

✿ 日本数学会

2026年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

(1日目 / 3月23日)

2026年3月

於 東京理科大学

写像類群の力学系的研究に向けて

宮地 秀樹 (金沢大学)*

1 講演内の記号

タイヒミュラー空間 種数 g の向き付け可能な閉曲面を Σ_g と書き, 種数 g の閉リーマン面のタイヒミュラー空間を \mathcal{T}_g と書く. 以下は $g \geq 2$ で考える. 閉曲面 Σ_g の写像類群を MCG_g と書く. タイヒミュラー空間は種数 g の標識付き閉リーマン面の変形空間であり, 群は標識の変換として自然にタイヒミュラー空間に作用する. タイヒミュラー空間はタイヒミュラー距離により完備距離空間であり \mathbb{R}^{6g-6} と同相となる. さらに, サーストンコンパクト化と呼ばれる $6g-6$ 次元の閉球と同相なコンパクト化をもつ. 写像類群の作用はサーストンコンパクト化に拡張される. サーストンコンパクト化の境界は射影的測度付き測地線層の空間 $\mathcal{PML} = \mathcal{PML}(\Sigma_g)$ である.

McCarchy 氏と Papadopoulos 氏は, 論文 [1] において, 写像類群の部分群の力学系を用いて 6 つのクラスに分類しそれらの性質を調べた. Masur [2] はハンドル体について調べている. 分類に現れる 6 つのクラスのうちの 3 つはクライン群論における初等的群に対応し, 2 つは互いに交わらない単純閉曲線の集合を固定するという意味で可約的な群である. ここでは残り 1 つの sufficiently large と呼ばれる非初等的群に対応する部分群に対応する. ここで MCG_g の部分群 G は, 固定点の異なる 2 つの擬アノソフ写像類を含むとき sufficiently large と呼ぶ. この時 G 内の擬アノソフ写像類の固定点の全体の閉包 Λ_G を G の極限集合と呼ぶ ([1, p.147]). そして $Z\Lambda_G = \{[\lambda] \in \mathcal{PML} \mid \exists [\mu] \in \Lambda_G, i(\lambda, \mu) = 0\}$, $\Omega_G = \mathcal{PML} \setminus Z\Lambda_G$ とする. sufficiently large な部分群 $G < \text{MCG}_g$ は Ω_G に真性不連続に作用する ([1, Theorem 6.16]).

クライン群論 3次元双曲空間 \mathbb{H}^n の理想境界は $\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ であり, 向きを保つ等長写像群の作用はメビウス変換群として拡張される. 離散群 $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ の作用により境界 $\hat{\mathbb{C}}$ を不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ と極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ に分割する. クライン群 Γ は不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ に真性不連続に作用する.

2 この講演について

ここでは簡単のために 3次元双曲空間に作用するクライン群の場合のみ考える. Sullivan[4] は, エルゴード理論の観点からクライン群の力学系理論を展開した. この講演では論文 [3] における, Sullivan の理論を写像類群の部分群の作用における類似性につ

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学理工学域数物科学類

e-mail: miyachi@se.kanazawa-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:25K00909, 23K22396, 20K20519) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 32G15, 57M50, 22E40

キーワード: Teichmüller space, Mapping class group

いて議論する.

実際, 次の対応表

クライン群論	写像類群の部分群
$\Omega(\Gamma)$	Ω_G
Λ_G	$\Lambda_G, Z\Lambda_G$
非初等的群	sufficiently large
S^2 上エルゴード的 $\Leftrightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$ は有界調和関数を持たない	\mathcal{PML} 上エルゴード的 $\Rightarrow \mathcal{T}_g/G$ は有界多重調和関数を持たない
ホロ球極限集合上で保守的に作用する	

について議論する. この研究はまだ途上であるので, 時間があれば残っている問題について話したい.

参考文献

- [1] J. McCarthy and A. Papadopoulos, Dynamics on Thurston's sphere of projective measured foliations, *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), 133–166.
- [2] H. Masur, Measured foliations and handlebodies, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **1** (1986), 99–116.
- [3] H. Miyachi, Function theory, Dynamics and Ergodic theory via Thurston theory, [arXiv:2507.20912 \[math.CV\]](https://arxiv.org/abs/2507.20912) (2024).
- [4] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, *Ann. of Math. Stud.* **97**, 465–496, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Hyperbolic derivative via composition operators

細川 卓也
大野 修一

Let \mathbb{D} be the open unit disk in the complex plane and $\partial\mathbb{D}$ its boundary. We denote by $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ the set of all analytic self-maps of \mathbb{D} . Let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on \mathbb{D} . For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, we define the composition operator C_φ by $C_\varphi f = f \circ \varphi$ for $f \in H(\mathbb{D})$. Then φ is called an analytic symbol of C_φ . In general, a main theme in the study of composition operators is to characterize the operator theoretic properties of composition operators by the function theoretic properties of the analytic symbols.

We here pose a new problem:

Could the compactness of a composition operator C_φ imply the compactness of $C_{\varphi\psi}$ for any $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$?

We will consider this problem in the case of Bloch and little Bloch spaces.

We recall that the Bloch space \mathcal{B} consists of all $f \in H(\mathbb{D})$ such that

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty.$$

Then $\|\cdot\|$ is a complete semi-norm on \mathcal{B} and is Möbius invariant. Let the little Bloch space \mathcal{B}_o denote the subspace of \mathcal{B} consisting of functions f with

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) f'(z) = 0.$$

Then \mathcal{B} is a Banach space under the norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|$$

and that \mathcal{B}_o is a closed subspace of \mathcal{B} . In particular, \mathcal{B}_o is the closure in \mathcal{B} of the polynomials. As a classical function class in geometric function theory, the Bloch space is unique in many different ways. For example, the universal Teichmüller space $T(1)$ can be regarded as the interior of S in \mathcal{B} , where $S = \{\log g' : g \text{ is conformal in } \mathbb{D}\}$.

Let $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ be the space of all bounded analytic functions on \mathbb{D} . Then H^∞ is the Banach algebra with the supremum norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Note that $H^\infty \subset \mathcal{B}$ and that $\|f\| \leq \|f\|_\infty$ if $f \in H^\infty$. For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, $\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1$.

For $w \in \mathbb{D}$, let α_w be the Möbius transformation of \mathbb{D} defined by $\alpha_w(z) = (w-z)/(1-\bar{w}z)$. For w and z in \mathbb{D} , the pseudo-hyperbolic distance $\rho(w, z)$ between z and w is given by $\rho(w, z) = |\alpha_w(z)|$. For any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, we define that

$$\varphi^\#(z) = \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \varphi'(z).$$

2020 Mathematics Subject Classification. 30H30, 47B33, 30H05.

キーワード: angular derivative, hyperbolic derivative, composition operator, Bloch space, little Bloch space.

Then $\varphi^\#$ is the *hyperbolic derivative* of φ in the sense that

$$|\varphi^\#(z)| = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\rho(\varphi(z), \varphi(w))}{\rho(z, w)}.$$

We remark that the Schwarz-Pick lemma implies that $|\varphi^\#(z)| \leq 1$ for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ and any $z \in \mathbb{D}$. Moreover C_φ is always bounded on \mathcal{B} . On the other hand, C_φ is not necessarily bounded on \mathcal{B}_o . It is known that C_φ is bounded on \mathcal{B}_o if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$.

[Madigan and Matheson (1995)] For $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, the following hold.

- (i) C_φ is compact on \mathcal{B} if and only if $|\varphi^\#(z)| \rightarrow 0$ whenever $|\varphi(z)| \rightarrow 1$.
- (ii) C_φ is bounded on \mathcal{B}_o if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$.
- (iii) C_φ is compact on \mathcal{B}_o if and only if $\varphi \in \mathcal{B}_o$ and $|\varphi^\#(z)| \rightarrow 0$ whenever $|z| \rightarrow 1$.

We here define some kinds of classes related to the hyperbolic derivative.

[Definition]

- (i) Denote that $\mathcal{S}_o = \mathcal{S}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}_o$.
- (ii) Denote by \mathcal{S}^h the set of all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ such that $|\varphi^\#(z)| \rightarrow 0$ whenever $|\varphi(z)| \rightarrow 1$.
- (iii) Denote by \mathcal{S}_o^h the set of all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ such that $|\varphi^\#(z)| \rightarrow 0$ whenever $|z| \rightarrow 1$.

It is known that any function in $H^\infty \cap \mathcal{B}_o = \text{COP}$ is constant on each Gleason part in the maximal ideal space of H^∞ other than \mathbb{D} . We will use this property to prove the following.

[Boundedness on \mathcal{B}_o] Let $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. The following conditions are equivalent:

- (i) C_φ is bounded on \mathcal{B}_o .
- (ii) C_{φ^k} is bounded on \mathcal{B}_o for some positive integer k .
- (iii) C_{φ^k} is bounded on \mathcal{B}_o for any positive integer k .

We will study analytic self-maps of the unit disk such that each does not belong to \mathcal{S}^h (respectively, \mathcal{S}_o^h), but their product is in \mathcal{S}^h (respectively, \mathcal{S}_o^h). We also provide explicit and new examples of such analytic self-maps of \mathbb{D} satisfying (or not) the conditions in our results.

普遍被覆写像のレブナー鎖の初等的な例について

柳下 剛広 (山口大学)*

複素数平面 \mathbb{C} 内の単位円板を $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 上で定義される 2 つの正則関数 f, g が $f(0) = g(0) = 0$ を満たすとする. このとき, f が g に対して従属しているとは, \mathbb{D} 上の自己正則関数 ω で $\omega(0) = 0$ かつ

$$f(z) = g(\omega(z)) \quad (z \in \mathbb{D})$$

を満たすものが存在することをいう. さらに, $\mathcal{H}_0(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ 単葉} \mid f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ と定め, I を実数区間内の区間とするとき, $t \in I$ でパラメータづけられる $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ 内の単葉関数の族 $\{f_t\}_{t \in I}$ がレブナー鎖であるとは $s \leq t$ を満たす全ての $s, t \in I$ に対して, f_s が f_t に対して従属していることであると定義する. レブナー鎖は $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ 内の単葉関数の係数評価に関するビーベルバッハ予想 (ド・ブランジュの定理) の解決に用いられ, その他にも幾何学的函数論の研究において主要な役割を担っている. ([1, 2])

近年, 柳原氏が普遍被覆写像のレブナー鎖を定義し, 拡張されたレブナー鎖においても従来のレブナー理論の類似となる結果が同様に導かれることを示した.([3]) ここで, $\{f_t\}_{t \in I}$ が普遍被覆写像のレブナー鎖であるとは, f_t が \mathbb{D} から $\hat{\mathbb{C}}$ 内の原点を含むある領域 Ω_t の上への普遍被覆写像で $f_t(0) = 0, f_t'(0) > 0$ を満たし, かつ $s \leq t$ を満たす全ての $s, t \in I$ に対して, f_s が f_t に対して従属していることであると定義する. 従来のレブナー鎖では $f_t(\mathbb{D})$ が単連結となるが, 普遍被覆写像のレブナー鎖では Ω_t は一般に多重連結領域となる点において拡張された概念となっている.

本講演では, 初等関数のみを用いて普遍被覆写像のレブナー鎖の例 $\{f_t\}_{t \in I}$ を構成する. その際に, レブナー鎖に付随する概念 ($f_t', \dot{f}_t = \frac{\partial f_t}{\partial t}$, evolution family $\{\omega_{s,t}\}_{s \leq t}$, Herglotz family $\{P(\cdot, t)\}_{t \in I}$) に関しても言及したい.

参考文献

- [1] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Mathematische Annalen 89 (1923), no. 1, 103–121.
- [2] Ch. Pommerenke, Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 159–173.
- [3] H. Yanagihara, Loewner theory on analytic universal covering maps, arXiv: 1907.11987, 2025.

* 〒755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1 山口大学 大学院創成科学研究科 (工学系学域)

e-mail: myngsht@yamaguchi-u.ac.jp

web: <https://ds.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~myngsht/>

キーワード: レブナー理論, 普遍被覆写像

数論的三角群の指数有限部分群である四角群

櫻井映里香 (早大教育)*1

相馬啓佑 (早大教育)*2

小森洋平 (早大教育)*3

竹内による数論的三角群の分類 [5] に続いて、数論的四角群の分類問題を考察する。数論的フックス群と通約可能なフックス群は数論的である。特に数論的フックス群の指数有限部分群も数論的フックス群になる。竹内により数論的三角群は分類されていて、特に極大かつ余コンパクトではない数論的三角群は $(2, 3, \infty)$ と $(2, 4, \infty)$ と $(2, 6, \infty)$ のみである [6]。そこでこれら 3 つの数論的三角群の指数有限部分群である四角群を分類したのがこの講演の主結果である。竹内によるモジュラー群 $(2, 3, \infty)$ の指数有限部分群である四角群の分類方法を用いて [7, 8]、この講演では $(2, 4, \infty)$ と $(2, 6, \infty)$ の指数有限部分群である四角群を全て求める。余コンパクトではない数論的四角群については、[4] において既に分類されている。

1. 竹内の方法

次の Singerman の結果を用いて、三角群 Γ の指数 N の部分群である四角群 Γ_1 を探す。

命題 1. [2]

$(m_1, m_2, \dots, m_r; s)$ 型の第 1 種フックス群

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s \mid \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^s p_k = x^{m_j} = 1 \rangle$$

が $(n_{1,1}, \dots, n_{1,\rho_1}, \dots, \dots, n_{r,1}, \dots, n_{r,\rho_r}; s')$ 型の指数 N の部分群 Γ_1 を含むための必要十分条件は

1. Γ から $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換群 S_N への準同型 $\theta: \Gamma \rightarrow S_N$ が存在して、 $\theta(\Gamma)$ の作用は推移的であり、 $\theta(x_j)$ は長さ $m_j/n_{j1}, \dots, m_j/n_{j\rho_j}$ の ρ_j 個の巡回置換の積からなり、 $\theta(p_k)$ が $\delta(p_k)$ 個の巡回置換の積で表されるならば、次の等式を満たす。

$$s' = \sum_{k=1}^s \delta(p_k)$$

2. 双曲面積に関して $\text{vol}(\mathbb{H}^2/\Gamma_1) = N \cdot \text{vol}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ を満たす。

このとき Γ の指数 N の部分群 Γ_1 は $\Gamma_1 = \{g \in \Gamma \mid \theta(g)(1) = 1\}$ として得られる。

次に Γ_1 の生成系を求める。

命題 2. [3]

群 G の生成系を $\{A_j \mid j \in J\}$ とし、群 G の部分群 H に関する左剰余類全体 G/H の完全代表系を $\{B_k \mid k \in K\}$ とする。このとき

$$A_j B_k = B_n C_{j,k}$$

*1 e-mail: s0422106_edu@ruri.waseda.jp

*2 e-mail: k.soma@akane.waseda.jp

*3 e-mail: ykomori@waseda.jp

で定まる $\{C_{j,k} \mid j \in J, k \in K\}$ は H の生成系になる。

更に四角群の標準生成系の関係式を満たす Γ_1 の生成系 B_1, B_2, B_3, B_4 を選び出す。その際に Poincaré の定理を用いるが、次の Lehner の結果が役に立つ。

命題 3. [1]

B_i の固定点を w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) とし、 $\tau_3 = B_3(w_4), \tau_2 = B_2(\tau_3)$ とするとき、 $(w_4, w_3, \tau_3, w_2, \tau_2, w_1)$ が凸な双曲六角形の頂点になるなら、 B_1, B_2, B_3, B_4 は四角群の標準生成系である。

2. 実行例

$(2, 4, \infty)$ 型の三角群 $\Gamma = \langle A_1, A_2, A_3 \mid A_1^2 = A_2^4 = A_1 A_2 A_3 = 1 \rangle$ の指数 $N = 3$ の部分群として $(2, 2, 4, \infty)$ 型の四角群を求めてみる。命題 1 の条件を満たす準同型 $\theta : \Gamma \rightarrow S_4$ による Γ の生成元の像は

$$\theta(A_1) = (2, 3), \theta(A_2) = (1, 2), \theta(A_3) = (1, 2, 3)$$

となる。特に Γ/Γ_1 の完全代表系として $1, A_3, A_3^2$ が取れるので、命題 2 より Γ_1 の生成元として

$$B_1 = A_2^2, B_2 = A_1, B_3 = A_3^{-2} A_2^{-1} A_3^2, B_4 = A_3^{-3}$$

が選べて $B_1^2 = B_2^2 = B_3^4 = B_1 B_2 B_3 B_4 = 1$ を満たす。 $(w_4, w_3, \tau_3, w_2, \tau_2, w_1)$ が凸な双曲六角形の頂点になることから、命題 3 より $(2, 2, 4, \infty)$ 型の四角群が $(2, 4, \infty)$ 型の三角群 Γ の指数 3 の部分群として得られる。

参考文献

- [1] J. Lehner, On polygon groups, Lecture Notes Math., vol 899, Springer (1980), 315–324.
- [2] D. Singerman, Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups. Bull. London Math. Soc., 20 (1970), 319–323.
- [3] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, Combinatorial group theory, Dover (1966).
- [4] T. Nakanishi, M. Näätänen and G. Rosenberger, Arithmetic Fuchsian Groups of Signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ with $2 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4 = \infty$. Contemporary Math. 240 (1990) 269–277.
- [5] K. Takeuchi, Arithmetic triangle groups. J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 91–106.
- [6] K. Takeuchi, Commensurability classes of arithmetic triangle groups. Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, (1977), 201–212.
- [7] K. Takeuchi, Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$. Saitama Math. J. 14 (1996), 55–78.
- [8] K. Takeuchi, Correction to the paper: “Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ ”. Saitama Math. J. 15 (1997), 85–90.

Self-affinity, Möbius geometry and Schwarzian-pre-Schwarzian derivative

熊谷 駿 (八戸工業大学)*¹

梶原 健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*²

1. はじめに

対数型美的曲線 (LAC) は工業意匠設計分野における形状設計の観点から, 原田ら [1] に提案され三浦 [2] によって定式化された曲線クラスである. これは弧長径数 s に対し

そのユークリッド曲率が $\kappa^E(s) = \begin{cases} (\xi s + \eta)^{-\frac{1}{\alpha}} & (\alpha \neq 0) \\ e^{\xi s + \eta} & (\alpha = 0), \end{cases}$ $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ で表されるもので,

対数螺旋 ($\alpha = 1$) やクロソイド ($\alpha = -1$) に代表される螺旋からなる. その応用面での背景からパラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ は**形状特徴量**とよばれる.

命題 1 (三浦の自己アフィン性 [2, 3]) 曲線 γ に対し, ある径数表示 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ が

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (\kappa^E(w + \varepsilon), s_w(w + \varepsilon)) = (e^{-\varepsilon} \kappa^E(w), e^{\alpha \varepsilon} s_w(w)), \quad (1)$$

をみたすことは, それが形状特徴量 α の LAC であることに同値である.

井ノ口ら [4] は LAC が**相似幾何** (リー群 $\text{Sim}(2) = \text{CO}^+(2) \rtimes \mathbb{R}^2$ のクライン幾何) における可積分変形の不変曲線で, ユークリッド幾何におけるオイラーの弾性曲線の類似として位置づけられることを示した. 本講演では LAC を特徴づける自己アフィン性をメビウス幾何 (リー群 $\text{Möb}(\mathbb{C}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ のクライン幾何) における曲線の対称性として再定式化したことについて報告する. ここでは LAC が**放物線**と共通してみたす微分方程式であって, 形状特徴量ごとに固有とならないものが得られている.

2. メビウス幾何

曲線 $c(w) = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ に横断性条件 $\det(c_w, c) \neq 0$ を仮定する. これに対し, 枠 $\Phi := (c_w \ c) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ の正規化を $\lambda := \det \Phi^{-\frac{1}{2}}$, $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_w & \lambda \end{pmatrix}$ によって定め, その**メビウス枠** $\Phi^M := ((c\lambda)_w \ c\lambda) = \Phi\Lambda \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とする. このときフレネ型公式

$$\Phi_w^M = \Phi^M K^M = \Phi^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^M & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa^M = -2S_w \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} := -2 \left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1} \right)_w + \left(\frac{(c_2/c_1)_w}{c_2/c_1} \right)^2,$$

が成り立ち, このもとで**メビウス曲率** κ^M は $[c] := c_2/c_1$ のメビウス同値類と一対一対応する. 言い換えると, 射影曲線 $[c(w)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ の $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ -同値類はシュワルツ微分 $S_w[c]$ と一対一対応する. 以下, $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ による $[c] \in \mathbb{C}P^1$ の像を $[Ac]$ とかく.

補題 2 上記の仮定のもと, 径数表示 $[c(w)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ に対し,

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w + \varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \quad (2)$$

本研究は JST CREST(課題番号 JPMJCR1911), 科研費(課題番号 25K21661) の助成を受けた.

*¹e-mail: s-kumagai@hi-tech.ac.jp / shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp

*²e-mail: kaji@imi.kyushu-u.ac.jp

が成り立つことはそのシュワルツ微分 $S_w[c]$ が定数 k であることに同値である。このとき $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の作用を法として $[c(w)] = \begin{cases} w & (k = 0) \\ e^{\sqrt{k}w} & (k \neq 0) \end{cases}$ が成り立つ。

3. 主結果

正則・非退化曲線 $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ に対し $c_\gamma(w) := (\gamma_w(w), \gamma_{ww}(w))^T$ とおくと $c_\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$ は横断性条件をみたし、その射影モデル $[c_\gamma]$ はプレシュワルツ微分 $P_w\gamma := \gamma_{ww}/\gamma_w$ で表される。各 w に対し、 $c_\gamma^\perp(w)$ を次式で定める。

$$c_\gamma^\perp(w) := \begin{pmatrix} 1/s_w & 0 \\ -s_{ww}/s_w^2 & 1/s_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_w \\ \gamma_{ww} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ (\gamma_w/s_w)_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ \sqrt{-1}\gamma_w \kappa^E \end{pmatrix}. \quad (3)$$

定理 3 曲線 γ が径数表示 $\gamma(w)$ をもって自己アフィン性(1)をみたすならば、高々実数倍を除き $s_w = e^{\alpha w}$, $\kappa^E = e^{-w}$ で、ある $B \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ に対し $[c_\gamma^\perp] = [Bc_\gamma]$ である。また

$$[c_\gamma^\perp(w + \varepsilon)] = \left[\frac{\gamma_w(w + \varepsilon)}{\gamma_w(w)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_w/s_w \\ \sqrt{-1}\gamma_w \kappa^E \end{pmatrix} \right] =: [A(\varepsilon)c_\gamma^\perp(w)], \quad (4)$$

が成り立つ。このとき $[c_\gamma^\perp(w)] = \sqrt{-1}e^{(\alpha-1)w}$ であって、とくに形状特徴量 α の LAC の自己アフィン性(1)をみたす径数表示 $\gamma(w)$ に対して $S_w P_w \gamma = (\alpha - 1)^2$ が成り立つ。

定理3より LAC は $S_w P_w \gamma$ が実定数 k となる表示 $\gamma(w)$ をもつ曲線 γ のクラスに属する。以下の例に示すようにこれらの曲線クラスは LAC より真に大きく、また、二つの異なる形状特徴量をもつ LAC が属するクラスを定める k が存在する。

例 A 放物線 $\gamma(w) = w + \sqrt{-1}w^2$ は $P_w\gamma = \frac{2\sqrt{-1}}{1 + 2\sqrt{-1}w}$, $S_w P_w \gamma = 0$ をみたす。一方、変数変換 $w = w(t) = \frac{1}{k}e^{kt}$, $k \in \mathbb{R}$ を施して得られる表示 $\gamma(t) = \frac{1}{k}e^{kt} + \sqrt{-1}\frac{1}{k^2}e^{2kt}$ は $P_t\gamma = \frac{4k\sqrt{-1}e^{kt} + k^2}{2\sqrt{-1}e^{kt} + k}$, $S_t P_t \gamma = k$ をみたす。

例 B 対数螺旋 ($\alpha = 1$ の LAC) の表示 $\gamma(w) = e^{(1+\sqrt{-1})w}$ は $S_w P_w \gamma = 0$ をみたす。なお、ここでは c_γ が横断性条件をみたさず、補題2は直接適用されない。

例 C クロソイド ($\alpha = -1$ の LAC) の表示 $\gamma(w) = \int e^{\sqrt{-1}w^2} dw$ は $S_w P_w \gamma = 0$ をみたす。

参考文献

- [1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, “曲線の物理的性質と自己アフィン性”, デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33–40, 1995.
- [2] 三浦憲二郎, “美しい曲線の一般式とその自己アフィン性”, 精密工学会誌, 72 (7) 857–861, 2006.
- [3] S. Kumagai, K. Kajiwara, “Self-affinities of planar curves: towards unified description of aesthetic curves”, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2025.
- [4] J. Inoguchi, Y. Jikumaru, K. Kajiwara, K. T. Miura, and W. K. Schief, “Log-aesthetic curves: Similarity geometry, integrable discretization and variational principles”, Computer Aided Geometric Design, vol. 105, p. 102233, 2023.
- [5] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4), 朝倉書店, 2010.

有限ブラシュケ積の幾何学的性質について

藤村 雅代 (防衛大学校)*

1 はじめに

双心多角形は内接円と外接円を同時に持つ多角形である。単位円とその内部に含まれる円が与えられたとき、それらの円に同時に内接および外接する双心三角形が存在するための必要十分条件は $d^2 = 1 - 2r$ であり、Chapple の公式または Chapple-Euler の公式として知られている。ただし、 r は内接半径、 d は原点から内接円の中心までの距離である。この公式は Chapple (1746 [2]) と Euler (1765) が独立に発見したとされている (歴史については例えば [20] を参照)。また、同様に単位円とその内部に含まれる円が与えられたとき、それらの円に同時に内接および外接する双心四角形が存在するための必要十分条件は $2r^2(1 + d^2) = (1 - d^2)^2$ であり Fuss の公式 [10] と呼ばれている。

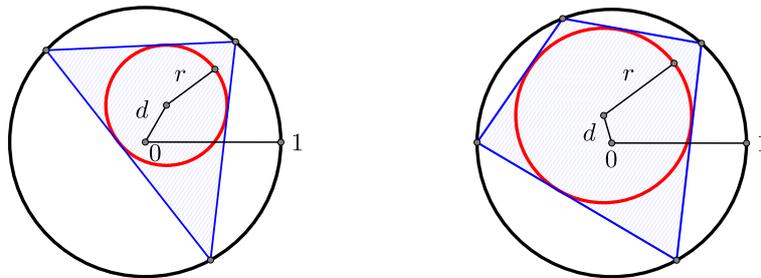


図 1 左: 双心三角形 (Chapple の公式 $d^2 = 1 - 2r$ が成り立つ)
 右: 双心四角形 (Fuss の定理 $2r^2(1 + d^2) = (1 - d^2)^2$ が成り立つ)

一方、2つの円に対して双心多角形が存在するとき、そのような双心多角形は無数に存在することが Poncelet の定理 [17] (証明については例えば [4] 参照) から保証される。

定理 1.1 (Poncelet の定理 (楕円バージョン)) 2つの楕円 E_1 と E_2 に対して、 E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形が存在すれば、 E_1 上の任意の点に対して、この点を頂点に含み E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形が存在する。

本講演では、Blaschke 積が持つ幾何学的な性質を利用して、円に内接する多角形に関する話題を扱う。

* 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校 数学教育室

e-mail: masayo@nda.ac.jp

本研究の一部は科研費 (課題番号:25K07039) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 30J10, 30C20

キーワード: Complex analysis, Blaschke product, Algebraic curve

2 Blaschke 積から定まる曲線

以下、複素平面上の単位円板を \mathbb{D} と書く。

定義 2.1 次の形をした d 次有理写像を d 次 (有限) Blaschke 積と呼ぶ。

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^d \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}, \quad a_k \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$\theta = 0$ かつ $B(0) = 0$ のとき、 B を標準 Blaschke 積という。

これから扱うような Blaschke 積の逆像に関する問題は、標準 Blaschke 積のみを扱えば十分であることがわかるので、今後は B として

$$B(z) = z \prod_{k=1}^{d-1} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}, \quad a_k \in \mathbb{D}.$$

の形の標準 Blaschke 積のみを扱う。

Blaschke 積は \mathbb{D} を自身の上に写す正則関数で、 $\overline{\mathbb{D}}$ 上の連続関数である。また、 $z \in \partial\mathbb{D}$ に対して $B'(z) \neq 0$ をみたす (例えば [14, Lemma 3.1])。したがって、 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像は $\partial\mathbb{D}$ 上の相異なる d 個の点 z_1, z_2, \dots, z_d から成ることがわかる。この性質を利用して 2 種類の曲線を導入する。

2.1 内部曲線

定義 2.2 d 次 Blaschke 積 B に対して、 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を z_1, z_2, \dots, z_d とおき、これら d 個の点から選んだ各 2 点を結ぶ $\frac{d(d-1)}{2}$ 本の直線からなる集合を ℓ_λ とおく。このとき、直線族 $\mathcal{L}_B = \{\ell_\lambda\}_{\lambda \in \partial\mathbb{D}}$ の包絡線を B の内部曲線と呼び I_B と書く。

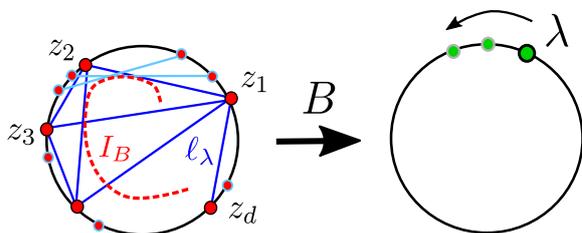


図 2 内部曲線の構成法

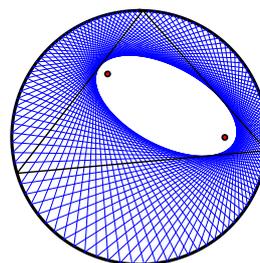


図 3 $0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ に零点を持つ 3 次標準 Blaschke 積の内部曲線 (包絡線)

例 2.3 2 次 Blaschke 積 $B(z) = z \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$ と $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して、 B により λ に写る 2 点を結ぶ直線の方程式は計算から、 $z - a = \lambda(\overline{z} - \overline{a})$ と書ける。したがって、内部曲線は 1 点 $\{a\}$ である。

3 次 Blaschke 積の内部曲線は楕円になることが、次の定理からわかる。

定理 2.4 (Daepf, Gorkin, and Mortini [3, Theorem 1]) B を $0, a, b$ に零点を持つ 3 次標準 Blaschke 積とする。 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ に対して、 z_1, z_2, z_3 を B により λ に写る相異なる 3 点とする。このとき、 z_1, z_2 を結ぶ直線は楕円 E

$$E : |z - a| + |z - b| = |1 - \bar{a}b| \quad (2)$$

に接する。また、逆に E の各点は、 $B(\zeta_1) = B(\zeta_2)$ をみたく単位円周上の相異なる 2 点 ζ_1, ζ_2 を結ぶ直線の接点となっている。

定理 2.4 の (2) で定まる楕円 E は単位円に内接する三角形 $\triangle z_1 z_2 z_3$ に内接している (図 3 参照) ので、Poncelet の定理における内側の楕円になっている。また、この楕円 E は a, b を固有値にもつある行列の数域と関連があることが知られている [12]。Poncelet の定理と数域の関係については例えば [11], [15] など多くの研究が行われている。

定理 2.4 に関連して、Frantz [5] により次が示されている。

定理 2.5 (Frantz [5, Proposition 3]) 単位円に内接する三角形に内接する楕円は、3 次 Blaschke 積から得られるものに限る。すなわち、楕円 E に対して、次は同値である。

- 単位円に内接して E を外接する三角形が存在する。
- ある $a, b \in \mathbb{D}$ に対して、 E は $|z - a| + |z - b| = |1 - \bar{a}b|$ から定まる楕円である。

定理 2.5 は、Chapple の公式における単位円の内部の円を楕円に拡張した結果を与えている。では、4 次 Blaschke 積を考えた場合に Fuss の公式を拡張することができるだろうか？ 次はこの問題を扱う。

例 2.6 一般の 4 次 Blaschke 積の内部曲線は定義方程式が 6 次式の代数曲線である。この内部曲線を表す 6 次式は、このアブストラクトには印字できないくらいのサイズの式になるが、具体的な Blaschke 積を与えれば方程式は比較的単純になり、描画も可能である。図 4 は、以下の 3 つの Blaschke 積

$$\begin{aligned} B_1(z) &= z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{2}iz} \cdot \frac{z - \frac{2}{3}}{z - \frac{2}{3}z} \cdot \frac{z + \frac{2}{3}i}{1 - \frac{2}{3}iz}, \\ B_2(z) &= z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i)z}{1 - (\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)z}, \\ B_3(z) &= z^2 \cdot \frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} \cdot \frac{z - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z}, \end{aligned}$$

の内部曲線を 2 通り (包絡線と代数曲線) の方法で描画したものである。 B_2 の内部曲線は楕円 (と 1 点) に見える。実は、 B_2 は

$$b_1(z) = z \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}, \quad b_2(z) = z \cdot \frac{z - \frac{-2+i}{5}}{1 - \frac{-2-i}{5}z}$$

としたとき、 $B_2 = b_2 \circ b_1$ と書ける。したがって、 B_2 の内部曲線は b_1 の内部曲線である 1 点から成る集合 $\{\frac{1}{2}\}$ を含んでいる。

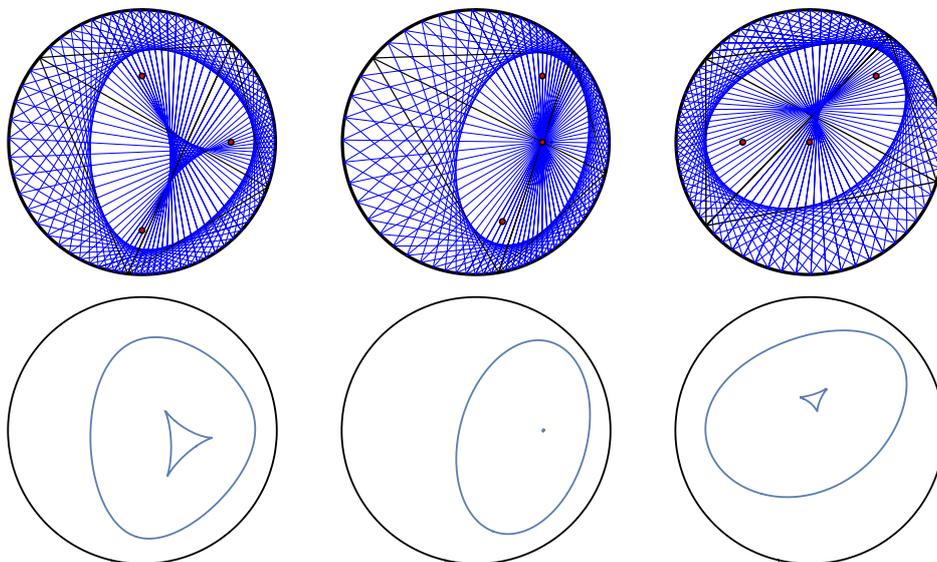


図4 4次 Blaschke 積の内部曲線の例: 左からそれぞれ B_1, B_2, B_3 に対応している

注意 2.7 一般に、Blaschke 積 B がいくつかの Blaschke 積の合成 $b_n \circ b_{n-1} \circ \dots \circ b_1$ で書けるときの、 B の内部曲線は b_1 の内部曲線を含むことも同様に明らかである。

上の例の B_2 の内部曲線は楕円を含むように見えるが、実際に楕円であることが次からわかる。

命題 2.8 ([6, Lemma 4]) 2つの2次 Blaschke 積 $b_1(z) = z \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $b_2(z) = z \cdot \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ の合成を $B = b_2 \circ b_1$ とおくと、 B の内部曲線 I_B は

$$I_B : |z-a|(|z-f_1| + |z-f_2| - r) = 0$$

で与えられる。ただし、 f_1, f_2 は2次方程式 $t^2 - (a - \bar{a}b)t - b = 0$ の解であり、 r は次で定まる値である。

$$r = |\bar{f}_1 f_2 - 1| \sqrt{\frac{|f_1|^2 + |f_2|^2 - 2}{|f_1|^2 |f_2|^2 - 1}}$$

さらに、次もわかる。

定理 2.9 ([6, Theorem 2]) 単位円に内接する四角形に内接する楕円は、2つの2次 Blaschke 積の合成として書ける4次 Blaschke 積から構成されるものに限る。すなわち、楕円 E に対して、次は同値である。

- 単位円に内接して E を外接する四角形が存在する。
- ある $a, b \in \mathbb{D}$ に対して、 E は $|z-a| + |z-b| = |\bar{a}b - 1| \sqrt{\frac{|a|^2 + |b|^2 - 2}{|a|^2 |b|^2 - 1}}$ から定まる楕円である。

定理 2.9 は Fuss の公式における単位円の内部の円を楕円に拡張した結果を与える。定理 2.9 の結果は、後に Gorkin and Wagner [13] によりシフトオペレータからの意味付けがされている。また、Aksoy らは [1] において 2^n 次 Blaschke 積の合成写像への分解可能性および数域が楕円になる条件についての研究を行っている。

次に、Blaschke 積から定まる単位円板の外側の曲線を導入する。

2.2 外部曲線

定義 2.10 d 次 Blaschke 積 B に対して、 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を z_1, z_2, \dots, z_d とおく。 L_λ を z_1, \dots, z_d で単位円に接する d 本の接線から成る集合とする。 λ が単位円周上を動くとき、 L_λ の元の各 2 直線の交点の軌跡を B の外部曲線といい E_B と書く。

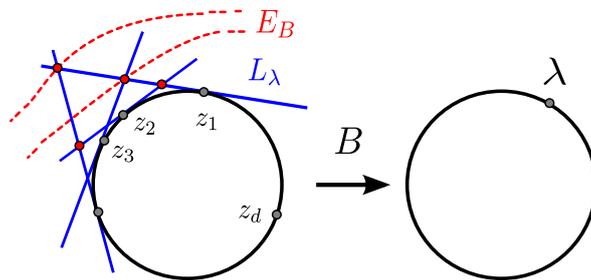


図 5 外部曲線の構成法

例 2.11 $B(z) = z \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ のとき、外部曲線 E_B は退化しない 2 次曲線であり、次の方程式で与えられる。

$$\bar{a}\bar{b}z^2 - (|ab|^2 - |a+b|^2 + 1)z\bar{z} + ab\bar{z}^2 - 2(\bar{a} + \bar{b})z - 2(a+b)\bar{z} + 4 = 0. \quad (3)$$

さらに、(3) は $(|a+b|-1)^2 < |ab|^2$ のとき双曲線、 $(|a+b|-1)^2 > |ab|^2$ のとき楕円、 $(|a+b|-1)^2 = |ab|^2$ のとき放物線の方程式となる。

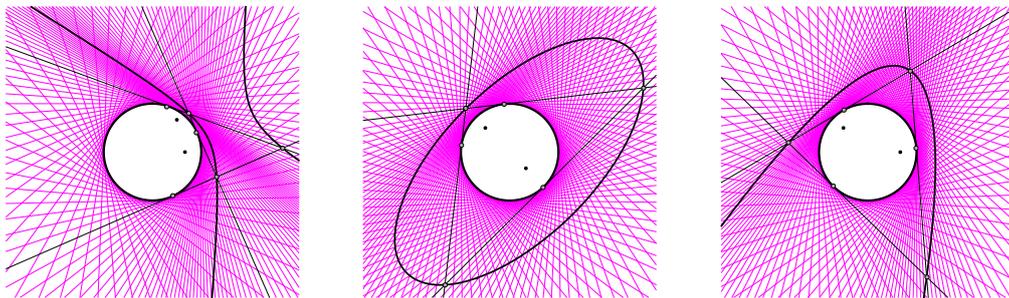


図 6 左: $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$, 中: $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i, b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 右: $a = a_0, b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
ただし、 $a_0 \approx 0.668$ は $a^4 - 4a^3 - 6a^2 + 4a + 1 = 0$ の解の一つとする

一般次数の Blaschke 積に関しては次の性質が得られる。

定理 2.12 ([7, Theorem 2]) B を d 次標準 Blaschke 積とすると、外部曲線 E_B は

高々 $d - 1$ 次の代数曲線である。

さらに、内部曲線と外部曲線の間にはある種の双対性があることがわかる。

定理 2.13 ([8, Theorem 5]) B を d 次標準 Blaschke 積とし、 E_B^* を B の外部曲線の斉次化の双対曲線とする。このとき、内部曲線は

$$I_B : u_B^*(-z) = 0$$

で与えられる。ただし、 $u_B^*(z) = 0$ は E_B^* のアフィン部分の定義方程式である。

定理 2.13 を使うことで、比較的単純な外部曲線から比較的複雑な内部曲線を構成することが可能になる。

3 Blaschke 積から定まる多角形

3.1 Blaschke 多角形

以下、多角形は凸多角形のみでなく、星型多角形も含めて考えることにする。

定義 3.1 2つの楕円 E_1 と E_2 に対して、 E_1 に内接し同時に E_2 を外接する n 角形を Poncelet n 角形と呼ぶ。

先に述べたように、Poncelet の定理は入れ子になった2つの楕円に対して、Poncelet n 角形が一つ存在すれば、1-パラメータの Poncelet n 角形からなる族が存在することを保証している。この Poncelet n 角形の族に対して、「各 n 角形の中心からなる集合はどのような形になるか？」という問題を Shestakov (1814) が考え、計算実験から予想を与えた。この問題は、約 200 年後の 2016 年に以下のように解決された (歴史については、[18] を参照)。

定理 3.2 (Schwartz and Tabachnikov [18, Theorem1]) E_1 と E_2 を楕円とし、 E_2 は E_1 の内部に含まれているとする。また、これらの楕円に対して、Poncelet n 角形の 1-パラメータ族が存在するとき n 角形の頂点の平均中心からなる集合および n 角形の質量重心からなる集合は、それぞれ E_1 と相似な楕円または 1 点からなる集合となる。

この問題は、線形変換を行うことで E_1 は単位円であるとしても一般性を失わない。また、定理 2.4 と 2.5 から Poncelet 三角形は、3 次 Blaschke 積から定まる三角形と対応がつくことがわかる。さらに、一般次数の Blaschke 積から定まる多角形も考えたい。

定義 3.3 d 次 Blaschke 積 B に対して、 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ の B による逆像を頂点とする d 角形を Blaschke d 角形と呼ぶ。

注意 3.4 ここでは、この先 Blaschke 多角形の頂点の平均中心のみを扱うので、Blaschke 多角形を凸多角形に限定しなくても問題はない。

Blaschke 積 B の Blaschke 多角形の各辺は、 B の内部曲線に接するという性質を持つ。しかし、 B の次数が 4 次以上の場合、内部曲線は前述の通り複雑な形状を持つ。それにも関わらず、次が成立する。

命題 3.5 B を d 次標準 Blaschke 積とする。 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ とするとき、 λ に対応する Blaschke d 角形の頂点の平均中心から成る集合は円または 1 点からなる集合である。

注意 3.6 Blaschke 多角形の質量重心から成る集合は 2 次曲線にならない。

次に、Blaschke 多角形を楕円に内接する多角形に拡張することを考えたい。そのため、単位円板上で正則な Blaschke 積を等角性を保ったまま境界が楕円の領域で定義される写像として拡張することを考える。

3.2 Blaschke-like 多角形 (Joukowski 変換による)

次の形の写像を、Joukowski (ЖУКОВСКИЙ) 変換と呼ぶ。

$$z = \varphi_t(w) = \frac{1}{1+t^2} \left(t^2 w + \frac{1}{w} \right), \quad (0 < t < 1).$$

この写像は w 平面上の単位円板を z 平面上の楕円板 \mathbb{E}_t の外部に写す等角写像である。ただし、 \mathbb{E}_t は

$$\mathbb{E}_t = \left\{ \left| z - \frac{2t}{1+t^2} \right| + \left| z + \frac{2t}{1+t^2} \right| < 2 \right\}$$

で定まる楕円板である。任意の離心率 e ($0 < e < 1$) に対して、うまく t を選べば φ_t によって単位円板は離心率が e の楕円の境界を持つ領域に写すことができる。

標準 Blaschke 積 B に対して、 $B_{\varphi_t} = \varphi_t \circ B \circ \varphi_t^{-1}$ とおく。

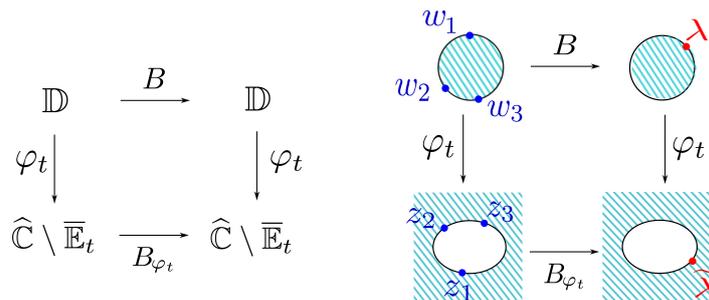


図 7 Blaschke-like 写像 $B_{\varphi_t} = \varphi_t \circ B \circ \varphi_t^{-1}$

ここで、 $\varphi_t(1/(t^2 w)) = \varphi_t(w)$ が成り立つので、 $\varphi_t : \{1/t^2 < |w| \leq \infty\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{E}}_t$ (onto, conformal) かつ $\varphi_t : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{E}}_t$ (onto, conformal) がわかる。したがって、各 $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{E}}_t$ に対して、 $\varphi_t^{-1}(z)$ の分枝 w で $|w| < 1$ を満たすものがただ一つ存在する。このとき、 B_{φ_t} は楕円板の外側 $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{E}}_t$ を自身に onto に写す。

定義 3.7 上記のように構成した B_{φ_t} を B と φ_t に関する Blaschke-like 写像と呼ぶ。

Joukowski 変換 $z = \varphi_t(w)$ は \mathbb{D} 上の連続関数であり、単位円周 $\partial\mathbb{D}$ 上では

$$z = \varphi_t(w) = \frac{t^2 w + \bar{w}}{1 + t^2}, \quad w \in \partial\mathbb{D}$$

と書ける。したがって、 $\partial\mathbb{E}_t$ 上では、

$$w = \varphi_t^{-1}(z) = \frac{\bar{z} - t^2 z}{1 - t^2}, \quad z \in \partial\mathbb{E}_t$$

となる。これを用いれば、 $\tilde{\lambda} \in \partial\mathbb{E}_t$ に対して、 B_{φ_t} の逆像を考えることで、Blaschke 積と同様に「内部曲線」、「外部曲線」、「Blaschke-like 多角形」を定義できる。

内部曲線に関しては、3 次 Blaschke 積 B と φ_t に関する Blaschke-like 写像 B_{φ_t} について次が得られる。

定理 3.8 ([9, Theorem 4]) 3 次 Blaschke 積 B と φ_t に関する Blaschke-like 写像 B_{φ_t} の内部曲線は楕円である。さらに、各 2 つの楕円 $\partial\mathbb{E}_t$ ($0 < t < 1$) と E_2 に対して、 $\partial\mathbb{E}_t$ に内接し同時に E_2 を外接する Poncelet 三角形が存在するのは、 E_2 がある 3 次 Blaschke 積 B の Blaschke-like 写像 B_{φ_t} の内部曲線になるときに限る。

Blaschke-like 多角形に対しては、Poncelet 多角形の結果である定理 3.2 と類似の結果が得られる。

定理 3.9 ([9, Proposition 7]) B_{φ_t} を d 次 Blaschke 積と φ_t に関する Blaschke-like 写像とする。 $\tilde{\lambda} \in \partial\mathbb{E}_t$ とするとき、 $\tilde{\lambda}$ の B_{φ_t} による逆像を頂点とする d 角形の頂点の平均中心から成る集合は $\partial\mathbb{E}_t$ と相似な楕円または 1 点からなる集合になる。

この定理では Joukowski 変換から構成された Blaschke-like 写像を利用したが、円板を境界が楕円の領域に等角に写す変換は他にもいろいろある。では、別の変換を利用した場合どうなるだろうか？ 次はこの問題を考える。

3.3 Blaschke-like 多角形 (Jacobi 楕円関数による)

単位円板を楕円板の内部に等角に写す変換には、例えば Schwarz [19] による Jacobi 楕円関数を利用するものが知られている。以下ではこの変換を利用して Blaschke-like 写像を構成する (cf. [16, Chapter VI])。

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^{-1}(w, k) &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \\ K(k) &= \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \\ K'(k) &= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}}. \end{aligned}$$

とおき、次の写像を考える。

$$u(w) = u = \frac{w-1}{w+1}, \quad v(u) = v = c \cdot \operatorname{sn}^{-1}(u, k),$$

$$x(v) = x = \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} e^v, \quad z(x) = z = \frac{\sqrt{1-p^2}}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right),$$

ただし、 k と c は $\log \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} = \pi \frac{K(k)}{K'(k)}$ かつ $\log \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} = cK(k)$ をみたすように選ぶ。また、領域を次のようにおく。

$$D_w = \{|w| < 1, \operatorname{Im}(w) > 0\}, \quad D_u = \{\operatorname{Re}(u) < 0, \operatorname{Im}(u) > 0\},$$

$$D_v = \left\{ -\log \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} < \operatorname{Re}(v) < 0, 0 < \operatorname{Im}(v) < \pi \right\},$$

$$D_x = \left\{ 1 < |x| < \sqrt{\frac{1+p}{1-p}}, \operatorname{Im}(x) > 0 \right\},$$

$$D_z = \{|z - \sqrt{1-p^2}| + |z + \sqrt{1-p^2}| < 2, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

このとき、 u, v, x, z は、それぞれ D_w, D_u, D_v, D_x, D_z を次々写す等角写像である。これらの合成写像を γ とおく。

$$z = \gamma(w) = z \circ x \circ v \circ u(w).$$

γ は上半円板 D_w から上半楕円板 D_z への等角写像であるので、Schwarz の鏡像の原理から \mathbb{D} を $\mathcal{E}_p = \{|z - \sqrt{1-p^2}| + |z + \sqrt{1-p^2}| < 2\}$ の上に写す等角写像 $\tilde{\gamma}$ が存在する。

このとき、写像 $B_{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma} \circ B \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ は \mathcal{E}_p 上の Blaschke-like 写像になる。

3次標準 Blaschke 積 $B(z) = z \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ に対して、図 8 は、 $p \approx 0.677$ のとき $\partial\mathcal{E}_p$ の各点の逆像からできる直線族を描いたものである。包絡線は $B_{\tilde{\gamma}}$ の内部曲線を与えるが、定理 3.9 の B_φ の場合とは異なり、これらはいずれも楕円にならない。

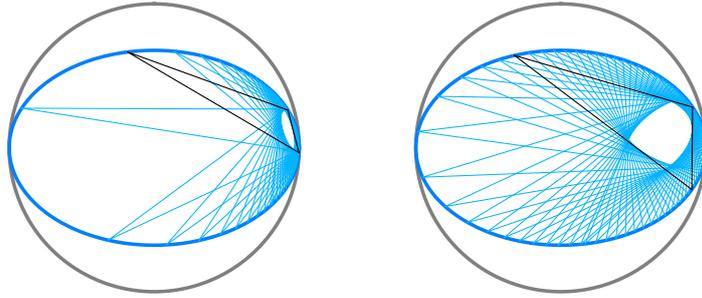


図 8 ($k = \frac{1}{100}, c \approx 0.524$) 左: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}i$, 右: $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{1}{2}i$.

選んだ等角写像によらず、Blaschke-like 写像に共通する幾何学性質はあるだろうか、あるとすればどのようなものだろうか？ この問題については、今後の課題である。

参考文献

- [1] A. G. Aksoy, F. Arici, M. E. Celorrio, and P. Gorkin. Decomposable Blaschke products of degree 2^n . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 376(9):6341–6369, 2023.

- [2] W. Chapple. An essay on the property of triangles inscribed in and circumscribed about given circles. *Miscellanea Curiosa Mathematica*, 4:117–124, 1746.
- [3] U. Daepf, P. Gorkin, and R. Mortini. Ellipses and finite Blaschke products. *Amer. Math. Monthly*, 109(9):785–795, 2002.
- [4] L. Flatto. *Poncelet’s theorem*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [5] M. Frantz. How conics govern Möbius transformations. *Amer. Math. Monthly*, 111(9):779–790, 2004.
- [6] M. Fujimura. Inscribed ellipses and Blaschke products. *Comput. Methods Funct. Theory*, 13(4):557–573, 2013.
- [7] M. Fujimura. Blaschke products and circumscribed conics. *Comput. Methods Funct. Theory*, 17(4):635–652, 2017.
- [8] M. Fujimura. Interior and exterior curves of finite Blaschke products. *J. Math. Anal. Appl.*, 467(1):711–722, 2018.
- [9] M. Fujimura and Y. Gotoh. Geometric properties of Blaschke-like maps on domains with a conic boundary. *Comput. Methods Funct. Theory*, 24(2):389–413, 2024.
- [10] N. Fuss. De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet. *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 10:103–125, 1797.
- [11] H.-L. Gau and P. Y. Wu. Numerical range and Poncelet property. *Taiwanese J. Math.*, 7(2):173–193, 2003.
- [12] P. Gorkin and E. Skubak. Polynomials, ellipses, and matrices: two questions, one answer. *Amer. Math. Monthly*, 118(6):522–533, 2011.
- [13] P. Gorkin and N. Wagner. Ellipses and compositions of finite Blaschke products. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(2):1354–1366, 2017.
- [14] J. Mashreghi. *Derivatives of inner functions*, volume 31 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013.
- [15] B. Mirman. Sufficient conditions for Poncelet polygons not to close. *Amer. Math. Monthly*, 112(4):351–356, 2005.
- [16] Z. Nehari. *Conformal mapping*. Dover Publications, Inc., New York, 1975. Reprinting of the 1952 edition.
- [17] J.-V. Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures. Tome I*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995. Reprint of the second (1865) edition.
- [18] R. Schwartz and S. Tabachnikov. Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after. *Math. Intelligencer*, 38(2):29–34, 2016.
- [19] H. A. Schwarz. Ueber einige Abbildungsaufgaben. *J. Reine Angew. Math.*, 70:105–120, 1869.
- [20] P. Y. Wu. Polygons and numerical ranges. *Amer. Math. Monthly*, 107(6):528–540, 2000.