日本数学会

2026年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

（2日目／3月24日）

2026年3月

於　東京理科大学

EXTENDING HOLOMORPHIC FUNCTIONS FROM ANALYTIC COMPLEMENTS OF COMPLETE KÄHLER DOMAINS

TAKEO OHSAWA

As a continuation of [Oh-1], it was shown in [Oh-2] that there exists a locally pseudoconvex but holomorphically non-convex ramified Riemann domain over $\mathbb{C}^2$, originally constructed by Fornaess [F], which is holomorphically separable in the sense that any two points can be separated by holomorphic functions. The purpose of the present note is to clarify what is needed for constructing such holomorphic functions by proving the following.

Theorem 1. *Let M be a complex manifold of dimension n and let $X \subset M$ be a closed complex analytic set whose complement has a complete Kähler metric. Assume that there exist a holomorphic n-form ω on M which has no zeros in $M \setminus X$ and a plurisubharmonic function Φ on M such that $\Phi^{-1}(-\infty) = X$, Φ is C^∞ on $M \setminus X$ and $e^{-\Phi}\omega$ is not locally square integrable on any open subset of M which intersects with X. Then, for any $c \in \mathbb{R}$ and for any holomorphic function f on $\Phi^{-1}([-\infty, c)))$ satisfying*

$$i^{n^2} \int_{\Phi < c} |f|^2 \omega \wedge \overline{\omega} < \infty,$$

there exists a holomorphic function $\tilde{f}$ on M such that $\tilde{f}|_X = f$.

References

[F] Fornaess, J. E., *A counterexample for the Levi problem for branched Riemann domains over $\mathbb{C}^n$,* Math. Ann. **234** (1978), 275-277.

[Oh-1] Ohsawa, T., *On the Levi problem on complex manifolds under the negativity of canonical bundles near the boundary,* to appear in PRIMS.

[Oh-2] ——, *Costructing a holomorphically nonconvex surface which is locally pseudoconvex as a submanifold of* $\mathbb{C}^3$, submitted for publication.

Takeo Ohsawa, Graduate School of Mathematics Nagoya University 464-8602 Chikusaku Furocho Nagoya Japan

Email address: ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp

無限遠点が 2 つの超楕円曲線に付随するシグマ関数

綾野　孝則　(阪公大数学研)*1
Victor M. Buchstaber　(Steklov Mathematical Institute)

コンパクトリーマン面に付随するテータ関数は，標準ホモロジー基底に依存する準周期的な整関数である．F. Klein は，「テータ関数を調整して，標準ホモロジー基底の取り方に依存しない準周期的な整関数を構成せよ」という問題を提示した．この問題は，Korotkin, Shramchenko, Nakayashiki により，一般のコンパクトリーマン面に対して解決された．一方，Buchstaber, Enolski, Leykin は，「代数曲線の具体的な定義方程式が与えられた場合に，テータ関数を調整して，原点におけるべき級数展開の係数が定義方程式の係数のみから代数的に書けるような準周期的な整関数を構成せよ」という問題を提示した．この条件を満たす関数をシグマ関数という．無限遠点が 1 つの超楕円曲線，(n,s) 曲線，テレスコピック曲線，ワイエルシュトラス曲線に対しては，後者の問題が解決された．一方，無限遠点が 2 つの超楕円曲線は，代数曲線を定義する代数方程式という意味では，これらの代数曲線には含まれていない．本発表では，無限遠点が 2 つの超楕円曲線に対して後者の問題を解決する．

自然数 g に対して，$N(x)=\nu_0x^{2g+2}+\nu_2x^{2g+1}+\cdots+\nu_{4g+2}x+\nu_{4g+4}$, $\nu_i\in\mathbb{C}$, $\nu_0\neq 0$ は重根を持たないとする．V を $y^2=N(x)$ で定義される種数 g の超楕円曲線とする．V 上の正則微分形式 $\mu_i=\frac{x^{i-1}}{2y}dx$, $1\le i\le g$ を考える．$\mu={}^t(\mu_1,\dots,\mu_g)$ とする．$\{\mathfrak{a}_i,\mathfrak{b}_i\}_{i=1}^g$ を V 上の標準ホモロジー基底とする．周期行列を $2\mu'=\left(\int_{\mathfrak{a}_j}\mu_i\right)$, $2\mu''=\left(\int_{\mathfrak{b}_j}\mu_i\right)$, $\tau=(\mu')^{-1}\mu''$ と定義する．$N(a)=0$ となる $a\in\mathbb{C}$ をとる．$N(x)$ を $N(x)=\nu_0(x-a)\prod_{i=1}^{2g+1}(x-a_i)$, $a_i\in\mathbb{C}$ と書く．$\mathfrak{s}\mathfrak{t}\neq 0$, $\mathfrak{s}^{2g+1}/\mathfrak{t}^2=N'(a)$ を満たす $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathbb{C}$ をとる．$M(X)=\prod_{i=1}^{2g+1}\left(X-\frac{\mathfrak{s}}{a_i-a}\right)$ とする．C を $Y^2=M(X)$ で定義される種数 g の超楕円曲線とする．C 上の正則微分形式 $\omega_i=-\frac{X^{g-i}}{2Y}dX$, $1\le i\le g$ を考える．λ_i を $M(X)=\lambda_0X^{2g+1}+\lambda_2X^{2g}+\lambda_4X^{2g-1}+\cdots+\lambda_{4g}X+\lambda_{4g+2}$ を満たす複素数として定義する．C 上の第 2 種微分形式 $\eta_i=-\frac{1}{2Y}\sum_{k=g-i+1}^{g+i-1}(k+i-g)\lambda_{2g+2i-2k-2}X^kdX$, $1\le i\le g$ を考える．V から C への同型写像

$$\zeta:\quad V\to C,\qquad (x,y)\mapsto (X,Y)=\left(\frac{\mathfrak{s}}{x-a},\frac{\mathfrak{t}\,y}{(x-a)^{g+1}}\right)$$

が定義できる．$g\times g$ の正則行列 D を ${}^t\big(\zeta^*(\omega_1),\dots,\zeta^*(\omega_g)\big)=D\mu$ で定義する．ここで，$\zeta^*(\omega_i)$ は ω_i の ζ による引き戻しである．$1\le i,j\le g$ に対して，D の (i,j) 成分は，2 項

*1 〒558-8585　大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号　大阪公立大学　数学研究所
e-mail: ayano@omu.ac.jp
web: https://researchmap.jp/ayano75/
2020 Mathematics Subject Classification: 14H42, 14K25
キーワード：シグマ関数，テータ関数，超楕円曲線

係数を用いて，$\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{s}^{g+1-i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}(-a)^{i-j}$ と書ける ([1, Proposition 4.1])．e_1, e_2 を変数として，次の多項式を考える．

$$\begin{aligned}
f(e_1,e_2) &= \sum_{i=0}^{g+1} e_1^i e_2^i \big\{2\nu_{4g+4-4i} + \nu_{4g+2-4i}(e_1+e_2)\big\},\\
\widetilde{f}(e_1,e_2) &= \sum_{i=0}^{g} e_1^i e_2^i \left\{2\lambda_{4g+2-4i} + \lambda_{4g-4i}(e_1+e_2)\right\},\\
\overline{f}(e_1,e_2) &= \mathfrak{k}^{-2}(e_1-a)^{g+1}(e_2-a)^{g+1}\widetilde{f}\left(\frac{\mathfrak{s}}{e_1-a}, \frac{\mathfrak{s}}{e_2-a}\right)
\end{aligned}$$

このとき，$\mathfrak{n}_{i,j} = \mathfrak{n}_{j,i}$ かつ $\overline{f}(e_1,e_2) = f(e_1,e_2) + (e_1-e_2)^2 \sum_{i,j=1}^{g} \mathfrak{n}_{i,j} e_1^{i-1} e_2^{j-1}$ を満たす複素数 $\{\mathfrak{n}_{i,j}\}_{i,j=1}^{g}$ が存在する．$\Omega = (\mathfrak{n}_{i,j})_{1\le i,j\le g}$ とする．$(a,0)$ 以外では正則な V 上の第 2 種微分形式 $\kappa_1, \ldots, \kappa_g$ を次で定義する．

$$ {}^t(\kappa_1, \ldots, \kappa_g) = {}^t\Big\{\big(\zeta^*(\eta_1), \ldots, \zeta^*(\eta_g)\big)D\Big\} - 2\Omega\mu $$

$1 \le i \le g$ に対して，κ_i は次の形に書ける ([1, Lemma 4.13])．

$$ \kappa_i = \frac{r}{(x-a)^g}\frac{dx}{2y}, \qquad r \in \mathbb{Q}\big[a, \{\nu_{2i}\}_{i=0}^{2g+2}, x\big] $$

周期行列を $-2\kappa' = \left(\int_{\mathfrak{a}_j} \kappa_i\right)$，$-2\kappa'' = \left(\int_{\mathfrak{b}_j} \kappa_i\right)$ と定義する．$\delta' = {}^t(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$，$\delta'' = {}^t(\frac{g}{2}, \frac{g-1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^g$，$\mathcal{R} = \left\{N'(a)^{-m}r \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ r \in \mathbb{Q}\big[a, \{\nu_{2i}\}_{i=0}^{2g+2}\big]\right\}$ とする．

Definition 1. $v = (v_{2g}, v_{2g-2}, \ldots, v_2) \in \mathbb{C}^g$ に対して，

$$ H(v) = \varepsilon \exp\left(\frac{1}{2}{}^t v\kappa'(\mu')^{-1}v\right)\theta\begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix}\big((2\mu')^{-1}v, \tau\big), \qquad \varepsilon \in \mathbb{C} $$

とする．ここで，$\theta\begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix}(u,\tau)$ はリーマンのテータ関数である．

Proposition 2 ([1, Proposition 4.15]) $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^g$，$v \in \mathbb{C}^g$ に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&H(v + 2\mu' m_1 + 2\mu'' m_2)/H(v)\\
&= (-1)^{2({}^t\delta' m_1 - {}^t\delta'' m_2) + {}^t m_1 m_2}\exp\big\{{}^t(2\kappa' m_1 + 2\kappa'' m_2)(v + \mu' m_1 + \mu'' m_2)\big\}
\end{aligned}$$

Theorem 3 ([1, Theorem 4.12]) ε をうまくとると，$H(v)$ は $v=0$ の周りで次のようにべき級数展開できる．

$$ H(v) = \sum_{n_1,\ldots,n_g \ge 0} \xi_{n_1,\ldots,n_g} v_{2g}^{n_1} \cdots v_2^{n_g}, \qquad \xi_{n_1,\ldots,n_g} \in \mathcal{R} $$

参考文献

[1] T. Ayano, V. M. Buchstaber, Sigma function associated with a hyperelliptic curve with two points at infinity, accepted to Regular and Chaotic Dynamics.

Hardy spaces on bounded symmetric domains I

Characterizations

Shaolin CHEN (Guangxi Normal University)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1

This is an announcement of [2]. Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded symmetric domain with origin and Bergman-Shilov boundary b. Denote by Γ_0 the isotropy group of $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Ω is circular and star-shaped with respect to 0 and that b is circular. The group Γ_0 is transitive on b, and b has a unique normalized Γ_0-invariant measure σ with $\sigma(b) = 1$ ([3]). The unit polydisk $\mathbb{D}^n$, the unit ball $\mathbb{B}^n$ and the classical Cartan domains are bounded symmetric domains with origin. Denote by $L^p(b)$ ($p \in (0, \infty)$) the set of all measurable functions F of b into $\mathbb{C}$ with

$$\|F\|_{L^p} = \left(\int_b |F(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

For $p \in (0, \infty)$, the pluriharmonic Hardy space $\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\Omega)$ consists of all those pluriharmonic functions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ such that $\|f\|_p := \sup_{r \in [0,1)} M_p(r, f) < \infty$, where

$$M_p(r, f) = \left(\int_b |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

If $p \geq 1$, then $\| \cdot \|_p$ is a norm on $\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\Omega)$. This is no longer true in the case $0 < p < 1$, and in this case, $\| \cdot \|_p^p$ is subadditive and it induces the translation invariant metric on $\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\Omega)$. For holomorphic Hardy space, Hahn and Mitchell [3] obtained the completeness of $\mathscr{H}^p(\Omega) = \mathscr{P}\mathscr{H}^p(\Omega) \cap H(\Omega, \mathbb{C})$ for $p > 0$.

Theorem A. ([3, Theorem 5])*For $p \in [1, \infty)$, $\mathscr{H}^p(\Omega)$ is a complex Banach space with respect to the norm $\| \cdot \|_p$, and for $p \in (0, 1)$, $\mathscr{H}^p(\Omega)$ is a complete linear Hausdorff space with respect to the metric $d(\psi_1, \psi_2) = \|\psi_1 - \psi_2\|_p^p$, where $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathscr{H}^p(\Omega)$.*

Shapiro [8] generalized Theorem A to complex valued harmonic Hardy space on $\mathbb{D}$. In this talk, we extend Theorem A to $\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\Omega)$.

Pavlović obtained the following characterization of holomorphic Hardy space on $\mathbb{D}$.

Theorem B. ([7, Theorem 1.1])*Let $p \in (0, \infty)$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ and f be a holomorphic function in $\mathbb{D}$. Then the followings are equivalent:*

(1) *$f \in \mathscr{H}^p(\mathbb{D})$;*

(2) *$\mathscr{G}[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}[f](\zeta) = \left(\int_0^1 (1 - r)|f'(r\zeta)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}$;*

(3) *$\mathscr{G}_*[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}_*[f](\zeta) = \left(\int_0^1 (1 - r) \sup_{\rho \in (0,r)} |f'(\rho\zeta)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}$;*

(4) *$\mathscr{G}_d[f] \in L^p(\mathbb{T})$, where $\mathscr{G}_d[f](\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} |f'(r_k\zeta)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $r_k = 1 - 2^{-k}$.*

Furthermore, for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, there are constants C_j independent of f such that

$$\|f - f(0)\|_p \leq C_1 \|\mathscr{G}[f]\|_{L^p} \leq C_2 \|\mathscr{G}_*[f]\|_{L^p} \leq C_3 \|\mathscr{G}_d[f]\|_{L^p} \leq C_4 \|f - f(0)\|_p.$$

*1 e-mail: hi.hamada01@gmail.com
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 31C10, 32A18, 32M15, 47B33; Secondary: 30H30.
Keywords: Bounded symmetric domain, Hardy space. Pluriharmonic function.

In the case of several complex variables, Ahern and Bruna [1] obtained similar characterizations of the holomorphic Hardy space on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ in $\mathbb{C}^n$. Krantz and Li [6] also obtained similar characterizations of the holomorphic Hardy space on some classes of pseudoconvex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$.

On the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$, the following result is known. Let $f \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{C})$. Then, there exists a positive constant C, depending only on p, such that

$$\frac{1}{C}\|f\|_p^p \leq |f(0)|^p + \int_{\partial\mathbb{B}^n} \big(\mathscr{G}(f)(\zeta)\big)^p d\sigma(\zeta) \leq C\|f\|_p^p \tag{1}$$

for $p \in (0, \infty)$, where

$$\mathscr{G}(f)(\zeta) = \left(\int_0^1 |\nabla f(r\zeta)|^2(1-r)dr\right)^{\frac{1}{2}}, \ \zeta \in \partial\mathbb{B}^n$$

is the Littlewood-Paley type $\mathscr{G}$-function (see [1, 6, 9]).

If we consider bounded symmetric domains $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, the results in [1, 6] can not be used except the case $\Omega = \mathbb{B}^n$, because if $\Omega \neq \mathbb{B}^n$, then its boundary is not smooth. So, it is natural to consider a generalization of Theorem B to bounded symmetric domains Ω. In this talk, we extend Theorem B to bounded symmetric domains Ω.

A classical result of Hardy and Littlewood asserts that if $p \in (0, \infty]$, $\alpha \in (1, \infty)$ and f is a holomorphic function in $\mathbb{D}$, then (cf. [4, 5])

$$M_p(r, f') = O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha}\right) \quad \text{as } r \to 1^-$$

if and only if

$$M_p(r, f) = O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha-1}\right) \quad \text{as } r \to 1^-.$$

In this talk, we also consider an extension of this result to bounded symmetric domains.

References

[1] P. Ahern, J. Bruna, Maximal and area integral characterization of Hardy-Sobolev spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Rev. Mat. Iberoam.* **4** (1988), 123–153.

[2] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of Hardy spaces and composition operators in bounded symmetric domains, *Math. Z.* **311** (2025), 16.

[3] K. T. Hahn, J. Mitchell, H^p spaces on bounded symmetric domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **146** (1969), 521–531.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of conjugate functions, *J. Reine Angrew. Math.* **167**(1931), 405–423.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.* **34**(1932), 403–439.

[6] S. G. Krantz, S. Y. Li, Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in $\mathbb{C}^n$, *Complex Variables* **32** (1997), 373–399.

[7] M. Pavlović, On the Littlewood-Paley g-function and Calderón's area theorem, *Expo. Math.* **31**(2013), 169–195.

[8] J. H. Shapiro, Linear topological properties of the harmonic Hardy spaces h^p for $0 < p < 1$, *Illinois J. Math.* **29** (1985), 311–339.

[9] E. Stein, Some problems in harmonic analysis, *Proceedings of symposium in pure mathematics,* **35** (1979), 3–19.

Hardy spaces on bounded symmetric domains II

Composition operators

Shaolin CHEN (Guangxi Normal University)
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1

This is an announcement of [2]. Let Ω be a domain in $\mathbb{C}^n$. For a given $\phi \in H(\Omega, \mathbb{D})$, the composition operator $C_\phi : \mathscr{PH}(\mathbb{D}) \to \mathscr{PH}(\Omega)$ is defined by $C_\phi(f) = f \circ \phi$, where $f \in \mathscr{PH}(\mathbb{D})$. In 1987, Shapiro [4] gave a complete characterization of compact composition operators on $\mathscr{H}^2(\mathbb{D})$, with a number of interesting consequences for peak sets, essential norm of composition operators, and so on.

A continuous non-decreasing and unbounded function $\omega : [0, 1) \to (0, \infty)$ is called a weight. A weight ω is called doubling if there is a constant $C > 1$ such that

$$\omega(1 - s/2) < C\omega(1 - s), \quad s \in (0, 1].$$

$\omega(t) = 1/(1 - t)^\alpha$ and $\omega(t) = 1/(1 - t^2)^\alpha$ with $\alpha > 0$ are doubling functions.

Let Ω be a bounded symmetric domain in $\mathbb{C}^n$ with origin. Then its Minkowski function is a norm on $\mathbb{C}^n$ and will be denoted by $\|\cdot\|_\Omega$. For a weight ω, we use $\mathscr{B}_\omega(\Omega)$ to denote the pluriharmonic Bloch type space consisting of all $f = f_1 + \overline{f_2} \in \mathscr{PH}(\Omega)$ with the norm

$$\|f\|_{\mathscr{B}_\omega(\Omega)} := |f(0)| + \sup_{z \in \Omega} \mathscr{B}^f_\omega(z) < \infty,$$

where $\mathscr{B}^f_\omega(z) = \Lambda_f(z)/\omega(|z|)$ and

$$\Lambda_f(z) = \sup\{|Df_1(z)w| + |Df_2(z)w| : \|w\|_\Omega = 1\}, \quad z \in \Omega.$$

Then $\mathscr{B}_\omega(\Omega)$ is a complex Banach space. Furthermore, let

$$\|f\|_{\mathscr{B}_\omega(\Omega),s} := \sup_{z \in \Omega} \mathscr{B}^f_\omega(z) < \infty$$

be the semi-norm. If $f \in \mathscr{B}_\omega(\Omega)$, then we call f a pluriharmonic Bloch type function.

Let $D^n_\alpha(\zeta)$ denote the Koranyi approach domain defined by

$$D^n_\alpha(\zeta) = \left\{ z \in \mathbb{B}^n : \ |1 - \langle z, \zeta \rangle| < \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \right\}. \tag{1}$$

Kwon [3] investigated some characterizations of composition operators of the Bloch space on $\mathbb{D}$ to the holomorphic Hardy spaces on $\mathbb{B}^n$ to be bounded or compact.

Theorem D. ([3, Theorems 5.1 and 5.10]) *Let $p \in (0, \infty)$, $1 < \alpha < \infty$ and $\omega(t) = 1/(1 - t^2)$ for $t \in [0, 1)$. If $\phi \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{D})$, then the followings are equivalent:*

(1) $\int_{\partial\mathbb{B}^n} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla(\phi \circ \varphi_{r\zeta})(0)|^2}{(1-|\phi(r\zeta)|^2)^2} \frac{dr}{1-r} \right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta) < \infty$, *where $\varphi_{r\zeta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ with $\varphi_{r\zeta}(0) = r\zeta$;*

(2) $\int_{\partial\mathbb{B}^n} \left(\int_{D^n_\alpha(\zeta)} \frac{|\nabla(\phi \circ \varphi_z)(0)|^2}{(1-|\phi(z)|^2)^2} \frac{dV(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}} \right)^{\frac{p}{2}} d\sigma(\zeta) < \infty$, *where dV denotes the Lebesgue volume measure of $\mathbb{C}^n$, and $\varphi_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ with $\varphi_z(0) = z$;*

*1 e-mail: hi.hamada01@gmail.com
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 31C10, 32A18, 32M15, 47B33; Secondary: 30H30.
Keywords: Bloch type space, Bounded symmetric domains, Composition operator, Hardy space .

(3) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\cap H(\mathbb{D})\to\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is a bounded operator;*

(4) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\cap H(\mathbb{D})\to\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is compact.*

The characterizations of composition operators from harmonic Bloch type spaces on $\mathbb{D}$ to pluriharmonic Hardy spaces on $\mathbb{B}^n$ by using doubling weight was given in [1].

Theorem E. *Let $p\in(0,\infty)$, $\alpha\in(1,\infty)$ and ω be a doubling weight. If $\phi:\ \mathbb{B}^n\to\mathbb{D}$ is holomorphic, then the followings are equivalent:*

(1) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is a bounded operator;*

(2) $\int_{\partial\mathbb{B}^n}\left(\int_0^1|\nabla\phi(r\zeta)|^2\omega^2(|\phi(r\zeta)|)(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(\zeta)<\infty$;

(3) $\int_{\partial\mathbb{B}^n}\left(\int_{D^n_\alpha(\zeta)}|\nabla\phi(z)|^2\omega^2(|\phi(z)|)(1-|z|)^{1-n}dV(z)\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(\zeta)<\infty$;

(4) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{B}^n)$ *is compact.*

In the case ϕ maps $\mathbb{D}$ into $\mathbb{D}$, the following characterization was obtained in [1].

Theorem G. *Let $p\in(0,\infty)$, $1<\alpha<\infty$, ω be a doubling weight and $\phi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ be a holomorphic function. Then the followings are equivalent:*

(1) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{D})$ *is a bounded operator;*

(2) $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1|\phi'(re^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(re^{i\theta})|)(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$;

(3) $\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^\infty 2^{-2k}|\phi'(r_ke^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(r_ke^{i\theta})|)\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$, *where $r_k=1-2^{-k}$;*

(4) $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(1-r)\sup_{0<\rho<r}\left(|\phi'(\rho\, e^{i\theta})|^2\omega^2(|\phi(\rho\, e^{i\theta})|)\right)dr\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$;

(5) $\int_0^{2\pi}\left(\int_{D^1_\alpha(\zeta)}|\nabla\phi(z)|^2\omega^2(|\phi(z)|)dA(z)\right)^{\frac{p}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$, *where dA denotes the Lebesgue area measure of $\mathbb{C}$;*

(6) $C_\phi:\ \mathscr{B}_\omega(\mathbb{D})\to\mathscr{P}\mathscr{H}^p(\mathbb{D})$ *is compact.*

In this talk, by using doubling weight and a new characterization of pluriharmonic Hardy space, we establish the characterizations of composition operators on harmonic Bloch type spaces on $\mathbb{D}$ and pluriharmonic Hardy spaces on bounded symmetric domains Ω to be bounded or compact, which extends Theorems D, E and G.

References

[1] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of composition operators on Bloch and Hardy type spaces, *Results Math.* **79** (2024), Paper No. 95, 24 pp.

[2] S. L. Chen, H. Hamada, Characterizations of Hardy spaces and composition operators in bounded symmetric domains, *Math. Z.* **311** (2025), 16.

[3] E. G. Kwon, Hyperbolic mean growth of bounded holomorphic functions in the ball, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 1269–1294.

[4] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator, *Ann. Math.* **125** (1987), 375–404.

Roper-Suffridge type extension operators for univalent mappings revisited

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*1
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This is an announcement of [7]. Let $\mathcal{L}S$, S, S^* and K denote the family of all normalized locally univalent, univalent, starlike and convex functions on the unit disc $\mathbb{D}$, respectively. The Roper-Suffridge extension operator is defined for $f \in \mathcal{L}S$ by

$$\Phi_n(f)(z) = F(z) = \left(f(z_1), \sqrt{f'(z_1)}z'\right), \quad z = (z_1, z') \in \mathbb{B}^n,$$

where the branch of the square root is chosen such that $\sqrt{f'(0)} = 1$. Roper and Suffridge [9] proved that if $f \in K$ then $\Phi_n(f) \in K(\mathbb{B}^n)$, and in [5] it was shown that if $f \in S^*$ then $\Phi_n(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$. Graham, Kohr and Kohr [6] showed that if $f \in S$, then $\Phi_n(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain on $\mathbb{B}^n$.

We choose the branches of the power functions such that

$$\left.\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\right|_{z_1=0} = 1 \quad \text{and} \quad \left.(f'(z_1))^{\beta}\right|_{z_1=0} = 1.$$

For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in S$, Graham, Hamada, Kohr and Suffridge [4] considered the operators

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = F_{\alpha,\beta}(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}(f'(z_1))^{\beta}z'\right), \quad z \in \mathbb{B}^n,$$

When $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ we obtain the Roper-Suffridge operator Φ_n.

Let $E = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1/2, \alpha + \beta \le 1\}$. It was shown in [4] that the following extension results are valid for $(\alpha, \beta) \in E$.

(i) $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain for $f \in S$.

(ii) If $f \in S^*$ then $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$.

(iii) If $\alpha \ge 0$ and $\beta \ge 0$ and $n \ge 2$, then $\Phi_{n,\alpha,\beta}(K) \subset K(\mathbb{B}^n)$ iff $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$.

Elin [1] has introduced an approach to extension operators on Banach spaces based on the semigroup theory. Let Y be a complex Banach space and let $r \ge 1$. Also, let

$$\Omega_r = \left\{(z_1, w) \in Z = \mathbb{C} \times Y : |z_1|^2 + \|w\|_Y^r < 1\right\}.$$

Then, the Minkowski functional of Ω_r is a complete norm $\|\cdot\|_Z$ on Z and Ω_r is the unit ball of Z with respect to this norm. Let $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1/r]$, $\alpha + \beta \le 1$ and let $\Phi_{\alpha,\beta} : S \to S(\Omega_r)$ be the Roper-Suffridge type extension operator given by

$$\Phi_{\alpha,\beta}(f)(z_1, w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}(f'(z_1))^{\beta}w\right), \quad (z_1, w) \in \Omega_r.$$

*1 e-mail: `hi.hamada01@gmail.com`
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32H02; Secondary 30C45, 30C55, 30C80, 32K05, 46G20.
Keywords: Carathéodory class, convex mapping, Loewner chain, Roper-Suffridge extension operator, starlike mapping..

Graham, Hamada and Kohr [2] adopted Elin's point of view in [1] and proved that if $f \in S$, then $F = \Phi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a Loewner chain on Ω_r (in the case of g-Loewner chains, see [3]). Roper-Suffridge type extension operator $\Phi_{\alpha,\beta}$ and its variations have been recently studied by many mathematicians (see the references in [1, 3, 7, 8]). Note that in these results, $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/r]$ and $\alpha+\beta \leq 1$, where r is a positive constant which depends on the domain on which $\Phi_{\alpha,\beta}(f)$ is defined.

Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space with $\dim \mathcal{H} \geq 2$ and let B be the unit ball of $\mathcal{H}$. For a fixed unit vector $e_1 \in \mathcal{H}$, we consider the Roper-Suffridge type extension operators as follows. Let $\mathcal{H}_1$ be the orthogonal complement of $\mathbb{C}e_1$. In the case $z = z_1 e_1 + w$ with $w \in \mathcal{H}_1$, we use the notation $z = (z_1, w)$. For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, let $\Psi_{\alpha,\beta} : S \to S(B)$ be the Roper-Suffridge type extension operator given by

$$\Psi_{\alpha,\beta}(f)(z_1,w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^{\alpha} (f'(z_1))^{\beta} w \right), \quad (z_1,w) \in B. \tag{1}$$

Until now, it is only known that for the pairs $(\alpha,\beta) \in E$, $\Psi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a normal Loewner chain on B for any $f \in S$ (see e.g. [3]).

In this talk, we give a closed domain D in $\mathbb{R}^2$ such that for $(\alpha,\beta) \in D$, $\Psi_{\alpha,\beta}(f)$ can be embedded as the initial element of a normal Loewner chain on B for any $f \in S$. Note that $E \subset D$ and D contains points $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ such that $\alpha < 0$ and/or $\beta < 0$. For the proof, we use a new method which is different from those used in [3, 4]. As a corollary, we obtain that for $(\alpha,\beta) \in D$, $\Psi_{\alpha,\beta}$ preserves starlikeness. We also show that if $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1/2)\}$, then the operator $\Psi_{\alpha,\beta}$ does not preserve convexity.

References

[1] M. Elin, Extension operators via semigroups, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), 239–250.

[2] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Extension operators and subordination chains, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), 278–289.

[3] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators in complex Banach spaces. Anal. Math. Phys. 10 (2020), no. 1, 5.

[4] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T. J. Suffridge, Extension operators for locally univalent mappings, Michigan Math. J. 50 (2002), 37–55.

[5] I. Graham, G. Kohr, Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math. 81 (2000), 331–342.

[6] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, Loewner chains and the Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl. 247 (2000), 448–465.

[7] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Roper-Suffridge type extension operators for univalent mappings revisited, J. Math. Anal. Appl., 552 (2025), 129763.

[8] J.R. Muir, Generalized parametric representation and extension operators, J. Math. Anal. Appl. 531 (2024), 127767.

[9] K. Roper, T.J. Suffridge, Convex mappings on the unit ball of $\mathbf{C}^n$, J. Anal. Math. 65 (1995), 333–347.

Koebe one-quarter theorem in infinite dimensions

Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)[*1]
Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)
Mirela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This is an announcement of [10]. The famous Koebe one-quarter theorem gives a sharp bound on the size of the image of univalent functions on the unit disc $\mathbb{D}$ locally. In 1907, Koebe [13] discovered that the ranges of all functions in the family S of normalized univalent functions on $\mathbb{D}$ contain a common disc $\{\zeta : |\zeta| < \rho\}$, where ρ is an absolute constant. The Koebe function shows that $\rho \leq 1/4$. In 1916, $\rho = 1/4$ was established by Bieberbach [2].

For normalized biholomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, the Koebe one-quarter theorem does not hold in general. Moreover, there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}_\rho = \rho\mathbb{B}$ lies in $f(\mathbb{B})$ for every normalized biholomorphic mapping f in $\mathbb{B}$, where $\mathbb{B}$ is the unit ball of $\mathbb{C}^n$ with respect to a norm on $\mathbb{C}^n$. For example, let

$$f_m(z) = (z_1 - m\sqrt{m^2-1}z_2^2, z_2, \ldots, z_n), \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^n, \tag{1}$$

where m is a positive integer and $\mathbb{B}^n$ is the Euclidean unit ball of $\mathbb{C}^n$. Then f_m is a normalized biholomorphic mapping on $\mathbb{B}^n$ and for $a_m = (\sqrt{m^2-1}/m, 1/m, 0, \ldots, 0) \in \partial\mathbb{B}^n$, we have $f_m(a_m) = (0, 1/m, 0, \ldots, 0)$. Therefore, there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}^n_\rho$ lies in $f_m(\mathbb{B}^n)$ for every positive integer m. Moreover, $f_m(z,t) = f_m(e^t z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$, where f_m is as in (1), is a Loewner chain such that there is no constant $\rho > 0$ such that $\mathbb{B}^n_\rho$ lies in $f_m(\mathbb{B}^n, 0)$ for every positive integer m. Therefore, in several complex variables, we should add some assumptions on biholomorphic mappings f (respectively Loewner chains $f(z,t)$) so that the Koebe one-quarter theorem holds for f (respectively for the first elements $f(\cdot, 0)$).

For normalized biholomorphic mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, the following estimate for the first elements f of normal Loewner chains was given by Kohr [14] and Graham, Hamada and Kohr [5].

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}. \tag{2}$$

In the case of finite dimensions, the estimate from below in (2) readily implies the Koebe one-quarter theorem (cf. [1] in the case of starlike mappings).

Let $\mathbb{B}$ be the unit ball of a complex Banach space X. In the case of infinite dimensions, Zhang and Liu [16] and Liu and Liu [15] stated Koebe one-quarter type covering theorems for several subclasses of normalized starlike mappings on $\mathbb{B}$. However, they did not give a proof for the covering theorem. Hamada and Kohr [8, Corollary 3.6] proved the estimate (2) for the first elements of normal Loewner chains on the unit ball of a reflexive complex Banach space. In 2002, Hamada and Kohr [7] proved the 1/2-theorem for normalized convex mappings on $\mathbb{B}$. By using a similar method of proof,

[*1] e-mail: hi.hamada01@gmail.com
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03363.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32H02; Secondary 30C45, 30C55, 30C80, 32K05.
Keywords: covering theorem, Koebe one-quarter theorem, Loewner chain, nonlinear resolvent, normal Loewner chain..

the Koebe one-quarter theorem for normalized starlike mappings on $\mathbb{B}$ can be proved. Since $f \in S$ if and only if f is the first element of a normal Loewner chain on the unit disc $\mathbb{D}$, it is interesting to consider the Koebe one-quarter theorem for the first elements of normal Loewner chains on $\mathbb{B}$. However, it is still unknown. Also, the method used in the proof in [7] cannot be applied to the first elements of normal Loewner chains.

For the Bloch constant in higher dimensions, see [3, 6, 12] and the references therein.

In the first part of this talk, we obtain a covering theorem for biholomorphic mappings on bounded domains in a complex Banach space X. Next, as an application of this result, we obtain the Koebe one-quarter theorem for normal Loewner chains on the unit ball $\mathbb{B}$ of X. We give several applications of this result. Finally, as another application of the above covering theorem, we give a covering theorem for nonlinear resolvents on $\mathbb{B}$ (cf. [4]).

References

[1] R. W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 150 (1991), no. 1, 13–22.

[2] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss.: (1916), 940–955.

[3] C.H. Chu, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Distortion of locally biholomorphic Bloch mappings on bounded symmetric domains, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), 830–843.

[4] M. Elin, Non-linear resolvents of holomorphically accretive mappings, Anal. Math. Phys. 15 (2025), Paper No. 77, 20 pp.

[5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, Canad. J. Math. 54(2) (2002), 324–351.

[6] H. Hamada, A distortion theorem and the Bloch constant for Bloch mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math. 137 (2019), 663–677.

[7] H. Hamada, G. Kohr, Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 47 (2002), 315–328.

[8] H. Hamada, G. Kohr, Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 49 (2004), 247–264.

[9] H. Hamada, G. Kohr, Loewner PDE, inverse Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family in infinite dimensions, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. XXIV (2023), 2431–2475.

[10] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Koebe one-quarter theorem in infinite dimensions, J. Funct. Anal., 290, no. 2 (2026), 111237.

[11] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Subordination chains and solutions to the Loewner PDE in infinite dimensions, submitted.

[12] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Bieberbach conjecture, Bohr radius, Bloch constant and Alexander's theorem in infinite dimensions, submitted.

[13] P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Physics. Kl., 1907, 191–210.

[14] G. Kohr, Using the method of Löwner chains to introduce some subclasses of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 46 (2001), no. 6, 743–760.

[15] T. Liu, X. Liu, On the precise growth, covering, and distortion theorems for normalized biholomorphic mappings, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004), 404–417.

[16] W. Zhang, T. Liu, On growth and covering theorems of quasi-convex mappings in the unit ball of a complex Banach space, Sci. China Ser. A 45 (2002), no. 12, 1538–1547.

重み付き L^2 近似問題について

高倉 真和 (東京都立大学)*

概要

与えられた複素多様体 X 上で、多重劣調和関数の増加列 $\{\phi_n\}$ が多重劣調和関数 ϕ に収束すると仮定する。本講演では、このときの重み付き Bergman 空間 $H^2(X,\phi_n) = \left\{f \in \mathcal{O}(X) \mid \int_X |f|^2 e^{-\phi_n} < \infty\right\}$ の安定性について論じる。すなわち、極限空間 $H^2(X,\phi)$ の任意の元が、各段階の空間 $H^2(X,\phi_n)$ の元によってどのように近似できるかを考察する。この近似問題には考えるべき二つの側面がある。ひとつは複素多様体 X の持つ幾何学的条件であり、もうひとつは重みの列 $\{\phi_n\}$ そのものが満たす条件である。この二つの観点を分けて取り上げ、どのような場合に近似が可能となるのかを紹介する。

擬凸な Kähler 多様体 X と、その上の多重劣調和関数 φ を考える。重み付き Bergman 空間は $H^2(X,\varphi) = \left\{f : X \text{ 上の正則 } (n,0)\text{-form } \mid \int_X |f|^2 e^{-\varphi} < \infty\right\}$ で定義される。ここで $|f|^2 = (\sqrt{-1})^{n^2} f \wedge \overline{f}$ である。本講演では次の重み付き L^2 近似問題を扱う: 多重劣調和関数の増加列 $\{\varphi_i\}$ が各点収束 $\varphi_i \to \varphi$ を満たすとき、

$$(*) \qquad \bigcup_i H^2(X,\varphi_i) \subset H^2(X,\varphi) \text{ が稠密である}$$

が成立するため条件は何か。

任意の多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ に対して $(*)$ が成立するとき、「X は $(*)$ を満たす」と言うことにする。この問題は Taylor[1], Fornæss–Wu [2].[3], Zhou–Li [4] によって研究されており、いずれも Hörmander の L^2 存在定理が主要な道具である。また、Guan-Zhou による強開性定理: $\bigcup_i \mathcal{I}(\varphi_i) = \mathcal{I}(\varphi)$ も重要な役割を果たす。ここに $\mathcal{I}(\varphi)$ は φ の定める乗数イデアル層である。(むしろこの近似問題は強開性予想の大域版である)

1. Taylor の結果: $X = \mathbb{C}^n$ かつ $e^{-\varphi_0}$ が局所可積分であるとき、$H^2\big(\mathbb{C}^n, \varphi_i + \log(1+|z|^2)\big)$ は $(*)$ を満たす。

2. Fornæss–Wu の結果: Taylor の結果を次のように改良した。まず、Guan–Zhou の強開性定理を用いて $e^{-\varphi_0}$ の局所可積分性の仮定を取り除いた。さらに $n = 1$ のときには extra weight $\log(1+|z|^2)$ を取り除くことができることを示した。つまり複素平面 $\mathbb{C}$ は $(*)$ を満たす。

3. Zhou–Li の結果: X を Stein 多様体、Ψ を正の階位をもつ多重劣調和関数とする。このとき、任意の多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ に対して $H^2(X, \varphi_i + \Psi)$ は $(*)$ を満たすことを示した。さらに同論文において、hyperconvex な複素多様体 X は $(*)$ を満たすことも証明された。この 3 の証明は、そのまま擬凸 Kähler 多様体へ拡張できる。

* . E-mail: takakura-masakazu@ed.tmu.ac.jp

1.　主結果

まず次の幾何学的結果である。

Theorem A. 開リーマン面 X が複素平面への proper な正則写像 $\Phi : X \to \mathbb{C}$ をもつとき、X は $(*)$ を満たす。

この定理は Fornæss–Wu の結果 2 を、より一般的な放物型リーマン面へ拡張するものである。また、証明方法も彼らの方法とは本質的に異なる。Fornæss–Wu の方法は、$\mathbb{C}$ 上の劣調和関数に対する Riesz 型分解定理と Hörmander の L^2 存在定理を組み合わせるものであった。これに対し本定理の証明では、$\log(|\Phi|^2+1)$ を 3 における extra weight Ψ として用いる点が特徴である。また、Theorem A と結果 3 を比較してみたい。ここで扱う放物型リーマン面には、有界な多重劣調和関数が存在しないという特徴がある。一方、3 で登場した hyperconvex 多様体はその逆で、有界な階位劣調和関数の存在によって定義される。しかしこの 2 つのクラスの多様体は、一見対照的でありながら、無限遠での振る舞いが良いという意味で共通している。次に重み φ_i に関する結果を紹介する。

Theorem B. X を擬凸な Kähler 多様体とする。多重劣調和関数の増加列 $\varphi_i \to \varphi$ が次の (a),(b) いずれかを満たすとき、$H^2(X, \varphi_i)$ は $(*)$ を満たす。

(a) φ が上に有界である。

(b) ある正の定数 λ が存在して、超関数の意味で

$$dd^c\varphi_i \ \geq \ \lambda\, dd^c\varphi$$

が成立する。

2,3 の証明では強開性定理が用いられていたが、本定理の証明では強開性定理をまったく用いない。むしろ、(a),(b) の系として強開性定理が導かれる。したがって、この結果は強開性定理の別証明を与えていることになる。

参考文献

[1] Taylor,B. A. “On the weighted polynomial approximation of entire functions,” *Pac. J. Math.* **36** (1971), 523 – 539.

[2] Fornæss, J. E. andWu, J.J “A global approximation result by Bert Alan Taylor and strong openness conjecture in $\mathbb{C}^n$ ” *J. Geom. Anal* **28** (2018), 1 – 12.

[3] Fornæss, J. E. andWu, J.J “Weighted approximation in $\mathbb{C}$. Math. Z. 294(3 – 4), 1051 – 1064 (2020) ” *J. Geom. Anal* **294** (2020), 1051 – 1064

[4] Zhou,X.Y, Li,Z “Weighted L2 approximation of analytic sections.(English summary)” *J. Geom. Anal* **32** (2022), no. 2, Paper No. 44, 17 pp.

CR Paneitz 作用素と埋め込み可能性

竹内 有哉　(筑波大学)*

概　要

CR Paneitz 作用素は CR 多様体の埋め込み可能性，CR 山辺の問題，Szegő 核の対数特異性など，CR 幾何における重要な諸問題と密接に関係している．一方で，この作用素は準楕円型ではなく，その解析的性質は一般的な理論からは必ずしも明らかではない．今回の講演では，CR Paneitz 作用素の解析的性質と CR 多様体の埋め込み可能性との関係について紹介する．

本稿では 3 次元強擬凸 CR 多様体における埋め込み可能性と CR Paneitz 作用素の解析的性質との関係について解説する．前半では CR 多様体およびその埋め込み可能性に関する古典的結果を概観し，中盤では CR Paneitz 作用素の定義と基本的性質，特にそのスペクトル論を紹介する．後半では埋め込み可能な場合と埋め込み不可能な場合を対比しつつ CR Paneitz 作用素の振る舞いを考察し，最後に今後の課題として未解決問題を述べる．

1 CR 多様体

CR 多様体は複素多様体の実奇数次元版に当たる幾何学的対象である．そこで CR 多様体の定義を導入するにあたり，まず複素多様体に関する基本的事項を復習する．X を n 次元複素多様体として，$(U; z)$ を正則局所座標とする．このとき U 上の複素ベクトル束

$$T^{1,0}U \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n\}$$

が定まる．局所座標の変換関数が正則関数であることから，このベクトル束は局所座標の取り方に依らず，X 上のランク n の複素部分ベクトル束 $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ を定める．このベクトル束は次の二つの条件を満たす：

$$T^{1,0}X \cap \overline{T^{1,0}X} = 0, \qquad [\Gamma(T^{1,0}X), \Gamma(T^{1,0}X)] \subset \Gamma(T^{1,0}X).$$

さらにこれらの条件を満たす複素部分ベクトル束が与えられると，X には一意的に複素構造が定まる．これが有名な Newlander–Nirenberg の定理である．

この定理を踏まえて CR 多様体を次のように定義する．

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 数理物質系 数学域
e-mail: ytakeuchi@math.tsukuba.ac.jp,yuya.takeuchi.math@gmail.com
web: https://sites.google.com/view/yuya-takeuchi-japanese/

本研究は科研費 (課題番号:JP21K13792，JP25K17247) の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 32V20, 58J50
キーワード：CR Paneitz 作用素，埋め込み可能性，Heisenberg 解析

定義 1.1: CR 構造・CR 多様体

M を実 $(2n+1)$ 次元の多様体，$T^{1,0}M$ を $TM \otimes \mathbb{C}$ のランク n の複素部分ベクトル束とする．$T^{1,0}M$ が **CR 構造**であるとは，次の二つの条件を満たすことをいう：

$$T^{1,0}M \cap \overline{T^{1,0}M} = 0, \qquad [\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M).$$

このとき組 $(M, T^{1,0}M)$ を **CR 多様体**という．

CR 多様体の典型例として複素多様体内の実超曲面が挙げられる．X を $(n+1)$ 次元の複素多様体，M を X 内の実超曲面とする．このとき M は

$$T^{1,0}M := (T^{1,0}X)|_M \cap (TM \otimes \mathbb{C})$$

によって自然な CR 構造をもつ．

$(M, T^{1,0}M)$ を CR 多様体とする．$f \in C^\infty(M)$ が **CR 正則関数**であるとは，任意の $Z \in T^{1,0}M$ に対して $\overline{Z}f = 0$ が成り立つことをいう．これは $T^{0,1}M := \overline{T^{1,0}M}$ として

$$\overline{\partial}_b \colon C^\infty(M) \to \Gamma((T^{0,1}M)^*); \qquad f \mapsto (df)|_{T^{0,1}M}$$

と定めると，f が CR 正則関数であることは $\overline{\partial}_b f = 0$ と同値である．正則関数に対する最大値の原理から，閉複素多様体上の正則関数は定数しか存在しない．一方で CR 正則関数に対しては最大値の原理が一般には成り立たず，閉多様体であっても非自明な CR 正則関数が存在しうる．実際，M が $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面のとき，$\mathbb{C}^{n+1}$ 上の正則関数を M に制限したものは全て CR 正則関数である．また $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ が **CR 多重調和関数**であるとは，局所的に CR 正則関数の実部として表されることをいう．CR 多重調和関数全体の空間を $\mathscr{P}$ で表す．

$(M, T^{1,0}M)$ を CR 多様体とする．以下では $\theta(T^{1,0}M) = 0$ を満たす至る所 0 ではない実 1 形式 θ が存在することを仮定する．このとき $T^{1,0}M$ 上の Hermite 形式である **Levi 形式** L_θ を

$$L_\theta(Z, W) := -\sqrt{-1}d\theta(Z, \overline{W})$$

によって定める．

定義 1.2: 強擬凸

$(M, T^{1,0}M)$ が**強擬凸**であるとは，Levi 形式 L_θ が正定値であるような θ が存在することである．このとき θ は M 上の接触形式である．このような θ は正の関数倍を除いて一意に決まる．

強擬凸 CR 多様体の例として，$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の強凸実超曲面，佐々木多様体，孤立特異点のリンクなどが挙げられる．

2 強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性

CR 多様体の埋め込みについて述べる前に，複素多様体の場合の結果を簡単に復習する．複素多様体の埋め込みに関しては次の二つの結果がよく知られている：

- Hodge 多様体は複素射影空間に正則に埋め込むことができる．（**小平埋め込み**）
- Stein 多様体は複素 Euclid 空間に正則に埋め込むことができる．

一方で最大値の原理から，閉複素多様体を複素 Euclid 空間に正則に埋め込むことはできない．

CR 多様体の場合にも，埋め込みの対象として複素 Euclid 空間を考えるのが自然である．具体的には次のように定義する．

定義 2.1: CR 埋め込み・埋め込み可能

$(M, T^{1,0}M)$ を $(2n+1)$ 次元 CR 多様体とする．多様体としての埋め込み $F\colon M \to \mathbb{C}^N$ が **CR 埋め込み**であるとは，$F_*(T^{1,0}M) \subset T^{1,0}\mathbb{C}^N$ を満たすことをいう．また CR 多様体 $(M, T^{1,0}M)$ が**埋め込み可能**であるとは，CR 埋め込み $F\colon M \to \mathbb{C}^N$ が存在することをいう．

F の成分を $f_1, \ldots, f_N$ としたとき，F が CR 埋め込みであることと各 f_i が CR 正則関数であることは同値である．複素多様体には正則局所座標が存在するため，各点の近傍から複素 Euclid 空間への正則な局所埋め込みが常に存在する．これに対して CR 多様体の場合には，大域的な埋め込みだけでなく局所的な埋め込み可能性も非自明な問題である．

強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性については，多様体の次元によって結果が大きく異なる．まず 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体には大域的に埋め込み不可能な例が存在することが知られている．（具体例については後述する．）さらに Nirenberg [Nir74] が局所的にも埋め込み不可能な 3 次元強擬凸 CR 構造の例を構成した．一方で Boutet de Monvel [BdM75] は 5 次元以上の閉強擬凸 CR 多様体が必ず大域的に埋め込み可能であることを証明した．また局所埋め込みについては，9 次元以上の場合を倉西 [Kur82] が，7 次元の場合を赤堀 [Aka87] がそれぞれ解決している．5 次元における局所埋め込み可能性は現在でも未解決である．以上をまとめると強擬凸 CR 多様体の埋め込み可能性については下の表のようになる：

	局所的（一点の近傍）	大域的（閉多様体全体）
3 次元	✗	✗
5 次元	?	✓
7 次元以上	✓	✓

次に 3 次元における大域的に埋め込み不可能な最も基本的な例について説明する．$\mathbb{C}^2$

内の 3 次元球面 S^3 を考える．複素ベクトル場 L を

$$L := \overline{w}\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial w}$$

と定めると，

$$T^{1,0}S^3 = (T^{1,0}\mathbb{C}^2)|_{S^3} \cap (TS^3 \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C}L$$

が成り立つ．$0 < |t| < 1$ に対して **Rossi 球面** $(S^3_t, T^{1,0}S^3_t)$ を

$$(S^3_t, T^{1,0}S^3_t) := (S^3, \mathbb{C}(L + t\overline{L}))$$

で定義する．これは強擬凸 CR 多様体である．また Rossi 球面上の CR 正則関数は必ず偶関数になる [CS01]．このことから Rossi 球面は埋め込み不可能であることがしたがう．この例の一般化として，C^0 ノルムが十分小さい $\phi \in C^\infty(S^3)$ に対して強擬凸 CR 多様体 $(S^3, \mathbb{C}(L + \phi\overline{L}))$ を考えることができる．このとき「ほとんど全ての」ϕ に対して，$(S^3, \mathbb{C}(L + \phi\overline{L}))$ は埋め込み不可能であることが示されている [BE90].

さらに強擬凸 CR 多様体は下部構造として接触構造をもつが，埋め込み可能な場合にはこの接触構造は Stein fillable という性質をもち，それに伴い様々な制約が成り立つことが知られている [Gei08]．特にほとんどの接触構造は埋め込み可能な強擬凸 CR 構造を許容しない．

以上のように 3 次元の場合には多くの閉強擬凸 CR 多様体は埋め込み不可能である．そこで 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体が埋め込み可能になる条件を考えるのは自然かつ重要な問題である．この条件を記述するために，$(M, T^{1,0}M)$ 上の接触形式 θ を一つ固定する．このとき Levi 形式 L_θ により $(T^{0,1}M)^*$ 上の Hermite 計量が定まる．また $\theta \wedge d\theta$ は M 上の体積形式を定めるので，$\overline{\partial}_b$ の形式的自己共役 $\overline{\partial}_b^* \colon \Gamma((T^{0,1}M)^*) \to C^\infty(M)$ が定義できる．これを用いて **Kohn Laplacian** $\square_b = \overline{\partial}_b^*\overline{\partial}_b$ が定まる．“Laplacian” という名称ではあるが，この作用素は準楕円型ですらない．また閉多様体であっても $\operatorname{Ker} \square_b$ は無限次元になり得る．$(M, T^{1,0}M)$ の埋め込み可能性は $\square_b$ の解析的性質で記述できる．

定理 2.2: 閉値域 $\Longleftrightarrow$ 埋め込み可能 [Bur79, Koh86]

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である必要十分条件は $\square_b$ が閉値域をもつこと，すなわち 0 が $\square_b$ のスペクトル $\operatorname{Spec} \square_b$ の孤立点となることである．

3 CR Paneitz 作用素

CR 幾何における基本的な微分作用素として，前節で導入した Kohn Laplacian $\square_b$ がある．しかしその解析的性質は CR 山辺の問題や Szegő 核の対数特異性といった CR 幾何における代表的な幾何的・解析的問題とは必ずしも直接的に結びついているわけではない．本稿の主題である CR Paneitz 作用素は $\square_b$ から構成される 4 階の共形不変な微分

作用素であり，これらの問題を統一的に捉える枠組みを与える．一方でこの作用素は本質的に非楕円型であるため，その解析的性質の理解は容易ではない．

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体として，M 上の接触形式 θ を固定する．このとき **CR Paneitz 作用素** $P\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は

$$P := \overline{\Box}_b \Box_b + (\text{低階の項})$$

という形の線形偏微分作用素として定義される．ここで低階の項の部分は θ に関する田中・Webster 接続を用いて具体的に記述できるが，以下では本質的に寄与しないので省略する．CR Paneitz 作用素の基本的な性質として以下が挙げられる：

- P は 4 階の形式的自己共役な線形偏微分作用素である．
- $\hat{\theta} = e^{\Upsilon}\theta$ という共形変換に対して $\widehat{P} = e^{-2\Upsilon}P$ という変換則を満たす．
- P は準楕円型ではない．
- $\operatorname{Ker} P$ は無限次元になることがある．

特に P の変換則から，$C^\infty(M, \mathbb{R})$ 上の汎関数

$$\mathcal{P}\colon C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \qquad u \mapsto \int_M u(Pu)\,\theta \wedge d\theta$$

は接触形式の取り方によらない．この汎関数が常に非負であるとき，P は**非負定値**であるといい，$P \geq 0$ と書くことにする．この性質は $(M, T^{1,0}M)$ の埋め込み可能性と深く関係していることが知られている．

定理 3.1: $\mathrm{Scal} > 0$ **&** $P \geq 0 \implies$ **埋め込み可能性** [CCY12]

$(M, T^{1,0}M)$ を 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．θ から定まる田中・Webster 接続のスカラー曲率 Scal_θ が正で CR Paneitz 作用素 P が非負定値であれば，$(M, T^{1,0}M)$ は埋め込み可能である．

次に P の非負定値性と CR 山辺の問題との関係について述べる．以下では 3 次元の場合に限る．$(M, T^{1,0}M)$ 上の接触形式 θ に対して汎関数

$$\mathcal{E}(\theta) := \frac{\int_M \mathrm{Scal}_\theta\,\theta \wedge d\theta}{\left(\int_M \theta \wedge d\theta\right)^{1/2}}$$

を考える．この汎関数は下に有界であり，その下限

$$Y(M, T^{1,0}M) := \inf_\theta \mathcal{E}(\theta)$$

を実現する接触形式を **CR 山辺接触形式**と呼ぶことにする．Jerison と Lee により，常に $Y(M, T^{1,0}M) \leq Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ が成り立つこと，さらに $Y(M, T^{1,0}M) < Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ または $(M, T^{1,0}M) = (S^3, T^{1,0}S^3)$ の場合には CR 山辺接触形式が存在することが示

された [JL87, JL88, JL89]．残された問題は「$Y(M, T^{1,0}M) = Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ を満たす $(M, T^{1,0}M)$ が $(S^3, T^{1,0}S^3)$ 以外に存在するか？」という問いである．これは CR 幾何における正質量定理と密接に関係している．$P \geq 0$ という仮定の下では，そのような CR 多様体は $(S^3, T^{1,0}S^3)$ に限られることが知られている．

定理 3.2: $P \geq 0 \Longrightarrow$ CR 山辺接触形式の存在 [CMY17]

$(M, T^{1,0}M)$ を CR Paneitz 作用素 P が非負定値であるような 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$Y(M, T^{1,0}M) = Y(S^3, T^{1,0}S^3)$ が成り立てば，$(M, T^{1,0}M)$ は $(S^3, T^{1,0}S^3)$ と同型である．特に P が非負定値であるような $(M, T^{1,0}M)$ は CR 山辺接触形式をもつ．

一方で Rossi 球面 $(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上の CR Paneitz 作用素は負の固有値をもつため，上記の定理の仮定は満たしていない．実際，$(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上には CR 山辺接触形式が存在しないことが比較的最近示された [CMY23]．

最後に CR Paneitz 作用素と Szegő 核との関係について述べる．Ω を 2 次元複素多様体内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ強擬凸領域として，$\partial\Omega$ 上の接触形式 θ を固定する．Ω 上の正則関数の境界値として実現できる $\partial\Omega$ 上の L^2 関数全体の空間を **Hardy 空間**といい，$H_\theta(\Omega)$ で表す．これは再生核 Hilbert 空間であり，対応する再生核 S_θ を **Szegő 核**という．ρ を Ω の定義関数とすると，S_θ の対角成分 $S_\theta(z, \overline{z})$ は

$$S_\theta(z, \overline{z}) = \phi_\theta \rho^{-2} + \psi_\theta \log(-\rho).$$

という境界挙動をもつ．ここで ϕ_θ と ψ_θ は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな関数である．特に $\psi_\theta|_{\partial\Omega}$ は定数倍を除いて **CR Q-曲率** Q_θ と一致することが知られている [Hir93, FH03]．さらに接触形式の共形変換 $\hat{\theta} = e^{\Upsilon}\theta$ に対して，CR Q-曲率は

$$e^{2\Upsilon} Q_{\hat{\theta}} = Q_\theta + P\Upsilon$$

という変換則を満たす．したがって Szegő 核の対数特異性を理解する上でも CR Paneitz 作用素の解析的性質は本質的な役割を果たす．CR Q-曲率が恒等的に 0 になる接触形式として，**擬 Einstein 接触形式**という「弱い」Einstein 条件を満たす接触形式が知られている．擬 Einstein 接触形式は一般の強擬凸 CR 多様体には存在しないが，$\mathbb{C}^2$ 内の実超曲面に対しては必ず存在することが分かっている．

4 CR Paneitz 作用素のスペクトル

$(M, T^{1,0}M)$ を（必ずしも埋め込み可能とは限らない）3 次元閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．このとき前節で述べたように，CR Paneitz 作用素 P は形式的自己共役作用素である．しかしながら Laplacian のような楕円型作用素とは異なり，以下に挙げるような基礎的な問題でさえ自明ではない：

- P は $L^2(M)$ 上の非有界作用素として自己共役拡張をもつか？
- P のスペクトル $\operatorname{Spec} P$ はどのような分布をもつか？
- P の固有関数はどの程度の正則性をもつか？

これらの問題に対して，私は以下の結果を得た．

定理 4.1: CR Paneitz 作用素のスペクトル [Tak24]

$(M, T^{1,0}M)$ 上の CR Paneitz 作用素 P は本質的自己共役である，すなわち一意的な自己共役拡張をもつ．そのスペクトル $\operatorname{Spec} P$ の 0 以外の点は全て孤立している．さらに任意の $\lambda \in \operatorname{Spec} P \setminus \{0\}$ に対して，$\operatorname{Ker}(P - \lambda I)$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間である．

上記の定理で 0 が $\operatorname{Spec} P$ の孤立点であるかどうかは分かっていない．ただし後述するように，$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である場合には，0 も孤立点であることが示されている．

証明の方針について説明する前に，楕円型の場合における標準的な議論を簡単に復習する．A を閉多様体上の k 階楕円型作用素とする．このとき

$$AB \sim BA \sim I$$

を満たす $-k$ 階の擬微分作用素 B が存在する．ここで $A \sim B$ は $A - B$ が smoothing 作用素であることを表す．この事実から A の最大閉拡張は自己共役であることがしたがう．さらに B が滑らかさを向上させることとコンパクト作用素であることから，スペクトルの離散性および固有関数の正則性も導かれる．この場合には 0 も $\operatorname{Spec} A$ の孤立点であり，$\operatorname{Ker} A$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間となる．

それでは定理 4.1 の証明の方針について説明する．前述のとおり，CR Paneitz 作用素 P に対しては $\operatorname{Ker} P$ は無限次元になる場合があるため，楕円型の場合のような B を構成することはできない．そこで M 上の接触構造を反映した擬微分作用素の理論である **Heisenberg 解析**を用いる．この枠組みにより，次の条件を満たす 0 階の Heisenberg 擬微分作用素 Π と -4 階の Heisenberg 擬微分作用素 G を構成することができる：

$$GP + \Pi \sim PG + \Pi \sim I, \qquad \Pi^* \sim \Pi^2 \sim \Pi, \qquad \Pi P \sim P\Pi \sim 0.$$

Π と G はそれぞれ $\operatorname{Ker} P$ への直交射影と P の Green 作用素に対応する Heisenberg 擬微分作用素である．これらを用いることで，P の最大閉拡張が自己共役であることが示される．さらに E を P に付随する単位の分解として，$\mu \geq 0$ に対して $\pi_\mu := E([-\mu, \mu])$ と定める．このとき $P\pi_\mu$ は smoothing 作用素であることが分かる．$\operatorname{Spec} P\pi_\mu = \operatorname{Spec} P \cap [-\mu, \mu]$ であることと，コンパクト作用素のスペクトルに関する一般論を併せることで，定理 4.1 がしたがう．

5 埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素

$(M, T^{1,0}M)$ を埋め込み可能な 3 次元閉強擬凸 CR 多様体，θ を M 上の接触形式とする．このとき前節の Π として，$\Pi^* = \Pi$ かつ $P\Pi = 0$ を満たすものを選ぶことができる．特に $\operatorname{Ran}\Pi \subset \operatorname{Ker} P$ であることから

$$\pi_\mu \Pi = \Pi \pi_\mu = \Pi$$

が成り立つ．$R := GP + \Pi - I$ と定めると R は smoothing 作用素であり，

$$E([-\mu, \mu] \setminus \{0\}) = \pi_\mu - \pi_0 = (GP + \Pi - R)(\pi_\mu - \pi_0) = GP\pi_\mu - R(\pi_\mu - \pi_0)$$

となる．ここで右辺は $L^2(M)$ から $C^\infty(M)$ への連続線形作用素を定めており，特にコンパクト作用素である．よって直交射影 $E([-\mu, \mu] \setminus \{0\})$ は有限階作用素である．したがって $\operatorname{Spec} P \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．このことから 0 も $\operatorname{Spec} P$ の孤立点であり，P は閉値域をもつことが分かる．また $\operatorname{Ker} P$ への直交射影 π_0 が 0 階の Heisenberg 擬微分作用素であることも示すことができ，特に π_0 は $C^\infty(M)$ を $C^\infty(M)$ にうつす．以上の議論により，Hsiao による次の結果の別証明が得られる．

定理 5.1: 埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素 I [Hsi15]

$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき $\operatorname{Spec} P$ は $\mathbb{R}$ の離散部分集合である．また任意の $\lambda \in \operatorname{Spec} P \setminus \{0\}$ に対して，$\operatorname{Ker}(P - \lambda I)$ は $C^\infty(M)$ の有限次元部分空間である．さらに $\operatorname{Ker} P \cap C^\infty(M)$ は $\operatorname{Ker} P$ において稠密である．

実は埋め込み可能な場合には $\operatorname{Spec} P$ の分布についてさらに詳しい構造が分かっている．

定理 5.2: 埋め込み可能な場合の CR Paneitz 作用素 II [Tak20]

$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき CR Paneitz 作用素 P は非負定値であり，$\operatorname{Spec} P \subset [0, \infty)$ である．また $\operatorname{Ker} P \cap C^\infty(M)$ は $\mathscr{P} \otimes \mathbb{C}$ に一致する．

この定理の証明は Siu [Siu80] と Sampson [Sam86] による調和写像に関する議論を境界をもつ領域上の調和関数に適用することで得られる．$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能であると仮定する．このとき非特異複素射影曲面 X 内の強擬凸領域 Ω であって，$(M, T^{1,0}M)$ が $(\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega)$ と同型となるものが存在する [Lem95]．以下では $(M, T^{1,0}M)$ と $(\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega)$ を同一視する．また Ω 上の完備 Kähler 計量 ω_+ であって，境界で複素双曲計量に漸近するものを構成することができる．

実数値関数 $u \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して，u を境界値とする調和関数 $\tilde{u}$ を考える．(ω_+ に関する Laplacian は境界で退化するためこのような拡張の存在は自明ではないが，今回の

設定においては [EMM91] で証明されている.）このとき Ω 内の各点において

$$dd^c\tilde{u} \wedge dd^c\tilde{u} \leq 0$$

が成り立つ．これを積分して Stokes の定理を適用すると

$$0 \geq \int_\Omega dd^c\tilde{u} \wedge dd^c\tilde{u} = \int_\Omega d(d^c\tilde{u} \wedge dd^c\tilde{u}) = \int_{\partial\Omega} d^c\tilde{u} \wedge dd^c\tilde{u}$$

が得られる．この右辺を田中・Webster 接続を用いて計算して整理すると $-\int_{\partial\Omega} u(Pu)\,\theta \wedge d\theta$ に一致することが分かる．このことから P は非負定値である．また $Pu = 0$ のとき，Ω 上で $dd^c\tilde{u} = 0$ が成り立つため，$\tilde{u}$ は Ω 上の多重調和関数である．u は多重調和関数の境界値であるため，$\partial\Omega$ 上の CR 多重調和関数である．

P の非負定値性を定理 3.1 や定理 3.2 と組み合わせることで以下の定理を得る．

定理 5.3: CR Paneitz 作用素と埋め込み可能性

$(M, T^{1,0}M)$ を $Y(M, T^{1,0}M) > 0$ を満たす 3 次元の閉強擬凸 CR 多様体とする．$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能である必要十分条件は CR Paneitz 作用素 P が非負定値となることである．

定理 5.4: 埋め込み可能 $\Longrightarrow$ CR 山辺接触形式の存在

$(M, T^{1,0}M)$ が埋め込み可能な 3 次元閉強擬凸 CR 多様体ならば，$(M, T^{1,0}M)$ は CR 山辺接触形式をもつ．

また $\operatorname{Ker} P \cap C^\infty(M)$ が CR 多重調和関数の空間に一致することから，Szegő 核の対数特異性に対して次の結果が得られる．

定理 5.5: Szegő 核の対数特異性

Ω が 2 次元複素多様体内の強擬凸領域で，その境界 $\partial\Omega$ は擬 Einstein 接触形式をもつとする．$\partial\Omega$ 上の接触形式 θ に対して $\psi_\theta|_{\partial\Omega} = 0$ となる必要十分条件は θ が擬 Einstein 接触形式であることである．さらに $\psi_\theta = O(\rho^3)$ となる必要十分条件は $\partial\Omega$ が局所的に $(S^3, T^{1,0}S^3)$ と同型になることである．

この定理の前半部分は，$\partial\Omega$ が transverse symmetry をもつ場合について平地 [Hir93] によって既に証明されていたが，定理 5.2 によって一般の場合に拡張することができた．θ' を境界上の擬 Einstein 接触形式として，$\theta = e^\Upsilon\theta'$ と表す．このとき $Q_\theta = Q_{\theta'} = 0$ であることから $P\Upsilon = 0$ が成り立つ．よって Υ は CR 多重調和関数であり，θ 自身も擬 Einstein 接触形式となる．さらに平地・小松・中澤 [HKN93] による結果を用いることで後半の結果もしたがう．

6 Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素

Rossi 球面は強擬凸でありながら埋め込み不可能な最も基本的な例として知られている．前節では埋め込み可能な場合における CR Paneitz 作用素の性質を紹介したが，これらの結果が埋め込み不可能な場合にどこまで成立するかについては，一般にはほとんど分かっていない．本節では Rossi 球面を例として取り上げ，埋め込み不可能な場合に CR Paneitz 作用素の性質がどのように変化するかを具体的に考察し，その過程で明らかになったいくつかの現象を紹介する．

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，次数 k の球面調和関数の空間を $\mathcal{SH}_k$ で表す．このとき

$$L^2(S^3) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{SH}_k$$

という直交直和分解が得られる．$l \in \mathbb{Z}_{>0}$ および $1 \leq j \leq l$ に対して

$$v_j^{(l)} := L^{2j-2}(z^{2l-1}) \in \mathcal{SH}_{2l-1}$$

と定める．このとき $v_1^{(l)}, \ldots, v_l^{(l)}$ は一次独立であり，

$$V^{(l)} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1^{(l)}, \ldots, v_l^{(l)}\} \subset \mathcal{SH}_{2l-1}$$

は Rossi 球面 $(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上の CR Paneitz 作用素 P_t によって不変である．この基底に関して

$$\mathcal{P}_t^{(l)} := P_t|_{V^{(l)}}$$

の行列表示を考えると，その行列式が

$$\det \mathcal{P}_t^{(l)} < 0$$

となることが分かる．これより次の結果が得られる．

定理 6.1: Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素

Rossi 球面 $(S_t^3, T^{1,0}S_t^3)$ 上の CR Paneitz 作用素 P_t は負の固有値を無限個もつ．

Rossi 球面のパラメータに $t = 0$ を代入すると，これは標準的な CR 球面に一致する．この場合には埋め込み可能であるため，対応する CR Paneitz 作用素 P_0 は非負定値である．したがって上記の定理は，パラメータをわずかに動かすだけで，負の固有値が無限個現れることを意味している．

7 今後の課題

定理 5.1 および定理 5.2 が埋め込み不可能な場合にどこまで成り立つかという問題は現在のところほとんど分かっていない．特に次のような問題が挙げられる．

問題 7.1: CR Paneitz 作用素の閉値域性

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素 P は閉値域をもつか？言い換えると 0 は $\operatorname{Spec} P$ の孤立点となるか？

問題 7.2: CR Paneitz 作用素の核

埋め込み不可能な CR 多様体において，$\mathscr{P} \otimes \mathbb{C}$ は $\operatorname{Ker} P$ 内の稠密部分空間であるか？

前者については Rossi 球面の場合についても依然として未解決である．Rossi 球面上の CR Paneitz 作用素が負の固有値を無限個もつことは分かっているが，その事実は行列式の計算に基づくものであり，負の固有値の詳細な分布については依然として明らかではない．一方で後者については，$(S^3_t, T^{1,0}S^3_t)$ を $\{\pm 1\}$ で割った商多様体が埋め込み可能となることから，肯定的な答えが得られることが確認されている．

CR 多様体が埋め込み可能な場合には CR Paneitz 作用素は非負定値であり，特に 0 は $\operatorname{Spec} P$ の下界である．一方で Rossi 球面から分かるように，埋め込み不可能な場合には CR Paneitz 作用素は負の固有値をもつが，そのスペクトル全体が下に有界であるどうかは現在のところ不明である．

問題 7.3: CR Paneitz 作用素の有界性

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素は下に有界であるか？

また CR Paneitz 作用素は Rossi 球面では負の固有値を無限個もつが，この性質が埋め込み不可能な CR 多様体に一般に共通するものであるかどうかは，現在のところ分かっていない．

問題 7.4: CR Paneitz 作用素の負の固有値

埋め込み不可能な CR 多様体において，CR Paneitz 作用素の負の固有値は必ず無限個であるか？

以上の問題は，CR Paneitz 作用素という非楕円作用素の解析を通して，CR 多様体の埋め込み可能性を理解しようとする試みの一端をなすものである．今後の研究によって両者の関係がさらに明らかになることが期待される．

参考文献

[Aka87] T. Akahori, *A new approach to the local embedding theorem of CR-structures for $n \geq 4$ (the local solvability for the operator $\overline{\partial}_b$ in the abstract sense)*, Mem. Amer. Math. Soc. **67** (1987), no. 366, xvi+257.

[BdM75] L. Boutet de Monvel, *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975; équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, 1975, pp. Exp. No. 9, 14.

[BE90] D. M. Burns and C. L. Epstein, *Embeddability for three-dimensional CR-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 4, 809–841.

[Bur79] D. M. Burns Jr., *Global behavior of some tangential Cauchy-Riemann equations*, Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977), 1979, pp. 51–56.

[CCY12] S. Chanillo, H.-L. Chiu, and P. Yang, *Embeddability for 3-dimensional Cauchy-Riemann manifolds and CR Yamabe invariants*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 15, 2909–2921.

[CMY17] J.-H. Cheng, A. Malchiodi, and P. Yang, *A positive mass theorem in three dimensional Cauchy-Riemann geometry*, Adv. Math. **308** (2017), 276–347.

[CMY23] J.-H. Cheng, A. Malchiodi, and P. Yang, *On the Sobolev quotient of three-dimensional CR manifolds*, Rev. Mat. Iberoam. **39** (2023), no. 6, 2017–2066.

[CS01] S.-C. Chen and M.-C. Shaw, *Partial differential equations in several complex variables*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2001.

[EMM91] C. L. Epstein, R. B. Melrose, and G. A. Mendoza, *Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains*, Acta Math. **167** (1991), no. 1-2, 1–106.

[FH03] C. Fefferman and K. Hirachi, *Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 5-6, 819–831.

[Gei08] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Hir93] K. Hirachi, *Scalar pseudo-Hermitian invariants and the Szegő kernel on three-dimensional CR manifolds*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 67–76.

[HKN93] K. Hirachi, G. Komatsu, and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegő kernel*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 77–96.

[Hsi15] C.-Y. Hsiao, *On CR Paneitz operators and CR pluriharmonic functions*, Math. Ann. **362** (2015), no. 3-4, 903–929.

[JL87] D. Jerison and J. M. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 2, 167–197.

[JL88] D. Jerison and J. M. Lee, *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 1–13.

[JL89] D. Jerison and J. M. Lee, *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom. **29** (1989), no. 2, 303–343.

[Koh86] J. J. Kohn, *The range of the tangential Cauchy-Riemann operator*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 525–545.

[Kur82] M. Kuranishi, *Strongly pseudoconvex CR structures over small balls. III. An embedding theorem*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 2, 249–330.

[Lem95] L. Lempert, *Algebraic approximations in analytic geometry*, Invent. Math. **121** (1995), no. 2, 335–353.

[Nir74] L. Nirenberg, *A certain problem of Hans Lewy*, Uspehi Mat. Nauk **29** (1974), no. 2(176), 241–251. Translated from the English by Ju. V. Egorov, Collection of articles dedicated to the memory of Ivan Georgievič Petrovskiĭ (1901–1973), I.

[Sam86] J. H. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984), 1986, pp. 125–134.

[Siu80] Y. T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 1, 73–111.

[Tak20] Y. Takeuchi, *Nonnegativity of the CR Paneitz operator for embeddable CR manifolds*, Duke Math. J. **169** (2020), no. 18, 3417–3438.

[Tak24] Y. Takeuchi, *CR Paneitz operator on non-embeddable CR manifolds*, 2024. `arXiv:2407.16185`.