日本数学会

2026年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2026年3月

於　東京理科大学

日本数学会

2026年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2026年3月

於　東京理科大学

函　数　論

3月23日(月)　第V会場

3月24日(火)　第V会場

写像類群の力学系的研究に向けて

宮地　秀樹　(金沢大学)*

1　講演内の記号

タイヒミュラー空間　種数 g の向き付け可能な閉曲面を Σ_g と書き，種数 g の閉リーマン面のタイヒミュラー空間を $\mathcal{T}_g$ と書く．以下は $g \geq 2$ で考える．閉曲面 Σ_g の写像類群を MCG_g と書く．タイヒミュラー空間は種数 g の標識付き閉リーマン面の変形空間であり，群は標識の変換として自然にタイヒミュラー空間に作用する．タイヒミュラー空間はタイヒミュラー距離により完備距離空間であり $\mathbb{R}^{6g-6}$ と同相となる．さらに，サーストンコンパクト化と呼ばれる $6g-6$ 次元の閉球と同相なコンパクト化をもつ．写像類群の作用はサーストンコンパクト化に拡張される．サーストンコンパクト化の境界は射影的測度付き測地線層の空間 $\mathcal{PML} = \mathcal{PML}(\Sigma_g)$ である．

McCarchy 氏と Papadopoulos 氏は, 論文 [1] において, 写像類群の部分群の力学系を用いて 6 つのクラスに分類しそれらの性質を調べた．Masur [2] はハンドル体について調べている．分類に現れる 6 つのクラスのうちの 3 つはクライン群論における初等的群に対応し，2 つは互いに交わらない単純閉曲線の集合を固定するという意味で可約的な群である．ここでは残り 1 つの sufficiently large と呼ばれる非初等的群に対応する部分群に対応する．ここで MCG_g の部分群 G は，固定点の異なる 2 つの擬アノソフ写像類を含むとき **sufficiently large** と呼ぶ．この時 G 内の擬アノソフ写像類の固定点の全体の閉包 Λ_G を G の**極限集合**と呼ぶ（[1, p.147]）．そして $Z\Lambda_G = \{[\lambda] \in \mathcal{PML} \mid \exists [\mu] \in \Lambda_G, i(\lambda,\mu) = 0\}$, $\Omega_G = \mathcal{PML} \setminus Z\Lambda_G$ とする．sufficiently large な部分群 $G < \mathrm{MCG}_g$ は Ω_G に真性不連続に作用する（[1, Theorem 6.16]）.

クライン群論　3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ の理想境界は $\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ であり，向きを保つ等長写像群の作用はメビウス変換群として拡張される．離散群 $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の作用により境界 $\hat{\mathbb{C}}$ を不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ と極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ に分割する．クライン群 Γ は不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ に真性不連続に作用する．

2　この講演について

ここでは簡単のために 3 次元双曲空間に作用するクライン群の場合のみ考える．Sullivan[4] は，エルゴード理論の観点からクライン群の力学系理論を展開した．この講演では論文 [3] における，Sullivan の理論を写像類群の部分群の作用における類似性につ

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学理工学域数物科学類
e-mail: `miyachi@se.kanazawa-u.ac.jp`

本研究は科研費 (課題番号:25K00909, 23K22396, 20K20519) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32G15, 57M50, 22E40
キーワード：Teichmüller space, Mapping class group

いて議論する．

実際，次の対応表

クライン群論	写像類群の部分群
$\Omega(\Gamma)$	Ω_G
Λ_G	Λ_G, $Z\Lambda_G$
非初等的群	sufficiently large
$\mathbb{S}^2$ 上エルゴード的 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は有界調和関数を持たない	$\mathcal{PML}$ 上エルゴード的 $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_g/G$ は有界多重調和関数を持たない
ホロ球極限集合上で保守的に作用する	

について議論する．この研究はまだ途上であるので，時間があれば残っている問題について話したい．

参考文献

[1] J. McCarthy and A. Papadopoulos, Dynamics on Thurston's sphere of projective measured foliations, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 133–166.

[2] H. Masur, Measured foliations and handlebodies, Ergodic Theory Dynam. Systems **1** (1986), 99–116.

[3] H. Miyachi, Function theory, Dynamics and Ergodic theory via Thurston theory, `arXiv:2507.20912 [math.CV]` (2024).

[4] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, Ann. of Math. Stud. **97**, 465–496, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Hyperbolic derivative via composition operators

細川　卓也
大野　修一

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane and $\partial\mathbb{D}$ its boundary. We denote by $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ the set of all analytic self-maps of $\mathbb{D}$. Let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, we define the composition operator C_φ by $C_\varphi f = f \circ \varphi$ for $f \in H(\mathbb{D})$. Then φ is called an analytic symbol of C_φ. In general, a main theme in the study of composition operators is to characterize the operator theoretic properties of composition operators by the function theoretic properties of the analytic symbols.

We here pose a new problem:

Could the compactness of a composition operator C_φ imply the compactness of $C_{\varphi\psi}$ for any $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$?

We will consider this problem in the casee of Bloch and little Bloch spaces.

We recall that the Bloch space $\mathcal{B}$ consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Then $\|\cdot\|$ is a complete semi-norm on $\mathcal{B}$ and is Möbius invariant. Let the little Bloch space $\mathcal{B}_o$ denote the subspace of $\mathcal{B}$ consisting of functions f with

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)f'(z) = 0.$$

Then $\mathcal{B}$ is a Banach space under the norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|$$

and that $\mathcal{B}_o$ is a closed subspace of $\mathcal{B}$. In particular, $\mathcal{B}_o$ is the closure in $\mathcal{B}$ of the polynomials. As a classical function class in geometric function theory, the Bloch space is unique in many different ways. For example, the universal Teichmüller space $T(1)$ can be regarded as the interior of S in $\mathcal{B}$, where $S = \{\log g' : g \text{ is conformal in } \mathbb{D}\}$.

Let $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ be the space of all bounded analytic functions on $\mathbb{D}$. Then H^∞ is the Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|.$$

Note that $H^\infty \subset \mathcal{B}$ and that $\|f\| \le \|f\|_\infty$ if $f \in H^\infty$. For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, $\|\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty \le 1$.

For $w \in \mathbb{D}$, let α_w be the Möbius transformation of $\mathbb{D}$ defined by $\alpha_w(z) = (w-z)/(1-\overline{w}z)$. For w and z in $\mathbb{D}$, the pseudo-hyperbolic distance $\rho(w,z)$ between z and w is given by $\rho(w,z) = |\alpha_w(z)|$. For any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, we define that

$$\varphi^{\#}(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\,\varphi'(z).$$

2020 Mathematics Subject Classification. 30H30, 47B33, 30H05.
キーワード: angular derivative, hyperbolic derivative, composition operator, Bloch space, little Bloch space.

Then $\varphi^{\#}$ is the *hyperbolic derivative* of φ in the sense that

$$|\varphi^{\#}(z)| = \lim_{w \to z} \frac{\rho(\varphi(z), \varphi(w))}{\rho(z, w)}.$$

We remark that the Schwarz-Pick lemma implies that $|\varphi^{\#}(z)| \leq 1$ for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and any $z \in \mathbb{D}$. Moreover C_φ is always bounded on $\mathcal{B}$. On the other hand, C_φ is not necessarily bounded on $\mathcal{B}_o$. It is known that C_φ is bounded on $\mathcal{B}_o$ if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$.

[Madigan and Matheson (1995)] For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, the following hold.

(i) C_φ is compact on $\mathcal{B}$ if and only if $|\varphi^{\#}(z)| \to 0$ whenever $|\varphi(z)| \to 1$.

(ii) C_φ is bounded on $\mathcal{B}_o$ if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$.

(iii) C_φ is compact on $\mathcal{B}_o$ if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$ and $|\varphi^{\#}(z)| \to 0$ whenever $|z| \to 1$.

We here define some kinds of classes related to the hyperbolic derivative.

[Definition]

(i) Denote that $\mathcal{S}_o = \mathcal{S}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}_o$.

(ii) Denote by $\mathcal{S}^h$ the set of all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ such that $\varphi^{\#}(z) \to 0$ whenever $|\varphi(z)| \to 1$.

(iii) Denote by $\mathcal{S}_o^h$ the set of all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ such that $\varphi^{\#}(z) \to 0$ whenever $|z| \to 1$.

It is known that any function in $H^\infty \cap \mathcal{B}_o$=COP is constant on each Gleason part in the maximal ideal space of H^∞ other than $\mathbb{D}$. We will use this property to prove the following.

[Boundedness on $\mathcal{B}_o$] Let $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. The following conditions are equivalent:

(i) C_φ is bounded on $\mathcal{B}_o$.

(ii) C_{φ^k} is bounded on $\mathcal{B}_o$ for some positive integer k.

(iii) C_{φ^k} is bounded on $\mathcal{B}_o$ for any positive integer k.

We will study analytic self-maps of the unit disk such that each does not belong to $\mathcal{S}^h$ (respectively, $\mathcal{S}_o^h$), but their product is in $\mathcal{S}^h$ (respectively, $\mathcal{S}_o^h$). We also provide explicit and new examples of such analytic self-maps of $\mathbb{D}$ satisfying (or not) the conditions in our results.

普遍被覆写像のレブナー鎖の初等的な例について

柳下　剛広　(山口大学)*

複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円板を $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 上で定義される 2 つの正則関数 f, g が $f(0) = g(0) = 0$ を満たすとする．このとき, f が g に対して従属しているとは, $\mathbb{D}$ 上の自己正則関数 ω で $\omega(0) = 0$ かつ

$$f(z) = g(\omega(z)) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものが存在することをいう．さらに, $\mathcal{H}_0(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ 単葉} \,|\, f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}$ と定め, I を実数区間内の区間とするとき, $t \in I$ でパラメータづけられる $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ 内の単葉関数の族 $\{f_t\}_{t\in I}$ がレブナー鎖であるとは $s \leq t$ を満たす全ての $s, t \in I$ に対して, f_s が f_t に対して従属していることであると定義する．レブナー鎖は $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ 内の単葉関数の係数評価に関するビーベルバッハ予想（ド・ブランジュの定理）の解決に用いられ, その他にも幾何学的函数論の研究において主要な役割を担っている．([1, 2])

近年, 柳原氏が普遍被覆写像のレブナー鎖を定義し, 拡張されたレブナー鎖においても従来のレブナー理論の類似となる結果が同様に導かれることを示した.([3]) ここで, $\{f_t\}_{t\in I}$ が**普遍被覆写像のレブナー鎖**であるとは, f_t が $\mathbb{D}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ 内の原点を含むある領域 Ω_t の上への普遍被覆写像で $f_t(0) = 0, f_t'(0) > 0$ を満たし, かつ $s \leq t$ を満たす全ての $s, t \in I$ に対して, f_s が f_t に対して従属していることであると定義する．従来のレブナー鎖では $f_t(\mathbb{D})$ が単連結となるが, 普遍被覆写像のレブナー鎖では Ω_t は一般に多重連結領域となる点において拡張された概念となっている．

本講演では, 初等関数のみを用いて普遍被覆写像のレブナー鎖の例 $\{f_t\}_{t\in I}$ を構成する．その際に, レブナー鎖に付随する概念 (f_t', $\dot{f}_t = \frac{\partial f_t}{\partial t}$, evolution family $\{\omega_{s,t}\}_{s\leq t}$, Herglotz family $\{P(\cdot, t)\}_{t\in I}$) に関しても言及したい.

参考文献

[1] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Mathematische Annalen 89 (1923), no. 1, 103–121.

[2] Ch. Pommerenke, Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 159–173.

[3] H. Yanagihara, Loewner theory on analytic universal covering maps, arXiv: 1907.11987, 2025.

* 〒755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1　山口大学 大学院創成科学研究科（工学系学域）
e-mail: `myngsht@yamaguchi-u.ac.jp`
web: `https://ds.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~myngsht/`

キーワード：レブナー理論, 普遍被覆写像

数論的三角群の指数有限部分群である四角群

櫻井映里香　(早大教育)[*1]
相馬啓佑　(早大教育)[*2]
小森洋平　(早大教育)[*3]

竹内による数論的三角群の分類 [5] に続いて、数論的四角群の分類問題を考察する。数論的フックス群と通約可能なフックス群は数論的である。特に数論的フックス群の指数有限部分群も数論的フックス群になる。竹内により数論的三角群は分類されていて、特に極大かつ余コンパクトではない数論的三角群は $(2,3,\infty)$ と $(2,4,\infty)$ と $(2,6,\infty)$ のみである [6]。そこでこれら３つの数論的三角群の指数有限部分群である四角群を分類したのがこの講演の主結果である。竹内によるモジュラー群 $(2,3,\infty)$ の指数有限部分群である四角群の分類方法を用いて [7, 8]、この講演では $(2,4,\infty)$ と $(2,6,\infty)$ の指数有限部分群である四角群を全て求める。余コンパクトではない数論的四角群については、[4] において既に分類されている。

1. 竹内の方法

次の Singerman の結果を用いて、三角群 Γ の指数 N の部分群である四角群 Γ_1 を探す。

命題 1. *[2]*
$(m_1, m_2, \cdots, m_r; s)$ 型の第１種フックス群

$$\Gamma = \langle x_1, \cdots, x_r, p_1, \cdots, p_s \mid \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{s} p_k = x^{m_j} = 1 \rangle$$

が $(n_{1,1}, \cdots, n_{1,\rho_1}, \cdots, \cdots, n_{r,1}, \cdots, n_{r,\rho_r}; s')$ 型の指数 N の部分群 Γ_1 を含むための必要十分条件は

1. Γ から $\{1, 2, \cdots, N\}$ の置換群 S_N への準同型 $\theta : \Gamma \to S_N$ が存在して、$\theta(\Gamma)$ の作用は推移的であり、$\theta(x_j)$ は長さ $m_j/n_{j1}, \cdots, m_j/n_{j\rho_j}$ の ρ_j 個の巡回置換の積からなり、$\theta(p_k)$ が $\delta(p_k)$ 個の巡回置換の積で表されるならば、次の等式を満たす。

$$s' = \sum_{k=1}^{s} \delta(p_k)$$

2. 双曲面積に関して $vol(\mathbb{H}^2/\Gamma_1) = N \cdot vol(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ を満たす。

このとき Γ の指数 N の部分群 Γ_1 は $\Gamma_1 = \{g \in \Gamma \mid \theta(g)(1) = 1\}$ として得られる。

次に Γ_1 の生成系を求める。

命題 2. *[3]*
群 G の生成系を $\{A_j \mid j \in J\}$ とし、群 G の部分群 H に関する左剰余類全体 G/H の完全代表系を $\{B_k \mid k \in K\}$ とする。このとき

$$A_j B_k = B_n C_{j,k}$$

[*1] e-mail: s0422106_edu@ruri.waseda.jp
[*2] e-mail: k.soma@akane.waseda.jp
[*3] e-mail: ykomori@waseda.jp

で定まる $\{C_{j,k} \mid j \in J,\ k \in K\}$ は H の生成系になる。

更に四角群の標準生成系の関係式を満たす Γ_1 の生成系 B_1, B_2, B_3, B_4 を選び出す。その際に Poincaré の定理を用いるが、次の Lehner の結果が役に立つ。

命題 3. *[1]*
B_i の固定点を w_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ とし、$\tau_3 = B_3(w_4), \tau_2 = B_2(\tau_3)$ とするとき、$(w_4, w_3, \tau_3, w_2, \tau_2, w_1)$ が凸な双曲６角形の頂点になるなら、B_1, B_2, B_3, B_4 は四角群の標準生成系である。

2. 実行例

$(2, 4, \infty)$ 型の三角群 $\Gamma = \langle A_1, A_2, A_3 \mid A_1^2 = A_2^4 = A_1A_2A_3 = 1\rangle$ の指数 $N = 3$ の部分群として $(2, 2, 4, \infty)$ 型の四角群を求めてみる。命題 1 の条件を満たす準同型 $\theta : \Gamma \to S_4$ による Γ の生成元の像は

$$\theta(A_1) = (2, 3),\ \theta(A_2) = (1.2),\ \theta(A_3) = (1, 2, 3)$$

となる。特に Γ/Γ_1 の完全代表系として $1, A_3, A_3^2$ が取れるので、命題 2 より Γ_1 の生成元として

$$B_1 = A_2^2,\ B_2 = A_1,\ B_3 = A_3^{-2}A_2^{-1}A_3^2,\ B_4 = A_3^{-3}$$

が選べて $B_1^2 = B_2^2 = B_3^4 = B_1B_2B_3B_4 = 1$ を満たす。$(w_4, w_3, \tau_3, w_2, \tau_2, w_1)$ が凸な双曲６角形の頂点になることから、命題 3 より $(2, 2, 4, \infty)$ 型の四角群が $(2, 4, \infty)$ 型の三角群 Γ の指数 3 の部分群として得られる。

参考文献

[1] J. Lehner, On polygon groups, Lecture Notes Math., vol 899, Springer (1980), 315–324.

[2] D. Singerman, Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups. Bull. London Math. Soc., 20 (1970), 319–323.

[3] W. Magnus, A. Karras and D.Solitar, Combinatorial group theory, Dover (1966).

[4] T. Nakanishi, M. Näätänen and G. Rosenberger, Arithmetic Fuchsian Groups of Signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ with $2 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4 = \infty$. Contemporary Math. 240 (1990) 269–277.

[5] K. Takeuchi, Arithmetic triangle groups. J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 91-106.

[6] K. Takeuchi, Commensurability classes of arithmetic triangle groups. Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, (1977), 201-212.

[7] K. Takeuchi, Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$. Saitama Math. J. 14 (1996), 55–78.

[8] K. Takeuchi, Correction to the paper: “ Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$”. Saitama Math. J. 15 (1997), 85–90.

Self-affinity, Möbius geometry and Schwarzian-pre-Schwarzian derivative

熊谷 駿 (八戸工業大学)*1
梶原 健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*2

1. はじめに

対数型美的曲線 (LAC) は工業意匠設計分野における形状設計の観点から，原田ら [1] に提案され三浦 [2] によって定式化された曲線クラスである．これは弧長径数 s に対しそのユークリッド曲率が $\kappa^{\mathrm{E}}(s) = \begin{cases} (\xi s+\eta)^{-\frac{1}{\alpha}} & (\alpha \neq 0) \\ e^{\xi s+\eta} & (\alpha = 0), \end{cases}$ $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ で表されるもので，対数螺旋 $(\alpha = 1)$ やクロソイド $(\alpha = -1)$ に代表される螺旋からなる．その応用面での背景からパラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ は**形状特徴量**とよばれる．

命題 1 (三浦の自己アフィン性 [2, 3]) 曲線 γ に対し，ある径数表示 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ が

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (\kappa^{\mathrm{E}}(w+\varepsilon), s_w(w+\varepsilon)) = (e^{-\varepsilon}\kappa^{\mathrm{E}}(w), e^{\alpha\varepsilon}s_w(w)), \tag{1}$$

をみたすことは，それが形状特徴量 α の LAC であることに同値である．

井ノ口ら [4] は LAC が**相似幾何** (リー群 $\mathrm{Sim}(2) = \mathrm{CO}^+(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ のクライン幾何) における可積分変形の不変曲線で，ユークリッド幾何におけるオイラーの弾性曲線の類似として位置づけられることを示した．本講演では LAC を特徴づける自己アフィン性をメビウス幾何 (リー群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ のクライン幾何) における曲線の対称性として再定式化したことについて報告する．ここでは LAC が**放物線**と共通してみたす微分方程式であって，形状特徴量ごとに固有とならないものが得られている．

2. メビウス幾何

曲線 $c(w) = (c_1\ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に横断性条件 $\det(c_w, c) \neq 0$ を仮定する．これに対し，枠 $\Phi := (c_w\ c) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の正規化を $\lambda := \det \Phi^{-\frac{1}{2}}$，$\Lambda := \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_w & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ によって定め，そのメ**ビウス枠** $\Phi^{\mathrm{M}} := ((c\lambda)_w\ c\lambda) = \Phi\Lambda \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ とする．このときフレネ型公式

$$\Phi^{\mathrm{M}}_w = \Phi^{\mathrm{M}} K^{\mathrm{M}} = \Phi^{\mathrm{M}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^{\mathrm{M}} & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \kappa^{\mathrm{M}} = -2S_w\left(\frac{c_2}{c_1}\right) := -2\left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1}\right)_w + \left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1}\right)^2,$$

が成り立ち，このもとで**メビウス曲率** κ^{M} は $[c] := c_2/c_1$ のメビウス同値類と一対一対応する．言い換えると，射影曲線 $[c(w)] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^1$ の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-同値類はシュワルツ微分 $S_w[c]$ と一対一対応する．以下，$A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ による $[c] \in \mathbb{C}P^1$ の像を $[Ac]$ とかく．

補題 2 上記の仮定のもと，径数表示 $[c(w)] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^1$ に対し，

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w+\varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \tag{2}$$

本研究は JST CREST(課題番号 JPMJCR1911), 科研費 (課題番号 25K21661) の助成を受けた．
*1 e-mail: `s-kumagai@hi-tech.ac.jp / shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp`
*2 e-mail: `kaji@imi.kyushu-u.ac.jp`

が成り立つことはそのシュワルツ微分 $S_w[c]$ が定数 k であることに同値である．このとき $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の作用を法として $[c(w)] = \begin{cases} w & (k=0) \\ e^{\sqrt{k}w} & (k\neq 0) \end{cases}$ が成り立つ．

3. 主結果

正則・非退化曲線 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ に対し $c_\gamma(w) := (\gamma_w(w), \gamma_{ww}(w))^T$ とおくと $c_\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ は横断性条件をみたし，その射影モデル $[c_\gamma]$ はプレシュワルツ微分 $P_w\gamma := \gamma_{ww}/\gamma_w$ で表される．各 w に対し, $c_\gamma^\perp(w)$ を次式で定める．

$$c_\gamma^\perp(w) := \begin{pmatrix} 1/s_w & 0 \\ -s_{ww}/s_w^2 & 1/s_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_w \\ \gamma_{ww} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ (\gamma_w/s_w)_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ \sqrt{-1}\gamma_w\kappa^{\mathrm{E}} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

定理 3 曲線 γ が径数表示 $\gamma(w)$ をもって自己アフィン性 (1) をみたすならば，高々実数倍を除き $s_w = e^{\alpha w}$, $\kappa^{\mathrm{E}} = e^{-w}$ で，ある $B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対し $[c_\gamma^\perp] = [Bc_\gamma]$ である．また

$$[c_\gamma^\perp(w+\varepsilon)] = \left[\frac{\gamma_w(w+\varepsilon)}{\gamma_w(w)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ \sqrt{-1}\gamma_w\kappa^{\mathrm{E}} \end{pmatrix}\right] =: [A(\varepsilon)c_\gamma^\perp(w)], \qquad (4)$$

が成り立つ．このとき $[c_\gamma^\perp(w)] = \sqrt{-1}e^{(\alpha-1)w}$ であって，とくに形状特徴量 α の LAC の自己アフィン性 (1) をみたす径数表示 $\gamma(w)$ に対して $S_wP_w\gamma = (\alpha-1)^2$ が成り立つ．

定理 3 より LAC は $S_wP_w\gamma$ が実定数 k となる表示 $\gamma(w)$ をもつ曲線 γ のクラスに属する．以下の例に示すようにこれらの曲線クラスは LAC より真に大きく，また，二つの異なる形状特徴量をもつ LAC が属するクラスを定める k が存在する．

例 A 放物線 $\gamma(w) = w + \sqrt{-1}w^2$ は $P_w\gamma = \dfrac{2\sqrt{-1}}{1+2\sqrt{-1}w}$, $S_wP_w\gamma = 0$ をみたす．一方，変数変換 $w = w(t) = \dfrac{1}{k}e^{kt}$, $k \in \mathbb{R}$ を施して得られる表示 $\gamma(t) = \dfrac{1}{k}e^{kt} + \sqrt{-1}\dfrac{1}{k^2}e^{2kt}$ は $P_t\gamma = \dfrac{4k\sqrt{-1}e^{kt}+k^2}{2\sqrt{-1}e^{kt}+k}$, $S_tP_t\gamma = k$ をみたす．

例 B 対数螺旋 ($\alpha = 1$ の LAC) の表示 $\gamma(w) = e^{(1+\sqrt{-1})w}$ は $S_wP_w\gamma = 0$ をみたす．なお，ここでは c_γ が横断性条件をみたさず，補題 2 は直接適用されない．

例 C クロソイド ($\alpha = -1$ の LAC) の表示 $\gamma(w) = \displaystyle\int e^{\sqrt{-1}w^2}dw$ は $S_wP_w\gamma = 0$ をみたす．

参考文献

[1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, “曲線の物理的性質と自己アフィン性”，デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33–40, 1995.

[2] 三浦憲二郎, “美しい曲線の一般式とその自己アフィン性”，精密工学会誌，72 (7) 857–861, 2006.

[3] S. Kumagai, K. Kajiwara, “Self-affinities of planar curves: towards unified description of aesthetic curves”, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2025.

[4] J. Inoguchi, Y. Jikumaru, K. Kajiwara, K. T. Miura, and W. K. Schief, “Log-aesthetic curves: Similarity geometry, integrable discretization and variational principles”, Computer Aided Geometric Design, vol. 105, p. 102233, 2023.

[5] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4)，朝倉書店，2010.

有限ブラシュケ積の幾何学的性質について

藤村　雅代　(防衛大学校)*

1　はじめに

双心多角形は内接円と外接円を同時に持つ多角形である。単位円とその内部に含まれる円が与えられたとき、それらの円に同時に内接および外接する双心三角形が存在するための必要十分条件は $d^2 = 1 - 2r$ であり、Chapple の公式または Chapple-Euler の公式として知られている。ただし、r は内接半径、d は原点から内接円の中心までの距離である。この公式は Chapple (1746 [2]) と Euler (1765) が独立に発見したとされている (歴史については例えば [20] を参照)。また、同様に単位円とその内部に含まれる円が与えられたとき、それらの円に同時に内接および外接する双心四角形が存在するための必要十分条件は $2r^2(1 + d^2) = (1 - d^2)^2$ であり Fuss の公式 [10] と呼ばれている。

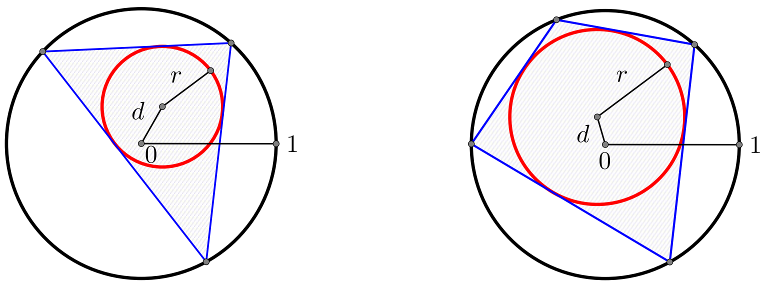

図 1　左: 双心三角形 (Chapple の公式 $d^2 = 1 - 2r$ が成り立つ)
右: 双心四角形 (Fuss の定理 $2r^2(1 + d^2) = (1 - d^2)^2$ が成り立つ)

一方、2 つの円に対して双心多角形が存在するとき、そのような双心多角形は無数に存在することが Poncelet の定理 [17] (証明については例えば [4] 参照) から保証される。

定理 1.1（Poncelet の定理 (楕円バージョン)）　2 つの楕円 E_1 と E_2 に対して、E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形が存在すれば、E_1 上の任意の点に対して、この点を頂点に含み E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形が存在する。

本講演では、Blaschke 積が持つ幾何学的な性質を利用して、円に内接する多角形に関する話題を扱う。

* 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20　防衛大学校 数学教育室
e-mail: masayo@nda.ac.jp
本研究の一部は科研費 (課題番号:25K07039) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 30J10, 30C20
キーワード：Complex analysis, Blaschke product, Algebraic curve

2 Blaschke 積から定まる曲線

以下、複素平面上の単位円板を $\mathbb{D}$ と書く。

定義 2.1 次の形をした d 次有理写像を d 次 (有限) Blaschke 積と呼ぶ。

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{d} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \quad a_k \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

$\theta = 0$ かつ $B(0) = 0$ のとき、B を標準 Blaschke 積という。

これから扱うような Blaschke 積の逆像に関する問題は、標準 Blaschke 積のみを扱えば十分であることがわかるので、今後は B として

$$B(z) = z \prod_{k=1}^{d-1} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \quad a_k \in \mathbb{D}.$$

の形の標準 Blaschke 積のみを扱う。

Blaschke 積は $\mathbb{D}$ を自身の上に写す正則関数で、$\overline{\mathbb{D}}$ 上の連続関数である。また、$z \in \partial\mathbb{D}$ に対して $B'(z) \neq 0$ をみたす (例えば [14, Lemma 3.1])。したがって、$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像は $\partial\mathbb{D}$ 上の相異なる d 個の点 $z_1, z_2, \cdots, z_d$ から成ることがわかる。この性質を利用して 2 種類の曲線を導入する。

2.1 内部曲線

定義 2.2 d 次 Blaschke 積 B に対して、$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を $z_1, z_2, \cdots, z_d$ とおき、これら d 個の点から選んだ各 2 点を結ぶ $\dfrac{d(d-1)}{2}$ 本の直線からなる集合を ℓ_λ とおく。このとき、直線族 $\mathcal{L}_B = \{\ell_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{D}}$ の包絡線を B の内部曲線と呼び I_B と書く。

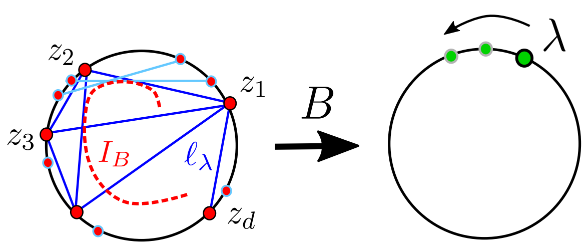

図 2 内部曲線の構成法

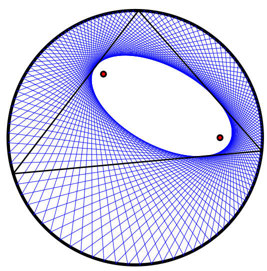

図 3 $0,\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ に零点を持つ 3 次標準 Blaschke 積の内部曲線 (包絡線)

例 2.3 2 次 Blaschke 積 $B(z) = z\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ と $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して、B により λ に写る 2 点を結ぶ直線の方程式は計算から、$z - a = \lambda(\overline{z} - \overline{a})$ と書ける。したがって、内部曲線は 1 点 $\{a\}$ である。

3 次 Blaschke 積の内部曲線は楕円になることが、次の定理からわかる。

定理 2.4（Daepp, Gorkin, and Mortini [3, Theorem 1]） B を $0, a, b$ に零点を持つ 3 次標準 Blaschke 積とする。$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ に対して、z_1, z_2, z_3 を B により λ に写る相異なる 3 点とする。このとき、z_1, z_2 を結ぶ直線は楕円 E

$$E : |z-a| + |z-b| = |1-\overline{a}b| \tag{2}$$

に接する。また、逆に E の各点は、$B(\zeta_1) = B(\zeta_2)$ をみたす単位円周上の相異なる 2 点 ζ_1, ζ_2 を結ぶ直線の接点となっている。

定理 2.4 の (2) で定まる楕円 E は単位円に内接する三角形 $\triangle z_1 z_2 z_3$ に内接している (図 3 参照) ので、Poncelet の定理における内側の楕円になっている。また、この楕円 E は a, b を固有値にもつある行列の数域と関連があることが知られている [12]。Poncelet の定理と数域の関係については例えば [11], [15] など多くの研究が行われている。

定理 2.4 に関連して、Frantz [5] により次が示されている。

定理 2.5（Frantz [5, Proposition 3]） 単位円に内接する三角形に内接する楕円は、3 次 Blaschke 積から得られるものに限る。すなわち、楕円 E に対して、次は同値である。

- 単位円に内接して E を外接する三角形が存在する。
- ある $a, b \in \mathbb{D}$ に対して、E は $|z-a| + |z-b| = |1-\overline{a}b|$ から定まる楕円である。

定理 2.5 は、Chapple の公式における単位円の内部の円を楕円に拡張した結果を与えている。では、4 次 Blaschke 積を考えた場合に Fuss の公式を拡張することができるだろうか？ 次はこの問題を扱う。

例 2.6 一般の 4 次 Blaschke 積の内部曲線は定義方程式が 6 次式の代数曲線である。この内部曲線を表す 6 次式は、このアブストラクトには印字できないくらいのサイズの式になるが、具体的な Blaschke 積を与えれば方程式は比較的単純になり、描画も可能である。図 4 は、以下の 3 つの Blaschke 積

$$\begin{aligned}
B_1(z) &= z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{2}iz} \cdot \frac{z - \frac{2}{3}}{z - \frac{2}{3}z} \cdot \frac{z + \frac{2}{3}i}{1 - \frac{2}{3}iz}, \\
B_2(z) &= z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i)z}{1 - (\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)z}, \\
B_3(z) &= z^2 \cdot \frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z},
\end{aligned}$$

の内部曲線を 2 通り (包絡線と代数曲線) の方法で描画したものである。B_2 の内部曲線は楕円 (と 1 点) に見える。実は、B_2 は

$$b_1(z) = z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}, \qquad b_2(z) = z \cdot \frac{z - \frac{-2+i}{5}}{1 - \frac{-2-i}{5}z}$$

としたとき、$B_2 = b_2 \circ b_1$ と書ける。したがって、B_2 の内部曲線は b_1 の内部曲線である 1 点から成る集合 $\{\frac{1}{2}\}$ を含んでいる。

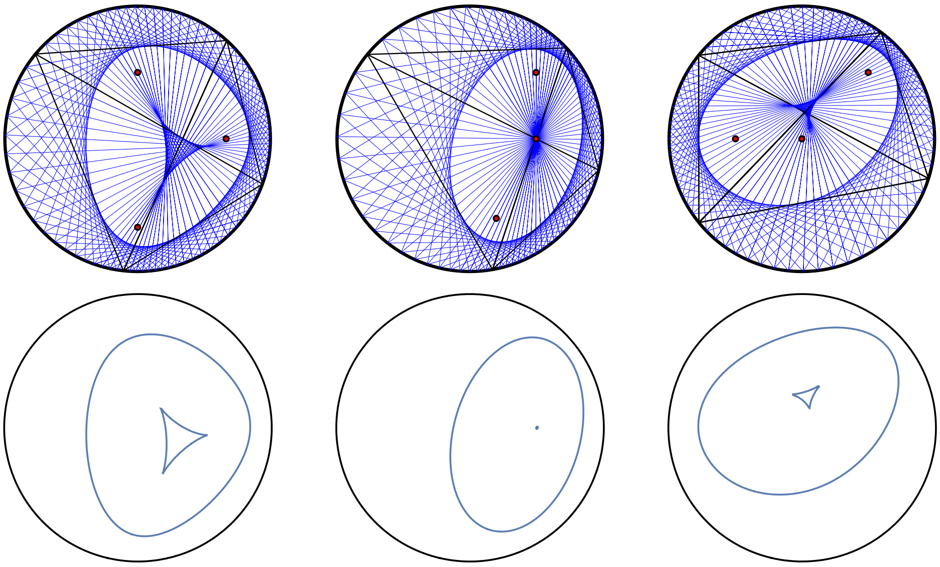

図 4　4 次 Blaschke 積の内部曲線の例: 左からそれぞれ B_1, B_2, B_3 に対応している

注意 2.7　一般に、Blaschke 積 B がいくつかの Blaschke 積の合成 $b_n \circ b_{n-1} \circ \cdots \circ b_1$ で書けるとき、B の内部曲線は b_1 の内部曲線を含むことも同様に明らかである。

上の例の B_2 の内部曲線は楕円を含むように見えるが、実際に楕円であることが次からわかる。

命題 2.8 ([6, Lemma 4])　2 つの 2 次 Blaschke 積 $b_1(z) = z \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $b_2(z) = z \cdot \dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}$ の合成を $B = b_2 \circ b_1$ とおくとき、B の内部曲線 I_B は

$$I_B \;:\; |z-a|\big(|z-f_1| + |z-f_2| - r\big) = 0$$

で与えられる。ただし、f_1, f_2 は 2 次方程式 $t^2 - (a - \overline{a}b)t - b = 0$ の解であり、r は次で定まる値である。

$$r = |\overline{f_1}f_2 - 1|\sqrt{\frac{|f_1|^2 + |f_2|^2 - 2}{|f_1|^2|f_2|^2 - 1}}.$$

さらに、次もわかる。

定理 2.9（[6, Theorem 2]）　単位円に内接する四角形に内接する楕円は、2 つの 2 次 Blaschke 積の合成として書ける 4 次 Blaschke 積から構成されるものに限る。すなわち、楕円 E に対して、次は同値である。

- 単位円に内接して E を外接する四角形が存在する。
- ある $a, b \in \mathbb{D}$ に対して、E は $|z-a| + |z-b| = |\overline{a}b - 1|\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2-2}{|a|^2|b|^2-1}}$ から定まる楕円である。

定理 2.9 は Fuss の公式における単位円の内部の円を楕円に拡張した結果を与える。定理 2.9 の結果は、後に Gorkin and Wagner [13] によりシフトオペレータからの意味付けがされている。また、Aksoy らは [1] において 2^n 次 Blaschke 積の合成写像への分解可能性および数域が楕円になる条件についての研究を行っている。

次に、Blaschke 積から定まる単位円板の外側の曲線を導入する。

2.2 外部曲線

定義 2.10 d 次 Blaschke 積 B に対して、$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を $z_1, z_2, \cdots, z_d$ とおく。L_λ を $z_1, \cdots, z_d$ で単位円に接する d 本の接線から成る集合とする。λ が単位円周上を動くとき、L_λ の元の各 2 直線の交点の軌跡を B の外部曲線といい E_B と書く。

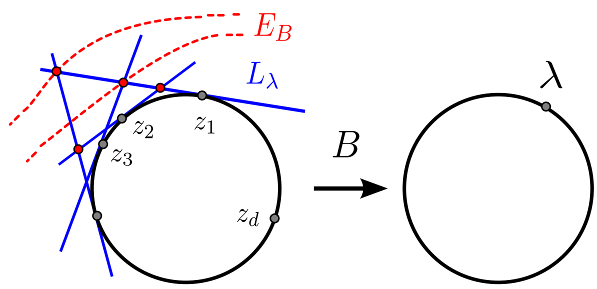

図 5　外部曲線の構成法

例 2.11 $B(z) = z \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \cdot \dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}$ のとき、外部曲線 E_B は退化しない 2 次曲線であり、次の方程式で与えられる。

$$\overline{a}\overline{b}z^2 - (|ab|^2 - |a+b|^2 + 1)z\overline{z} + ab\overline{z}^2 - 2(\overline{a}+\overline{b})z - 2(a+b)\overline{z} + 4 = 0. \tag{3}$$

さらに、(3) は $(|a+b|-1)^2 < |ab|^2$ のとき双曲線、$(|a+b|-1)^2 > |ab|^2$ のとき楕円、$(|a+b|-1)^2 = |ab|^2$ のとき放物線の方程式となる。

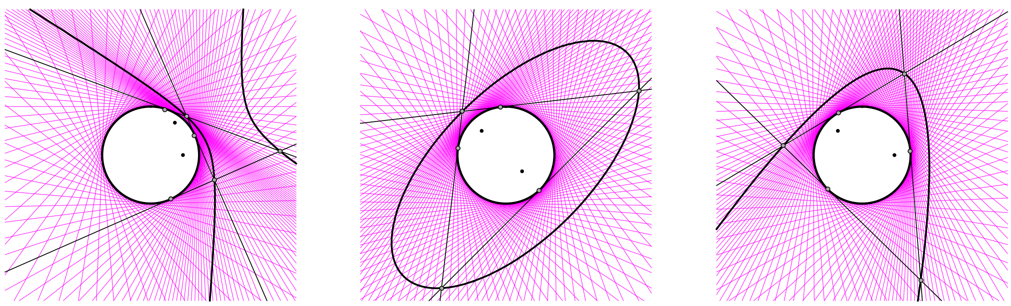

図 6　左: $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$,　中: $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i, b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,　右: $a = a_0, b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
ただし、$a_0 \approx 0.668$ は $a^4 - 4a^3 - 6a^2 + 4a + 1 = 0$ の解の一つとする

一般次数の Blaschke 積に関しては次の性質が得られる。

定理 2.12（[7, Theorem 2]） B を d 次標準 Blaschke 積とするとき、外部曲線 E_B は

高々 $d-1$ 次の代数曲線である。

さらに、内部曲線と外部曲線の間にはある種の双対性があることがわかる。

定理 2.13（[8, Theorem 5]） B を d 次標準 Blaschke 積とし、E_B^* を B の外部曲線の斉次化の双対曲線とする。このとき、内部曲線は

$$I_B \,:\, u_B^*(-z) = 0$$

で与えられる。ただし、$u_B^*(z) = 0$ は E_B^* のアフィン部分の定義方程式である。

定理 2.13 を使うことで、比較的単純な外部曲線から比較的複雑な内部曲線を構成することが可能になる。

3 Blaschke 積から定まる多角形

3.1 Blaschke 多角形

以下、多角形は凸多角形のみでなく、星型多角形も含めて考えることにする。

定義 3.1 2 つの楕円 E_1 と E_2 に対して、E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形を Poncelet n 角形と呼ぶ。

先に述べたように、Poncelet の定理は入れ子になった 2 つの楕円に対して、Poncelet n 角形が一つ存在すれば、1-パラメータの Poncelet n 角形からなる族が存在することを保証している。この Poncelet n 角形の族に対して、「各 n 角形の中心からなる集合はどのような形になるか？」という問題を Shestakov (1814) が考え、計算実験から予想を与えた。この問題は、約 200 年後の 2016 年に以下のように解決された (歴史については、[18] を参照)。

定理 3.2（Schwartz and Tabachnikov [18, Theorem1]） E_1 と E_2 を楕円とし、E_2 は E_1 の内部に含まれているとする。また、これらの楕円に対して、Poncelet n 角形の 1-パラメータ族が存在するとき n 角形の頂点の平均中心からなる集合および n 角形の質量重心からなる集合は、それぞれ E_1 と相似な楕円または 1 点からなる集合となる。

この問題は、線形変換を行うことで E_1 は単位円であるとしても一般性を失わない。また、定理 2.4 と 2.5 から Poncelet 三角形は、3 次 Blaschke 積から定まる三角形と対応がつくことがわかる。さらに、一般次数の Blaschke 積から定まる多角形も考えたい。

定義 3.3 d 次 Blaschke 積 B に対して、$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を頂点とする d 角形を Blaschke d 角形と呼ぶ。

注意 3.4 ここでは、この先 Blaschke 多角形の頂点の平均中心のみを扱うので、Blaschke 多角形を凸多角形に限定しなくても問題はない。

Blaschke 積 B の Blaschke 多角形の各辺は、B の内部曲線に接するという性質を持つ。しかし、B の次数が 4 次以上の場合、内部曲線は前述の通り複雑な形状を持つ。それにも関わらず、次が成立する。

命題 3.5　B を d 次標準 Blashcke 積とする。$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ とするとき、λ に対応する Blaschke d 角形の頂点の平均中心から成る集合は円または 1 点からなる集合である。

注意 3.6　Blaschke 多角形の質量重心から成る集合は 2 次曲線にならない。

次に、Blaschke 多角形を楕円に内接する多角形に拡張することを考えたい。そのため、単位円板上で正則な Blaschke 積を等角性を保ったまま境界が楕円の領域で定義される写像として拡張することを考える。

3.2　Blaschke-like 多角形 (Joukowski 変換による)

次の形の写像を、Joukowski (Жуковский) 変換と呼ぶ。

$$z = \varphi_t(w) = \frac{1}{1+t^2}\left(t^2 w + \frac{1}{w}\right), \qquad (0 < t < 1).$$

この写像は w 平面上の単位円板を z 平面上の楕円板 $\mathbb{E}_t$ の外部に写す等角写像である。ただし、$\mathbb{E}_t$ は

$$\mathbb{E}_t = \left\{\left|z - \frac{2t}{1+t^2}\right| + \left|z + \frac{2t}{1+t^2}\right| < 2\right\}$$

で定まる楕円板である。任意の離心率 e $(0 < e < 1)$ に対して、うまく t を選べば φ_t によって単位円板は離心率が e の楕円の境界を持つ領域に写すことができる。

標準 Blaschke 積 B に対して、$B_{\varphi_t} = \varphi_t \circ B \circ \varphi_t^{-1}$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varphi_t"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_t"] \\
\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t \arrow[r, "B_{\varphi_t}"'] & \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t
\end{tikzcd}$$

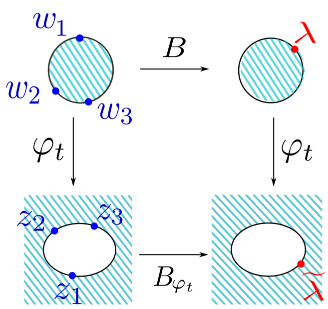

図 7　Blashcke-like 写像 $B_{\varphi_t} = \varphi_t \circ B \circ \varphi_t^{-1}$

ここで、$\varphi_t(1/(t^2 w)) = \varphi_t(w)$ が成り立つので、$\varphi_t : \{1/t^2 < |w| \leq \infty\} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t$ (onto, conformal) かつ $\varphi_t : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t$ (onto, conformal) がわかる。したがって、各 $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t$ に対して、$\varphi_t^{-1}(z)$ の分枝 w で $|w| < 1$ を満たすものがただ一つ存在する。このとき、B_{φ_t} は楕円板の外側 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{E}}_t$ を自身に onto に写す。

定義 3.7　上記のように構成した B_{φ_t} を B と φ_t に関する Blaschke-like 写像と呼ぶ。

Joukowski 変換 $z = \varphi_t(w)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上の連続関数であり、単位円周 $\partial\mathbb{D}$ 上では

$$z = \varphi_t(w) = \frac{t^2 w + \overline{w}}{1+t^2}, \quad w \in \partial\mathbb{D}$$

と書ける。したがって、$\partial\mathbb{E}_t$ 上では、

$$w = \varphi_t^{-1}(w) = \frac{\overline{z} - t^2 z}{1-t^2}, \quad z \in \partial\mathbb{E}_t$$

となる。これを用いれば、$\widetilde{\lambda} \in \partial\mathbb{E}_t$ に対して、B_{φ_t} の逆像を考えることで、Blaschke 積と同様に「内部曲線」、「外部曲線」、「Blaschke-like 多角形」を定義できる。

内部曲線に関しては、3 次 Blaschke 積 B と φ_t に関する Blaschke-like 写像 B_{φ_t} について次が得られる。

定理 3.8（[9, Theorem 4]） 3 次 Blaschke 積 B と φ_t に関する Blaschke-like 写像 B_{φ_t} の内部曲線は楕円である。さらに、各 2 つの楕円 $\partial\mathbb{E}_t$ $(0 < t < 1)$ と E_2 に対して、$\partial\mathbb{E}_t$ に内接し同時に E_2 を外接する Poncelet 三角形が存在するのは、E_2 がある 3 次 Blaschke 積 B の Blaschke-like 写像 B_{φ_t} の内部曲線になるときに限る。

Blascke-like 多角形に対しては、Poncelet 多角形の結果である定理 3.2 と類似の結果が得られる。

定理 3.9（[9, Proposition 7]） B_{φ_t} を d 次 Blashcke 積と φ_t に関する Blaschke-like 写像とする。$\widetilde{\lambda} \in \partial\mathbb{E}_t$ とするとき、$\widetilde{\lambda}$ の B_{φ_t} による逆像を頂点とする d 角形の頂点の平均中心から成る集合は $\partial\mathbb{E}_t$ と相似な楕円または 1 点からなる集合になる。

この定理では Joukowski 変換から構成された Blashcke-like 写像を利用したが、円板を境界が楕円の領域に等角に写す変換は他にもいろいろある。では、別の変換を利用した場合どうなるだろうか？ 次はこの問題を考える。

3.3 Blaschke-like 多角形 (Jacobi 楕円関数による)

単位円板を楕円板の内部に等角に写す変換には、例えば Schwarz [19] による Jacobi 楕円関数を利用するものが知られている。以下ではこの変換を利用して Blaschke-like 写像を構成する (cf. [16, ChapterVI])。

$$\mathrm{sn}^{-1}(w,k) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

$$K'(k) = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}}.$$

とおき、次の写像を考える。

$$u(w) = u = \frac{w-1}{w+1}, \quad v(u) = v = c \cdot \mathrm{sn}^{-1}(u,k),$$

$$x(v) = x = \sqrt{\frac{1+p}{1-p}}e^v, \quad z(x) = z = \frac{\sqrt{1-p^2}}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big),$$

ただし、k と c は $\log\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} = \pi\frac{K(k)}{K'(k)}$ かつ $\log\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} = cK(k)$ をみたすように選ぶ。また、領域を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
D_w &= \big\{|w| < 1,\ \mathrm{Im}(w) > 0\big\}, \quad D_u = \big\{\mathrm{Re}(u) < 0,\ \mathrm{Im}(u) > 0\big\},\\
D_v &= \Big\{-\log\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} < \mathrm{Re}(v) < 0,\ 0 < \mathrm{Im}(v) < \pi\Big\},\\
D_x &= \Big\{1 < |x| < \sqrt{\frac{1+p}{1-p}},\ \mathrm{Im}(x) > 0\Big\},\\
D_z &= \Big\{|z - \sqrt{1-p^2}| + |z + \sqrt{1-p^2}| < 2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\Big\}.
\end{aligned}$$

このとき、u, v, x, z は、それぞれ D_w, D_u, D_v, D_x, D_z を次々写す等角写像である。これらの合成写像を γ とおく。

$$z = \gamma(w) = z \circ x \circ v \circ u(w).$$

γ は上半円板 D_w から上半楕円板 D_z への等角写像であるので、Schwarz の鏡像の原理から $\mathbb{D}$ を $\mathcal{E}_p = \big\{|z - \sqrt{1-p^2}| + |z + \sqrt{1-p^2}| < 2\big\}$ の上に写す等角写像 $\widetilde{\gamma}$ が存在する。

このとき、写像 $B_{\widetilde{\gamma}} = \widetilde{\gamma} \circ B \circ \widetilde{\gamma}^{-1}$ は $\mathcal{E}_p$ 上の Blaschke-like 写像になる。

3 次標準 Blaschke 積 $B(z) = z \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \cdot \dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}$ に対して、図 8 は、$p \approx 0.677$ のとき $\partial\mathcal{E}_p$ の各点の逆像からできる直線族を描いたものである。包絡線は $B_{\widetilde{\gamma}}$ の内部曲線を与えるが、定理 3.9 の B_φ の場合とは異なり、これらはいずれも楕円にならない。

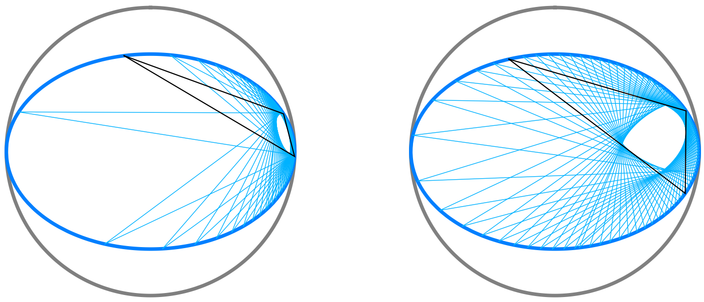

図 8 $(k = \frac{1}{100}, c \approx 0.524)$ 左: $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4}i$, 右: $a = -\frac{4}{5},\ b = \frac{1}{2}i$.

選んだ等角写像によらず、Blaschke-like 写像に共通する幾何学性質はあるだろうか、あるとすればどのようなものだろうか？ この問題については、今後の課題である。

参考文献

[1] A. G. Aksoy, F. Arici, M. E. Celorrio, and P. Gorkin. Decomposable Blaschke products of degree 2^n. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 376(9):6341–6369, 2023.

[2] W. Chapple. An essay on the property of triangles inscribed in and circumscribed about given circles. *Miscellanea Curiosa Mathematica*, 4:117–124, 1746.

[3] U. Daepp, P. Gorkin, and R. Mortini. Ellipses and finite Blaschke products. *Amer. Math. Monthly*, 109(9):785–795, 2002.

[4] L. Flatto. *Poncelet's theorem.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[5] M. Frantz. How conics govern Möbius transformations. *Amer. Math. Monthly*, 111(9):779–790, 2004.

[6] M. Fujimura. Inscribed ellipses and Blaschke products. *Comput. Methods Funct. Theory*, 13(4):557–573, 2013.

[7] M. Fujimura. Blaschke products and circumscribed conics. *Comput. Methods Funct. Theory*, 17(4):635–652, 2017.

[8] M. Fujimura. Interior and exterior curves of finite Blaschke products. *J. Math. Anal. Appl.*, 467(1):711–722, 2018.

[9] M. Fujimura and Y. Gotoh. Geometric properties of Blaschke-like maps on domains with a conic boundary. *Comput. Methods Funct. Theory*, 24(2):389–413, 2024.

[10] N. Fuss. De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet. *Nova Acta Acad. Sci. Petrop*, 10:103–125, 1797.

[11] H.-L. Gau and P. Y. Wu. Numerical range and Poncelet property. *Taiwanese J. Math.*, 7(2):173–193, 2003.

[12] P. Gorkin and E. Skubak. Polynomials, ellipses, and matrices: two questions, one answer. *Amer. Math. Monthly*, 118(6):522–533, 2011.

[13] P. Gorkin and N. Wagner. Ellipses and compositions of finite Blaschke products. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(2):1354–1366, 2017.

[14] J. Mashreghi. *Derivatives of inner functions*, volume 31 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013.

[15] B. Mirman. Sufficient conditions for Poncelet polygons not to close. *Amer. Math. Monthly*, 112(4):351–356, 2005.

[16] Z. Nehari. *Conformal mapping.* Dover Publications, Inc., New York, 1975. Reprinting of the 1952 edition.

[17] J.-V. Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures. Tome I.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995. Reprint of the second (1865) edition.

[18] R. Schwartz and S. Tabachnikov. Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after. *Math. Intelligencer*, 38(2):29–34, 2016.

[19] H. A. Schwarz. Ueber einige Abbildungsaufgaben. *J. Reine Angew. Math.*, 70:105–120, 1869.

[20] P. Y. Wu. Polygons and numerical ranges. *Amer. Math. Monthly*, 107(6):528–540, 2000.

EXTENDING HOLOMORPHIC FUNCTIONS FROM ANALYTIC COMPLEMENTS OF COMPLETE KÄHLER DOMAINS

TAKEO OHSAWA

As a continuation of [Oh-1], it was shown in [Oh-2] that there exists a locally pseudoconvex but holomorphically non-convex ramified Riemann domain over $\mathbb{C}^2$, originally constructed by Fornaess [F], which is holomorphically separable in the sense that any two points can be separated by holomorphic functions. The purpose of the present note is to clarify what is needed for constructing such holomorphic functions by proving the following.

Theorem 1. *Let M be a complex manifold of dimension n and let $X \subset M$ be a closed complex analytic set whose complement has a complete Kähler metric. Assume that there exist a holomorphic n-form ω on M which has no zeros in $M \setminus X$ and a plurisubharmonic function Φ on M such that $\Phi^{-1}(-\infty) = X$, Φ is C^∞ on $M \setminus X$ and $e^{-\Phi}\omega$ is not locally square integrable on any open subset of M which intersects with X. Then, for any $c \in \mathbb{R}$ and for any holomorphic function f on $\Phi^{-1}([-\infty, c)))$ satisfying*

$$i^{n^2} \int_{\Phi<c} |f|^2 \omega \wedge \overline{\omega} < \infty,$$

there exists a holomorphic function $\tilde{f}$ on M such that $\tilde{f}|_X = f$.

References

[F] Fornaess, J. E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$,* Math. Ann. **234** (1978), 275-277.

[Oh-1] Ohsawa, T., *On the Levi problem on complex manifolds under the negativity of canonical bundles near the boundary,* to appear in PRIMS.

[Oh-2] ——, *Costructing a holomorphically nonconvex surface which is locally pseudoconvex as a submanifold of* $\mathbb{C}^3$, submitted for publication.

Takeo Ohsawa, Graduate School of Mathematics Nagoya University 464-8602 Chikusaku Furocho Nagoya Japan

Email address: ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp

無限遠点が 2 つの超楕円曲線に付随するシグマ関数

綾野　孝則　(阪公大数学研)[*1]
Victor M. Buchstaber　(Steklov Mathematical Institute)

コンパクトリーマン面に付随するテータ関数は，標準ホモロジー基底に依存する準周期的な整関数である．F. Klein は，「テータ関数を調整して，標準ホモロジー基底の取り方に依存しない準周期的な整関数を構成せよ」という問題を提示した．この問題は，Korotkin, Shramchenko, Nakayashiki により，一般のコンパクトリーマン面に対して解決された．一方，Buchstaber, Enolski, Leykin は，「代数曲線の具体的な定義方程式が与えられた場合に，テータ関数を調整して，原点におけるべき級数展開の係数が定義方程式の係数のみから代数的に書けるような準周期的な整関数を構成せよ」という問題を提示した．この条件を満たす関数をシグマ関数という．無限遠点が 1 つの超楕円曲線，(n,s) 曲線，テレスコピック曲線，ワイエルシュトラス曲線に対しては，後者の問題が解決された．一方，無限遠点が 2 つの超楕円曲線は，代数曲線を定義する代数方程式という意味では，これらの代数曲線には含まれていない．本発表では，無限遠点が 2 つの超楕円曲線に対して後者の問題を解決する．

自然数 g に対して，$N(x)=\nu_0x^{2g+2}+\nu_2x^{2g+1}+\cdots+\nu_{4g+2}x+\nu_{4g+4}$, $\nu_i\in\mathbb{C}$, $\nu_0\neq 0$ は重根を持たないとする．V を $y^2=N(x)$ で定義される種数 g の超楕円曲線とする．V 上の正則微分形式 $\mu_i=\frac{x^{i-1}}{2y}dx$, $1\le i\le g$ を考える．$\mu={}^t(\mu_1,\dots,\mu_g)$ とする．$\{\mathfrak{a}_i,\mathfrak{b}_i\}_{i=1}^g$ を V 上の標準ホモロジー基底とする．周期行列を $2\mu'=\left(\int_{\mathfrak{a}_j}\mu_i\right)$, $2\mu''=\left(\int_{\mathfrak{b}_j}\mu_i\right)$, $\tau=(\mu')^{-1}\mu''$ と定義する．$N(a)=0$ となる $a\in\mathbb{C}$ をとる．$N(x)$ を $N(x)=\nu_0(x-a)\prod_{i=1}^{2g+1}(x-a_i)$, $a_i\in\mathbb{C}$ と書く．$\mathfrak{s}\mathfrak{t}\neq 0$, $\mathfrak{s}^{2g+1}/\mathfrak{t}^2=N'(a)$ を満たす $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathbb{C}$ をとる．$M(X)=\prod_{i=1}^{2g+1}\left(X-\frac{\mathfrak{s}}{a_i-a}\right)$ とする．C を $Y^2=M(X)$ で定義される種数 g の超楕円曲線とする．C 上の正則微分形式 $\omega_i=-\frac{X^{g-i}}{2Y}dX$, $1\le i\le g$ を考える．λ_i を $M(X)=\lambda_0X^{2g+1}+\lambda_2X^{2g}+\lambda_4X^{2g-1}+\cdots+\lambda_{4g}X+\lambda_{4g+2}$ を満たす複素数として定義する．C 上の第 2 種微分形式 $\eta_i=-\frac{1}{2Y}\sum_{k=g-i+1}^{g+i-1}(k+i-g)\lambda_{2g+2i-2k-2}X^kdX$, $1\le i\le g$ を考える．V から C への同型写像

$$\zeta:\quad V\to C,\qquad (x,y)\mapsto(X,Y)=\left(\frac{\mathfrak{s}}{x-a},\frac{\mathfrak{t}\,y}{(x-a)^{g+1}}\right)$$

が定義できる．$g\times g$ の正則行列 D を ${}^t\big(\zeta^*(\omega_1),\dots,\zeta^*(\omega_g)\big)=D\mu$ で定義する．ここで，$\zeta^*(\omega_i)$ は ω_i の ζ による引き戻しである．$1\le i,j\le g$ に対して，D の (i,j) 成分は，2 項

[*1] 〒558-8585　大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号　大阪公立大学　数学研究所
e-mail: `ayano@omu.ac.jp`
web: `https://researchmap.jp/ayano75/`
2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14K25
キーワード：シグマ関数，テータ関数，超楕円曲線

係数を用いて，$\mathfrak{t}^{-1}\mathfrak{s}^{g+1-i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}(-a)^{i-j}$ と書ける ([1, Proposition 4.1])．e_1, e_2 を変数として，次の多項式を考える．

$$
\begin{aligned}
f(e_1,e_2) &= \sum_{i=0}^{g+1} e_1^i e_2^i \big\{2\nu_{4g+4-4i} + \nu_{4g+2-4i}(e_1+e_2)\big\}, \\
\widetilde{f}(e_1,e_2) &= \sum_{i=0}^{g} e_1^i e_2^i \left\{2\lambda_{4g+2-4i} + \lambda_{4g-4i}(e_1+e_2)\right\}, \\
\overline{f}(e_1,e_2) &= \mathfrak{t}^{-2}(e_1-a)^{g+1}(e_2-a)^{g+1}\widetilde{f}\left(\frac{\mathfrak{s}}{e_1-a}, \frac{\mathfrak{s}}{e_2-a}\right)
\end{aligned}
$$

このとき，$\mathfrak{n}_{i,j} = \mathfrak{n}_{j,i}$ かつ $\overline{f}(e_1,e_2) = f(e_1,e_2) + (e_1-e_2)^2 \sum_{i,j=1}^{g} \mathfrak{n}_{i,j} e_1^{i-1} e_2^{j-1}$ を満たす複素数 $\{\mathfrak{n}_{i,j}\}_{i,j=1}^{g}$ が存在する．$\Omega = (\mathfrak{n}_{i,j})_{1\le i,j\le g}$ とする．$(a,0)$ 以外では正則な V 上の第 2 種微分形式 $\kappa_1,\dots,\kappa_g$ を次で定義する．

$$
{}^t(\kappa_1,\dots,\kappa_g) = {}^t\Big\{\big(\zeta^*(\eta_1),\dots,\zeta^*(\eta_g)\big)D\Big\} - 2\Omega\mu
$$

$1 \le i \le g$ に対して，κ_i は次の形に書ける ([1, Lemma 4.13])．

$$
\kappa_i = \frac{r}{(x-a)^g}\frac{dx}{2y}, \qquad r \in \mathbb{Q}\big[a, \{\nu_{2i}\}_{i=0}^{2g+2}, x\big]
$$

周期行列を $-2\kappa' = \left(\int_{\mathfrak{a}_j}\kappa_i\right)$，$-2\kappa'' = \left(\int_{\mathfrak{b}_j}\kappa_i\right)$ と定義する．$\delta' = {}^t(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$，$\delta'' = {}^t(\frac{g}{2},\frac{g-1}{2},\dots,\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^g$，$\mathcal{R} = \left\{N'(a)^{-m}r \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ r \in \mathbb{Q}\big[a, \{\nu_{2i}\}_{i=0}^{2g+2}\big]\right\}$ とする．

Definition 1. $v = (v_{2g}, v_{2g-2},\dots,v_2) \in \mathbb{C}^g$ に対して，

$$
H(v) = \varepsilon \exp\left(\frac{1}{2}{}^t v\kappa'(\mu')^{-1}v\right)\theta\begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix}\big((2\mu')^{-1}v, \tau\big), \qquad \varepsilon \in \mathbb{C}
$$

とする．ここで，$\theta\begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix}(u,\tau)$ はリーマンのテータ関数である．

Proposition 2 ([1, Proposition 4.15]) $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^g$，$v \in \mathbb{C}^g$ に対して，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&H(v + 2\mu' m_1 + 2\mu'' m_2)/H(v) \\
&= (-1)^{2({}^t\delta' m_1 - {}^t\delta'' m_2) + {}^t m_1 m_2} \exp\big\{{}^t(2\kappa' m_1 + 2\kappa'' m_2)(v + \mu' m_1 + \mu'' m_2)\big\}
\end{aligned}
$$

Theorem 3 ([1, Theorem 4.12]) ε をうまくとると，$H(v)$ は $v=0$ の周りで次のようにべき級数展開できる．

$$
H(v) = \sum_{n_1,\dots,n_g \ge 0} \xi_{n_1,\dots,n_g} v_{2g}^{n_1}\cdots v_2^{n_g}, \qquad \xi_{n_1,\dots,n_g} \in \mathcal{R}
$$

参考文献

[1] T. Ayano, V. M. Buchstaber, Sigma function associated with a hyperelliptic curve with two points at infinity, accepted to Regular and Chaotic Dynamics.

Hardy spaces on bounded symmetric domains I

Characterizations

Shaolin CHEN (Guangxi Normal University)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)[*1]

This is an announcement of [2]. Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded symmetric domain with origin and Bergman-Shilov boundary b. Denote by Γ_0 the isotropy group of $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Ω is circular and star-shaped with respect to 0 and that b is circular. The group Γ_0 is transitive on b, and b has a unique normalized Γ_0-invariant measure σ with $\sigma(b) = 1$ ([3]). The unit polydisk $\mathbb{D}^n$, the unit ball $\mathbb{B}^n$ and the classical Cartan domains are bounded symmetric domains with origin. Denote by $L^p(b)$ ($p \in (0,\infty)$) the set of all measurable functions F of b into $\mathbb{C}$ with

$$\|F\|_{L^p} = \left(\int_b |F(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

For $p \in (0,\infty)$, the pluriharmonic Hardy space $\mathscr{PH}^p(\Omega)$ consists of all those pluriharmonic functions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ such that $\|f\|_p := \sup_{r\in[0,1)} M_p(r,f) < \infty$, where

$$M_p(r,f) = \left(\int_b |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

If $p \geq 1$, then $\|\cdot\|_p$ is a norm on $\mathscr{PH}^p(\Omega)$. This is no longer true in the case $0 < p < 1$, and in this case, $\|\cdot\|_p^p$ is subadditive and it induces the translation invariant metric on $\mathscr{PH}^p(\Omega)$. For holomorphic Hardy space, Hahn and Mitchell [3] obtained the completeness of $\mathscr{H}^p(\Omega) = \mathscr{PH}^p(\Omega) \cap H(\Omega,\mathbb{C})$ for $p > 0$.

Theorem A. ([3, Theorem 5])*For $p \in [1,\infty)$, $\mathscr{H}^p(\Omega)$ is a complex Banach space with respect to the norm $\|\cdot\|_p$, and for $p \in (0,1)$, $\mathscr{H}^p(\Omega)$ is a complete linear Hausdorff space with respect to the metric $d(\psi_1,\psi_2) = \|\psi_1 - \psi_2\|_p^p$, where $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathscr{H}^p(\Omega)$.*

Shapiro [8] generalized Theorem A to complex valued harmonic Hardy space on $\mathbb{D}$. In this talk, we extend Theorem A to $\mathscr{PH}^p(\Omega)$.

Pavlović obtained the following characterization of holomorphic Hardy space on $\mathbb{D}$.

Theorem B. ([7, Theorem 1.1])*Let $p \in (0,\infty)$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ and f be a holomorphic function in $\mathbb{D}$. Then the followings are equivalent:*

(1) *$f \in \mathscr{H}^p(\mathbb{D})$;*

(2) *$\mathscr{G}[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}[f](\zeta) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(r\zeta)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$;*

(3) *$\mathscr{G}_*[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}_*[f](\zeta) = \left(\int_0^1 (1-r)\sup_{\rho\in(0,r)} |f'(\rho\zeta)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$;*

(4) *$\mathscr{G}_d[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}_d[f](\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}|f'(r_k\zeta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $r_k = 1 - 2^{-k}$.*

Furthermore, for $j \in \{1,2,3,4\}$, there are constants C_j independent of f such that

$$\|f - f(0)\|_p \leq C_1\|\mathscr{G}[f]\|_{L^p} \leq C_2\|\mathscr{G}_*[f]\|_{L^p} \leq C_3\|\mathscr{G}_d[f]\|_{L^p} \leq C_4\|f - f(0)\|_p.$$

[*1] e-mail: `hi.hamada01@gmail.com`
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 31C10, 32A18, 32M15, 47B33; Secondary: 30H30.
Keywords: Bounded symmetric domain, Hardy space. Pluriharmonic function.

In the case of several complex variables, Ahern and Bruna [1] obtained similar characterizations of the holomorphic Hardy space on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ in $\mathbb{C}^n$. Krantz and Li [6] also obtained similar characterizations of the holomorphic Hardy space on some classes of pseudoconvex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$.

On the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$, the following result is known. Let $f \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{C})$. Then, there exists a positive constant C, depending only on p, such that

$$\frac{1}{C}\|f\|_p^p \le |f(0)|^p + \int_{\partial\mathbb{B}^n} \big(\mathscr{G}(f)(\zeta)\big)^p d\sigma(\zeta) \le C\|f\|_p^p \tag{1}$$

for $p \in (0, \infty)$, where

$$\mathscr{G}(f)(\zeta) = \left(\int_0^1 |\nabla f(r\zeta)|^2 (1-r)dr\right)^{\frac{1}{2}}, \ \zeta \in \partial\mathbb{B}^n$$

is the Littlewood-Paley type $\mathscr{G}$-function (see [1, 6, 9]).

If we consider bounded symmetric domains $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, the results in [1, 6] can not be used except the case $\Omega = \mathbb{B}^n$, because if $\Omega \neq \mathbb{B}^n$, then its boundary is not smooth. So, it is natural to consider a generalization of Theorem B to bounded symmetric domains Ω. In this talk, we extend Theorem B to bounded symmetric domains Ω.

A classical result of Hardy and Littlewood asserts that if $p \in (0, \infty]$, $\alpha \in (1, \infty)$ and f is a holomorphic function in $\mathbb{D}$, then (cf. [4, 5])

$$M_p(r, f') = O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha}\right) \quad \text{as } r \to 1^-$$

if and only if

$$M_p(r, f) = O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha-1}\right) \quad \text{as } r \to 1^-.$$

In this talk, we also consider an extension of this result to bounded symmetric domains.

References

[1] P. Ahern, J. Bruna, Maximal and area integral characterization of Hardy-Sobolev spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Rev. Mat. Iberoam.* **4** (1988), 123–153.

[2] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of Hardy spaces and composition operators in bounded symmetric domains, *Math. Z.* **311** (2025), 16.

[3] K. T. Hahn, J. Mitchell, H^p spaces on bounded symmetric domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **146** (1969), 521–531.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of conjugate functions, *J. Reine Angrew. Math.* **167**(1931), 405–423.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.* **34**(1932), 403–439.

[6] S. G. Krantz, S. Y. Li, Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in $\mathbb{C}^n$, *Complex Variables* **32** (1997), 373–399.

[7] M. Pavlović, On the Littlewood-Paley g-function and Calderón's area theorem, *Expo. Math.* **31**(2013), 169–195.

[8] J. H. Shapiro, Linear topological properties of the harmonic Hardy spaces h^p for $0 < p < 1$, *Illinois J. Math.* **29** (1985), 311–339.

[9] E. Stein, Some problems in harmonic analysis, *Proceedings of symposium in pure mathematics,* **35** (1979), 3–19.

Hardy spaces on bounded symmetric domains II

Composition operators

Shaolin CHEN (Guangxi Normal University)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1

This is an announcement of [2]. Let Ω be a domain in $\mathbb{C}^n$. For a given $\phi \in H(\Omega, \mathbb{D})$, the composition operator $C_\phi : \mathscr{PH}(\mathbb{D}) \to \mathscr{PH}(\Omega)$ is defined by $C_\phi(f) = f \circ \phi$, where $f \in \mathscr{PH}(\mathbb{D})$. In 1987, Shapiro [4] gave a complete characterization of compact composition operators on $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$, with a number of interesting consequences for peak sets, essential norm of composition operators, and so on.

A continuous non-decreasing and unbounded function $\omega : [0,1) \to (0,\infty)$ is called a weight. A weight ω is called doubling if there is a constant $C > 1$ such that

$$\omega(1-s/2) < C\omega(1-s), \quad s \in (0,1].$$

$\omega(t) = 1/(1-t)^\alpha$ and $\omega(t) = 1/(1-t^2)^\alpha$ with $\alpha > 0$ are doubling functions.

Let Ω be a bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$ with origin. Then its Minkowski function is a norm on $\mathbb{C}^n$ and will be denoted by $\|\cdot\|_\Omega$. For a weight ω, we use $\mathscr{B}_\omega(\Omega)$ to denote the pluriharmonic Bloch type space consisting of all $f = f_1 + \overline{f_2} \in \mathscr{PH}(\Omega)$ with the norm

$$\|f\|_{\mathscr{B}_\omega(\Omega)} := |f(0)| + \sup_{z\in\Omega} \mathscr{B}_\omega^f(z) < \infty,$$

where $\mathscr{B}_\omega^f(z) = \Lambda_f(z)/\omega(|z|)$ and

$$\Lambda_f(z) = \sup\{|Df_1(z)w| + |Df_2(z)w| : \|w\|_\Omega = 1\}, \quad z \in \Omega.$$

Then $\mathscr{B}_\omega(\Omega)$ is a complex Banach space. Furthermore, let

$$\|f\|_{\mathscr{B}_\omega(\Omega),s} := \sup_{z\in\Omega} \mathscr{B}_\omega^f(z) < \infty$$

be the semi-norm. If $f \in \mathscr{B}_\omega(\Omega)$, then we call f a pluriharmonic Bloch type function.

Let $D_\alpha^n(\zeta)$ denote the Koranyi approach domain defined by

$$D_\alpha^n(\zeta) = \left\{ z \in \mathbb{B}^n : \ |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \frac{\alpha}{2}(1-|z|^2) \right\}. \tag{1}$$

Kwon [3] investigated some characterizations of composition operators of the Bloch space on $\mathbb{D}$ to the holomorphic Hardy spaces on $\mathbb{B}^n$ to be bounded or compact.

Theorem D. ([3, Theorems 5.1 and 5.10]) *Let $p \in (0,\infty)$, $1 < \alpha < \infty$ and $\omega(t) = 1/(1-t^2)$ for $t \in [0,1)$. If $\phi \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{D})$, then the followings are equivalent:*

(1) $\int_{\partial\mathbb{B}^n} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla(\phi\circ\varphi_{r\zeta})(0)|^2}{(1-|\phi(r\zeta)|^2)^2} \frac{dr}{1-r} \right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta) < \infty$, *where $\varphi_{r\zeta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ with $\varphi_{r\zeta}(0) = r\zeta$;*

(2) $\int_{\partial\mathbb{B}^n} \left(\int_{D_\alpha^n(\zeta)} \frac{|\nabla(\phi\circ\varphi_z)(0)|^2}{(1-|\phi(z)|^2)^2} \frac{dV(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}} \right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta) < \infty$, *where dV denotes the Lebesgue volume measure of $\mathbb{C}^n$, and $\varphi_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ with $\varphi_z(0) = z$;*

*1 e-mail: `hi.hamada01@gmail.com`
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 31C10, 32A18, 32M15, 47B33; Secondary: 30H30.
Keywords: Bloch type space, Bounded symmetric domains, Composition operator, Hardy space .

(3) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\cap H(\mathbb{D})\to\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is a bounded operator;*

(4) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\cap H(\mathbb{D})\to\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is compact.*

The characterizations of composition operators from harmonic Bloch type spaces on $\mathbb{D}$ to pluriharmonic Hardy spaces on $\mathbb{B}^n$ by using doubling weight was given in [1].

Theorem E. *Let $p\in(0,\infty)$, $\alpha\in(1,\infty)$ and ω be a doubling weight. If $\phi:\ \mathbb{B}^n\to\mathbb{D}$ is holomorphic, then the followings are equivalent:*

(1) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is a bounded operator;*

(2) $\int_{\partial\mathbb{B}^n}\left(\int_0^1|\nabla\phi(r\zeta)|^2\omega^2(|\phi(r\zeta)|)(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(\zeta)<\infty;$

(3) $\int_{\partial\mathbb{B}^n}\left(\int_{D^n_\alpha(\zeta)}|\nabla\phi(z)|^2\omega^2(|\phi(z)|)(1-|z|)^{1-n}dV(z)\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(\zeta)<\infty;$

(4) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is compact.*

In the case ϕ maps $\mathbb{D}$ into $\mathbb{D}$, the following characterization was obtained in [1].

Theorem G. *Let $p\in(0,\infty)$, $1<\alpha<\infty$, ω be a doubling weight and $\phi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ be a holomorphic function. Then the followings are equivalent:*

(1) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{D})$ *is a bounded operator;*

(2) $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1|\phi'(re^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(re^{i\theta})|)(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty;$

(3) $\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^\infty 2^{-2k}|\phi'(r_ke^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(r_ke^{i\theta})|)\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$, *where $r_k=1-2^{-k}$;*

(4) $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(1-r)\sup_{0<\rho<r}\left(|\phi'(\rho\, e^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(\rho\, e^{i\theta})|)\right)dr\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty;$

(5) $\int_0^{2\pi}\left(\int_{D^1_\alpha(\zeta)}|\nabla\phi(z)|^2\omega^2(|\phi(z)|)dA(z)\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$, *where dA denotes the Lebesgue area measure of $\mathbb{C}$;*

(6) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{D})$ *is compact.*

In this talk, by using doubling weight and a new characterization of pluriharmonic Hardy space, we establish the characterizations of composition operators on harmonic Bloch type spaces on $\mathbb{D}$ and pluriharmonic Hardy spaces on bounded symmetric domains Ω to be bounded or compact, which extends Theorems D, E and G.

References

[1] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of composition operators on Bloch and Hardy type spaces, *Results Math.* **79** (2024), Paper No. 95, 24 pp.

[2] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of Hardy spaces and composition operators in bounded symmetric domains, *Math. Z.* **311** (2025), 16.

[3] E. G. Kwon, Hyperbolic mean growth of bounded holomorphic functions in the ball, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 1269–1294.

[4] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator, *Ann. Math.* **125** (1987), 375–404.

Roper-Suffridge type extension operators for univalent mappings revisited

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This is an announcement of [7]. Let $\mathcal{L}S$, S, S^* and K denote the family of all normalized locally univalent, univalent, starlike and convex functions on the unit disc $\mathbb{D}$, respectively. The Roper-Suffridge extension operator is defined for $f \in \mathcal{L}S$ by

$$\Phi_n(f)(z) = F(z) = \left(f(z_1), \sqrt{f'(z_1)}z'\right), \quad z = (z_1, z') \in \mathbb{B}^n,$$

where the branch of the square root is chosen such that $\sqrt{f'(0)} = 1$. Roper and Suffridge [9] proved that if $f \in K$ then $\Phi_n(f) \in K(\mathbb{B}^n)$, and in [5] it was shown that if $f \in S^*$ then $\Phi_n(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$. Graham, Kohr and Kohr [6] showed that if $f \in S$, then $\Phi_n(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain on $\mathbb{B}^n$.

We choose the branches of the power functions such that

$$\left.\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\right|_{z_1=0} = 1 \quad \text{and} \quad \left.(f'(z_1))^{\beta}\right|_{z_1=0} = 1.$$

For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in S$, Graham, Hamada, Kohr and Suffridge [4] considered the operators

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = F_{\alpha,\beta}(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} (f'(z_1))^{\beta} z'\right), \quad z \in \mathbb{B}^n,$$

When $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ we obtain the Roper-Suffridge operator Φ_n.

Let $E = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1/2, \alpha + \beta \le 1\}$. It was shown in [4] that the following extension results are valid for $(\alpha, \beta) \in E$.

(i) $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain for $f \in S$.

(ii) If $f \in S^*$ then $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$.

(iii) If $\alpha \ge 0$ and $\beta \ge 0$ and $n \ge 2$, then $\Phi_{n,\alpha,\beta}(K) \subset K(\mathbb{B}^n)$ iff $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$.

Elin [1] has introduced an approach to extension operators on Banach spaces based on the semigroup theory. Let Y be a complex Banach space and let $r \ge 1$. Also, let

$$\Omega_r = \left\{(z_1, w) \in Z = \mathbb{C} \times Y : |z_1|^2 + \|w\|_Y^r < 1\right\}.$$

Then, the Minkowski functional of Ω_r is a complete norm $\|\cdot\|_Z$ on Z and Ω_r is the unit ball of Z with respect to this norm. Let $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1/r]$, $\alpha + \beta \le 1$ and let $\Phi_{\alpha,\beta} : S \to S(\Omega_r)$ be the Roper-Suffridge type extension operator given by

$$\Phi_{\alpha,\beta}(f)(z_1, w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} (f'(z_1))^{\beta} w\right), \quad (z_1, w) \in \Omega_r.$$

*1 e-mail: `hi.hamada01@gmail.com`
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32H02; Secondary 30C45, 30C55, 30C80, 32K05, 46G20.
Keywords: Carathéodory class, convex mapping, Loewner chain, Roper-Suffridge extension operator, starlike mapping..

Graham, Hamada and Kohr [2] adopted Elin's point of view in [1] and proved that if $f \in S$, then $F = \Phi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain on Ω_r (in the case of g-Loewner chains, see [3]). Roper-Suffridge type extension operator $\Phi_{\alpha,\beta}$ and its variations have been recently studied by many mathematicians (see the references in [1, 3, 7, 8]). Note that in these results, $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/r]$ and $\alpha+\beta \leq 1$, where r is a positive constant which depends on the domain on which $\Phi_{\alpha,\beta}(f)$ is defined.

Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space with $\dim \mathcal{H} \geq 2$ and let B be the unit ball of $\mathcal{H}$. For a fixed unit vector $e_1 \in \mathcal{H}$, we consider the Roper-Suffridge type extension operators as follows. Let $\mathcal{H}_1$ be the orthogonal complement of $\mathbb{C}e_1$. In the case $z = z_1e_1 + w$ with $w \in \mathcal{H}_1$, we use the notation $z = (z_1, w)$. For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, let $\Psi_{\alpha,\beta} : S \to S(B)$ be the Roper-Suffridge type extension operator given by

$$\Psi_{\alpha,\beta}(f)(z_1, w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} (f'(z_1))^{\beta} w \right), \quad (z_1, w) \in B. \tag{1}$$

Until now, it is only known that for the pairs $(\alpha,\beta) \in E$, $\Psi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a normal Loewner chain on B for any $f \in S$ (see e.g. [3]).

In this talk, we give a closed domain D in $\mathbb{R}^2$ such that for $(\alpha,\beta) \in D$, $\Psi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a normal Loewner chain on B for any $f \in S$. Note that $E \subset D$ and D contains points $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ such that $\alpha < 0$ and/or $\beta < 0$. For the proof, we use a new method which is different from those used in [3, 4]. As a corollary, we obtain that for $(\alpha,\beta) \in D$, $\Psi_{\alpha,\beta}$ preserves starlikeness. We also show that if $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1/2)\}$, then the operator $\Psi_{\alpha,\beta}$ does not preserve convexity.

References

[1] M. Elin, Extension operators via semigroups, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), 239–250.

[2] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Extension operators and subordination chains, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), 278–289.

[3] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators in complex Banach spaces. Anal. Math. Phys. 10 (2020), no. 1, 5.

[4] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T. J. Suffridge, Extension operators for locally univalent mappings, Michigan Math. J. 50 (2002), 37–55.

[5] I. Graham, G. Kohr, Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math. 81 (2000), 331–342.

[6] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, Loewner chains and the Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl. 247 (2000), 448–465.

[7] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Roper-Suffridge type extension operators for univalent mappings revisited, J. Math. Anal. Appl., 552 (2025), 129763.

[8] J.R. Muir, Generalized parametric representation and extension operators, J. Math. Anal. Appl. 531 (2024), 127767.

[9] K. Roper, T.J. Suffridge, Convex mappings on the unit ball of $\mathbf{C}^n$, J. Anal. Math. 65 (1995), 333–347.

Koebe one-quarter theorem in infinite dimensions

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This is an announcement of [10]. The famous Koebe one-quarter theorem gives a sharp bound on the size of the image of univalent functions on the unit disc $\mathbb{D}$ locally. In 1907, Koebe [13] discovered that the ranges of all functions in the family S of normalized univalent functions on $\mathbb{D}$ contain a common disc $\{\zeta : |\zeta| < \rho\}$, where ρ is an absolute constant. The Koebe function shows that $\rho \le 1/4$. In 1916, $\rho = 1/4$ was established by Bieberbach [2].

For normalized biholomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, $n \ge 2$, the Koebe one-quarter theorem does not hold in general. Moreover, there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}_\rho = \rho\mathbb{B}$ lies in $f(\mathbb{B})$ for every normalized biholomorphic mapping f in $\mathbb{B}$, where $\mathbb{B}$ is the unit ball of $\mathbb{C}^n$ with respect to a norm on $\mathbb{C}^n$. For example, let

$$f_m(z) = (z_1 - m\sqrt{m^2-1}z_2^2, z_2, \dots, z_n), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{B}^n, \tag{1}$$

where m is a positive integer and $\mathbb{B}^n$ is the Euclidean unit ball of $\mathbb{C}^n$. Then f_m is a normalized biholomorphic mapping on $\mathbb{B}^n$ and for $a_m = (\sqrt{m^2-1}/m, 1/m, 0, \dots, 0) \in \partial\mathbb{B}^n$, we have $f_m(a_m) = (0, 1/m, 0, \dots, 0)$. Therefore, there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}^n_\rho$ lies in $f_m(\mathbb{B}^n)$ for every positive integer m. Moreover, $f_m(z,t) = f_m(e^t z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \ge 0$, where f_m is as in (1), is a Loewner chain such that there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}^n_\rho$ lies in $f_m(\mathbb{B}^n, 0)$ for every positive integer m. Therefore, in several complex variables, we should add some assumptions on biholomorphic mappings f (respectively Loewner chains $f(z,t)$) so that the Koebe one-quarter theorem holds for f (respectively for the first elements $f(\cdot, 0)$).

For normalized biholomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, the following estimate for the first elements f of normal Loewner chains was given by Kohr [14] and Graham, Hamada and Kohr [5].

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \le \|f(z)\| \le \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}. \tag{2}$$

In the case of finite dimensions, the estimate from below in (2) readily implies the Koebe one-quarter theorem (cf. [1] in the case of starlike mappings).

Let $\mathbb{B}$ be the unit ball of a complex Banach space X. In the case of infinite dimensions, Zhang and Liu [16] and Liu and Liu [15] stated Koebe one-quarter type covering theorems for several subclasses of normalized starlike mappings on $\mathbb{B}$. However, they did not give a proof for the covering theorem. Hamada and Kohr [8, Corollary 3.6] proved the estimate (2) for the first elements of normal Loewner chains on the unit ball of a reflexive complex Banach space. In 2002, Hamada and Kohr [7] proved the 1/2-theorem for normalized convex mappings on $\mathbb{B}$. By using a similar method of proof,

*1 e-mail: `hi.hamada01@gmail.com`
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32H02; Secondary 30C45, 30C55, 30C80, 32K05.
Keywords: covering theorem, Koebe one-quarter theorem, Loewner chain, nonlinear resolvent, normal Loewner chain..

the Koebe one-quarter theorem for normalized starlike mappings on $\mathbb{B}$ can be proved. Since $f \in S$ if and only if f is the first element of a normal Loewner chain on the unit disc $\mathbb{D}$, it is interesting to consider the Koebe one-quarter theorem for the first elements of normal Loewner chains on $\mathbb{B}$. However, it is still unknown. Also, the method used in the proof in [7] cannot be applied to the first elements of normal Loewner chains.

For the Bloch constant in higher dimensions, see [3, 6, 12] and the references therein.

In the first part of this talk, we obtain a covering theorem for biholomorphic mappings on bounded domains in a complex Banach space X. Next, as an application of this result, we obtain the Koebe one-quarter theorem for normal Loewner chains on the unit ball $\mathbb{B}$ of X. We give several applications of this result. Finally, as another application of the above covering theorem, we give a covering theorem for nonlinear resolvents on $\mathbb{B}$ (cf. [4]).

References

[1] R. W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 150 (1991), no. 1, 13–22.

[2] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss.: (1916), 940–955.

[3] C.H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), 830–843.

[4] M. Elin, Non-linear resolvents of holomorphically accretive mappings, Anal. Math. Phys. 15 (2025), Paper No. 77, 20 pp.

[5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, Canad. J. Math. 54(2) (2002), 324–351.

[6] H. Hamada, A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math. 137 (2019), 663–677.

[7] H. Hamada, G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 47 (2002), 315–328.

[8] H. Hamada, G. Kohr, Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 49 (2004), 247–264.

[9] H. Hamada, G. Kohr, Loewner PDE, inverse Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family in infinite dimensions, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. XXIV (2023), 2431–2475.

[10] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Koebe one-quarter theorem in infinite dimensions, J. Funct. Anal., 290, no. 2 (2026), 111237.

[11] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Subordination chains and solutions to the Loewner PDE in infinite dimensions, submitted.

[12] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Bieberbach conjecture, Bohr radius, Bloch constant and Alexander's theorem in infinite dimensions, submitted.

[13] P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Physics. Kl., 1907, 191–210.

[14] G. Kohr, Using the method of Löwner chains to introduce some subclasses of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 46 (2001), no. 6, 743–760.

[15] T. Liu, X. Liu, On the precise growth, covering, and distortion theorems for normalized biholomorphic mappings, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004), 404–417.

[16] W. Zhang, T. Liu, On growth and covering theorems of quasi-convex mappings in the unit ball of a complex Banach space, Sci. China Ser. A 45 (2002), no. 12, 1538–1547.

重み付き L^2 近似問題について

高倉 真和 (東京都立大学)*

概要

与えられた複素多様体 X 上で、多重劣調和関数の増加列 $\{\phi_n\}$ が多重劣調和関数 ϕ に収束すると仮定する。本講演では、このときの重み付き Bergman 空間 $H^2(X,\phi_n) = \left\{ f \in \mathcal{O}(X) \mid \int_X |f|^2 e^{-\phi_n} < \infty \right\}$ の安定性について論じる。すなわち、極限空間 $H^2(X,\phi)$ の任意の元が、各段階の空間 $H^2(X,\phi_n)$ の元によってどのように近似できるかを考察する。この近似問題には考えるべき二つの側面がある。ひとつは複素多様体 X の持つ幾何学的条件であり、もうひとつは重みの列 $\{\phi_n\}$ そのものが満たす条件である。この二つの観点を分けて取り上げ、どのような場合に近似が可能となるのかを紹介する。

擬凸な Kähler 多様体 X と、その上の多重劣調和関数 φ を考える。重み付き Bergman 空間は $H^2(X,\varphi) = \left\{ f : X \text{ 上の正則 } (n,0)\text{-form } \mid \int_X |f|^2 e^{-\varphi} < \infty \right\}$ で定義される。ここで $|f|^2 = (\sqrt{-1})^{n^2} f \wedge \overline{f}$ である。本講演では次の重み付き L^2 近似問題を扱う: 多重劣調和関数の増加列 $\{\varphi_i\}$ が各点収束 $\varphi_i \to \varphi$ を満たすとき、

$$(*) \qquad \bigcup_i H^2(X,\varphi_i) \subset H^2(X,\varphi) \text{ が稠密である}$$

が成立するため条件は何か。

任意の多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ に対して $(*)$ が成立するとき、「X は $(*)$ を満たす」と言うことにする。この問題は Taylor[1], Fornæss–Wu [2].[3], Zhou–Li [4] によって研究されており、いずれも Hörmander の L^2 存在定理が主要な道具である。また、Guan-Zhou による強開性定理: $\bigcup_i \mathcal{I}(\varphi_i) = \mathcal{I}(\varphi)$ も重要な役割を果たす。ここに $\mathcal{I}(\varphi)$ は φ の定める乗数イデアル層である。(むしろこの近似問題は強開性予想の大域版である)

1. Taylor の結果: $X = \mathbb{C}^n$ かつ $e^{-\varphi_0}$ が局所可積分であるとき、$H^2\big(\mathbb{C}^n, \varphi_i + \log(1+|z|^2)\big)$ は $(*)$ を満たす。

2. Fornæss–Wu の結果: Taylor の結果を次のように改良した。まず、Guan–Zhou の強開性定理を用いて $e^{-\varphi_0}$ の局所可積分性の仮定を取り除いた。さらに $n=1$ のときには extra weight $\log(1+|z|^2)$ を取り除くことができることを示した。つまり複素平面 $\mathbb{C}$ は $(*)$ を満たす。

3. Zhou–Li の結果: X を Stein 多様体、Ψ を正の階位をもつ多重劣調和関数とする。このとき、任意の多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ に対して $H^2(X, \varphi_i + \Psi)$ は $(*)$ を満たすことを示した。さらに同論文において、hyperconvex な複素多様体 X は $(*)$ を満たすことも証明された。この 3 の証明は、そのまま擬凸 Kähler 多様体へ拡張できる。

* . E-mail: `takakura-masakazu@ed.tmu.ac.jp`

1.　主結果

まず次の幾何学的結果である。

Theorem A. 開リーマン面 X が複素平面への proper な正則写像 $\Phi : X \to \mathbb{C}$ をもつとき、X は $(*)$ を満たす。

この定理は Fornæss–Wu の結果 2 を、より一般的な放物型リーマン面へ拡張するものである。また、証明方法も彼らの方法とは本質的に異なる。Fornæss–Wu の方法は、$\mathbb{C}$ 上の劣調和関数に対する Riesz 型分解定理と Hörmander の L^2 存在定理を組み合わせるものであった。これに対し本定理の証明では、$\log(|\Phi|^2+1)$ を 3 における extra weight Ψ として用いる点が特徴である。また、Theorem A と結果 3 を比較してみたい。ここで扱う放物型リーマン面には、有界な多重劣調和関数が存在しないという特徴がある。一方、3 で登場した hyperconvex 多様体はその逆で、有界な階位劣調和関数の存在によって定義される。しかしこの 2 つのクラスの多様体は、一見対照的でありながら、無限遠での振る舞いが良いという意味で共通している。次に重み φ_i に関する結果を紹介する。

Theorem B. X を擬凸な Kähler 多様体とする。多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ が次の (a),(b) いずれかを満たすとき、$H^2(X, \varphi_i)$ は $(*)$ を満たす。

(a) φ が上に有界である。

(b) ある正の定数 λ が存在して、超関数の意味で

$$dd^c\varphi_i \ \geq \ \lambda\, dd^c\varphi$$

が成立する。

2,3 の証明では強開性定理が用いられていたが、本定理の証明では強開性定理をまったく用いない。むしろ、(a),(b) の系として強開性定理が導かれる。したがって、この結果は強開性定理の別証明を与えていることになる。

参考文献

[1] Taylor,B. A. “On the weighted polynomial approximation of entire functions,” *Pac. J. Math.* **36** (1971), 523 – 539.

[2] Fornæss, J. E. andWu, J.J “A global approximation result by Bert Alan Taylor and strong openness conjecture in $\mathbb{C}^n$ ” *J. Geom. Anal* **28** (2018), 1 – 12.

[3] Fornæss, J. E. andWu, J.J “Weighted approximation in $\mathbb{C}$. Math. Z. 294(3 – 4), 1051 – 1064 (2020) ” *J. Geom. Anal* **294** (2020), 1051 – 1064

[4] Zhou,X.Y, Li,Z “Weighted L2 approximation of analytic sections.(English summary)” *J. Geom. Anal* **32** (2022), no. 2, Paper No. 44, 17 pp.

CR Paneitz 作用素と埋め込み可能性

竹内 有哉　(筑波大学)*

概　要

CR Paneitz 作用素は CR 多様体の埋め込み可能性，CR 山辺の問題，Szegő 核の対数特異性など，CR 幾何における重要な諸問題と密接に関係している．一方で，この作用素は準楕円型ではなく，その解析的性質は一般的な理論からは必ずしも明らかではない．今回の講演では，CR Paneitz 作用素の解析的性質と CR 多様体の埋め込み可能性との関係について紹介する．

本稿では 3 次元強擬凸 CR 多様体における埋め込み可能性と CR Paneitz 作用素の解析的性質との関係について解説する．前半では CR 多様体およびその埋め込み可能性に関する古典的結果を概観し，中盤では CR Paneitz 作用素の定義と基本的性質，特にそのスペクトル論を紹介する．後半では埋め込み可能な場合と埋め込み不可能な場合を対比しつつ CR Paneitz 作用素の振る舞いを考察し，最後に今後の課題として未解決問題を述べる．

1　CR 多様体

CR 多様体は複素多様体の実奇数次元版に当たる幾何学的対象である．そこで CR 多様体の定義を導入するにあたり，まず複素多様体に関する基本的事項を復習する．X を n 次元複素多様体として，$(U;z)$ を正則局所座標とする．このとき U 上の複素ベクトル束

$$T^{1,0}U \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n\}$$

が定まる．局所座標の変換関数が正則関数であることから，このベクトル束は局所座標の取り方に依らず，X 上のランク n の複素部分ベクトル束 $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ を定める．このベクトル束は次の二つの条件を満たす：

$$T^{1,0}X \cap \overline{T^{1,0}X} = 0, \qquad [\Gamma(T^{1,0}X), \Gamma(T^{1,0}X)] \subset \Gamma(T^{1,0}X).$$

さらにこれらの条件を満たす複素部分ベクトル束が与えられると，X には一意的に複素構造が定まる．これが有名な Newlander–Nirenberg の定理である．

この定理を踏まえて CR 多様体を次のように定義する．

---

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 数理物質系 数学域
e-mail: ytakeuchi@math.tsukuba.ac.jp,yuya.takeuchi.math@gmail.com
web: https://sites.google.com/view/yuya-takeuchi-japanese/

本研究は科研費 (課題番号:JP21K13792，JP25K17247) の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 32V20, 58J50
キーワード：CR Paneitz 作用素，埋め込み可能性，Heisenberg 解析

定義 1.1: CR 構造・CR 多様体

M を実 $(2n+1)$ 次元の多様体，$T^{1,0}M$ を $TM \otimes \mathbb{C}$ のランク n の複素部分ベクトル束とする．$T^{1,0}M$ が **CR 構造**であるとは，次の二つの条件を満たすことをいう：

$$T^{1,0}M \cap \overline{T^{1,0}M} = 0, \qquad [\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M).$$

このとき組 $(M, T^{1,0}M)$ を **CR 多様体**という．

CR 多様体の典型例として複素多様体内の実超曲面が挙げられる．X を $(n+1)$ 次元の複素多様体，M を X 内の実超曲面とする．このとき M は

$$T^{1,0}M := (T^{1,0}X)|_M \cap (TM \otimes \mathbb{C})$$

によって自然な CR 構造をもつ．

$(M, T^{1,0}M)$ を CR 多様体とする．$f \in C^\infty(M)$ が **CR 正則関数**であるとは，任意の $Z \in T^{1,0}M$ に対して $\overline{Z}f = 0$ が成り立つことをいう．これは $T^{0,1}M := \overline{T^{1,0}M}$ として

$$\overline{\partial}_b \colon C^\infty(M) \to \Gamma((T^{0,1}M)^*); \qquad f \mapsto (df)|_{T^{0,1}M}$$

と定めると，f が CR 正則関数であることは $\overline{\partial}_b f = 0$ と同値である．正則関数に対する最大値の原理から，閉複素多様体上の正則関数は定数しか存在しない．一方で CR 正則関数に対しては最大値の原理が一般には成り立たず，閉多様体であっても非自明な CR 正則関数が存在しうる．実際，M が $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面のとき，$\mathbb{C}^{n+1}$ 上の正則関数を M に制限したものは全て CR 正則関数である．また $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ が **CR 多重調和関数**であるとは，局所的に CR 正則関数の実部として表されることをいう．CR 多重調和関数全体の空間を $\mathscr{P}$ で表す．

$(M, T^{1,0}M)$ を CR 多様体とする．以下では $\theta(T^{1,0}M) = 0$ を満たす至る所 0 ではない実 1 形式 θ が存在することを仮定する．このとき $T^{1,0}M$ 上の Hermite 形式である **Levi 形式** L_θ を

$$L_\theta(Z, W) := -\sqrt{-1}\, d\theta(Z, \overline{W})$$

によって定める．

定義 1.2: 強擬凸

$(M, T^{1,0}M)$ が**強擬凸**であるとは，Levi 形式 L_θ が正定値であるような θ が存在することである．このとき θ は M 上の接触形式である．このような θ は正の関数倍を除いて一意に決まる．

強擬凸 CR 多様体の例として，$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の強凸実超曲面，佐々木多様体，孤立特異点のリンクなどが挙げられる．

2 強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性

CR 多様体の埋め込みについて述べる前に，複素多様体の場合の結果を簡単に復習する．複素多様体の埋め込みに関しては次の二つの結果がよく知られている：

- Hodge 多様体は複素射影空間に正則に埋め込むことができる．（**小平埋め込み**）
- Stein 多様体は複素 Euclid 空間に正則に埋め込むことができる．

一方で最大値の原理から，閉複素多様体を複素 Euclid 空間に正則に埋め込むことはできない．

CR 多様体の場合にも，埋め込みの対象として複素 Euclid 空間を考えるのが自然である．具体的には次のように定義する．

定義 2.1: CR 埋め込み・埋め込み可能

$(M, T^{1,0}M)$ を $(2n+1)$ 次元 CR 多様体とする．多様体としての埋め込み $F\colon M \to \mathbb{C}^N$ が **CR 埋め込み**であるとは，$F_*(T^{1,0}M) \subset T^{1,0}\mathbb{C}^N$ を満たすことをいう．また CR 多様体 $(M, T^{1,0}M)$ が**埋め込み可能**であるとは，CR 埋め込み $F\colon M \to \mathbb{C}^N$ が存在することをいう．

F の成分を $f_1, \ldots, f_N$ としたとき，F が CR 埋め込みであることと各 f_i が CR 正則関数であることは同値である．複素多様体には正則局所座標が存在するため，各点の近傍から複素 Euclid 空間への正則な局所埋め込みが常に存在する．これに対して CR 多様体の場合には，大域的な埋め込みだけでなく局所的な埋め込み可能性も非自明な問題である．

強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性については，多様体の次元によって結果が大きく異なる．まず 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体には大域的に埋め込み不可能な例が存在することが知られている．（具体例については後述する．）さらに Nirenberg [Nir74] が局所的にも埋め込み不可能な 3 次元強擬凸 CR 構造の例を構成した．一方で Boutet de Monvel [BdM75] は 5 次元以上の閉強擬凸 CR 多様体が必ず大域的に埋め込み可能であることを証明した．また局所埋め込みについては，9 次元以上の場合を倉西 [Kur82] が，7 次元の場合を赤堀 [Aka87] がそれぞれ解決している．5 次元における局所埋め込み可能性は現在でも未解決である．以上をまとめると強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性については下の表のようになる：

	局所的（一点の近傍）	大域的（閉多様体全体）
3 次元	✗	✗
5 次元	?	✓
7 次元以上	✓	✓

次に 3 次元における大域的に埋め込み不可能な最も基本的な例について説明する．$\mathbb{C}^2$

内の 3 次元球面 S^3 を考える．複素ベクトル場 L を

$$L := \overline{w}\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial w}$$

と定めると，

$$T^{1,0}S^3 = (T^{1,0}\mathbb{C}^2)|_{S^3} \cap (TS^3 \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C}L$$

が成り立つ．$0 < |t| < 1$ に対して **Rossi 球面** $(S^3_t, T^{1,0}S^3_t)$ を

$$(S^3_t, T^{1,0}S^3_t) := (S^3, \mathbb{C}(L + t\overline{L}))$$

で定義する．これは強擬凸 CR 多様体である．また Rossi 球面上の CR 正則関数は必ず偶関数になる [CS01]．このことから Rossi 球面は埋め込み不可能であることがしたがう．この例の一般化として，C^0 ノルムが十分小さい $\phi \in C^\infty(S^3)$ に対して強擬凸 CR 多様体 $(S^3, \mathbb{C}(L + \phi\overline{L}))$ を考えることができる．このとき「ほとんど全ての」ϕ に対して，$(S^3, \mathbb{C}(L + \phi\overline{L}))$ は埋め込み不可能であることが示されている [BE90]．

さらに強擬凸 CR 多様体は下部構造として接触構造をもつが，埋め込み可能な場合にはこの接触構造は Stein fillable という性質をもち，それに伴い様々な制約が成り立つことが知られている [Gei08]．特にほとんどの接触構造は埋め込み可能な強擬凸 CR 構造を許容しない．

以上のように 3 次元の場合には多くの閉強擬凸 CR 多様体は埋め込み不可能である．そこで 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体が埋め込み可能になる条件を考えるのは自然かつ重要な問題である．この条件を記述するために，$(M, T^{1,0}M)$ 上の接触形式 θ を一つ固定する．このとき Levi 形式 L_θ により $(T^{0,1}M)^*$ 上の Hermite 計量が定まる．また $\theta \wedge d\theta$ は M 上の体積形式を定めるので，$\overline{\partial}_b$ の形式的自己共役 $\overline{\partial}_b^*\colon \Gamma((T^{0,1}M)^*) \to C^\infty(M)$ が定義できる．これを用いて **Kohn Laplacian** $\Box_b = \overline{\partial}_b^*\overline{\partial}_b$ が定まる．“Laplacian” という名称ではあるが，この作用素は準楕円型ですらない．また閉多様体であっても $\operatorname{Ker}\Box_b$ は無限次元になり得る．$(M, T^{1,0}M)$ の埋め込み可能性は $\Box_b$ の解析的性質で記述できる．

定理 2.2: 閉値域 $\Longleftrightarrow$ 埋め込み可能 [Bur79, Koh86]

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である必要十分条件は $\Box_b$ が閉値域をもつこと，すなわち 0 が $\Box_b$ のスペクトル $\operatorname{Spec}\Box_b$ の孤立点となることである．

3 CR Paneitz 作用素

CR 幾何における基本的な微分作用素として，前節で導入した Kohn Laplacian $\Box_b$ がある．しかしその解析的性質は CR 山辺の問題や Szegő 核の対数特異性といった CR 幾何における代表的な幾何的・解析的問題とは必ずしも直接的に結びついているわけではない．本稿の主題である CR Paneitz 作用素は $\Box_b$ から構成される 4 階の共形不変な微分

作用素であり，これらの問題を統一的に捉える枠組みを与える．一方でこの作用素は本質的に非楕円型であるため，その解析的性質の理解は容易ではない．

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体として，M 上の接触形式 θ を固定する．このとき **CR Paneitz 作用素** $P\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は

$$P := \overline{\Box}_b \Box_b + (\text{低階の項})$$

という形の線形偏微分作用素として定義される．ここで低階の項の部分は θ に関する田中・Webster 接続を用いて具体的に記述できるが，以下では本質的に寄与しないので省略する．CR Paneitz 作用素の基本的な性質として以下が挙げられる：

- P は 4 階の形式的自己共役な線形偏微分作用素である．
- $\hat{\theta} = e^{\Upsilon}\theta$ という共形変換に対して $\widehat{P} = e^{-2\Upsilon}P$ という変換則を満たす．
- P は準楕円型ではない．
- $\operatorname{Ker} P$ は無限次元になることがある．

特に P の変換則から，$C^\infty(M, \mathbb{R})$ 上の汎関数

$$\mathcal{P}\colon C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \qquad u \mapsto \int_M u(Pu)\, \theta \wedge d\theta$$

は接触形式の取り方によらない．この汎関数が常に非負であるとき，P は**非負定値**であるといい，$P \geq 0$ と書くことにする．この性質は $(M, T^{1,0}M)$ の埋め込み可能性と深く関係していることが知られている．

定理 3.1: Scal > 0 & $P \geq 0 \implies$ 埋め込み可能性 [CCY12]

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．θ から定まる田中・Webster 接続のスカラー曲率 Scal_θ が正で CR Paneitz 作用素 P が非負定値であれば，$(M, T^{1,0}M)$ は埋め込み可能である．

次に P の非負定値性と CR 山辺の問題との関係について述べる．以下では 3 次元の場合に限る．$(M, T^{1,0}M)$ 上の接触形式 θ に対して汎関数

$$\mathcal{E}(\theta) := \frac{\int_M \mathrm{Scal}_\theta\, \theta \wedge d\theta}{\left(\int_M \theta \wedge d\theta\right)^{1/2}}$$

を考える．この汎関数は下に有界であり，その下限

$$Y(M, T^{1,0}M) := \inf_\theta \mathcal{E}(\theta)$$

を実現する接触形式を **CR 山辺接触形式**と呼ぶことにする．Jerison と Lee により，常に $Y(M, T^{1,0}M) \leq Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ が成り立つこと，さらに $Y(M, T^{1,0}M) < Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ または $(M, T^{1,0}M) = (S^3, T^{1,0}S^3)$ の場合には CR 山辺接触形式が存在することが示

された [JL87, JL88, JL89]．残された問題は「$Y(M,T^{1,0}M) = Y(S^3,T^{1,0}S^3)$ を満たす $(M,T^{1,0}M)$ が $(S^3,T^{1,0}S^3)$ 以外に存在するか？」という問いである．これは CR 幾何における正質量定理と密接に関係している．$P \geq 0$ という仮定の下では，そのような CR 多様体は $(S^3,T^{1,0}S^3)$ に限られることが知られている．

定理 3.2: $P \geq 0 \Longrightarrow$ CR 山辺接触形式の存在 [CMY17]

$(M,T^{1,0}M)$ を CR Paneitz 作用素 P が非負定値であるような 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$Y(M,T^{1,0}M) = Y(S^3,T^{1,0}S^3)$ が成り立てば，$(M,T^{1,0}M)$ は $(S^3,T^{1,0}S^3)$ と同型である．特に P が非負定値であるような $(M,T^{1,0}M)$ は CR 山辺接触形式をもつ．

一方で Rossi 球面 $(S^3_t,T^{1,0}S^3_t)$ 上の CR Paneitz 作用素は負の固有値をもつため，上記の定理の仮定は満たしていない．実際，$(S^3_t,T^{1,0}S^3_t)$ 上には CR 山辺接触形式が存在しないことが比較的最近示された [CMY23]．

最後に CR Paneitz 作用素と Szegő 核との関係について述べる．Ω を 2 次元複素多様体内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ強擬凸領域として，$\partial\Omega$ 上の接触形式 θ を固定する．Ω 上の正則関数の境界値として実現できる $\partial\Omega$ 上の L^2 関数全体の空間を **Hardy 空間**といい，$H_\theta(\Omega)$ で表す．これは再生核 Hilbert 空間であり，対応する再生核 S_θ を **Szegő 核**という．ρ を Ω の定義関数とすると，S_θ の対角成分 $S_\theta(z,\overline{z})$ は

$$S_\theta(z,\overline{z}) = \phi_\theta \rho^{-2} + \psi_\theta \log(-\rho).$$

という境界挙動をもつ．ここで ϕ_θ と ψ_θ は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな関数である．特に $\psi_\theta|_{\partial\Omega}$ は定数倍を除いて **CR Q-曲率** Q_θ と一致することが知られている [Hir93, FH03]．さらに接触形式の共形変換 $\hat{\theta} = e^{\Upsilon}\theta$ に対して，CR Q-曲率は

$$e^{2\Upsilon} Q_{\hat{\theta}} = Q_\theta + P\Upsilon$$

という変換則を満たす．したがって Szegő 核の対数特異性を理解する上でも CR Paneitz 作用素の解析的性質は本質的な役割を果たす．CR Q-曲率が恒等的に 0 になる接触形式として，**擬 Einstein 接触形式**という「弱い」Einstein 条件を満たす接触形式が知られている．擬 Einstein 接触形式は一般の強擬凸 CR 多様体には存在しないが，$\mathbb{C}^2$ 内の実超曲面に対しては必ず存在することが分かっている．

4 CR Paneitz 作用素のスペクトル

$(M,T^{1,0}M)$ を（必ずしも埋め込み可能とは限らない）3 次元閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．このとき前節で述べたように，CR Paneitz 作用素 P は形式的自己共役作用素である．しかしながら Laplacian のような楕円型作用素とは異なり，以下に挙げるような基礎的な問題でさえ自明ではない：

- P は $L^2(M)$ 上の非有界作用素として自己共役拡張をもつか？
- P のスペクトル $\mathrm{Spec}\, P$ はどのような分布をもつか？
- P の固有関数はどの程度の正則性をもつか？

これらの問題に対して，私は以下の結果を得た．

定理 4.1: CR Paneitz 作用素のスペクトル [Tak24]

$(M, T^{1,0}M)$ 上の CR Paneitz 作用素 P は本質的自己共役である，すなわち一意的な自己共役拡張をもつ．そのスペクトル $\mathrm{Spec}\, P$ の 0 以外の点は全て孤立している．さらに任意の $\lambda \in \mathrm{Spec}\, P \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{Ker}(P - \lambda I)$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間である．

上記の定理で 0 が $\mathrm{Spec}\, P$ の孤立点であるかどうかは分かっていない．ただし後述するように，$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である場合には，0 も孤立点であることが示されている．

証明の方針について説明する前に，楕円型の場合における標準的な議論を簡単に復習する．A を閉多様体上の k 階楕円型作用素とする．このとき

$$AB \sim BA \sim I$$

を満たす $-k$ 階の擬微分作用素 B が存在する．ここで $A \sim B$ は $A - B$ が smoothing 作用素であることを表す．この事実から A の最大閉拡張は自己共役であることがしたがう．さらに B が滑らかさを向上させることとコンパクト作用素であることから，スペクトルの離散性および固有関数の正則性も導かれる．この場合には 0 も $\mathrm{Spec}\, A$ の孤立点であり，$\mathrm{Ker}\, A$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間となる．

それでは定理 4.1 の証明の方針について説明する．前述のとおり，CR Paneitz 作用素 P に対しては $\mathrm{Ker}\, P$ は無限次元になる場合があるため，楕円型の場合のような B を構成することはできない．そこで M 上の接触構造を反映した擬微分作用素の理論である **Heisenberg 解析**を用いる．この枠組みにより，次の条件を満たす 0 階の Heisenberg 擬微分作用素 Π と -4 階の Heisenberg 擬微分作用素 G を構成することができる：

$$GP + \Pi \sim PG + \Pi \sim I, \qquad \Pi^* \sim \Pi^2 \sim \Pi, \qquad \Pi P \sim P\Pi \sim 0.$$

Π と G はそれぞれ $\mathrm{Ker}\, P$ への直交射影と P の Green 作用素に対応する Heisenberg 擬微分作用素である．これらを用いることで，P の最大閉拡張が自己共役であることが示される．さらに E を P に付随する単位の分解として，$\mu \geq 0$ に対して $\pi_\mu := E([-\mu, \mu])$ と定める．このとき $P\pi_\mu$ は smoothing 作用素であることが分かる．$\mathrm{Spec}\, P\pi_\mu = \mathrm{Spec}\, P \cap [-\mu, \mu]$ であることと，コンパクト作用素のスペクトルに関する一般論を併せることで，定理 4.1 がしたがう．

5　埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素

$(M, T^{1,0}M)$ を埋め込み可能な 3 次元閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．このとき前節の Π として，$\Pi^* = \Pi$ かつ $P\Pi = 0$ を満たすものを選ぶことができる．特に $\mathrm{Ran}\,\Pi \subset \mathrm{Ker}\,P$ であることから

$$\pi_\mu \Pi = \Pi \pi_\mu = \Pi$$

が成り立つ．$R \coloneqq GP + \Pi - I$ と定めると R は smoothing 作用素であり，

$$E([-\mu, \mu] \setminus \{0\}) = \pi_\mu - \pi_0 = (GP + \Pi - R)(\pi_\mu - \pi_0) = GP\pi_\mu - R(\pi_\mu - \pi_0)$$

となる．ここで右辺は $L^2(M)$ から $C^\infty(M)$ への連続線形作用素を定めており，特にコンパクト作用素である．よって直交射影 $E([-\mu, \mu] \setminus \{0\})$ は有限階作用素である．したがって $\mathrm{Spec}\,P \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．このことから 0 も $\mathrm{Spec}\,P$ の孤立点であり，P は閉値域をもつことが分かる．また $\mathrm{Ker}\,P$ への直交射影 π_0 が 0 階の Heisenberg 擬微分作用素であることも示すことができ，特に π_0 は $C^\infty(M)$ を $C^\infty(M)$ にうつす．以上の議論により，Hsiao による次の結果の別証明が得られる．

定理 5.1: 埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素 I [Hsi15]

$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき $\mathrm{Spec}\,P$ は $\mathbb{R}$ の離散部分集合である．また任意の $\lambda \in \mathrm{Spec}\,P \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{Ker}(P - \lambda I)$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間である．さらに $\mathrm{Ker}\,P \cap C^\infty(M)$ は $\mathrm{Ker}\,P$ において稠密である．

実は埋め込み可能な場合には $\mathrm{Spec}\,P$ の分布についてさらに詳しい構造が分かっている．

定理 5.2: 埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素 II [Tak20]

$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき CR Paneitz 作用素 P は非負定値であり，$\mathrm{Spec}\,P \subset [0, \infty)$ である．また $\mathrm{Ker}\,P \cap C^\infty(M)$ は $\mathscr{P} \otimes \mathbb{C}$ に一致する．

この定理の証明は Siu [Siu80] と Sampson [Sam86] による調和写像に関する議論を境界をもつ領域上の調和関数に適用することで得られる．$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき非特異複素射影曲面 X 内の強擬凸領域 Ω であって，$(M, T^{1,0}M)$ が $(\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega)$ と同型となるものが存在する [Lem95]．以下では $(M, T^{1,0}M)$ と $(\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega)$ を同一視する．また Ω 上の完備 Kähler 計量 ω_+ であって，境界で複素双曲計量に漸近するものを構成することができる．

実数値関数 $u \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して，u を境界値とする調和関数 $\tilde{u}$ を考える．(ω_+ に関する Laplacian は境界で退化するためこのような拡張の存在は自明ではないが，今回の

設定においては [EMM91] で証明されている.）このとき Ω 内の各点において

$$dd^c\tilde{u}\wedge dd^c\tilde{u}\le 0$$

が成り立つ．これを積分して Stokes の定理を適用すると

$$0\ge\int_\Omega dd^c\tilde{u}\wedge dd^c\tilde{u}=\int_\Omega d(d^c\tilde{u}\wedge dd^c\tilde{u})=\int_{\partial\Omega} d^c\tilde{u}\wedge dd^c\tilde{u}$$

が得られる．この右辺を田中・Webster 接続を用いて計算して整理すると $-\int_{\partial\Omega}u(Pu)\,\theta\wedge d\theta$ に一致することが分かる．このことから P は非負定値である．また $Pu=0$ のとき，Ω 上で $dd^c\tilde{u}=0$ が成り立つため，$\tilde{u}$ は Ω 上の多重調和関数である．u は多重調和関数の境界値であるため，$\partial\Omega$ 上の CR 多重調和関数である．

P の非負定値性を定理 3.1 や定理 3.2 と組み合わせることで以下の定理を得る．

定理 5.3: CR Paneitz 作用素と埋め込み可能性

$(M,T^{1,0}M)$ を $Y(M,T^{1,0}M)>0$ を満たす 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$(M,T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である必要十分条件は CR Paneitz 作用素 P が非負定値となることである．

定理 5.4: 埋め込み可能 $\Longrightarrow$ CR 山辺接触形式の存在

$(M,T^{1,0}M)$ が埋め込み可能な 3 次元閉強擬凸 CR 多様体ならば，$(M,T^{1,0}M)$ は CR 山辺接触形式をもつ．

また $\operatorname{Ker} P\cap C^\infty(M)$ が CR 多重調和関数の空間に一致することから，Szegő 核の対数特異性に対して次の結果が得られる．

定理 5.5: Szegő 核の対数特異性

Ω が 2 次元複素多様体内の強擬凸領域で，その境界 $\partial\Omega$ は擬 Einstein 接触形式をもつとする．$\partial\Omega$ 上の接触形式 θ に対して $\psi_\theta|_{\partial\Omega}=0$ となる必要十分条件は θ が擬 Einstein 接触形式であることである．さらに $\psi_\theta=O(\rho^3)$ となる必要十分条件は $\partial\Omega$ が局所的に $(S^3,T^{1,0}S^3)$ と同型になることである．

この定理の前半部分は，$\partial\Omega$ が transverse symmetry をもつ場合について平地 [Hir93] によって既に証明されていたが，定理 5.2 によって一般の場合に拡張することができた．θ' を境界上の擬 Einstein 接触形式として，$\theta=e^\Upsilon\theta'$ と表す．このとき $Q_\theta=Q_{\theta'}=0$ であることから $P\Upsilon=0$ が成り立つ．よって Υ は CR 多重調和関数であり，θ 自身も擬 Einstein 接触形式となる．さらに平地・小松・中澤 [HKN93] による結果を用いることで後半の結果もしたがう．

6 Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素

Rossi 球面は強擬凸でありながら埋め込み不可能な最も基本的な例として知られている．前節では埋め込み可能な場合における CR Paneitz 作用素の性質を紹介したが，これらの結果が埋め込み不可能な場合にどこまで成立するかについては，一般にはほとんど分かっていない．本節では Rossi 球面を例として取り上げ，埋め込み不可能な場合に CR Paneitz 作用素の性質がどのように変化するかを具体的に考察し，その過程で明らかになったいくつかの現象を紹介する．

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，次数 k の球面調和関数の空間を $\mathcal{SH}_k$ で表す．このとき

$$L^2(S^3) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{SH}_k$$

という直交直和分解が得られる．$l \in \mathbb{Z}_{>0}$ および $1 \leq j \leq l$ に対して

$$v_j^{(l)} := L^{2j-2}(z^{2l-1}) \in \mathcal{SH}_{2l-1}$$

と定める．このとき $v_1^{(l)}, \ldots, v_l^{(l)}$ は一次独立であり，

$$V^{(l)} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1^{(l)}, \ldots, v_l^{(l)}\} \subset \mathcal{SH}_{2l-1}$$

は Rossi 球面 $(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上の CR Paneitz 作用素 P_t によって不変である．この基底に関して

$$\mathcal{P}_t^{(l)} := P_t|_{V^{(l)}}$$

の行列表示を考えると，その行列式が

$$\det \mathcal{P}_t^{(l)} < 0$$

となることが分かる．これより次の結果が得られる．

定理 6.1: Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素

Rossi 球面 $(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上の CR Paneitz 作用素 P_t は負の固有値を無限個もつ．

Rossi 球面のパラメータに $t = 0$ を代入すると，これは標準的な CR 球面に一致する．この場合には埋め込み可能であるため，対応する CR Paneitz 作用素 P_0 は非負定値である．したがって上記の定理は，パラメータをわずかに動かすだけで，負の固有値が無限個現れることを意味している．

7 今後の課題

定理 5.1 および定理 5.2 が埋め込み不可能な場合にどこまで成り立つかという問題は現在のところほとんど分かっていない．特に次のような問題が挙げられる．

問題 7.1: CR Paneitz 作用素の閉値域性

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素 P は閉値域をもつか？言い換えると 0 は $\operatorname{Spec} P$ の孤立点となるか？

問題 7.2: CR Paneitz 作用素の核

埋め込み不可能な CR 多様体において，$\mathscr{P} \otimes \mathbb{C}$ は $\operatorname{Ker} P$ 内の稠密部分空間であるか？

前者については Rossi 球面の場合についても依然として未解決である．Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素が負の固有値を無限個もつことは分かっているが，その事実は行列式の計算に基づくものであり，負の固有値の詳細な分布については依然として明らかではない．一方で後者については，$(S^3_t, T^{1,0}S^3_t)$ を $\{\pm 1\}$ で割った商多様体が埋め込み可能となることから，肯定的な答えが得られることが確認されている．

CR 多様体が埋め込み可能な場合には CR Paneitz 作用素は非負定値であり，特に 0 は $\operatorname{Spec} P$ の下界である．一方で Rossi 球面から分かるように，埋め込み不可能な場合には CR Paneitz 作用素は負の固有値をもつが，そのスペクトル全体が下に有界であるどうかは現在のところ不明である．

問題 7.3: CR Paneitz 作用素の有界性

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素は下に有界であるか？

また CR Paneitz 作用素は Rossi 球面では負の固有値を無限個もつが，この性質が埋め込み不可能な CR 多様体に一般に共通するものであるかどうかは，現在のところ分かっていない．

問題 7.4: CR Paneitz 作用素の負の固有値

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素の負の固有値は必ず無限個であるか？

以上の問題は，CR Paneitz 作用素という非楕円作用素の解析を通して，CR 多様体の埋め込み可能性を理解しようとする試みの一端をなすものである．今後の研究によって両者の関係がさらに明らかになることが期待される．

参考文献

[Aka87] T. Akahori, *A new approach to the local embedding theorem of CR-structures for* $n \geq 4$ *(the local solvability for the operator* $\overline{\partial}_b$ *in the abstract sense)*, Mem. Amer. Math. Soc. **67** (1987), no. 366, xvi+257.

[BdM75] L. Boutet de Monvel, *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975; équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, 1975, pp. Exp. No. 9, 14.

[BE90] D. M. Burns and C. L. Epstein, *Embeddability for three-dimensional CR-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 4, 809–841.

[Bur79] D. M. Burns Jr., *Global behavior of some tangential Cauchy-Riemann equations*, Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977), 1979, pp. 51–56.

[CCY12] S. Chanillo, H.-L. Chiu, and P. Yang, *Embeddability for 3-dimensional Cauchy-Riemann manifolds and CR Yamabe invariants*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 15, 2909–2921.

[CMY17] J.-H. Cheng, A. Malchiodi, and P. Yang, *A positive mass theorem in three dimensional Cauchy-Riemann geometry*, Adv. Math. **308** (2017), 276–347.

[CMY23] J.-H. Cheng, A. Malchiodi, and P. Yang, *On the Sobolev quotient of three-dimensional CR manifolds*, Rev. Mat. Iberoam. **39** (2023), no. 6, 2017–2066.

[CS01] S.-C. Chen and M.-C. Shaw, *Partial differential equations in several complex variables*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2001.

[EMM91] C. L. Epstein, R. B. Melrose, and G. A. Mendoza, *Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains*, Acta Math. **167** (1991), no. 1-2, 1–106.

[FH03] C. Fefferman and K. Hirachi, *Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 5-6, 819–831.

[Gei08] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Hir93] K. Hirachi, *Scalar pseudo-Hermitian invariants and the Szegő kernel on three-dimensional CR manifolds*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 67–76.

[HKN93] K. Hirachi, G. Komatsu, and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegő kernel*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 77–96.

[Hsi15] C.-Y. Hsiao, *On CR Paneitz operators and CR pluriharmonic functions*, Math. Ann. **362** (2015), no. 3-4, 903–929.

[JL87] D. Jerison and J. M. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 2, 167–197.

[JL88] D. Jerison and J. M. Lee, *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 1–13.

[JL89] D. Jerison and J. M. Lee, *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom. **29** (1989), no. 2, 303–343.

[Koh86] J. J. Kohn, *The range of the tangential Cauchy-Riemann operator*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 525–545.

[Kur82] M. Kuranishi, *Strongly pseudoconvex CR structures over small balls. III. An embedding theorem*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 2, 249–330.

[Lem95] L. Lempert, *Algebraic approximations in analytic geometry*, Invent. Math. **121** (1995), no. 2, 335–353.

[Nir74] L. Nirenberg, *A certain problem of Hans Lewy*, Uspehi Mat. Nauk **29** (1974), no. 2(176), 241–251. Translated from the English by Ju. V. Egorov, Collection of articles dedicated to the memory of Ivan Georgievič Petrovskiĭ (1901–1973), I.

[Sam86] J. H. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984), 1986, pp. 125–134.

[Siu80] Y. T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 1, 73–111.

[Tak20] Y. Takeuchi, *Nonnegativity of the CR Paneitz operator for embeddable CR manifolds*, Duke Math. J. **169** (2020), no. 18, 3417–3438.

[Tak24] Y. Takeuchi, *CR Paneitz operator on non-embeddable CR manifolds*, 2024. `arXiv:2407.16185`.