tohoku.ac.jp

いう：

$$T_{b_1} T_{b_2} \cdots T_{b_{n+1}} = T_{c_n} T_{c_{n-1}} \cdots T_{c_1} \quad (\text{resp. } T_{b_{n+1}} T_{b_n} \cdots T_{b_1} = T_{c_1} T_{c_2} \cdots T_{c_n}).$$

ここに、各添字 $b_i = [b_{i,1}, \dots, b_{i,n}]$, $c_j = [c_{j,1}, \dots, c_{j,n}]$ はそれぞれ次の行列 B_{2n+1}, C_{2n+1} により与えられる：

$$B_{2n+1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A_n, \quad C_{2n+1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 2 & & & \\ \vdots & & & \\ n & & & \end{array} \right], \quad C_3 = [1].$$

3 主結果

定理 3. T を $(2n+1)$ -gon equation, S をその dual の解とし、次の交換条件を満たすとする：

$$T_{d_{n+1}} S_{e_n} \cdots T_{d_2} S_{e_1} T_{d_1} = S_{f_1} T_{g_1} S_{f_2} \cdots T_{g_n} S_{f_{n+1}}.$$

但し、

$$\begin{aligned} e_{i,j} &= i + (j-1)n, \quad g_{i,j} = j + (i-1)n \quad (1 \leq i, j \leq n), \\ D_{2n+1} &= \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & \\ 1+n & & & \\ \vdots & & & \\ 1+(n-1)n & & & \end{array} \right], \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \left([\tilde{D}_{2n+1}]_{i,j} \right) &= \begin{cases} n+i & \text{if } i \leq j, \\ n+i-1 & \text{if } j < i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1), \\ F_{2n+1} &= \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1+n & \cdots & 1+(n-1)n \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ \vdots & & & \\ n & & & \end{array} \right], \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} R_{2n} &= P_{1,2} P_{3,4} \cdots P_{2n-1,2n} T_{2,4,\dots,2n} S_{1,3,\dots,2n-1}, \\ R_{2n-1} &= P_{2,3} P_{4,5} \cdots P_{2n-2,2n-1} S_{1,2,4,\dots,2n-2} T_{1,3,5,\dots,2n-1} \end{aligned}$$

はそれぞれ $2n$ -simplex equation, $(2n-1)$ -simplex equation の解である。ここに、 $P: V \otimes V \ni x \otimes y \rightarrow y \otimes x \in V \otimes V$.

参考文献

- [1] A. Dimakis and I. G. Korepanov. “Grassmannian-parameterized solutions to direct-sum polygon and simplex equations”. In: *J. Math. Phys.* 62.5 (2021).
- [2] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen. “Simplex and polygon equations”. In: *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 11 (2015), pp. 042, 49.
- [3] R. M. Kashaev and S. M. Sergeev. “On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations”. In: *Comm. Math. Phys.* 195.2 (1998), pp. 309–319.

籐上のヤン・バクスター方程式とガーサイド理論 (1)

籐上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造圏・構造亜群

澁川 陽一 (北海道大学)*¹

Davide Ferri (University of Turin)

概 要

文献 [3] に従い, 籐上のヤン・バクスター方程式の (適切な性質をもつ) 解が定める構造圏のガーサイド理論的性質について報告する. 籐上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造亜群のガーサイド理論的性質についても合わせて報告する.

1 籐上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造圏

頂点集合 Λ を固定した籐 (クイバー) 全体は, ファイバー積に関してテンソル圏をなす. このテンソル圏におけるヤン・バクスター方程式 (ブレイド関係式)

$$(\sigma \otimes 1) \circ (1 \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes 1) = (1 \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes 1) \circ (1 \otimes \sigma)$$

の籐 $\mathcal{A}$ 上の解 $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ が次の 2 つの性質を満たすとする.

非退化 (nondegenerate) $\sigma(a, b) = (a \rightharpoonup b, a \leftharpoonup b) ((a, b) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ と書くとき, 写像

$$a \rightharpoonup - : t(a)\mathcal{A} \rightarrow s(a)\mathcal{A}, - \leftharpoonup b : \mathcal{A}_{s(b)} \rightarrow \mathcal{A}_{t(b)} \text{ が任意の } a, b \in \mathcal{A} \text{ に対し全単射.}$$

対合的 (involutive) $\sigma^2 = 1_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}}$.

ここで, $a \in \mathcal{A}$ に対し, その source を $s(a) \in \Lambda$, target を $t(a) \in \Lambda$ と書いた. また, ${}_{\lambda}\mathcal{A}$ は $s(a) = \lambda (\in \Lambda)$ となる $a \in \mathcal{A}$ 全体, $\mathcal{A}_{\lambda}$ は $t(a) = \lambda$ となる $a \in \mathcal{A}$ 全体を表す.

このような解 $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ に対し, $a \star b := (a \rightharpoonup -)^{-1}(b)$ とする ($b \in s(a)\mathcal{A}$).

定理 1. 構造圏 $\mathcal{C}(\sigma)$ を, 籐 $\mathcal{A}$ から定まる自由圏の剰余圏として

$$\mathcal{C}(\sigma) = \langle \mathcal{A} \mid \{x|y \sim (x \rightharpoonup y)|(x \leftharpoonup y) \mid (x, y) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}\} \rangle$$

と定めると, 次が成り立つ [3].

(1.1) 写像 $j : \mathcal{A} \ni a \mapsto [a] \in \mathcal{C}(\sigma)$ は埋め込み.

(1.2) $\mathcal{C}(\sigma) = \langle \mathcal{A} \mid \{x|(x \star y) \sim y|(y \star x) \mid x \neq y \in \mathcal{A}, s(x) = s(y)\} \rangle$.

(1.3) $\mathcal{C}(\sigma)$ は非自明な可逆元を持たない.

(1.4) $\mathcal{C}(\sigma)$ は左簡約的. すなわち, $fg = fg' \Rightarrow g = g'$.

*¹ 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学理学部数学

本研究は科研費 (課題番号:JP17K05187, JP23K03062) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 08A50, 16T25

キーワード: ヤン・バクスター方程式, 籐 (クイバー), ガーサイド理論

(1.5) $\mathcal{C}(\sigma)$ はガーサイド族 E をもつ (E は射の部分集合).

定理 1 より, $\mathcal{C}(\sigma)$ の射 f は, E-標準分解と呼ばれる次のような分解を一意的に持つ.

$$\begin{aligned} f &= f_1 f_2 \cdots f_p \quad (f_i \in E \setminus \mathbf{1}_{\mathcal{C}(\sigma)}), \\ s \preceq g f_i f_{i+1}, s \in E &\Rightarrow s \preceq g f_i \quad (\forall i = 1, 2, \dots, p-1). \end{aligned}$$

ただし, $x \preceq y$ ($x, y \in \mathcal{C}(\sigma)$) $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathcal{C}(\sigma); x x' = y$. また, 剰余圏 $\mathcal{C}(\sigma)$ の恒等射全体を $\mathbf{1}_{\mathcal{C}(\sigma)}$ と表す.

2 構造亜群

Λ 上の籓 $\mathcal{A}$ に対し, その反転籓を $\overline{\mathcal{A}}$ と書き, その射を表すのに $\bar{x}$ ($x \in \mathcal{A}$) という記号を用いる. さらに, double と呼ばれる Λ 上の籓 $D(\mathcal{A})$ を $D(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \sqcup \overline{\mathcal{A}}$ と定める. 籓 $\mathcal{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解 $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ から, その構造亜群 $\mathcal{G}(\sigma)$ を, 籓 $D(\mathcal{A})$ から定まる自由圏の剰余圏として

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\sigma) &= \langle D(\mathcal{A}) \mid \{x|y \sim (x \rightarrow y) \mid (x \leftarrow y) \mid (x, y) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}\} \cup \\ &\quad \cup \{x|\bar{x} \sim 1_{s(x)}, \bar{x}|x \sim 1_{t(x)} \mid x \in \mathcal{A}\} \rangle \end{aligned}$$

と定義する [1]. ただし 1_λ ($\lambda \in \Lambda$) は恒等射である.

この定義により構造亜群 $\mathcal{G}(\sigma)$ は亜群となっている.

定理 2. 解 σ が非退化かつ対合的である場合, 構造圏 $\mathcal{C}(\sigma)$ から構造亜群 $\mathcal{G}(\sigma)$ への injective な関手 $\iota : \mathcal{C}(\sigma) \rightarrow \mathcal{G}(\sigma)$ が存在し, 構造亜群 $\mathcal{G}(\sigma)$ の射は $\iota(\mathcal{C}(\sigma))$ の商として, $\iota(x)^{-1} \iota(y)$ ($x, y \in \mathcal{C}(\sigma)$) の形に表される. さらに, 構造亜群 $\mathcal{G}(\sigma)$ の $\iota(x) \iota(y)^{-1}$ の形に表される射 f は, 次のような対称的 E-標準分解を一意的に持つ [3].

$$\begin{aligned} f &= \bar{f}_q \bar{f}_{q-1} \cdots \bar{f}_1 g_1 g_2 \cdots g_p \quad (f_i, g_j \in E \setminus \mathbf{1}_{\mathcal{C}(\sigma)}), \\ s \preceq g f_i f_{i+1}, s \in E, g \in \mathcal{C}(\sigma) &\Rightarrow s \preceq g f_i \quad (\forall i = 1, 2, \dots, q-1), \\ s \preceq g g_i g_{i+1}, s \in E, g \in \mathcal{C}(\sigma) &\Rightarrow s \preceq g g_i \quad (\forall i = 1, 2, \dots, p-1), \\ h' \preceq h f_1, h' \preceq h g_1 \quad (h, h' \in \mathcal{C}(\sigma)) &\Rightarrow h' \preceq h. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Andruskiewitsch, N.: On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation. With an appendix by Mitsuhiro Takeuchi. Selecta Math. (N.S.) 11 (2005), no. 2, 203-246.
- [2] Dehornoy, P.; Digne, F.; Godelle, E.; Krammer, D.; Michel, J.: Foundations of Garside theory. EMS Tracts Math., 22, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [3] Ferri, D.; Shibukawa, Y.: Structure groupoids of quiver-theoretic Yang-Baxter maps. Preprint, 2025, arXiv:2503.10327.

澁川 陽一 (北海道大学)*¹

Davide Ferri (University of Turin)

文献 [2] に従い、簾の定める自由圏の剰余圏が適切な性質をもっている場合、この剰余圏から簾上のヤン・バクスター方程式の解が構成できることを報告する。

簾 $\mathcal{A}$ から定まる自由圏の剰余圏 $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A} \mid R \rangle$ に次の条件を仮定する (cf. [1, XIII.2.4]).

- (1.1) R の関係はすべて $a|v \sim b|w$ の形をしており ($a, b, v, w \in \mathcal{A}$), $\mathcal{A}$ の長さ 2 の道 $a|v$ は、関係 R に高々 1 回現れる.
- (1.2) $s(a) = s(b)$ である $a, b \in \mathcal{A}$ ($a \neq b$) に対し、 $a|v \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|v \in R$) となる $v, w \in \mathcal{A}$ がただ 1 つ存在する ($v = a \star' b, w = b \star' a$ と書く).
- (1.2)' $t(a) = t(b)$ である $a, b \in \mathcal{A}$ ($a \neq b$) に対し、 $v|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim v|a \in R$) となる $v, w \in \mathcal{A}$ がただ 1 つ存在する.
- (1.3) 各 $a \in \mathcal{A}$ に対し、次の条件を満たす $z_a \in t(a)\mathcal{A}$ がただ 1 つ存在する.
 - (a) 各 $v \in t(a)\mathcal{A} \setminus \{z_a\}$ に対し、 $a|v \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|v \in R$) となる $b \in s(a)\mathcal{A} \setminus \{a\}, w \in \mathcal{A}$ が存在する.
 - (b) ある $b, w \in \mathcal{A}$ に対し $a|z_a \sim b|w \in R$ (もしくは $b|w \sim a|z_a \in R$) ならば、 $b = a, w = z_a$.
- (1.3)' 各 $a \in \mathcal{A}$ に対し、次の条件を満たす $z^a \in \mathcal{A}_{s(a)}$ がただ 1 つ存在する.
 - (a) 各 $v \in \mathcal{A}_{s(a)} \setminus \{z^a\}$ に対し、 $v|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim v|a \in R$) となる $b \in \mathcal{A}_{t(a)} \setminus \{a\}, w \in \mathcal{A}$ が存在する.
 - (b) ある $b, w \in \mathcal{A}$ に対し $z^a|a \sim w|b \in R$ (もしくは $w|b \sim z^a|a \in R$) ならば、 $b = a, w = z^a$.
- (1.4) $a, b, c \in \mathcal{A}$ ($s(a) = s(b) = s(c), a \neq b, a \neq c, b \neq c$ (pairwise distinct)) に対し

$$(a \star' b) \star' (a \star' c) = (b \star' a) \star' (b \star' c).$$

このとき、各 $a \in \mathcal{A}$ に対して写像 $a \star_- : s(a)\mathcal{A} \ni b \mapsto a \star b \in t(a)\mathcal{A}$ を

$$b \neq a \text{ のとき } a \star b = a \star' b; b = a \text{ のとき } a \star b = z_a$$

*¹ 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学理学部数学

本研究は科研費 (課題番号:JP17K05187, JP23K03062) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 16T25

キーワード: ヤン・バクスター方程式, 簾 (クイバー), 圏の簾表示

と定義すると, 条件 (1.1), (1.3) より, この写像は全単射となる. さらに, $(a, b) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ に対し $(a \rightarrow b, a \leftarrow b) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ を

$$a \rightarrow b = (a \star _)^{-1}(b), a \leftarrow b = (a \rightarrow b) \star a$$

と定める.

定理 3. $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto (a \rightarrow b, a \leftarrow b) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ は籠 $\mathcal{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解で, 非退化かつ対合的となる [2].

2 定理 3 の証明

まず, σ がヤン・バクスター方程式の解となるための十分条件を $\star$ で表す.

命題 4. 次が成り立つとき, $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto (a \rightarrow b, a \leftarrow b) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ はヤン・バクスター方程式の解となる.

$$a, b, c \in \mathcal{A} \ (s(a) = s(b) = s(c)) \Rightarrow (a \star b) \star (a \star c) = (b \star a) \star (b \star c).$$

$\star$ の定義と条件 (1.4) より, $s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす pairwise distinct な $a, b, c \in \mathcal{A}$ について, 上の条件の成立がわかる. また, $a = b$ の場合は自明に成り立つ.

条件 (1.2) を用いると, $a \neq b \in \mathcal{A}$ に対し $t_{(a \star b)} \mathcal{A} = t_{(b \star a)} \mathcal{A}$ となる. 講演ではこれを用いることで, $a = c \neq b$ の場合, および $b = c \neq a$ の場合に, 命題 4 の条件が証明できることを説明する予定である.

3 例

3 つの頂点 $\{1, 2, 3\}$ を持つ籠 $\mathcal{A}$ の矢の集合を $\{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3\}$ とする. 剰余圏

$$\langle \mathcal{A} \mid \{(1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1), (2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2), (3 \rightarrow 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3)\} \rangle$$

は条件 (1.1) – (1.4) をすべて満たす (特に, 条件 (1.4) は自明に成り立つ). よって, この剰余圏から非退化かつ対合的な籠 $\mathcal{A}$ 上のヤン・バクスター方程式の解が構成できる.

参考文献

- [1] Dehornoy, P.; Digne, F.; Godelle, E.; Krammer, D.; Michel, J.: Foundations of Garside theory. EMS Tracts Math., 22, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [2] Ferri, D.; Shibukawa, Y.: Structure groupoids of quiver-theoretic Yang-Baxter maps. Preprint, 2025, arXiv:2503.10327.

Boundary Feller-Dynkin processes associated with Laguerre processes

河本陽介 (岡山大学)*¹

Alexander Bufetov (Steklov Math. Inst. RAS, St. Petersburg State Univ., CNRS Marseille)*²

1 背景

空間 W^N と, その間の Markov 核 $\Lambda_N^{N+1} : W^{N+1} \dashrightarrow W^N$ から成る射影系 $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ を考える. W^N 上の Markov 過程 $\mathbf{X}^N$ の族 $\{\mathbf{X}^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ がこの系に関して一貫的である, つまり, $\mathbf{X}^N$ の Markov 半群 T_t^N について, intertwining 関係式

$$T_t^{N+1} \Lambda_N^{N+1} = \Lambda_N^{N+1} T_t^N \quad (t \geq 0)$$

が任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して成り立つとする. このとき, $\{\mathbf{X}^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の極限過程を調べたい. Borodin-Olshanski は, 極限過程を射影系の境界 (射影極限) 上に構成する intertwining 法を確立し [2], Gelfand-Tsetlin グラフなど離散空間上の確率過程の族に適用した.

Assiotis は intertwining 法を次の連続空間に適用した [1]. W^N を N 次元 Weyl chamber の閉包とする. また, $\mathbf{x} \in W^{N+1}$ に対し, $W^{N,N+1}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in W^N; x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y_N \leq x_{N+1}\}$ 上の確率測度を

$$\Lambda_N^{N+1}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) := N! \cdot \frac{\Delta_N(\mathbf{y})}{\Delta_{N+1}(\mathbf{x})} \mathbf{1}_{W^{N,N+1}(\mathbf{x})}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

として Markov 核 Λ_N^{N+1} を定める ($\Delta_N(\mathbf{y}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j - y_i)$ は Vandermonde 行列式). Dyson Brown 運動など, ランダム行列に関係するいくつかの確率過程は, このようにして得られる射影系 $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ に関して一貫的であることが知られている. Assiotis は, この射影系に intertwining 法を用い, 対応する極限過程をある具体的な境界上に構成した.

一方, ランダム行列理論に現れる他の古典的な確率過程として, (パラメータを固定した) Laguerre 過程があるが, これは $\{W^N, \Lambda_N^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ に関して一貫性を持たない. そこで我々は以前, このような確率過程が intertwining 関係を持つような射影系を導入した. この系に関する極限過程の構成が今回の主題である.

*¹ 〒700-8530 岡山市北区津島中三丁目 1 番 1 号

e-mail: y-kawamoto@okayama-u.ac.jp

web: https://www.mtds.okayama-u.ac.jp/faculty_members/kawamoto/index.html

*² e-mail: bufetov@mi.ras.ru,

本研究は科研費 (課題番号: JP21K13812) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 60B20, 60J60

キーワード: the method of intertwiners, intertwining 関係式, ランダム行列, Laguerre 過程

2 主定理

α を非負整数とする. $W_{\geq}^N = W^N \cap [0, \infty)^N$ とし, Markov 核 $\Lambda_{\alpha,N}^N : W_{\geq}^N \dashrightarrow W_{\geq}^N$ を

$$\Lambda_{\alpha,N}^N(\mathbf{z}, d\mathbf{y}) = (\alpha + 1)_N \left(\prod_{k=1}^N \frac{y_k^\alpha}{z_k^{\alpha+1}} \right) \frac{\Delta_N(\mathbf{y})}{\Delta_N(\mathbf{z})} \mathbf{1}_{W_{\geq}^{N,N}(\mathbf{z})}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

で与える ($W_{\geq}^{N,N}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{y} \in W_{\geq}^N; 0 \leq y_1 \leq z_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N \leq z_N\}$ とおいた). さらに $\Lambda_{\alpha,N}^{N+1} := \Lambda_N^{N+1} \Lambda_{\alpha,N}^N$ とすると, これは Markov 核 $W_{\geq}^{N+1} \dashrightarrow W_{\geq}^N$ を与える. 射影系 $\{W_{\geq}^N, \Lambda_{\alpha,N}^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ の境界は $\Omega := \{(\boldsymbol{\alpha}, \gamma); \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \leq \gamma\}$ であり, $\Lambda_{\alpha,N+1}^\Omega \Lambda_{\alpha,N}^{N+1} = \Lambda_{\alpha,N}^\Omega$ を満たす Markov 核 $\Lambda_{\alpha,N}^\Omega : \Omega \dashrightarrow W_{\geq}^N$ が存在する.

定理 1. [4] Markov (Feller-Dynkin) 半群の族 $\{T_{\alpha,t}^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $\{W_{\geq}^N, \Lambda_{\alpha,N}^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ に関して一貫的であるとする. このとき, Ω 上の Markov (Feller-Dynkin) 半群 $T_{\alpha,t}^\Omega$ が一意に存在して以下を満たす.

$$T_{\alpha,t}^\Omega \Lambda_{\alpha,N}^\Omega = \Lambda_{\alpha,N}^\Omega T_{\alpha,t}^N$$

この定理により, 次の一貫的な確率過程の族に対応する極限過程が得られる.

- N 次元 α -Laguerre 過程は, 確率微分方程式

$$dX_t^i = \sqrt{2X_t^i} dB_t^i + \left(-X_t^i + \alpha + 1 + \sum_{j \neq i}^N \frac{2X_t^i}{X_t^i - X_t^j} \right) dt, \quad 1 \leq i \leq N$$

の解で与えられる (B^i 達は独立な Brown 運動). α -Laguerre 過程の族は射影系 $\{W_{\geq}^N, \Lambda_{\alpha,N}^{N+1}\}_{N \in \mathbb{N}}$ に対して一貫的である [3, 5].

- Laguerre 過程の一貫性を示した [3] の手法を用いると, 次で定まる N 次元確率過程の族の一貫性もわかる [4]: $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N$ に対し

$$dX_t^i = \sqrt{2X_t^i(1 + X_t^i)} dB_t^i + \left((2 - 2N - \mathfrak{s})X_t^i + (\alpha + 1) + \sum_{j \neq i}^N \frac{2X_t^i(1 + X_t^i)}{X_t^i - X_t^j} \right) dt.$$

参考文献

- [1] Assiotis, T.: Hua-Pickrell diffusions and Feller processes on the boundary of the graph of spectra, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **56**, No. 2, 1251–1283 (2020).
- [2] Borodin, A., Olshanski, G.: Markov processes on the path space of the Gelfand-Tsetlin graph and on its boundary, J. Funct. Anal. **263**, 248–303 (2012).
- [3] Bufetov, A. I., Kawamoto, Y.: The intertwining property for Laguerre processes with a fixed parameter, J. Stat. Phys. **192**, article number 58 (2025).
- [4] Bufetov, A. I., Kawamoto, Y.: Boundary Feller-Dynkin processes associated with Laguerre processes and Pickrell diffusions, preprint.
- [5] Kawamoto, Y., Shibukawa, G.: The intertwining property for β -Laguerre processes and integral operators for Jack polynomials, arXiv:2505.23139.

\$N = 1\$ 超対称 Virasoro 代数と自由 Fermion 代数の直和の \$q\$-変形における Kac 行列式

大久保勇輔 (摂南大学)*

[1] において, 量子トロイダル \$\mathfrak{gl}_2\$ 代数のある自由場表示から, \$N = 1\$ 超対称 Virasoro 代数 \$\mathcal{SVir}\$ と 1 成分の自由 Fermion 代数 \$\mathcal{F}\$ の直和 \$\mathcal{SVir} \oplus \mathcal{F}\$ の \$q\$-変形が現れることを発見した. これは, 量子トロイダル \$\mathfrak{gl}_1\$ 代数から \$q\$-変形 Virasoro 代数を得る方法と同じ手法を適用することで得ることができる. 得られる代数は次のようになる.

定義. \$q\$ と \$d\$ を, 任意の整数 \$n, m \in \mathbb{Z}\$ (\$n \neq 0\$ または \$m \neq 0\$) に対して \$q^n d^m \neq 1\$ を満たす複素パラメータとする. さらに

$$q_1 = q^{-1}d, \quad q_2 = q^2, \quad q_3 = q^{-1}d^{-1}$$

とおく. 次の関係式を満たす生成元 \$W_{i,\mu}\$ (\$\mu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\$, \$i = 1, 2\$) と \$\mathcal{T}_n\$ (\$n \in \mathbb{Z}\$) によって生成される代数を \$\mathcal{A}\$ とする. 関係式は母関数 \$W_i(z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} W_{i,\mu} z^{-\mu - \frac{1}{2}}\$, \$\mathcal{T}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_n z^{-n}\$ を用いて,

$$\begin{aligned} W_i(z)W_i(w) + W_i(w)W_i(z) &= qz^{-1}\delta\left(\frac{q_2w}{z}\right) + q^{-1}z^{-1}\delta\left(\frac{w}{q_2z}\right), \\ q_1 \cdot f\left(q_1; \frac{w}{z}\right) W_1(z)W_2(w) + f\left(q_1^{-1}; \frac{z}{w}\right) W_2(w)W_1(z) &= \delta\left(\frac{q_1w}{z}\right)w^{-1}\mathcal{T}(w), \\ g\left(\frac{w}{z}\right)\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w) - g\left(\frac{z}{w}\right)\mathcal{T}(w)\mathcal{T}(z) &= \mathcal{C} \cdot \left(\delta\left(\frac{w}{q_2z}\right) - \delta\left(\frac{q_2w}{z}\right)\right), \\ q_1 \cdot f\left(q_1; \frac{w}{z}\right) W_1(z)\mathcal{T}(w) - f\left(q_1^{-1}; \frac{z}{w}\right) \mathcal{T}(w)W_1(z) \\ &= q(q_1 - q_1^{-1})\delta\left(\frac{q_1w}{q_2z}\right)W_2(w), \\ q_1^{-1} \cdot f\left(q_1^{-1}; \frac{q_1w}{z}\right) W_2(z)\mathcal{T}(w) - f\left(q_1; \frac{z}{q_1w}\right) \mathcal{T}(w)W_2(z) \\ &= -q^{-1}(q_1 - q_1^{-1})\delta\left(\frac{q_2w}{z}\right)W_1(q_1w). \end{aligned}$$

と書ける. ここで,

$$\begin{aligned} \delta(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n, \quad f(\xi; z) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi^n - \frac{q_1^n + q_3^n}{(1 + q_2^{-n})} \right) \frac{z^n}{n} \right\}, \\ g(z) &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(1 - q_1^{2n})(1 - q_1^{-n}q_3^n)}{n(1 + q_2^{-n})} z^n \right), \quad \mathcal{C} = -\frac{(1 - q_1^2)(1 - q_1^{-1}q_3)}{1 - q_2^{-1}} \end{aligned}$$

とした.

* e-mail: yusuke.ohkubo.math@gmail.com

本研究は科研費 (課題番号:21K13803) の助成を受けたものである。

$\mathcal{T}(z)$ は [1] における $\mathcal{T}_{12}(q_1; z)$ であり, q -変形 Virasoro 代数と同じ関係式を満たしている. 代数 A の自由場表示からは, もう一つの可換な q -変形 Virasoro 代数を生成することもでき, それらの退化極限は, $\text{SVir} \oplus F$ に埋め込まれている非自明で可換な 2 つの Virasoro 代数に一致する. 本公演では, この代数 A の Kac 行列式についての予想を与える.

最高ウェイトベクトル $|h\rangle$ を

$$W_{i,\mu} |h\rangle = \mathcal{T}_n |h\rangle = 0 \quad (\mu, n > 0, i = 1, 2), \quad \mathcal{T}_0 |h\rangle = h |h\rangle$$

によって定め, $|h\rangle$ に代数 A を作用させて得られる最高ウェイト表現を考える. さらに,

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > 0, \quad \nu_1 > \nu_2 > \cdots > 0, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots > 0$$

を満たす半整数の有限列 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ と整数の有限列 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots)$ に対して

$$|h; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{n}\rangle = W_{1,-\mu_1} W_{1,-\mu_2} \cdots W_{2,-\mu_1} W_{2,-\mu_2} \cdots \mathcal{T}_{-n_1} \mathcal{T}_{-n_2} \cdots |h\rangle$$

とおく. 双対空間においても, 同様に $\langle h; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{n}|$ を定める. これを用いて, Kac 行列式を

$$\det K_N = \det \left(\langle h; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\nu}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(1)} | h; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\nu}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(2)} \rangle \right)_{|\boldsymbol{\mu}^{(1)}| + |\boldsymbol{\nu}^{(1)}| + |\boldsymbol{n}^{(1)}| = |\boldsymbol{\mu}^{(2)}| + |\boldsymbol{\nu}^{(2)}| + |\boldsymbol{n}^{(2)}| = N}$$

と定義する. ここで, $|\boldsymbol{\mu}| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots$ などとした.

予想. $N \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\det K_N = (\text{const.}) \times \prod_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ rs \leq N \\ r-s = \text{even}}} (h^2 - h_{r,s}^2)^{\tilde{P}(N - \frac{rs}{2})},$$

$$h_{r,s} = q_1^{\frac{r}{2}} q_3^{\frac{s}{2}} + q_1^{-\frac{r}{2}} q_3^{-\frac{s}{2}}$$

となる. ここで, $\tilde{P}(N)$ は

$$\sum_{N \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{P}(N) z^N = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - z^{k-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^k}$$

によって定まる整数とする.

参考文献

- [1] Y. Ohkubo, "Direct Sum Structure of the Super Virasoro Algebra and a Fermion Algebra Arising from the Quantum Toroidal $\mathfrak{gl}_2$," arXiv:2505.02926.

トールス上の量子化6頂点模型

井上 玲 (千葉大理)
 国場 敦夫 (東大総合文化)
 寺嶋 侑二 (東北大理)
 八木 絢彌 (清華大学)

量子化6頂点模型 (quantized 6-vertex model, q-6v 模型と略記する) は、6頂点模型の重みを q ワイル代数 $\mathcal{W}(q)$ の元を用いて非可換化した模型として [3] で導入された。2次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ と複素数パラメータ r, s, f, g に対し、作用素 $\mathcal{L}(r, s, f, g; q) \in \text{End}(V \otimes V) \otimes \mathcal{W}(q)$ によって以下のように定義される。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ i \text{---} \text{---} a \\ \downarrow \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 0 \text{---} \text{---} 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 1 \text{---} \text{---} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 1 \text{---} \text{---} 1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 0 \text{---} \text{---} 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 0 \text{---} \text{---} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 1 \text{---} \text{---} 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\
 \mathcal{L}_{ij}^{ab} & r & s & fe^u & ge^u & e^{-w} & rse^w + fge^{2u+w}
 \end{array}$$

辺上の $0, 1$ はそれぞれ v_0, v_1 を表し、 q ワイル代数の生成元 $e^{\pm u}, e^{\pm w}$ は q 交換関係 $e^u e^w = q e^w e^u$ を満たす。(もともとの) 6頂点模型の対称性が Yang-Baxter 方程式で表されるのに対し、q-6v 模型の対称性は四面体方程式で表される。その一つである $RLLL$ 関係式

$$R_{456} \mathcal{L}_{236} \mathcal{L}_{135} \mathcal{L}_{124} = \mathcal{L}_{124} \mathcal{L}_{135} \mathcal{L}_{236} R_{456} \quad (1)$$

は [3] で示された。ここで R 作用素 R_{ijk} は四面体方程式

$$R_{456} R_{236} R_{135} R_{124} = R_{124} R_{135} R_{236} R_{456}$$

の解である。[3] で漸化式を用いて構成された R 作用素は、[2] で量子クラスター代数の変異列から再構成され、量子ダイログ関数を用いて定式化された。

本講演の主題は、トールス上の向き付き配線図 G の各交点 (交点では必ず2本の線が交わるものとする) に作用素 $\mathcal{L}$ を配置して得られる G 上の q-6v 模型について、可換な作用素を構成することである [1]。異なる交点の q ワイル代数は可換とする。トールスの基本領域を固定してトールスのホモロジーサイクルに対応する2つのスペクトルパラメータ x, y を導入し、この配線図に対するモノドロミー行列 $\mathcal{T}(x, y)$ と、そのトレースである層転送行列 (layer transfer matrix) $T_G(x, y)$ を定義する。 $m \times n$ 正方格子の場合は図1から次のように定める。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(x, y)(v_i \otimes v_j) &= \sum_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^m, \mathbf{b} \in \{0,1\}^n} x^{|\mathbf{a}|} y^{|\mathbf{b}|} v_{\mathbf{a}} \otimes v_{\mathbf{b}} \otimes T_{ij}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}, \\
 T_G(x, y) &= \text{Tr}_{V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n}} (\mathcal{T}(x, y)) = \sum_{\mathbf{i} \in \{0,1\}^m, \mathbf{j} \in \{0,1\}^n} T_{ij}^{\mathbf{i}, \mathbf{j}} x^{|\mathbf{i}|} y^{|\mathbf{j}|}.
 \end{aligned}$$

ただし $|\mathbf{a}| = \sum_k a_k$ などとする。一般の配線図 G については、基本領域の境界における矢の出入りによって $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ の定義が少し異なる (ここでは割愛する)。配線図の線と基本領域の境界との交差数を N とする。以下がこの講演の主定理である。

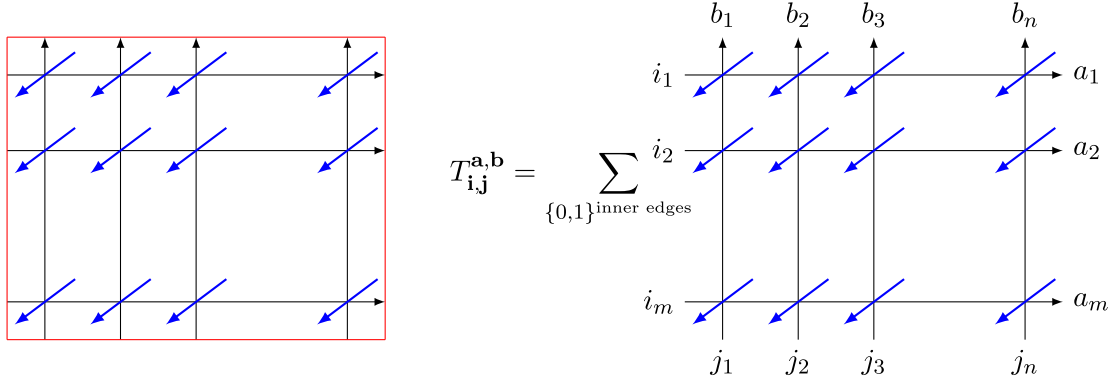


図 1. 正方格子上的量子化 6 頂点模型. (青矢印は q ワイル代数の無限次元表現に対応する. 赤枠はトーラス上の基本領域を表す.)

Theorem 1. 配線図 G が「admissible」というある条件を満たすとき, 任意の x, y, u, w について

$$R\left(\frac{xw}{yu}\right)\mathcal{T}(u, w)\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(x, y)\mathcal{T}(u, w)R\left(\frac{xw}{yu}\right) \quad (2)$$

が成り立つ. $R(z)$ は量子群 $U_{-q}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ に付随する量子 R 行列とゲージ同値で, 特に generic な z に対し $R(z)$ は可逆である. よって層転送行列は可換, つまり $[T_G(x, y), T_G(u, w)] = 0$ が成立する.

層転送行列 $T_G(x, y)$ は $\mathcal{W}(q)$ の元を係数にもつ x, y の 2 変数ローラン多項式となり, 係数たちが可換な作用素の族を成す. 1 次元周期格子上的 6 頂点模型では (1 種類の) Yang-Baxter 関係式から直ちに可換な転送行列が得られるのに対し, 配線図 G 上の q -6V 模型では作用素 $\mathcal{L}(r, s, f, g; q)$ の満たす 4 種類の四面体方程式と 2 種類の反転関係式を用いて層転送行列の可換性が示される. これらの関係式が整合的に使える条件を admissible とよんでいる. 層転送行列は基本領域の並進移動, およびトーラスへの $SL(2, \mathbb{Z})$ 作用に関して不変である. また $RLLL$ 関係式 (1) は admissible な配線図の Yang-Baxter 変換を与える.

配線図 G と $\mathcal{W}(q)$ のパラメータ q を様々にとることによっていろいろな模型が構成でき, Theorem 1 により可換な作用素が系統的に構成できる. 論文 [1] では, q -6v 模型から自由パラフェルミオン模型, 相対論的量子戸田格子などが得られている. q -6v 模型はダイマー模型として表すこともでき, 頂点模型, 量子クラスター代数, ダイマー模型の間のいろいろな関係が見える.

REFERENCES

- [1] R. Inoue, A. Kuniba, Y. Terashima, J. Yagi, *Quantized six-vertex model on a torus*, arXiv:2505.08924.
- [2] R. Inoue, A. Kuniba, X. Sun, Y. Terashima, J. Yagi, *Solutions of tetrahedron equation from quantum cluster algebra associated with symmetric butterfly quiver*, SIGMA **20**, 113, 45 pages (2024).
- [3] A. Kuniba, S. Matsuike, A. Yoneyama, *New solutions to the tetrahedron equation associated with quantized six-vertex models*, Commun. Math. Phys. Volume 401, 3247–3276 (2023).

超平面配置に対数的特異点をもつ Pfaff 系の変換

大島 利雄 (東大・名誉教授)*

1. 超平面配置 $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \ni H = \{f_H(x) = 0 \mid x \in V := \mathbb{C}^n\}$, $f_H(x)$ は $x = (x_1, \dots, x_n)$ の 1 次式

$$\mathcal{L} = L(\mathcal{A}) := \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \right\},$$

$$\mathcal{L}^{(k)} = L(\mathcal{A})^{(k)} := \{S \in L(\mathcal{A}) \mid \text{codim } S = k\}; \quad \mathcal{L}^{(0)} = V, \quad \mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{A}.$$

- $S, S' \in \mathcal{L}$ and $x \in V \setminus \{0\}$:

$$\mathcal{L}_{\subset S}^{(k)} := \{T \in \mathcal{L}^{(k)} \mid T \subset S\}, \quad \mathcal{L}_{\supset S}^{(k)} := \{T \in \mathcal{L}^{(k)} \mid T \supset S\}, \quad \mathcal{A}_S := \mathcal{L}_{\supset S}^{(1)},$$

$$S \perp S' \stackrel{\text{def}}{\iff} \#\mathcal{A}_{H \cap H'} = 2 \quad (\forall H \in S, \forall H' \in S'),$$

$$\langle x, S \rangle := \{tx + y \mid t \in \mathbb{C}, y \in S\}, \quad \mathcal{A}_x := \{H \in \mathcal{A} \mid \langle x, H \rangle = V\}, \quad \mathcal{A}_x^c := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x,$$

$$S : x\text{-closed} \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle x, S \rangle = S, \quad \mathcal{L} : x\text{-closed} \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle x, S \rangle \in \mathcal{L} \quad (\forall S \in \mathcal{L}),$$

$$\text{mc}_x \mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{\langle x, S \rangle \mid \text{codim } \langle x, S \rangle = 1, S \in \mathcal{L}^{(2)}\}.$$

2. Pfaff 系 $\mathcal{M} : du = \Omega u$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \Omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d \log f_H, \quad A_H \in M(N, \mathbb{C}), \quad \Omega \wedge \Omega = 0 \text{ (積分可能条件)}$$

定義 1 (一般留数行列). $A_S := \sum_{H \in \mathcal{A}_S} A_H \quad (S \in \mathcal{L})$

注意 1. $\Omega \wedge \Omega = 0 \iff [A_H, A_S] = 0 \quad (\mathcal{A} \ni \forall H \supset \forall S \in \mathcal{L}^{(2)})$

定理 1. $\Omega \wedge \Omega = 0 \implies [A_S, A_T] = 0 \quad (S, T \in \mathcal{L} \text{ with } S \subset T \text{ or } S \supset T \text{ or } S \perp T)$

例 1. braid 配置, Type $A_n : \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i = x_j\}$: KZ 型

2. Type $B_n : \{\{x_i = \pm x_j\}, \{x_k = 0\} \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n\}$

3. $\bigcup_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \{\{\sum_{i \in I} x_i = 0\}\}$: Level 1 の一般超幾何系 ([MO])

3. Pfaff 系の変換 $\Omega \mapsto ?$

1. **addition** $\text{Ad}(f_{H'}^\lambda) : u \mapsto f_{H'}^\lambda u, \quad \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \cup \{H'\}$

2. **座標変換, 制限** : $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2, \dots), \quad (c, x_2, x_3, \dots),$

$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \quad (\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots) \quad (\Leftarrow \text{非斉次 KZ}), \text{ etc.}$

3. **境界値** : $H \in \mathcal{A}$ 上の Pfaff 型への写像

$\forall S \in \mathcal{L}_{\subset H}^{(2)}$ が境界方程式が定義される空間 H の超平面となる.

4. **middle convolution** : $\text{mc}_{x, \mu} \mathcal{M} : d\bar{u} = \bar{\Omega} \bar{u}, \quad \bar{\Omega} = \sum_{H \in \text{mc}_x \mathcal{A}} \bar{A}_H d \log f_H$

$\mathcal{A}_x = \{H_1, \dots, H_p\}, \quad \mathcal{A}_x^c = \{H'_1, \dots, H'_q\}, \quad f_{H_i} = x - a_i(y) \quad ((x, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n)$

$\mathcal{A} : x\text{-closed}$ (としてよい), $\bar{A}_H \ (H \in \mathcal{A}_x)$ は [DR], $\bar{A}_{H'} \ (H' \in \mathcal{A}_x^c)$ は [Ha], $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$

$\tilde{u} := \left(\partial_x^{1-\mu} \frac{(\partial_x f_{H_i})^u}{f_{H_i}} \right)_{i=1, \dots, p}$ の満たす Pfaff 系 : $\tilde{\Omega} = \sum \tilde{A}_H d \log f_H, \quad \tilde{A}_H \in M(pN, \mathbb{C})$

* e-mail: oshima@ms.u-tokyo.ac.jp

$\bar{A}_H : \ker A_i$ ($i = 1, \dots, p$) と $\ker(\sum A_i + \mu)$ に同型な $\mathbb{C}^{pN}$ の $\forall \tilde{A}_H$ -不変部分空間が存在するので、それらの直和による商空間に $\tilde{A}_H$ が引き起こす線形変換の行列 $\bar{A}_H$ が定まる。

定義 2. 可換で対角化可能な正方行列 $B_1, \dots, B_r$ に対し、(同時) 固有値 $\lambda_{1,\nu}, \dots, \lambda_{r,\nu}$ とその重複度 m_ν のリストを $[B_1 : \dots : B_r] = \{[\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{r,1}]_{m_1}, \dots\}$ と表す。

定理 2. $\text{mc}_{x,\mu}$ は可換な留数行列 A_S の組の同時固有値分解の上記リストの変換を定める。

$$[\tilde{A}_S] = [A_S + \mu]_{\#(\mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_x)} + \sum_{\substack{\langle x, T \rangle = \langle x, S \rangle, S \neq T \\ T \in \mathcal{L}^{(\text{codim} \langle x, S \rangle + 1)}}} [A_T]_{\#(\mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_x) - 1} + [A_{\langle x, S \rangle}]_k$$

定義 3. $S \in \mathcal{L} : \text{split for } \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A_H A_{H'} = 0 \quad (\forall H, H' \in \mathcal{A}_S, H \neq H')$

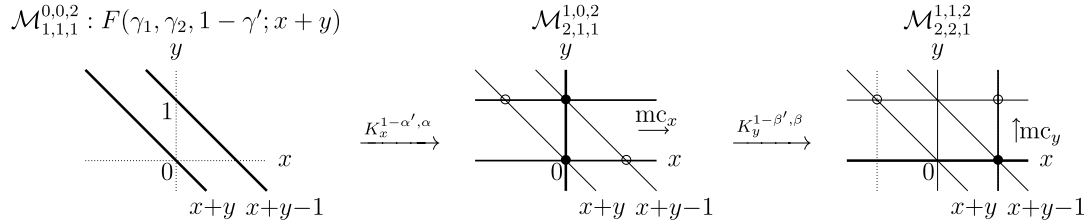
定理 3. i) $H, H' \in \mathcal{A}_x, A_H A_{H'} = 0 \Rightarrow \bar{A}_H \bar{A}_{H'} = 0$

ii) x -closed でない $S \in \mathcal{L}^{(2)}$ が $\mathcal{M}$ に対して split $\Rightarrow S$ は $\text{mc}_{x,\mu} \mathcal{M}$ に対しても split

iii) $H \in (\text{mc}_x \mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_x^c, A_H = 0$, さらに $\forall S \in \mathcal{L}_{CH}^{(2)}$ が $\mathcal{M}$ に対して split $\Rightarrow \bar{A}_H = 0$

例 4. $\mathcal{M}_{p',q',r'}^{p,q,r} : F_{p',q',r'}^{p,q,r} \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{smallmatrix}; x, y \right) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_n (\gamma)_{m+n}}{(1-\alpha')_m (1-\beta')_n (1-\gamma')_{m+n}} x^m y^n$
 $\alpha \in \mathbb{C}^p, \beta \in \mathbb{C}^q$ etc. $(\alpha')_1 = (\beta')_1 = 0, (1-\alpha)_m := (1-\alpha_1)_m \cdots (1-\alpha_p)_m$
 $L := r - r' = p' - p = q' - q$ (確定特異点型一般超幾何 [MO]) : $L = 0 \Rightarrow \text{KZ 型}$

特異集合 ($L = 1$), $K_x^{\mu,\lambda} := \text{Ad}(x^{-\mu}) \circ \text{mc}_{x,\mu-\lambda} \circ \text{Ad}(x^\lambda)$



注意 2. i) 任意の超平面配置に対し、それを含む超平面配置 $\mathcal{A}$ に対数特異点を持つ既約 Pfaff 系で、 A_H ($H \in \mathcal{A}$) がスカラー行列でないものが存在する。

ii) braid 配置や B_n 型超平面配置は、 x_i -closed ($\forall i$)

iii) $\mathcal{A} \supset \{\{x=0\}, \{y=0\}, \{x+y=0\}, \{x+y=1\}\}$ で、 x -closed, y -closed かつ $\#\mathcal{A} < \infty$ となる超平面配置 $\mathcal{A}$ は存在しない。

参考文献

[DR] Dettweiler, T. and Reiter, S., An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[Ha] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, Adv. Studies in Pure Math. **62** (2012), 109–136.

[MO] Heo-Matsubara, S-J. and Oshima, T., Generalized hypergeometric functions with several variables, Indag. Math. **36**(2) (2025), 507–566.

[Ok] Oshima, T., Middle convolution of KZ-type equations and single-elimination tournaments, ArXiv.2504.09003.

A degeneration of the generalized Zwegers' μ -function according to the Ramanujan difference equation

渋川 元樹 (北見工業大学・工)*¹

土見 怜史 (近畿大学・総合理工)*²

概要

Shibukawa-Tsuchimi [ST1] で導入した Zwegers μ 函数 [Z] の 1 パラメーター変形の退化極限に相当する little μ 函数を導入し, その諸公式を与える. 特に little μ 函数は Ramanujan 方程式の原点周りの形式解 (基本解) の q -Borel 変換と q -Laplace 変換の合成の像に一致する.

適当な複素数 $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, x$ について, q 超幾何函数を次で定める:

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r+1} x^n,$$

$${}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r} x^n.$$

ただし, $q = e^{2\pi i \tau}$, $i := \sqrt{-1}$, $\text{Im}(\tau) > 0$ かつ

$$(a_1, \dots, a_r)_n = (a_1, \dots, a_r; q)_n := (a_1; q)_n \cdots (a_r; q)_n \quad (n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}),$$

$$(x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j), \quad (x)_n = (x; q)_n := \frac{(x; q)_\infty}{(q^n x; q)_\infty}.$$

定義 1. (1) [ST1], [ST2] 複素数 α , $a = q^\alpha$, $x/a, y \in \mathbb{C}^\times \setminus q^\mathbb{Z}$ について, 一般化 μ 函数 $\hat{\mu}(x, y; a)$ を次で定める:

$$\hat{\mu}(x, y; a) := iq^{-\frac{1}{8}}(xy)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(ax)_\infty}{(x)_\infty \theta_q(-y)} {}_1\psi_2 \left(\begin{matrix} x \\ 0, ax \end{matrix}; q, \frac{q}{y} \right).$$

ただし,

$$\theta_q(-x) = (q, x, q/x)_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} x^n.$$

(2) 複素数 $x, y \in \mathbb{C}^\times \setminus q^\mathbb{Z}$ について, little μ 函数 $l\hat{\mu}(x, y)$ を次で定める:

$$l\hat{\mu}(x, y) := iq^{-\frac{1}{8}} \frac{1}{(x)_\infty \theta_q(-qy)} {}_1\psi_2 \left(\begin{matrix} x \\ 0, 0 \end{matrix}; q, \frac{1}{y} \right).$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 21K13808, 25KJ0371) の助成を受けたものである.
キーワード: Zwegers' μ -function, q -hypergeometric function, q -Borel transform, q -Laplace transform, connection formulas

*¹ 〒090-0015 北海道北見市公園町165 北見工業大学工学部

e-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

*² 〒657-8501 大阪府東大阪市小若江3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科

e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

定理 2.

$$l\hat{\mu}(x, y) = \lim_{a \rightarrow 0} (xy)^{-\frac{\alpha}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \hat{\mu}(x, qy; a).$$

Ramanujan 方程式:

$$[T_x^2 - T_x - qxy] f(x) = 0$$

の原点周りの形式解:

$$\tilde{f}_0(x) = {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0, 0 \\ - \end{matrix}; q, xy \right)$$

の q -Borel 変換, q -Laplace 変換 [RSZ] :

$$\mathcal{B}_q^+(f)(\xi) := \sum_{n \geq 0} a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n, \quad \mathcal{L}_q^+(f)(x, \lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n/x)}$$

の合成の像

$$f_0(x, \lambda) := \mathcal{L}_q^+ \circ \mathcal{B}_q^+ \left(\tilde{f}_0 \right) (x, \lambda).$$

に一致する.

定理 3.

$$f_0(x, -x/y) = iq^{\frac{1}{8}} l\hat{\mu}(x, y).$$

little μ 函数 $l\hat{\mu}(x, y)$ について次のような公式が成り立つ.

定理 4.

$$l\hat{\mu}(x, y) = l\hat{\mu}(qx, y) - xy l\hat{\mu}(x/q, y),$$

$$l\hat{\mu}(x, y) = l\hat{\mu}(qx, y/q) = l\hat{\mu}(y, x),$$

$$l\hat{\mu}(x, y) = iq^{-\frac{1}{8}} \frac{1}{(x)_\infty \theta_q(-qy)} {}_0\psi_2 \left(\begin{matrix} \\ q/x, 0 \end{matrix}; q, \frac{q^2 y}{x} \right),$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} (1 - y) l\hat{\mu}(x, y) = iq^{-\frac{1}{8}} \frac{1}{(q)_\infty \theta_q(-qx)} {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} \\ 0 \end{matrix}; q, q^2 x \right),$$

$$\begin{aligned} l\hat{\mu}(x, y) &= \frac{1}{c_1} \frac{\theta_q(-x/c_1) \theta_q(-1/c_1 y) \theta_q(-x/q^2 c_2 y) \theta_q(-q c_2)}{\theta_q(-x) \theta_q(-qy) \theta_q(-x/q^2 c_1 c_2 y) \theta_q(-c_1/c_2)} l\hat{\mu}(x/c_1, y c_1) \\ &\quad + \frac{1}{c_2} \frac{\theta_q(-x/c_2) \theta_q(-1/c_2 y) \theta_q(-x/q^2 c_1 y) \theta_q(-q c_1)}{\theta_q(-x) \theta_q(-qy) \theta_q(-x/q^2 c_2 c_1 y) \theta_q(-c_2/c_1)} l\hat{\mu}(x/c_2, y c_2) \\ &= l\hat{\mu}(x/c, yc) - \frac{iq^{-\frac{1}{8}} \theta_q(-c) \theta_q(-yc/x) (q)_\infty^2}{\theta_q(-xq) \theta_q(-yq) \theta_q(-c/x) \theta_q(-yc)} {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}; q, xyq \right). \end{aligned}$$

参考文献

- [RSZ] Ramis, J. P., Sauloy J. and Zhang C., *Local Analytic Classification of q -difference Equations*, Astérisque **355**, (2013).
- [ST1] Shibukawa, G. and Tsuchimi, S., *A generalization of Zwegers' μ -function according to the q -Hermite-Weber difference equation*, SIGMA, **19** (2023) 014 pp23.
- [ST2] Shibukawa, G. and Tsuchimi, S., *A generalization of Zwegers' multivariable μ -function*, pp18, arXiv:2503.11955.
- [Z] Zwegers S. P., *Mock theta functions*, Thesis, Universiteit Utrecht (2002).

Connection problems on q -Lommel functions

大山 陽介 (徳島大学大学院社会産業理工学研究部)¹

1. Lommel 函数 E. Lommel は k, μ を任意定数とする非斉次 Bessel 方程式

$$\nabla_\nu y = \left[\left(x \frac{d}{dx} - \nu \right) \left(x \frac{d}{dx} + \nu \right) + x^2 \right] y = kx^{\mu+1}, \quad (1)$$

を考察して

$$s_{\mu,\nu}(x) = \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} \cdot {}_1F_2 \left(1; \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}x^2 \right)$$

がその一つの解であることを示し, さらに無限遠での漸近展開

$$S_{\mu,\nu}(x) = x^{\mu-1} {}_3F_0 \left(1, \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2}; \left(\frac{2}{x} \right)^2 \right)$$

を用いて, 次の接続公式を得た (Watson の本を参照):

$$S_{\mu,\nu}(x) \sim s_{\mu,\nu}(x) + \frac{2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sin \nu \pi} \\ \times \left[\cos \frac{1}{2}(\mu - \nu)\pi \cdot J_{-\nu}(x) - \cos \frac{1}{2}(\mu + \nu)\pi \cdot J_\nu(x) \right].$$

以下ではこの Lommel 函数の q -類似を考察する。

2. 記号 q -階乗積 $(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j)$, $(a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$,
 $(a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = \prod_{j=1}^m (a_j; q)_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$ or $n = \infty$).

テータ函数は $\theta_q(x) := \theta(x) = (q, -x, -q/x; q)_\infty$. また, q -超幾何級数:

$${}_r\phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{1+s-r} x^n.$$

3. 第一 q -Lommel 函数

$q^\mu = q/a$ とする。第一 q -Bessel 方程式とその解は

$$\nabla_q^{(1)} y(x) = ay(q^2x) - (a+q)y(qx) + q(1-x)y(x) = 0,$$

$$y_1^{(1)}(x) = {}_2\phi_1(0, 0; a; q; x), \quad y_2^{(1)}(x) = x^\mu {}_2\phi_1(0, 0; q^2/a; q; x).$$

$b = q^\kappa$ として, 非斉次方程式 $\nabla_q^{(1)} y(x) = kx^\kappa$ の解空間は, q -擬定数 $c_j(xq) = c_j(x)$ ($j = 1, 2$) を用いて

$$y = c_1(x)y_1^{(1)} + c_2(x)y_2^{(1)} + \frac{k}{(b-1)(ab-q)} x^\kappa {}_3\phi_2(0, 0, q; ab, bq; q, x),$$

¹本研究は科研費 (課題番号:19K03566) の助成を受けたものである。また, Changgui ZHANG (Lille) との共同研究である

そこで次の関数を第一 q -Lommel 関数と呼ぶ：

$$s_{a,b}^{(1)}(x) = x^\kappa {}_3\phi_2(0, 0, q; ab, bq; q, x)$$

$q^\lambda = b/q$ とする。無限遠での形式解として

$$S_{a,b}^{(1)}(x) = x^\lambda {}_3\phi_0\left(q, \frac{q}{b}, \frac{q^2}{ab}; -; q, \frac{ab^2}{q^3x}\right)$$

を取ると $y = -\frac{k}{q}S^{(1)}(x)$ は非斉次方程式 $\nabla_q^{(1)}y(x) = kx^\kappa$ を満たす。

3. 接続問題 q^m -Borel 変換 $\mathcal{B}_{q^m}^+ : \mathbb{C}[[x]] \rightarrow \mathbb{C}[[\xi]]$ を次で定義する。defined by

$$\mathcal{B}_{q^m}^+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{mn(n-1)/2} \tau^n.$$

また、 p -Laplace 変換 $\mathcal{L}_{p,\lambda}^+$ を Jackson 積分で定める ($p = q^m$ で用いる)：

$$\mathcal{L}_{p,\lambda}^+(\varphi)(x) := \frac{1}{1-p} \int_0^{\lambda\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\theta_p(\tau/x)} \frac{d_p\tau}{\tau} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(p^n \lambda)}{\theta_p(p^n \lambda/x)}.$$

$y(x) = {}_3\phi_0(q, q/b, q^2/ab; -; q, x)$ に対して、 $v_0(\xi) = \mathcal{B}_{q^2}^+(y)(\xi)$ を取ると収束級数になり、 ${}_3\phi_2$ に関する Thomae の接続公式の極限をとれば

$$\begin{aligned} {}_3\phi_2\left(q, \frac{q}{b}, \frac{q^2}{ab}; 0, 0; q, x\right) &= -\frac{(q/b, q^2/ab; q)_\infty}{(q/ab, 1/b; q)_\infty} \frac{1}{x} {}_1\phi_2\left(\frac{q}{ab}, qb; q, \frac{qab^2}{x}\right) \\ &\quad + \frac{(q, q^2/ab; q)_\infty}{(b, q/a; q)_\infty} \frac{\theta(-qx/b)}{\theta(-x)} {}_0\phi_1\left(\frac{-}{a}; q, \frac{qa}{x}\right) \\ &\quad + \frac{(q, q/b; q)_\infty}{(a/q, ab/q; q)_\infty} \frac{\theta(-q^2/ax)}{\theta(-x)} {}_0\phi_1\left(\frac{-}{q^2/a}; q, \frac{q^3}{ax}\right). \end{aligned}$$

したがって発散級数 $y(x)$ の q -Stokes 問題は次のように解ける：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q^2,\lambda}^+ \circ \mathcal{B}_{q^2}^+(\tilde{S}_{a,b}^{(1)})(x) &= -\frac{1}{q^2x} \frac{\lambda}{qx} \frac{(q/b, q^2/ab; q)_\infty}{(q/ab, 1/b; q)_\infty} {}_2\phi_2\left(\frac{q}{qb}, 0; q, \frac{ab^2}{qx}\right) \\ &\quad + \frac{(q, q^2/ab; q)_\infty}{(b, q/a; q)_\infty} \frac{\theta(q\lambda/b)\theta_{q^2}(q^4x/\lambda b^2)}{\theta(\lambda)\theta_{q^2}(q^2x/\lambda)} {}_1\phi_1\left(\frac{0}{a}; q, \frac{ab}{qx}\right) \\ &\quad + \frac{(q, q/b; q)_\infty}{(a/q, ab/q; q)_\infty} \frac{\theta(q^2\lambda/ab)\theta_{q^2}(q^6x/\lambda a^2b^2)}{\theta(\lambda)\theta_{q^2}(q^2x/\lambda)} {}_1\phi_1\left(\frac{0}{q^2/a}; q, \frac{b}{x}\right). \end{aligned}$$

本質的に、この式が q -Lommel 関数の接続を与える。なお、斉次の場合の接続問題は C.Zhang(2003) によって解かれている。この予稿では第一 q -Bessel 方程式に限ったが、Borel 変換が異なるだけで第二、第三も同様にできる。 q -Bessel 以外の他の q -超幾何でも同様であるが、扱いが面倒になる。

■文献：

G. N. Watson; A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2ed, Cambridge, 1944; §10 · 7, 345–352.

C. Zhang; Sur les fonctions q -Bessel de Jackson, *J. Approx. Theory* **122** (2003), 208–223.

On q -middle convolution and generalized q -hypergeometric equation

新井 由美 (お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)

Middle convolution は Katz により導入され, Dettweiler と Reiter によりフックス型微分方程式に対して定式化された. 坂井・山口 [3] は middle convolution の q 類似として, q -convolution および q -middle convolution を導入した. 新井・竹村 [1] では q -convolution および q -middle convolution を具体的な q 差分方程式に適用し, Heine の q 超幾何方程式と変異版 q 超幾何方程式, またこれらの積分表示解を得た. これらの計算を行った際, 坂井・山口の q -convolution に改良の余地があることがわかり, 新井・竹村 [2] で q -convolution の再定式化を行った. この再定式化には, addition と q -middle convolution を繰り返し適用して次々と q 差分方程式を得る計算がしやすくなるという利点がある. [2] では, 再定式化された q -convolution および q -middle convolution を用いて [1] での計算を一部やり直すとともに, その結果に対してさらに addition と q -middle convolution を施して 3 階の一般化 q 超幾何方程式を導出し, 変異版 q 超幾何方程式を 3 階に拡張した. 本研究の目的は, q -convolution によって得た Heine の q 超幾何方程式に対して addition と q -middle convolution を繰り返し適用して n 階の一般化 q 超幾何方程式を得ることである.

関数 $y(x) = x^{\mu_0}(\alpha x; q)_\infty / (\beta x; q)_\infty$ ($\alpha \neq \beta$) が満たす q 差分方程式

$$\frac{y(qx) - y(x)}{-x} = \left[\frac{B_0}{x} + \frac{B_1}{x - 1/\alpha} \right] y(x), \quad B_0 = 1 - q^{\mu_0}, B_1 = q^{\mu_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

での行列の組 (B_0, B_1) に対して, 再定式化した q -convolution $c_{\lambda_0}^q$ を施すと 2×2 行列の組 $(G_0^{[2]}, G_1^{[2]})$ が得られる. それによる方程式

$$\frac{\tilde{Y}(qx) - \tilde{Y}(x)}{-x} = \left[\frac{G_0^{[2]}}{x} + \frac{G_1^{[2]}}{x - 1/\alpha} \right] \tilde{Y}(x), \quad \tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0(x) \\ \tilde{y}_1(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

は Heine の q 超幾何方程式に対応する. 組 $(G_0^{[2]}, G_1^{[2]})$ に対して addition add_{μ_1} を施し, さらに q -convolution $c_{\lambda_1}^q$ を行う. これにより 4×4 行列の組が得られるが, 商空間で適切な基底をとると 3×3 行列の組 $(\overline{G}_0^{[3]}, \overline{G}_1^{[3]})$ が得られる (q -middle convolution $mc_{\lambda_1}^q$). q 差分方程式

$$\frac{1}{-x} \begin{pmatrix} g_1^{[3]}(qx) - g_1^{[3]}(x) \\ g_2^{[3]}(qx) - g_2^{[3]}(x) \\ g_3^{[3]}(qx) - g_3^{[3]}(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\overline{G}_0^{[3]}}{x} + \frac{\overline{G}_1^{[3]}}{x - 1/\alpha} \right] \begin{pmatrix} g_1^{[3]}(x) \\ g_2^{[3]}(x) \\ g_3^{[3]}(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

から導出される単独 3 階 q 差分方程式は, すべての係数が x の 1 次式の一般化 q 超幾何方程式である. ここまでの計算の詳細については [2] を参照されたい. 行列の組 $(\overline{G}_0^{[3]}, \overline{G}_1^{[3]})$ に対してさらに addition と q -middle convolution を繰り返した結果が以下の Proposition 1 と Theorem 2 であり, これが本講演の主結果である.

Proposition 1 Heine の q 超幾何方程式 (1) での行列の組 $(G_0^{[2]}, G_1^{[2]})$ に対して $mc_{\lambda_m}^q \circ add_{\mu_m}$ を $m = 1$ から $m = n - 2$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$) まで順に施して得られる $n \times n$ 行列の組 $(\overline{G}_0^{[n]}, \overline{G}_1^{[n]})$ は次で与えられる：

$$\overline{G}_0^{[n]} = \begin{pmatrix} a_{11}^{[n]} & a_{12}^{[n]} & & & & \\ & a_{22}^{[n]} & a_{23}^{[n]} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & a_{n-1,n-1}^{[n]} & a_{n-1,n}^{[n]} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \overline{G}_1^{[n]} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ b_1^{[n]} & b_2^{[n]} & \dots & b_{n-1}^{[n]} & b_n^{[n]} \end{pmatrix}.$$

行列 $\overline{G}_0^{[n]}$ のすべての要素と $\overline{G}_1^{[n]}$ の $b_1^{[n]}$ は、関数 $y(x) = x^{\mu_0}(\alpha x; q)_{\infty}/(\beta x; q)_{\infty}$ に含まれる μ_0, α, β と、addition で使用される $\mu_1, \dots, \mu_{n-2}$ および q -convolution で使用される $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ を用いて明示的に書ける。 $\overline{G}_1^{[n]}$ の $b_2^{[n]}, \dots, b_n^{[n]}$ は漸化式で表される。

Theorem 2 q 差分方程式

$$-\frac{1}{x} \begin{pmatrix} g_1^{[n]}(qx) - g_1^{[n]}(x) \\ \vdots \\ g_n^{[n]}(qx) - g_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\overline{G}_0^{[n]}}{x} + \frac{\overline{G}_1^{[n]}}{x - 1/\alpha} \right] \begin{pmatrix} g_1^{[n]}(x) \\ \vdots \\ g_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

から導出される $g_1^{[n]}(x)$ に関する単独 n 階 q 差分方程式はすべての係数が x の 1 次式であり、これは一般化 q 超幾何方程式である。

方程式 (3) の各解は $n - 1$ 重の Jackson 積分で与えられ、特に $g_1^{[n]}(x)$ はある積分核 $K_{\lambda_i}(u, v)$ ($i = 0, \dots, n - 2$) と関数 $y(x) = x^{\mu_0}(\alpha x; q)_{\infty}/(\beta x; q)_{\infty}$ を用いて

$$\begin{aligned} g_1^{[n]}(x) &= \int_0^{\xi_{n-2}\infty} \frac{K_{\lambda_{n-2}}(x, s_{n-2})}{s_{n-2}} s_{n-2}^{\mu_{n-2}} \int_0^{\xi_{n-3}\infty} \frac{K_{\lambda_{n-3}}(s_{n-2}, s_{n-3})}{s_{n-3}} s_{n-3}^{\mu_{n-3}} \\ &\quad \dots \int_0^{\xi_1\infty} \frac{K_{\lambda_1}(s_2, s_1)}{s_1} s_1^{\mu_1} \int_0^{\xi_0\infty} \frac{K_{\lambda_0}(s_1, s_0)}{s_0} y(s_0) d_q s_0 d_q s_1 \dots d_q s_{n-3} d_q s_{n-2} \end{aligned}$$

と書ける。

参考文献

- [1] Y. Arai, K. Takemura, On q -middle convolution and q -hypergeometric equations, *SIGMA* **19** (2023), 037, 40 pages.
- [2] Y. Arai, K. Takemura, Reformulation of q -middle convolution and application, arXiv:2503.11214.
- [3] H. Sakai, M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Notices* **2017** (2017), 1975–2013.

Kajihara の q 超幾何関数 $\Phi_{1,1}^m, \Phi_{2,0}^m$ の線形関係式

藤井 大計 (神戸大学)*1

信川 喬彦 (皇學館大学)*2

本講演では, q 超幾何方程式の接続問題の研究 (cf. [1, 2, 3, 4, 8]) から得られた Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi_{1,1}^m, \Phi_{2,0}^m$ の線形関係式について述べる.

[8] において, Kajihara の q 超幾何関数 $W^{M,2}$ の満たす方程式 E_M およびその退化が導出された. この方程式は変異版 q 超幾何方程式 [4] の多変数拡張である. [3] において, 方程式 E_M の解の線形関係式が導出された. この関係式の適当な退化極限を取ることで, Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi_{1,1}^m, \Phi_{2,0}^m$ の線形関係式を与えることができる.

複素数 q を $0 < |q| < 1$ ととり固定する. Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi_{n,r}^m$ [5, 6, 7] は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,r}^m & \left(\begin{array}{c|c|c} \{a_i\}_{1 \leq i \leq m} & \{b_k\}_{1 \leq k \leq n} & \{c_s\}_{1 \leq s \leq r} \\ \{x_i\}_{1 \leq i \leq m} & \{d_k\}_{1 \leq k \leq n} & \{e_s\}_{1 \leq s \leq r} \end{array} \middle| u \right) \\ &= \sum_{l \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^m} u^{|l|} \frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{(a_j x_i / x_j)_{l_i}}{(q x_i / x_j)_{l_i}} \left(\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{(b_k x_i)_{l_i}}{(d_k x_i)_{l_i}} \right) \left(\prod_{s=1}^r \frac{(c_s)_{|l|}}{(e_s)_{|l|}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, $(x)_\infty = \prod_{k=0}^\infty (1 - xq^k)$, $(x)_n = (x)_\infty / (q^n x)_\infty$ である. Kajihara の q 超幾何級数は, Macdonald-Ruijsenaars 理論に背景を持つ多重 q 超幾何級数であり, 双対変換公式を持つ. この関数が満たす方程式について不明な点が多かったが, [8] において, $W^{M,2}$ が満たす方程式が与えられた. この方程式の接続問題を考えることは自然であり, 本講演の結果はこのような背景から得られたものである.

関数 F_0, F_∞ を

$$\begin{aligned} F_0 & \left(\begin{array}{c|c} \{a_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \\ \{b_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \end{array} \right) = \frac{q^{\alpha-1}}{a_1^\alpha} \frac{(q^\alpha b_1 / a_1, a_3 / b_1)_\infty}{(q^\alpha, q b_3 / a_1, q b_1 / a_1)_\infty} \prod_{i=4}^{M+2} \frac{(q a_i / a_1)_\infty}{(q b_i / b_1)_\infty} \\ & \quad \times \Phi_{1,1}^M \left(\begin{array}{c|c|c} \{a_i / b_i\}_{1 \leq i \leq n} & \{1 / b_3\} & \{q b_1 / a_1\} \\ \{a_i\}_{1 \leq i \leq n} & \{q / b_1\} & \{q^{\alpha+1} b_1 / a_1\} \end{array} \middle| a_3 / b_1 \right), \quad (2) \\ F_\infty & \left(\begin{array}{c|c} \{a_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \\ \{b_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \end{array} \right) = \frac{(q^{1-\alpha}, b_2 / b_1, q b_1 / b_2)_\infty}{(q b_1 / a_1, q b_2 / a_1, q b_1 / a_2, q b_2 / a_2)_\infty} \prod_{i=4}^{M+2} \frac{(q b_1 / b_i, q b_2 / b_i)_\infty}{(q b_1 / a_i, q b_2 / a_i)_\infty} \\ & \quad \times \Phi_{2,0}^M \left(\begin{array}{c|c|c} \{a_j / b_j\}_{3 \leq j \leq M+2} & \{a_1, a_2\} & \cdot \\ \{1 / b_i\}_{3 \leq i \leq M+2} & \{b_1, b_2\} & \cdot \end{array} \middle| q^{\alpha-1} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

とおく. ただし, $a_1 a_2 \cdots a_{M+2} = q^{\alpha+1} b_1 b_2 \cdots b_{M+2}$ とする.

*1 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科

e-mail: tfujii@math.kobe-u.ac.jp

*2 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704 皇學館大学教育学部

e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

キーワード: q 超幾何級数, q 差分方程式, 接続問題

Theorem 1. 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{M+2} \check{D}_k F_0 \left(\begin{matrix} a_k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \end{matrix} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & F_0 \left(\begin{matrix} a_p, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \end{matrix} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq M+2 \\ k \neq p}} \check{L}_{k,p} \times F_\infty \left(\begin{matrix} a_r, a_k, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1 \leq i \leq M+2} \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $\theta(x) = (x)_\infty (q/x)_\infty$ であり,

$$\check{D}_k = a_k^{\alpha+1} \prod_{i=1}^{M+2} \theta(a_k/b_i) \prod_{\substack{1 \leq i \leq M+2 \\ i \neq k}} \theta(a_k/a_i)^{-1}, \quad (6)$$

$$\check{L}_{k,p} = \frac{1}{qb_k} \left(\frac{q}{a_p} \right)^\alpha \frac{\theta(q^{\alpha+1} b_k/a_p)}{\theta(q^\alpha)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq M+2 \\ j \neq p}} \theta \left(\frac{a_j}{b_k} \right) \prod_{\substack{1 \leq j \leq M+2 \\ j \neq k}} \theta \left(\frac{b_j}{b_k} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Remark 2. $M = 1$ の場合は, 2 次の変異版 q 超幾何方程式の解の接続公式を与える. これは, balanced q 超幾何級数 ${}_3\phi_2$ の 3 項間関係式と等価である.

参考文献

- [1] Y. Arai, K. Takemura, On q -middle convolution and q -hypergeometric equations, SIGMA **19**, 061, 40 pages (2023).
- [2] T. Fujii, T. Nobukawa, Hypergeometric solutions for variants of q -hypergeometric equation, arXiv:2207.12777.
- [3] T. Fujii, T. Nobukawa, Connection formula for the Jackson integral of Riemann-Papperitz type. arXiv:2404.00969.
- [4] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q -hypergeometric equation, Funk. Ekvac. **65**, 187-211 (2022).
- [5] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, Adv. Math. **187**, no. 1, 53-97 (2004).
- [6] Y. Kajihara, A unified approach to transformations for multiple basic hypergeometric series of type A , in: Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations - RIMS 2015, in: Adv. Stud. Pure Math. **76**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 247-274 (2018).
- [7] Y. Kajihara, M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series : An approach from the Cauchy determinant. Indag. Math. **14**, 395-421 (2003).
- [8] T. Nobukawa, Jackson integral representation for Kajihara's q -hypergeometric series and an extension of the q -Riemann-Papperitz system, arXiv:2402.14358.

Exact calculation of degrees for lattice equations

間瀬 崇史 (東京大学大学院数理科学研究科)*

1 はじめに

まず, 差分方程式の次数増大に関する基本的な知識を復習する. なお, 本稿は主にプレプリント [10] に基づいている. [10] で導入された新しい概念や用語の大半には日本語訳がまだない. いくつかの語には日本語訳をつけたが, 多くの用語は英語のまま用いる.

1.1 差分方程式の次数増大

差分方程式の次数増大とは, 方程式の各項を初期値の有理関数として書いた際の, 次数の増大度のことである. 次数増大による離散系の可積分性判定は, 精度が非常に良いことが経験的に知られている.

例 1.1. 方程式

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 1}{x_{n-2}}$$

を考える. x_0, x_1 を初期値と思うと, 各 x_n は初期値の有理関数として書ける. 例えば

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{x_0}, \quad x_3 = \frac{(x_1^2 + 1)^2 + x_0^2}{x_0^2 x_1}, \quad x_4 = \frac{(x_1^2 + 1)^3 + 2x_0^2(x_1^2 + 1) + x_0^4}{x_0^3 x_1^2}$$

である. 有理関数の次数を, (共通因子を約分した後の) 分子・分母の次数のうち大きいほうとして定義する. 今回は, 分子の次数が常に分母より 1 だけ大きくなるので, 次数は

$$\deg x_2 = 2, \quad \deg x_3 = 4, \quad \deg x_4 = 6$$

であり, $n \geq 2$ に対して $\deg x_n = 2(n-1)$ となる. 方程式の代数的エントロピー [1] は

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\deg x_n) = 0$$

となる. 代数的エントロピーが 0 になる (次数増大が高々多項式的になる) ため, 次数増大による判定では, この方程式は可積分と判定される. 実際, この方程式は保存量 $H = \frac{x_{n+1}^2 + x_n^2 + 1}{x_{n+1} x_n}$ を用いて線形化できるため, 可積分であると考えるのが自然である.

この例は, Laurent 現象 (各項の分母が単項式になる性質 [2]) のおかげで, 厳密な次数の計算が容易である. しかし, 次数増大の計算は難しく, 一般的手法は知られていない.

例 1.2 (広田の離散 KdV 方程式 [7]). $\lambda \neq 0$ を定数として, 格子方程式 (偏差分方程式)

$$x_{n,m} = x_{n-1,m-1} + \frac{1}{x_{n,m-1}} - \frac{\lambda}{x_{n-1,m}}$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科
本研究は科研費 (課題番号: 23K12996) の助成を受けたものである.

を考える. この方程式は $\lambda = 1$ のとき可積分, $\lambda \neq 1$ のとき非可積分になる. $n = 0$ と $m = 0$ の部分を初期値とみなして, 第 1 象限における $x_{n,m}$ の次数を計算すると

●	13	37	61	85	109	133	●	13	61	193	494	1097	2197
●	11	31	51	71	91	109	●	11	46	130	299	601	1097
●	9	25	41	57	71	85	●	9	33	82	167	299	494
●	7	19	31	41	51	61	●	7	22	47	82	130	193
●	5	13	19	25	31	37	●	5	13	22	33	46	61
●	3	5	7	9	11	13	●	3	5	7	9	11	13
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
$\lambda = 1$ (可積分)							$\lambda = 2$ (非可積分)						

となる. $\lambda = 1$ (可積分) のとき $\deg x_{n,m} = 4nm - 2\max(n, m) + 1$ であり [11], 2 次関数的増大である. $\lambda = 2$ (非可積分) のとき $\deg x_{n,n} \propto 4^n$ であり, 指数関数的増大である.

1.2 Total degree と Individual degree

格子方程式の次数増大は, 初期値問題 (領域) の選び方に大きく依存する [6]. 格子方程式の可積分性判定として次数増大を用いる際に重要なのは, 病的な領域を考えないことと, 次数として total degree ではなく individual degree を用いることである.

定義 1.3. *Total degree* とは, すべての初期値が次数 1 だと考えたときの次数である. *Individual degree* とは, 任意に固定した 1 つの初期値についての次数である.

1.3 特異点閉じ込め

特異点閉じ込めは, 離散系の可積分性判定法として歴史上最最初に提唱された [3]. 現代では, 特異点閉じ込めによる可積分性判定は精度があまり良くないことが知られている [5].

例 1.4. k を 2 以上の偶数として, 次の方程式を考える:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{1}{x_n^k}.$$

α を一般的なパラメータとして, 自由度 1 の初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, 0)$ を考える. ここから方程式を発展させると $(x_n, x_{n+1}) = (0, \infty)$ となり, α の情報が失われる結果, 自由度が下がる. すなわち, 方程式は特異点に突入したとみなす. この先を計算するため, 無限小パラメータ ε を導入して, 初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, \varepsilon)$ から計算を始める. すると

$$x_{n+1} = \varepsilon^{-k} + o(\varepsilon^{-k}), \quad x_{n+2} = -\varepsilon + o(\varepsilon), \quad x_{n+3} = \alpha + o(1)$$

となり, 初期値 α の情報が復活する. 特に $(x_{n+2}, x_{n+3}) \Big|_{\varepsilon=0} = (0, \alpha)$ の自由度が 1 に戻る. よって, 方程式のこの特異点は閉じ込められる. 特異点パターンとは, 特異点の値と重複度を並べたものであり, 今回は $(0, \infty^k, 0)$ である.

また, 初期値 $(x_{n-1}, x_n) = (\alpha, \infty)$ から始めると, 周期 2 のパターン $(\infty, \text{reg}, \infty, \text{reg}, \dots)$ が得られる (reg は α に依存する量で, 逆方向にも ∞ が周期 2 で出現). α の情報が失われないので厳密には特異点ではないが, Halburd の手法でこのパターンは重要になる.

1.4 Halburd の手法

Halburd の手法は、特異点パターンから次数を直接計算する手法である [4]. ここでは、上で計算した特異点閉じ込めの情報を用いて、方程式の次数を計算していく.

例 1.5. 例 1.4 と同じ方程式を考える. 初期値を $x_0 = u$ (一般的な複素数値), $x_1 = z$ (変数) と取り, x_n を z の 1 変数有理関数と考え, その次数 $\deg_z x_n(z)$ を計算する.

1 変数有理関数 $x_n(z)$ の, 値 0 と ∞ の逆像の個数をそれぞれ $d_n(0)$, $d_n(\infty)$ とする:

$$d_n(0) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) = 0\}, \quad d_n(\infty) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) = \infty\}.$$

ただし, 本稿において, 逆像の個数は常に重複度を込めて数えると約束する. 代数閉体上の 1 変数有理関数の次数は, どの値に対しても $\mathbb{P}^1$ 上での逆像の個数と等しい. すなわち

$$d_n(0) = d_n(\infty) = \deg_z x_n(z).$$

が成立する. これを用いて次数を計算するため, $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して, いつ $x_n(z^*) = 0, \infty$ になるか調べる. 例 1.4 の計算より, 方程式は次のようなパターンを持つ:

- $(0, \infty^k, 0)$. (閉じ込められる特異点パターン)
- $(\infty, \text{reg}, \infty, \text{reg}, \dots)$. (周期 2)

よって, もし「 $x_n(z^*)$ が spontaneous に 0 になった」とすると,^{*1} 上の特異点パターンから $x_n(z^*) = 0, \quad x_{n+1}(z^*) = \infty^k, \quad x_{n+2}(z^*) = 0, \quad x_m(z^*) \neq 0, \infty \quad (m \neq n, n+1, n+2)$ となるはずである.^{*2} また, $z^* = \infty$ の場合は, 周期 2 のパターンに従って

$$x_m(z^*) = \infty \quad (m \text{ が奇数}), \quad x_m(z^*) \neq 0, \infty \quad (m \text{ が偶数})$$

となる. 実際, $x_n(z^*)$ が 0 や ∞ になる可能性は, これらで尽くされている.^{*3}

ここまでの情報を用いて, 次数 $\deg_z x_n(z)$ を計算する. 逆像の個数を数えるため,

$$Z_n = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_n(z^*) \text{ が spontaneous に 0 になる } \}$$

とおく.^{*4} すると, 0 と ∞ の逆像の個数を数えることで, $n \geq 0$ に対して次数は

$$\begin{aligned} \deg_z x_n(z) &= d_n(0) = Z_n + Z_{n-2}, \\ &= d_n(\infty) = kZ_{n-1} + \frac{1 - (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

と書ける. このように次数を表示した式を, *degree relation* と呼ぶ. ここで, 各項の対応は

^{*1} 「 $x_n(z^*)$ が spontaneous に 0 になる」の定義は, 本稿では与えない.

^{*2} この主張自体は正しいが, 特異点閉じ込めの計算からこれを厳密に示すことは容易ではない.

^{*3} この主張自体も正しいが, 特異点閉じ込めの計算からこれを厳密に示すことは容易ではない.

^{*4} 次数を計算するにあたって重要なのは, 「spontaneous に 0 になること」の具体的な定義ではなく, Z_n が厳密に定義できるという事実である. Z_n の厳密な定義は Halburd の手法の厳密性についての問題点のひとつであり, 本稿では厳密な定義を与えることはしない. なお, 格子方程式の場合に Z_n に相当するものが厳密に定義できるということは, 本稿の主結果である定理 4.4 の主張のひとつである.

- Z_{n-2} : 特異点パターン ($x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = \infty^k$, $x_n = 0$),
- Z_{n-1} : 特異点パターン ($x_{n-1} = 0$, $x_n = \infty^k$, $x_{n+1} = 0$),
- Z_n : 特異点パターン ($x_n = 0$, $x_{n+1} = \infty^k$, $x_{n+2} = 0$),
- $\frac{1-(-1)^n}{2}$: 周期 2 のパターン ($x_0 = u$, $x_1 = \infty$, $x_2 = \text{reg}$, $x_3 = \infty, \dots$)

となっている. Degree relation の右辺が等しいため, 連立して, 線形な発展方程式

$$Z_n + Z_{n-2} = kZ_{n-1} + \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

を得る. $x_0(z) = u$, $x_1(z) = z$ より $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ なので, 上の式は Z_n について解ける. そして, Z_n がわかれば次数も求まる. 実際に計算を行うと, 次数増大は次のようになる:

$$\deg_z x_n(z) \sim \begin{cases} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)^n & (k \geq 4) \\ n^2 & (k = 2). \end{cases}$$

2 格子方程式の次数の計算

この章では, Halburd の手法を格子方程式に拡張して, 格子方程式の次数をどう計算するのか, 例を用いて解説する. ただし, 厳密性の担保はこの章では行わない. 章の最後に, 厳密性を保証するためにどのような問題を解決しなければならないのかを議論する.

2.1 例: 特異点閉じ込めを通過する非可積分格子方程式の次数の計算

k を 2 以上の偶数として, 次の方程式を考える:

$$x_{t,n} = -x_{t-1,n-1} + \frac{a}{x_{t-1,n}^k} + \frac{b}{x_{t,n-1}^k}.$$

この方程式は, 特異点閉じ込めを通過する非可積分な格子方程式の最初の例であり [8],

$$\begin{bmatrix} x_{t,n+1} = \infty^k & x_{t+1,n+1} = 0 \\ x_{t,n} = 0 & x_{t+1,n} = \infty^k \end{bmatrix} \text{ という閉じ込められる特異点を持つ. その意味は,}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & & & & & \\ x_{t-1,n+2} & & & & & & \\ x_{t-1,n+1} & & & & & & \\ x_{t-1,n} & x_{t,n} = \varepsilon & & & & & \\ & x_{t,n-1} & x_{t+1,n-1} & x_{t+2,n-1} & \cdots & & \end{array}$$

という初期値から始めて $\varepsilon \rightarrow 0$ とした際,

$$\begin{array}{cccc} x_{t-1,n+2} & \text{reg} & \text{reg} & \text{reg} \\ x_{t-1,n+1} & \infty^k & 0 & \text{reg} \\ x_{t-1,n} & 0 & \infty^k & \text{reg} \\ & x_{t,n-1} & x_{t+1,n-1} & x_{t+2,n-1} \end{array}$$

というパターンが得られるという意味である. ただし, 「reg」は ε 以外の初期値に依存する何らかの有限値という意味である. また, ここに書かれていない右上の部分については計算する必要はない (この先で何が起こるのかは気にしない) とする.

なお、格子方程式の自由度は非常に大きく、特異点閉じ込めの定義も定まっていない。実際、離散 KdV 方程式などの初等的な方程式であっても、非常に複雑なパターンが出現するという報告がある [12, 13]。本稿での特異点閉じ込めの定義では、余次元 1 の初期条件のみを考えるため、そのような複雑なパターンは出現しない。

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & & & & & \ddots \\ x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} & & & \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} & & & \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} & & & \\ x_{00} & z & x_{20} & x_{30} & \cdots & & \end{array}$$

と固定し, z についての individual degree を計算する. 常差分のときと同様, z 以外の初期値に一般的な $\mathbb{C}$ 値を代入すると, 各項は z に関する 1 変数有理関数になる: $x_{t,n} = x_{t,n}(z)$.

$$d_{t,n}(0) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_{t,n}(z^*) = 0\}, \quad d_{t,n}(\infty) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_{t,n}(z^*) = \infty\}.$$

常差分のときと同様, 重要なのは, $x_{t,n}(z)$ の次数が

と 2 通りの方法で表されることである. さまざまな値 $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を z に代入した際, $x_{t,n}(z^*)$ がいつ 0 や ∞ になるのかを, 特異点閉じ込めの情報を用いて特定していく.

1. $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になると, 特異点閉じ込めと対応するパターンが出現:

2. $z^* = 0$ の場合, 閉じ込められないパターンが出現:

このパターンは場所が固定されている。上のパターンとの違いは、初期値 x_{02} が $z = 0$ の影響を受けない点にある。ここが ∞^k にならないせいで、 x_{21} が 0 にならず、 x_{22} が有限値にならない。

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \vdots & & & & & & \\ x_{03} & & & & & & \\ x_{02} & & & & & & \\ x_{01} & & & & & & \\ x_{00} & z = \infty & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{array} \right]$$

$x_{t,n}(z^*)$ が 0 や ∞ になる可能性がこれらのケースで尽くされていることを認めて

$$Z_{t,n} := (\# \text{ of "spontaneous occurrences of } x_{t,n}(z) = 0")$$

とおくと, 次のような degree relation が導出できる ($t, n \geq 0$):

$$\begin{aligned} \deg_z x_{t,n}(z) &= d_{t,n}(0) = Z_{t,n} + Z_{t-1,n-1} + \delta_{n,0}^{t,1} \\ &= d_{t,n}(\infty) = kZ_{t-1,n} + kZ_{t,n-1} + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}). \end{aligned}$$

ここで δ は Kronecker デルタであり, 各項の対応は以下のようにになっている:

- 項 $Z_{s,m}$ は, パターン $\begin{bmatrix} \infty^k & 0 \\ x_{s,m} = 0 & \infty^k \end{bmatrix}$ における 0 や ∞ に対応する.
- 項 $\delta_{n,0}^{t,1}$ は, パターン $z^* = 0$ における値 0 に対応する.
- 項 $\delta_{t-1,n}$ は, パターン $z^* = 0$ における値 ∞ に対応する.
- 項 $k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0})$ は, パターン $z^* = \infty$ における値 ∞ に対応する.

この degree relation の右辺 2 つを連立することで, $Z_{t,n}$ についての線形発展方程式

$$\begin{aligned} Z_{t,n} &= kZ_{t-1,n} + kZ_{t,n-1} - Z_{t-1,n-1} - \delta_{n,0}^{t,1} + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}), \\ Z_{t_0,n_0} &= 0 \quad (t_0 = 0 \text{ or } n_0 = 0) \end{aligned}$$

が得られる. 2 つめの式は, $t = 0$ や $n = 0$ の部分で $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になることができない (閉じ込められるパターンが始まらない) という事実に対応している. この式から, $t, n \rightarrow +\infty$ としたときに $Z_{t,n}$ が指数関数的に増大するということがわかり, 結局, この方程式の次数は指数増大であることが従う.

例として $k = 2$ の場合に $Z_{t,n}$ と $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算すると, 以下のようになる:

$Z_{t,n}:$	0	128	1536	10816	58336	266592	1086392	4067660
	0	64	672	4208	20456	85188	319198	1107036
	0	32	288	1576	6808	25542	87181	277910
	0	16	120	560	2108	7016	21556	62552
	0	8	48	184	585	1692	4608	12024
	0	4	18	52	134	328	776	1792
	0	2	5	10	20	40	80	160
	0	0	0	0	0	0	0	0
$\deg_z x_{t,n}(z):$	0	128	1600	11488	62544	287048	1171580	4386858
	0	64	704	4496	22032	91996	344740	1194217
	0	32	304	1696	7368	27650	94197	299466
	0	16	128	608	2292	7601	23248	67160
	0	8	52	202	637	1826	4936	12800
	0	4	20	57	144	348	816	1872
	0	2	5	10	20	40	80	160
	0	1	0	0	0	0	0	0

2.2 厳密性を保証するために解決すべき問題

§2.1 で見た計算例では、いくつかの場所で数学的に厳密な議論を行っていない。^{*5} この計算手法を厳密なものとするためには、以下の問題点を解決しなければならない。

1. $x_{t,n}(z^*)$ が値 0 や ∞ を取る可能性が、上で見た 3 通り以外に存在しないことを、どのようにして厳密に示すか？
2. 「 $x_{t,n}(z)$ が spontaneous に 0 になる」の厳密な定義は何か？
3. $x_{t,n}(z^*)$ が spontaneous に 0 になったとき、パターン $\begin{bmatrix} x_{t,n+1} = \infty^k & x_{t+1,n+1} = 0 \\ x_{t,n} = 0 & x_{t+1,n} = \infty^k \end{bmatrix}$ が必ず出現することを、どうやって厳密に示すか？
4. Degree relation が、 $Z_{t,n}$ についての線形方程式系として解けるための条件は何か？
5. そもそも、格子方程式において特異点の定義は何か？

例えば [12, 13] で格子方程式の特異点パターンとして非常に複雑なものが報告されているが、今の設定でそのようなものが出現しないことを、どう厳密に示すか？

本稿では、これらの問題を解決することで、格子方程式の厳密な次数計算手法を与える。

3 Constant singularity

簡単のため、本稿では quad equation という形の方程式のみを扱う。Quad equation とは、文字 B, C, D についての有理関数 $\Phi = \Phi(B, C, D) \in \mathbb{C}(B, C, D)$ を用いて

$$x_{t,n} = \Phi(x_{t-1,n}, x_{t,n-1}, x_{t-1,n-1})$$

と定義されるような格子方程式である。^{*6} 方程式を考える領域 $H \subset \mathbb{Z}^2$ は、病的ではなく、どの点の値も初期値から有限回の計算によって求められるという条件を満たすならば何でもよい。^{*7} 領域 H を指定すると、初期境界 (初期値を与えなければならない部分) が

$$H_0 = \{(t, n) \in H \mid (t-1, n-1) \notin H\}$$

と定まり、すべての (t, n) に対して、 $x_{t,n}$ は初期値の有理関数として一意的に書ける。ひとつの初期値 z を任意に固定して、文字 z についての次数 $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算する。

§1.4 や §2.1 の計算では、 z 以外の初期値を一般的な $\mathbb{C}$ 値と思い、値 $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を代入した際に $x_{t,n}(z^*)$ が特定の値になるかどうか調べた。ここからは、代入する値 z^* がどの変数に依存するか明確にするため、すべての初期値を文字変数として扱う。

定義 3.1 ($\mathbb{K}$). z 以外の初期値を変数とする有理関数体を $\mathbb{K}$ とおく。すなわち

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}(x_{t',n'} \mid (t', n') \in H_0; x_{t',n'} \neq z)$$

^{*5} 例 1.5 での計算も同様である。

^{*6} 可積分系の分野においては、 Φ の次数が B, C, D についてそれぞれ 1 次であることを要求すること多いが、本稿ではそのような条件は仮定しない。ただし、 Φ が B, C, D すべてに依存することは仮定しておく。

^{*7} 本稿では、細かい領域の条件については立ち入らない。課すべき条件については、[6] や [10] を参照せよ。

である。また、体 $\mathbb{K}$ の代数閉包を $\overline{\mathbb{K}}$ と書く。

ここからは、 $x_{t,n}(z)$ は $\mathbb{K}$ 係数有理関数と考え、 z には $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ の元を代入する。体 $\overline{\mathbb{K}}$ 上で考えると、 $x_{t,n}(z)$ の次数は逆像の個数と一致する。つまり、任意の $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ に対して

$$\deg_z x_{t,n}(z) = \#\{z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}}) \mid x_{t,n}(z^*) = \alpha\}$$

が成立する。特に重要なのが $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となる場合であり、ここから、本稿における「特異点」「特異点パターン」の定義が従う。

定義 3.2 (constant singularity). $(t, n) \in H$, $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ とする。 $x_{t,n}(z^*)$ が *constant singularity* とは、 $x_{t,n}(z^*) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となることである。 $x_{t,n}(z^*) = x^*$ が constant singularity のとき、その重複度を、1 変数有理関数 $x_{t,n}(z)$ の $z = z^*$ における値 x^* の重複度として定める。ただし、 $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity でないとき、重複度は 0 と考える。

定義 3.3 (constant singularity pattern). $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ に対応する *constant singularity pattern* とは、次の 3 つのデータのことである。

1. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるような $(t, n) \in H$ 全体のなす集合。
2. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるときの、constant singularity の値。
3. $x_{t,n}(z^*)$ が constant singularity となるときの、constant singularity の重複度。

ただし、 $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ が 1 つも constant singularity を生成しないときは、constant singularity pattern とはみなさない。

今後、constant singularity pattern を単に「特異点パターン」や「パターン」と言う。

定義 3.4. $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ に対応する特異点パターンを考える。

- パターンが *fixed* とは、 $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ となることである。特異点パターンが fixed でないとき、*movable* という。
- パターンが *confining* とは、パターンに含まれる constant singularity が有限個しかないことである。特異点パターンが confining でないとき、*non-confining* という。
- パターンが *solitary* とは、パターンがただ 1 つの constant singularity を持つことである。特異点パターンが solitary ならば、必ず confining になる。

例 3.5. §2.1 で扱った方程式の特異点パターンは、以下の 5 種類である。

$$1. \begin{bmatrix} \infty^k & 0 \\ x_{t,n}(z^*) = 0 & \infty^k \end{bmatrix}. \text{ (movable, confining, non-solitary)}$$

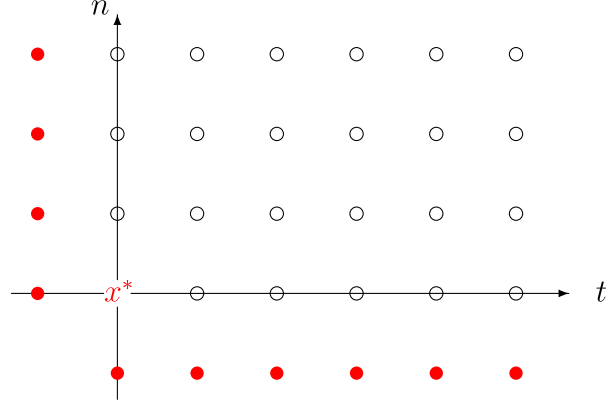


図1 Basic pattern を定める領域と初期値.

2.
$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \ddots \\ x_{02} & & \infty^k & & \\ x_{01} & \infty^k & & & \\ x_{00} & z=0 & x_{20} & \cdots & \end{bmatrix} \cdot (\text{fixed, non-confining, non-solitary})$$
3.
$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \ddots \\ x_{03} & & & & \\ x_{02} & & \infty & & \\ x_{01} & & \infty & & \\ x_{00} & z=\infty & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix} \cdot (\text{fixed, non-confining, non-solitary})$$
4.
$$\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{02} \\ x_{01} \\ x_{00} \end{bmatrix} \cdot (\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}; \text{fixed, confining, solitary})$$
5.
$$[x_{t,n}(z^*) = \alpha]. (\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}; \text{movable, confining, solitary})$$

これらのパターンが他の constant singularity を持たず, なおかつ特異点パターンがこの5種類しかないことを厳密に示すためには, 何らかの手法が必要である. 本稿 §4 と §5 において, 特異点パターンを厳密に計算するための定理や命題を紹介する.

定義 3.6 (basic pattern). 領域 H^{basic} を

$$H^{\text{basic}} = (\mathbb{Z}_{\geq -1})^2 \setminus \{(-1, -1)\}$$

で定め, $z = x_{0,0}$ とする. $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対応する *basic pattern* とは, 領域 H^{basic} において, $z = x^*$ に対応する fixed pattern のことである. (図1)

Basic pattern は, §2.1 で見た特異点閉じ込めの計算と大まかに対応している.

定義 3.7 (∂ -factor condition). 方程式 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が ∂ -factor condition を満たすとは, 次の 2 条件を満たすことである:

- $\partial_B \Phi$ と $\partial_B \frac{1}{\Phi}$ の分子に, C と D のみを含む既約因子がない.*8
- 上の条件で B と C をすべて入れ替えたもの.

すなわち, 方程式が ∂ -factor condition を満たすとき, $\partial_B \Phi$ と $\partial_B \frac{1}{\Phi}$ や分子の既約因子として可能なのは, 以下の 3 種類の形である:

- 変数 B に依存するもの. (つまり B で微分して 0 にならないもの)
- $C - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)
- $D - \beta$. ($\beta \in \mathbb{C}$)

定義 3.8 (basic pattern condition). 方程式 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が, $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して basic pattern condition を満たすとは, 関係式

$$\Phi(B, C, D) = x^*$$

が, B と C のみを含む既約因子を持たないということである. ただし, 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の既約因子とは, $\Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ を既約な表示とする際の

- 多項式 $\Phi_1 - x^* \Phi_2 \in \mathbb{C}[B, C, D]$ の既約因子 ($x^* \in \mathbb{C}$ のとき)
- 多項式 $\Phi_2 \in \mathbb{C}[B, C, D]$ の既約因子 ($x^* = \infty$ のとき)

のことである.

すなわち, 方程式が $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して basic pattern condition を満たすとき, 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の既約因子として可能なのは, 以下の 3 種類の形である:

- 変数 D に依存するもの. (つまり D で微分して 0 にならないもの)
- $B - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)
- $C - \beta$. ($\beta \in \mathbb{C}$)

4 主結果

定理 4.1. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ に対応する特異点パターンを考える. このとき, H の部分集合

$$\{(t, n) \in H \mid x_{t,n}(z^*) : \text{constant singularity}\}$$

には, 最小元が存在する. ただし, 順序は格子 $\mathbb{Z}^2$ の直積順序で考える.

*8 ∂_X で変数 X による偏微分を表す.

定義 4.2 (first singularity, starting value). 定理 4.1 で存在が保証される最小元に対応する constant singularity を, この特異点パターンの *first singularity* という. また, first singularity の値を, このパターンの *starting value* という.

定理 4.3. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ に対応する特異点パターンを考える. この特異点パターンの first singularity を $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, その重複度を r とし, 方程式 Φ は x^* に対して basic pattern condition を満たすとする. このとき, 特異点パターンの

$$\{(s, m) \in H \mid s \geq t; m \geq n\}$$

の部分は, x^* に対応する basic pattern を (t, n) だけ平行移動したものと一致する. ただし, basic pattern に比べて, z^* に対応するパターンでは重複度がすべて r 倍される.

定理 4.4. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とする.

- $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $S \neq 0$ とする. 次数を計算する際, これらの値の逆像の個数を用いる. $\alpha_1, \dots, \alpha_L$ を, singular value と呼ぶ.
- 設定した singular value を含む特異点パターンがすべて得られているとする. そのようなパターンのうち, movable pattern の starting value 全体を $\beta_1, \dots, \beta_I \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, fixed pattern の starting value 全体を $\gamma_1, \dots, \gamma_L \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とおく.
- 方程式 Φ は, $\beta_1, \dots, \beta_I$ に対して basic pattern condition を満たすとする.
- 領域 H^{basic} において, 値 β_i に対応する basic pattern を考える. この basic pattern における, constant singularity $x_{s,m}(\beta_i) = \alpha_j$ の重複度を

$$\text{mult}_{s,m}^{\text{basic}, \beta_i}(\alpha_j)$$

とおく. $(x_{s,m}(\beta_i) \neq \alpha_j$ や $(s, m) \notin H^{\text{basic}}$ の場合は, この重複度は 0 と定める)

- 領域 H において, $z = \gamma_\ell$ に対応する fixed pattern を考える. このパターンにおける constant singularity $x_{t,n}(\gamma_\ell) = \alpha_j$ の重複度を

$$\text{mult}_{t,n}^{\gamma_\ell}(\alpha_j)$$

とおく. $(x_{t,n}(\gamma_\ell) \neq \alpha_j$ の場合は, この重複度は 0 と定める)

以上の仮定のもとで, 各 $j = 1, \dots, J$ に対して, 次の degree relation が成立する:

$$\deg_z x_{t,n}(z) = \sum_{i=1}^I \sum_{(s,m) \in H} \text{mult}_{t-s,n-m}^{\text{basic}, \beta_i}(\alpha_j) Z_{s,m}(\beta_i) + \sum_{\ell=1}^L \text{mult}_{t,n}^{\gamma_\ell}(\alpha_j).$$

ただし, $Z_{s,m}(\beta_i)$ は「spontaneous occurrence of $x_{s,m}(z) = \beta_i$ 」を引き起こすような $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ の数 (重複度込み) であり, [10] において厳密に定義されている.*⁹

*⁹ 本稿では $Z_{s,m}(\beta_i)$ の具体的な定義は与えない. 重要なのは $Z_{s,m}(\beta_i)$ が厳密に定義できるという事実だけであり, 次数を計算する際, その具体的な定義は用いられない.

定理 4.5. 定理 4.4 と同じ仮定・記号を用いる.

- $I \geq L$ とする. つまり, starting value の数 I が singular value の数 L よりも多いとする. このとき, degree relation のみから次数を完全に特定することは不可能である. すなわち, degree relation は, 線形方程式系として under-determining である.
- $\{\beta_1, \dots, \beta_I\} \subsetneq \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ とする. すなわち, 考えている movable pattern の starting value はすべて singular value であり, かつ movable pattern の starting value とはならない singular value が存在するとする. このとき, degree relation は 各項の次数を完全に決定する. つまり, degree relation を解いて次数が計算できる.

注意 4.6. 次数を計算する際, $\{\beta_1, \dots, \beta_I\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ と取る, つまり starting value を singular value に含めるのが普通である. この状況では, movable pattern の starting value にならない $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 値の存在が, degree relation が解けるための必要十分条件である.

5 特異点パターンの計算

本章では, 特異点パターンの計算に役立つ命題を紹介する.

命題 5.1. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ に対応する特異点パターンを考える. $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を constant singularity とする. $(s, m) \in H$, $s > t$ が条件

$$x_{s,m}(z^*), x_{s,m-1}(z^*), x_{s,m-2}(z^*), \dots \text{はいずれも constant singularity でない}$$

を満たすとする. このとき, $x_{s+1,m}, x_{s+1,m-1}, x_{s+1,m-2}, \dots$ のうち最初に初期値となるものを w とおくと, $x_{s+1,m}(z^*), x_{s+1,m-1}(z^*), x_{s+1,m-2}(z^*), \dots$ はすべて文字 w に依存する. 特にこれらは constant singularity ではない. (図 2)

命題 5.2. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとする. $H \subset \mathbb{Z}^2$ を領域とし, $z^* \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ に対応する特異点パターンを考える. このパターンの first singularity を $x_{t,n}(z^*) = x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする. $(s, m) \in H$ が $t \leq s$ と $n \leq m$ を満たすとし,

$$x_{t,m+1}(z^*), x_{t+1,m+1}(z^*), \dots, x_{s,m+1}(z^*), x_{s+1,m+1}(z^*), x_{s+1,m}(z^*), \dots, x_{s+1,n+1}(z^*), x_{s+1,n}(z^*)$$

はいずれも constant singularity ではないとする (図 3). このとき, このパターンの constant singularity はすべて以下の範囲にある:

$$\{(u, \ell) \in H \mid t \leq u \leq s; n \leq \ell \leq m\}.$$

注意 5.3. この命題は confining pattern の計算に役立つ. 特異点閉じ込めの計算を行った際, 特異点が一度閉じ込められてしまえば, その先には永遠に constant singularity が出現しないということが保証される. 実際, §2.1 における特異点閉じ込めの計算において

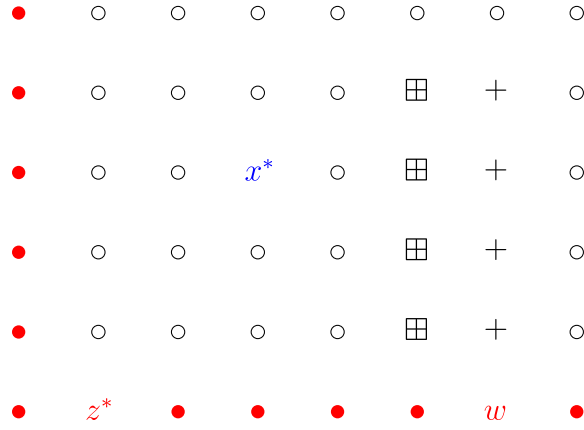


図2 命題 5.1 の状況. 「田」の部分が constant singularity でないならば, 「+」の部分は変数 w に依存する (特に constant singularity ではない). この命題を帰納的に用いると, 「田」より右の部分に constant singularity が存在しないことがわかる.

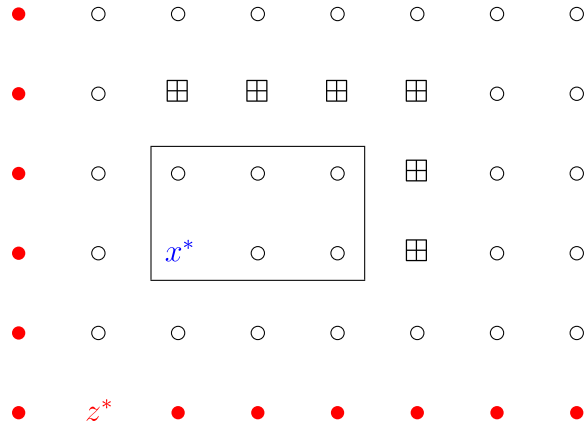


図3 命題 5.2 の状況. 「田」の部分が constant singularity でないならば, constant singularity は四角で囲まれた部分のみに存在しうる.

「reg」と書かれた部分より先を計算しなかったのは, その先に constant singularity が一切出現しないことがこの命題によって保証されるからである. なお, これは格子方程式特有の事情である. 実際, 常差分方程式には周期的なパターンがしばしば出現する.

命題 5.4. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとし, $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする. さらに, 方程式を定める 3 変数有理関数 $\Phi = \Phi(B, C, D)$ が条件

$$\Phi(x^*, C, D), \Phi(B, x^*, D), \Phi(B, C, x^*) \text{ はいずれも定数 } (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \text{ の元}) \text{ ではない}$$

を満たすとする. このとき, $z = x^*$ に対応する fixed pattern は solitary である. 特に, x^* に対応する basic pattern も solitary である.

この命題の条件を満たす $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は計算で特定できる. 重要なのは non-solitary な

パターンなので、この命題の条件を満たさない x^* に対応する basic pattern を計算する.

命題 5.5. $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が、どんな movable pattern の starting value にもならないとする. このとき α は、何らかの non-solitary なパターンに constant singularity として出現する.

命題 5.6. 方程式 Φ は ∂ -factor condition を満たすとし、 $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする. このとき、次の 2 条件は同値である:

- x^* はどの movable pattern の starting value にもならない.
- 関係式 $\Phi(B, C, D) = x^*$ の任意の既約因子は、 $B - \alpha$, $C - \beta$, $D - \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$) の形のどれかである.

方程式にとって重要なのは、non-solitary パターンに出現する値である. ここまでの命題を用いると、方程式の次数を求める操作として、例えば以下の手続きが考えられる.

1. 命題 5.4 を用いて、non-solitary パターンを生成する可能性のある $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ をすべて求める. (x^* の候補は有限個しかない)
2. 各 x^* に対して、対応する basic pattern を計算する (命題 5.1, 5.2 が役に立つ). 計算した basic pattern のうち、solitary でないもの中出现する値のリストを作る.
3. 出現するそれぞれの値 α に対して命題 5.6 を適用して、movable pattern の starting value として出現するかどうかを調べる.
4. 特異点パターンの情報をもとに、degree relation を書く. Movable pattern の starting value にならない値があれば、degree relation を解いて次数が計算できる.

6 計算例

6.1 離散 mKdV 方程式

パラメータ $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, $k^4 \neq 1$ に対して、離散 mKdV 方程式

$$(1 - x_{t-1,n-1}x_{t-1,n}) \left(kx_{t,n} - \frac{x_{t,n-1}}{k} \right) = (1 - x_{t,n-1}x_{t-1,n-1}) \left(kx_{t-1,n-1} - \frac{x_{t-1,n}}{k} \right)$$

を考える [9]. Φ を

$$\Phi = \Phi(B, C, D) = \frac{D(BC - k^2) + B - C}{k^2 D(B - C) + BC - k^2},$$

で定義すると、方程式は $x_{t,n} = \Phi(x_{t-1,n}, x_{t,n-1}, x_{t-1,n-1})$ と書ける.

Φ や $\frac{1}{\Phi}$ を微分すると、方程式が ∂ -factor condition を満たすことがわかる. また、命題 5.4 を用いると、値 $\pm k$, $\pm \frac{1}{k}$ 以外から始まる fixed pattern は solitary であることがわかる. よって以下、値 $\pm k$, $\pm \frac{1}{k}$ に注目して次数を計算する. 値 $\pm k$ から始まる basic pattern は

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \pm \frac{1}{k} & \mp k & \circ \\ \bullet & \pm k & \mp \frac{1}{k} & \circ \\ & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

である.*¹⁰ 命題 5.6 を用いると, $\pm \frac{1}{k}$ から始まる movable pattern はないことがわかる. さらに, 方程式は任意の $x^* \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\pm \frac{1}{k}\}$ に対して basic pattern condition を満たす.

以下, 領域 $H \subset \mathbb{Z}^2$ と 1 つの初期値 z を

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & & & \ddots \\ & & x_{03} & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \\ & & x_{02} & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \\ & & x_{01} & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \\ & & x_{00} & z & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{array}$$

のように固定し, z についての individual degree $\deg_z x_{t,n}(z)$ を計算する.

この初期値のもとで, 方程式の特異点パターンの完全なリストは以下になる: *¹¹

1. $[x_{t,n}(z^*) = \gamma]$. (solitary; $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\pm k, \pm \frac{1}{k}\}$; movable or fixed)
2. $\begin{bmatrix} \pm \frac{1}{k} & \mp k \\ x_{t,n}(z^*) = \pm k & \mp \frac{1}{k} \end{bmatrix}$. (confining, movable; $t, n \geq 1$)
3. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \ddots \\ x_{02} & & \pm \frac{1}{k} & \\ x_{01} & \pm \frac{1}{k} & & \\ x_{00} & z^* = \pm k & x_{20} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)
4. $\begin{bmatrix} \vdots & & & \ddots \\ x_{03} & & & \\ x_{02} & & \pm \frac{1}{k} & \\ x_{01} & \pm \frac{1}{k} & & \\ x_{00} & z^* = \pm \frac{1}{k} & x_{20} & x_{30} & \cdots \end{bmatrix}$. (non-confining, fixed)

この方程式は $\pm \frac{1}{k}$ から始まる movable pattern を持たないので, degree relation を解いて次数が計算できる.

特異点パターンのデータをもとに degree relation を導出すると, $t, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \deg_z x_{t,n}(z) &= Z_{t,n}(k) + Z_{t-1,n-1}(-k) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\# \text{ of preimages of } k) \\ &= Z_{t,n}(-k) + Z_{t-1,n-1}(k) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\text{of } -k) \\ &= Z_{t-1,n}(-k) + Z_{t,n-1}(k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && (\text{of } \frac{1}{k}) \\ &= Z_{t-1,n}(k) + Z_{t,n-1}(-k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && (\text{of } -\frac{1}{k}) \end{aligned}$$

*¹⁰ これ以上先に constant singularity が出現しないことを示すために, 命題 5.2 を用いる.

¹¹ Movable pattern については既に上で計算が終わっており, $z^ = \pm k, \pm \frac{1}{k}$ 以外に対応する fixed pattern はすべて solitary なので, ここで新たに必要になるのは $z^* = \pm k, \pm \frac{1}{k}$ に対応する fixed pattern の計算だけである. 命題 5.1 と帰納法を用いることで, これらのパターンを厳密に計算することができる.

となる．ただし、 $Z_{t,n}(\pm k)$ は「spontaneous occurrence of $x_{t,n}(z) = \pm k$ 」の数であり、厳密に定義できることが定理 4.4 で保証されている．また、 $t < 0$ や $n < 0$ に対しては $Z_{t,n}(\pm k) = 0$ と定義している．

$\pm k$ の対称性を用いると $Z_{t,n}(k) = Z_{t,n}(-k)$ がわかり、ここから線形な発展方程式

$$Z_{t,n}(k) = Z_{t-1,n}(k) + Z_{t,n-1}(k) - Z_{t-1,n-1}(k) + \delta_{t-1,n} + (\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) - \delta_{n,0}^{t,1}$$

が得られる．この表示から、 $Z_{t,n}(k)$ と $\deg_z x_{t,n}(z)$ が高々多項式的増大であることがわかる．実際に計算を行うと以下のようになり、次数増大が多項式的であることがわかる．

$$Z_{t,n}(\pm k): \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad \deg_z x_{t,n}(z): \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

6.2 特異点閉じ込めを通過しない非可積分方程式

k を 3 以上の奇数として、次の方程式を考える [8]:

$$x_{t,n} = -x_{t-1,n-1} + \frac{a}{x_{t-1,n}^k} + \frac{b}{x_{t,n-1}^k}.$$

§2.1 と違って今回は k が奇数であるため、この方程式には閉じ込められない特異点がある．§6.1 と同じ領域・初期値を考え、 z についての individual degree を計算する．

§4 や §5 の結果を用いて計算を行うと、方程式の特異点パターンのリストは以下となる．

1. $[x_{t,n}(z^*) = \gamma]$. (solitary; $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$; movable or fixed)
2. $\left[\begin{array}{cccc} & & \dots & \dots \\ & \infty^k & 0 & \dots \\ \infty^k & & 0 & \infty^k \\ x_{t,n}(z^*) = 0 & \infty^k & & \end{array} \right]$. (non-confining, movable; $t, n \geq 1$)
3. $\left[\begin{array}{cccc} \vdots & & & \dots \\ x_{02} & & \infty^k & \\ x_{01} & \infty^k & & \\ x_{00} & z^* = 0 & x_{20} & \dots \end{array} \right]$. (non-confining, fixed)
4. $\left[\begin{array}{cccc} \vdots & & & \dots \\ x_{03} & & & \\ x_{02} & & \infty & \\ x_{01} & \infty & & \\ x_{00} & z^* = \infty & x_{20} & x_{30} \dots \end{array} \right]$. (non-confining, fixed)

なお, k が偶数のときとの違いは, 0 から始まる movable pattern が non-confining になることだけである. いずれにせよ, ∞ から始まる movable pattern は存在しないので, degree relation を解いて次数を求めることができる.

特異点パターンのデータをもとに degree relation を導出すると, $t, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \deg_z x_{t,n}(z) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} Z_{t-\ell,n-\ell}(0) + \delta_{n,0}^{t,1} && (\# \text{ of preimages of } 0) \\ &= k \sum_{\ell=0}^{+\infty} (Z_{t-1-\ell,n-\ell}(0) + Z_{t-\ell,n-1-\ell}(0)) + \delta_{t-1,n} + k(\delta_{t,n} - \delta_{n,0}^{t,0}) && (\text{of } \infty) \end{aligned}$$

となる. ただし, $Z_{t,n}(0)$ は「spontaneous occurrence of $x_{t,n}(z) = 0$ 」の数であり, 厳密に定義できることが定理 4.4 で保証されている. $t < 0$ や $n < 0$ に対して $Z_{t,n}(0) = 0$ と定義しているため, $\sum_{\ell=0}^{\infty}$ は実際は有限和である. $(1, 1)$ 方向に差分を取ると, $t, n \geq 1$ に対して

$$Z_{t,n}(0) - \delta_{n-1,0}^{t-1,1} = kZ_{t-1,n}(0) + kZ_{t,n-1}(0) + k\delta_{n-1,0}^{t-1,0}$$

となる. ここから, 次数増大が指数関数的であることが従う.

例えば $k = 3$ に対して計算を行うと, 以下ようになる:

$Z_{t,n}(0):$	0	2187	46656	566433	5143824	38854242	257926032	1554996366
	0	729	13365	142155	1148175	7807590	47121102	260406090
	0	243	3726	34020	240570	1454355	7899444	39680928
	0	81	999	7614	46170	244215	1178793	5327532
	0	27	252	1539	7776	35235	148716	597051
	0	9	57	261	1053	3969	14337	50301
	0	3	10	30	90	270	810	2430
	0	0	0	0	0	0	0	0
$\deg_z x_{t,n}(z):$	0	2187	47385	580041	5289786	40037463	265982067	1603619592
	0	729	13608	145962	1183221	8056035	48623226	268557796
	0	243	3807	35046	248445	1502124	8151706	40896039
	0	81	1026	7875	47769	252262	1215111	5480307
	0	27	261	1599	8047	36318	152775	611658
	0	9	60	271	1083	4059	14607	51111
	0	3	10	30	90	270	810	2430
	0	1	0	0	0	0	0	0

参考文献

- [1] M. P. Bellon, C.-M. Viallet, Algebraic entropy, *Communications in Mathematical Physics* 204 (1999): 425–437. <https://doi.org/10.1007/s002200050652>
- [2] S. Fomin, A. Zelevinsky 2002, The Laurent phenomenon, *Advances in Applied Mathematics* 28 (2002): 119–144. <https://doi.org/10.1006/aama.2001.0770>
- [3] B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou, Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Physical Review Letters* 67 (1991): 1825–1828. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1825>

- [4] R. G. Halburd, Elementary exact calculations of degree growth and entropy for discrete equations, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473 (2017): 20160831. <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0831>
- [5] J. Hietarinta, C. Viallet, Singularity confinement and chaos in discrete systems, *Physical Review Letters* 81 (1998): 325–328. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.325>
- [6] J. Hietarinta, T. Mase, R. Willox, Algebraic entropy computations for lattice equations: why initial value problems do matter, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52 (2019): 49LT01. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab5238>
- [7] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. I: A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan* 43 (1977): 1424–1433. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.43.1424>
- [8] M. Kanki, T. Mase, T. Tokihiro, Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49 (2016): 23LT01. <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/23/23LT01>
- [9] D. Levi, R. I. Yamilov, On a nonlinear integrable difference equation on the square, *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal* 1 (2009): 101–105. <http://mathnet.ru/eng/ufa/v1/i2/p101>
- [10] T. Mase, Exact calculation of degrees for lattice equations: a singularity approach, *preprint*, arXiv:2402.16206.
- [11] S. Tremblay, B. Grammaticos, A. Ramani, Integrable lattice equations and their growth properties, *Physics letters A* 278 (2001): 319–324. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00806-9](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00806-9)
- [12] D. Um, R. Willox, B. Grammaticos, A. Ramani, On the singularity structure of the discrete KdV equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 53 (2020): 114001. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab72af>
- [13] D. Um, A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, J. Satsuma, On the singularities of the discrete Korteweg-deVries equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 54 (2021): 095201. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abd8f4>