

✿ 日本数学会

2026年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

(3日目／3月25日)

2026年3月

於 東京理科大学

団代数の c, g ベクトルの実成分への拡張と Coxeter 図による有限型の分類

赤木 亮太 (名古屋大学)*

1 団代数における c, g ベクトル

団代数 (cluster algebra) とは, 2000 年頃に Fomin, Zelevinsky により導入された代数的, および組合せ的構造である. その中心的対象は, 「団変数」 (cluster variable) と呼ばれる有理式と, 「変異」 (mutation) とよばれるその変換であり, それらが数多くの良い性質を持つ. また, この変異に関連する現象が数学のあらゆる場所に横断的に出現し, その重要性が知られている.

団代数の初期データは**整数成分歪対称化可能行列**であり, これは**交換行列**とよばれる. この行列の成分に基づき, 変異が定義される. 団代数の基本的な対象は団変数であるが, それらに変異を適用すると非常に複雑になることが知られている. そのため, 団変数を直接扱うことは困難となることが多い. その一つの対処法として, [1] により c ベクトルと g ベクトルが導入された. 大まかにいうと, それらは団変数やその係数の, ある種の次数ベクトルとして定義される. 有理式から次数を取り出すため, c, g ベクトルが持つ情報は団変数のものと比べて非常に小さくなる. しかし, 興味深いことに, 団変数が持つ周期性は, c, g ベクトルが持つ周期性と一致する [2, 3] など, 団変数が持つ組合せ的情報の多くは保存されている.

一方で, c, g ベクトルにおいて, 次の事実は重要である.

定理 1 ([1, 予想], [4]) 整数成分の交換行列に対応する c ベクトルは, 全ての要素が非負であるか非正であるかのいずれか一方である.

例えば, この仮定の下で [5] により, c, g ベクトルは非常に強力な双対性を持つことが示された. その他にも, g ベクトルが自然に扇構造をもつこと (G 扇, G -fan) が示される [6].

2 問題と主定理

c, g ベクトルは団変数の次数として定義されるが, 一方で, それ自身の閉じた漸化式も知られており [1], その漸化式に基づく定義も可能である. その視点に立つと, 整数成分に限らず, **実歪対称化可能行列**に対しても c, g ベクトルが定義される. 本研究の目的は, c, g ベクトルを実歪対称化可能行列に対応するものまで拡張することである. まず, 次のこ

* 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町

e-mail: ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

本内容は中国科学技術大学 (University of Science and Technology of China) 所属の Zhichao Chen 氏との共同研究に基づく. また, 本研究は科研費 (課題番号: JP25KJ1438) の助成を受けたものである.

キーワード: 団代数 (cluster algebras), Coxeter 図 (Coxeter diagrams)

とが判明した.

定理 2 ([7]) c ベクトルの符号同一性と, いくつかの予想の下で, [5, 6] で示された整数成分 c, g ベクトルで成り立つ様々な性質が, 実成分のもとでも成り立つ.

講演にて「いくつかの予想」および成り立つ性質を紹介する.

しかし, 整数成分の時とは異なり, 実成分に拡張した場合には c ベクトルの符号同一性は常には成り立たない. そこで最も基本的な問として, 「いつ c ベクトルの符号同一性が成り立つか」という問が挙げられる. 現在, 講演者は一般的にこの問を解決することは非常に困難であると考えているが, それと同時に以下のような観察を得た.

定理 3 ([7]) 与えられた歪対称行列 B について, 条件

変異で移りあう全ての歪対称行列 B' に対して, その c ベクトルはすべて符号同一であり, かつ異なる c ベクトルは有限個しか現れない

を考える. そのような条件を満たす歪対称な交換行列は, 変異による差を除いて Coxeter 図と一対一に対応する. また, このとき g ベクトルも有限個しか現れない.

すなわち, 実成分まで拡張すると, 有限型の c, g ベクトル構造は Coxeter 図により分類される. これは, [8] で知られていた, 有限型団代数が Dynkin 図により分類されたことの自然な拡張である. 講演では, この対応付けについて, より詳細に述べる.

参考文献

- [1] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, *Compos. Math.* **143** (2007), no. 1, 112–164; MR2295199
- [2] P. Cao, M. Huang and F. Li, A conjecture on C -matrices of cluster algebras, *Nagoya Math. J.* **238** (2020), 37–46; MR4092846
- [3] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams*, MSJ Memoirs, 41, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2023; MR4563311
- [4] M. Gross et al., Canonical bases for cluster algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), no. 2, 497–608; MR3758151
- [5] T. Nakanishi and A. V. Zelevinsky, On tropical dualities in cluster algebras, in *Algebraic groups and quantum groups*, 217–226, *Contemp. Math.*, 565, Amer. Math. Soc., Providence, RI, ; MR2932428
- [6] N. Reading, Universal geometric cluster algebras, *Math. Z.* **277** (2014), no. 1-2, 499–547; MR3205782
- [7] R. Akagi and Z. Chen. Real C -, G -structures and sign-coherence of cluster algebras. arXiv preprint arXiv:2509.06486 (2025).
- [8] S. Fomin and A. V. Zelevinsky, Cluster algebras. II. Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003), no. 1, 63–121; MR2004457

ランク 3 団輪状行列に対応する実 c ベクトルの 符号同一性とその具体的構造

赤木 亮太 (名古屋大学)*

1 c ベクトルの定義

団代数とは、2000 年頃に Fomin と Zelevinsky により導入された、代数的、組み合わせ的構造である。中心の対象は団変数と呼ばれる Laurent 多項式と、その変異と呼ばれる変換法則である。ここでは、団代数の特殊な (しかしあらゆる点で重要な) 情報である「 c ベクトル」に注目する。

c ベクトルを定義するために、いくつかの記号を用意する。1, 2, 3 のみからなる有限列 $\mathbf{w} = [k_1, k_2, \dots, k_r]$ が縮約列であるとは、 $k_i \neq k_{i+1}$ を満たすことをいう。 $\mathcal{T}$ を 1, 2, 3 からなる縮約列全体の集合とする。前出の縮約列 $\mathbf{w}$ と $\ell \neq k_r$ に対して、 $\mathbf{w}[\ell] = [k_1, \dots, k_r, \ell]$ と定める。実歪対称化可能行列 B に対し、変異 (mutation) μ_k ($k = 1, 2, 3$) と呼ばれる操作が定まり、変異を繰り返し適用して得られる歪対称化可能行列全体の族 $\mathbf{B}(B) = \{B^{\mathbf{w}} = (b_{ij}^{\mathbf{w}}) \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})\}_{\mathbf{w} \in \mathcal{T}}$ を B パターンという。

C パターンとは、 $\mathbb{R}^3$ -ベクトルの三つ組の族 $\mathbf{C}(B) = \{(\mathbf{c}_1^{\mathbf{w}}, \mathbf{c}_2^{\mathbf{w}}, \mathbf{c}_3^{\mathbf{w}})\}$ であって、初期条件「 $\mathbf{c}_i^{\emptyset}$ は第 i 成分の単位ベクトル」と以下の漸化式で与えられるものをいう。

$$\mathbf{c}_\ell^{\mathbf{w}[\ell]} = -\mathbf{c}_\ell^{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{c}_i^{\mathbf{w}[\ell]} = \mathbf{c}_i^{\mathbf{w}} + [b_{\ell i}^{\mathbf{w}}]_+ \mathbf{c}_\ell^{\mathbf{w}} + b_{\ell i}^{\mathbf{w}} [-\mathbf{c}_\ell^{\mathbf{w}}]_+ \quad (1)$$

ここで、実数 b に対し $[b]_+ = \max(b, 0)$ であり、実ベクトル $\mathbf{c}$ に対して $[\mathbf{c}]_+$ は各成分ごとにその操作を適用したものである。 C パターンに現れるベクトルを c ベクトルという。

次の事実は、 c ベクトルの符号同一性と呼ばれ、団代数理論において重要である。

定理 1 ([1]) B が整数成分歪対称化可能行列であれば、 c ベクトルの成分が非負であるか、非正であるかのいずれか一方である。

一方で、 B が実成分であるとき、この性質が常に成り立つとは限らない。さらに、存在が判明した現在でさえ、 c ベクトルの符号の具体的な振舞いを調べることは困難である。

2 ランク 3 の団輪状行列

本講演では、「団輪状行列」と呼ばれる特殊なクラスに注目して話をする。歪対称化可能行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -x' & z \\ x & 0 & -y' \\ -z' & y & 0 \end{pmatrix}$ が輪状 (cyclic) であるとは、 x, y, z, x', y', z' 全ての符号が正で

* 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町

e-mail: ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

本内容は中国科学技術大学 (University of Science and Technology of China) 所属の Zhichao Chen 氏との共同研究に基づく。また、本研究は科研費 (課題番号: JP25KJ1438) の助成を受けたものである。

キーワード: 団代数 (cluster algebras)

あるか負であることをいう。歪対称化可能行列が**団輪状** (cluster-cyclic) であるとは、 B パターンに現れる行列全てが輪状であることをいう。この条件は次の判定法が知られている。

補題 2 ([2, 3]) B が団輪状であることと、 $xx', yy', zz' \geq 4$ かつ $xx' + yy' + zz' - |xyz| \leq 4$ であることは同値である。

3 主結果

実成分の C パターンに対しても符号同一性は重要であるが、一般的に「いつその性質が成り立つか」は全く判明していない。しかし、以下のことが判明した。

定理 3 ([4]) B がランク 3 の団輪状行列ならば、対応する c ベクトルは全て符号同一性を満たす。

先に述べた通り、一般的に c ベクトルの符号の様子を具体的に理解することは難しい。しかし、(ランク 3 の団輪状行列という限られたものではあるが) 我々の証明手法は既存のものとは全く異なり、次の事実に基づく。

定理 4 ([4]) B がランク 3 の団輪状行列であるとき、 c ベクトルの符号を与えるための漸化式が与えられる。さらに、その漸化式は、各 $\mathbf{w}$ に対し、次の c ベクトル $(\mathbf{c}_1^{\mathbf{w}^{[\ell]}}, \mathbf{c}_2^{\mathbf{w}^{[\ell]}}, \mathbf{c}_3^{\mathbf{w}^{[\ell]}})$ の符号を次の情報のみから与える。

$B^{\mathbf{w}}$ 各成分の符号、 c ベクトル $(\mathbf{c}_1^{\mathbf{w}}, \mathbf{c}_2^{\mathbf{w}}, \mathbf{c}_3^{\mathbf{w}})$ の符号、 $\mathbf{w} \in \mathcal{T}$ の最後の指数 k_r

特に、行列 $B^{\mathbf{w}}$ と c ベクトル $\mathbf{c}_i^{\mathbf{w}}$ の各要素の大きさに依存しない。

つまり我々の証明手法により、 c ベクトルの符号を扱うことができる漸化式 (各 $\mathbf{w}$ の局所的な情報から定まるもの) が与えられ、これにより c ベクトルの符号を具体的に扱うことが可能となる。講演では、この漸化式の詳細に触れ、その具体的な振る舞いについて説明する。

参考文献

- [1] M. Gross et al., Canonical bases for cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 497–608; MR3758151
- [2] A. Beineke, T. Brüstle and L. Hille, Cluster-cyclic quivers with three vertices and the Markov equation, Algebr. Represent. Theory **14** (2011), no. 1, 97–112; MR2763295
- [3] R. Akagi, Cluster-cyclic condition of skew-symmetrizable matrices of rank 3 via the Markov constant, arXiv preprint arXiv:2411.07083 (2024).
- [4] R. Akagi, and Z. Chen. Sign-coherence and tropical sign pattern for rank 3 real cluster-cyclic exchange matrices. arXiv preprint arXiv:2509.07454 (2025).

\$q\$ ホイン方程式と その \$q\$ 積分変換について

村上 絢香 (お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)

竹村 剛一 (お茶の水女子大学 基幹研究院)

ホインの微分方程式の \$q\$ 変形である \$q\$ ホイン方程式は, \$a_2 a_0 c_2 c_0 \neq 0\$ のもとで

$$\{a_2 x^2 + a_1 x + a_0\}g(x/q) - \{b_2 x^2 + b_1 x + b_0\}g(x) + \{c_2 x^2 + c_1 x + c_0\}g(xq) = 0$$

 という形の線形 \$q\$ 差分方程式である. 別の表示として一変数 Ruijsenaars-van Diejen
 作用素の 4 回退化で得られる作用素

$$\begin{aligned} A^{(4)}(x; h_1, h_2, l_1, l_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) &= x^{-1}(x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)T_x^{-1} \\ &\quad + q^{\alpha_1+\alpha_2}x^{-1}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)T_x \\ &\quad - \{(q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2})x + q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{\beta/2} + q^{-\beta/2})t_1 t_2 x^{-1}\} \end{aligned}$$

(ただし \$T_x^{\pm 1}g(x) = g(q^{\pm 1}x)\$) を用いて以下で表される ([1]).

$$A^{(4)}(x; h_1, h_2, l_1, l_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta)g(x) = E g(x), \quad E \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

上述の作用素 \$A^{(4)}\$ に関する kernel function が [2] で得られ, その応用として以下
 の \$q\$ ホイン方程式に関する \$q\$ 積分変換が得られた.

Theorem 1 ([2], \$q\$ ホイン方程式の \$q\$ 積分変換)

\$\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\$ または \$\xi = cx\$ (\$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\$) と書けるとする. 関数 \$h(s)\$ が

$$\begin{aligned} A^{(4)}(s; h'_1, h'_2, l'_1, l'_2, \alpha'_1, \alpha'_2, \beta')h(s) &= E'h(s), \quad E' \in \mathbb{C}, \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{h(s)}{s^{(h'_1+h'_2-l'_1-l'_2-\alpha'_1-\alpha'_2+\beta'+2)/2}} \Big|_{s=q^L \xi} &= C_1, \quad \lim_{K \rightarrow -\infty} \frac{h(s)}{s^{-\alpha'_1}} \Big|_{s=q^K \xi} = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

を満たすとする. このとき

$$\begin{aligned} \chi &= (l'_1 + l'_2 - h'_1 - h'_2 - \alpha'_1 + \alpha'_2 - \beta')/2, \quad \mu = \mu_0 + 1 + \chi, \\ E &= q^{\mu_0+\alpha_1-\alpha'_1}E', \quad \beta = -\beta' - \chi, \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha'_1 + \alpha'_2 - \chi, \\ l_i &= l'_i + \mu_0, \quad h_i = h'_i + \mu_0 + \chi, \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

のもとで Jackson 積分

$$g(x) = x^{-\alpha_1} \int_0^{\xi \infty} s^{-(h'_1+h'_2-l'_1-l'_2-\alpha'_1-\alpha'_2+\beta'+2)/2} h(s) \frac{(q^\mu s/x; q)_\infty}{(q^{\mu_0} s/x; q)_\infty} d_q s$$

は収束し, \$C_1 = C_2 = 0\$ のとき

$$A^{(4)}(x; h_1, h_2, l_1, l_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta)g(x) = E g(x)$$

を満たす. 特に \$g(x)\$ は \$q\$ ホイン方程式を満たしている.

本研究は科研費 (課題番号:22K03368) の助成を受けたものである

さらに [2] にて, Theorem 1 での $h(s)$ として単項式型の解をとったときの q 積分表示による q ホイン方程式 (1) の解が計算されている.

本講演では, [3] で得られた多項式型の q ホイン方程式の解と Theorem 1 を結び付けることで, q ホイン方程式に対する新たな解たちが得られたことを発表する.

Theorem 2 $\lambda'_1 := (l'_1 + h'_2 - h'_1 - l'_2 - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \beta' + 2)/2$, $N := -\lambda'_1 - \alpha'_2$ とおき, N は非負整数と仮定する. さらに $\beta' \notin \{1, \dots, N\}$ とする. このとき, ある $N+1$ 次の多項式 $c_{N+1}(E')$ がとれ, E'_0 が $c_{N+1}(E'_0) = 0$ をみたすならば, ある c_m ($m = 0, 1, \dots, N$, $c_0 = 1$) がとれて $\beta' < 0$, $\alpha'_1 < \alpha'_2$ のもとで Jackson 積分

$$g(x) = (1-q)\xi^{-\beta'+1}x^{-\alpha'_1} \frac{(q^{-l'_1+1/2}\xi/t_1, q^{-h'_2+l'_2-N}\xi/x; q)_\infty}{(q^{-h'_1+1/2}\xi/t_1, \xi/x; q)_\infty} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(q^{-h'_1+1/2}\xi/t_1, \xi/x; q)_n}{(q^{-l'_1+1/2}\xi/t_1, q^{-h'_2+l'_2-N}\xi/x; q)_n} q^{(-\beta'+1)n} \sum_{m=0}^N c_m (q^n \xi)^m$$

は収束し, $g(x)$ は $E = q^{\alpha'_1 - \alpha'_2} E'_0$ における q ホイン方程式 (1) を満たす.

ここで, Jackson 積分の計算をする際に [4] で示されている公式を用いた. また, Theorem 2 において ξ を特殊化することで $g(x)$ を q 超幾何級数の $N+1$ 個の和として表すことができる. さらに, $N = 0$ のとき単項式型となり, これは [2] で得られた 1 つの解 (q 超幾何級数による解) と等価である.

まとめると, q ホイン方程式に対して, q 超幾何級数の有限和で表される特殊解を導出したといえる.

参考文献

- [1] Takemura K., Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painleve equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008.
- [2] Takemura K., Kernel Function, q -Integral Transformation and q -Heun Equations, *SIGMA* **20** (2024), 083, 22 pages, arXiv:2309.09341.
- [3] Kojima K., Sato T., Takemura K., Polynomial solutions of q -Heun equation and ultradiscrete limit, *J. Difference Equ. Appl.* **25** (2019), 647–664, arXiv:1809.01428.
- [4] Gasper G., Rahman M., Basic hypergeometric series, 2nd ed., *Encyclopedia Math. Appl.*, Vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

q -middle convolution と $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式

朴 佳南 (鳥羽商船高等専門学校)*

1. はじめに

middle convolution は Katz [7] により導入され, Dettweiler-Reiter [5], [6] によりリーマン球面の基本群の表現とフックス型微分方程式系に対して middle convolution が線形代数的に定式化された. ここでのフックス型微分方程式系はサイズが n の正方行列 $A_1, A_2, \dots, A_r$ を用いて

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_1}{z-t_1} + \frac{A_2}{z-t_2} + \dots + \frac{A_r}{z-t_r} \right) Y, \quad (1)$$

と書かれる n 項ベクトル値関数 Y に対する線形常微分方程式系のことである.

フックス型微分方程式系に対する middle convolution の q 類似として, q -middle convolution が Sakai-Yamaguchi [3] によって導入され, Arai-Takemura [8] によって q -middle convolution の合成がより自然な形になるような再定式化がなされた. [8] において扱っている q 差分方程式系はサイズが m の正方行列 $B_0, B_1, \dots, B_N$ を用いて

$$\frac{Y(qz) - Y(z)}{-z} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{B_i}{z-b_i} \right) Y(z), \quad b_0 = 0 \quad (2)$$

と書かれる m 項ベクトル値関数 Y に対する線形 q 差分方程式系である.

$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式は $E_6^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性を持つ q 差分方程式系であり, [1] において初めて導出された方程式系である. $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式のよく知られた式は

$$\begin{aligned} T : (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; f, g) &\rightarrow (a_1/q, a_2/q, a_3/q, a_4/q, a_5, a_6, a_7, a_8; \bar{f}, \bar{g}), \\ \frac{(\bar{f}g-1)(fg-1)}{f\bar{f}} &= \frac{(g-1/a_5)(g-1/a_6)(g-1/a_7)(g-1/a_8)}{(g-a_3)(g-a_4)}, \\ \frac{(\bar{f}g-1)(\bar{f}\bar{g}-1)}{g\bar{g}} &= \frac{(\bar{f}-a_5)(\bar{f}-a_6)(\bar{f}-a_7)(\bar{f}-a_8)}{(\bar{f}-a_1/q)(\bar{f}-a_2/q)}, \\ q &= \frac{a_1a_2}{a_3a_4a_5a_6a_7a_8} \end{aligned} \quad (3)$$

である. ここで, T は離散的な時間発展の変換であり, $*$ は $T(*)$ を表す. また, f, g は従属変数, a_i ($1 \leq i \leq 8$) はパラメーターである.

方程式 (3) は以下の変換

$$\begin{aligned} r_0 : a_1 &\rightarrow a_2, \quad a_2 \rightarrow a_1, \quad r_1 : a_3 \rightarrow a_4, \quad a_4 \rightarrow a_3, \\ r_2 : a_1 &\rightarrow \frac{a_1}{a_4a_5}, \quad a_2 \rightarrow \frac{a_2}{a_4a_5}, \quad a_4 \rightarrow \frac{1}{a_5}, \quad a_5 \rightarrow \frac{1}{a_4}, \quad f \rightarrow \frac{f(a_5g-1)}{a_4a_5fg+a_5g-a_4a_5-fg}, \\ r_3 : a_5 &\rightarrow a_6, \quad a_6 \rightarrow a_5, \quad r_4 : a_6 \rightarrow a_7, \quad a_7 \rightarrow a_6, \quad r_5 : a_7 \rightarrow a_8, \quad a_8 \rightarrow a_7, \\ r_6 : a_1 &\rightarrow a_5, \quad a_3 \rightarrow \frac{a_3a_5}{a_1}, \quad a_4 \rightarrow \frac{a_4a_5}{a_1}, \quad a_5 \rightarrow a_1, \quad g \rightarrow \frac{g(f-a_5)}{a_1fg-a_5fg-a_1+f}. \end{aligned} \quad (4)$$

本研究は科研費 (課題番号:24K16939) の助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification: 33D99 34M55, 39A06, 39A13, 44A35,

キーワード: q -Painlevé 方程式, q -middle convolution, アフィンワイル群対称性

* 〒516-0801 三重県鳥羽市池上町 1-1

e-mail: paku-k@toba-cmt.ac.jp

による対称性を持ち、作用 $r_i(4)$ は $E_6^{(1)}$ 型アフィンワイル群の基本関係式を満たす。

[4] において $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式の3次行列型ラックス形式が、以下の q 差分方程式系の接続保存変形で与えられた。

$$Y(qz) = Y(z)A(z) = Y(z)DX_1(z)X_2(z)X_3(z),$$

$$D = \text{diag}[d_1, d_2, d_3], \quad X_j(z) = \begin{bmatrix} u_{1,j} & 1 & 0 \\ 0 & u_{2,j} & 1 \\ z & 0 & u_{3,j} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\prod_{j=1}^3 u_{i,j} = b_i, \quad \prod_{i=1}^3 u_{i,j} = c_j, \quad b_1 b_2 b_3 = c_1 c_2 c_3.$$

Remark 1.1. 行列 $A(z)$ は、見かけ上9個のパラメーター b_i, c_j, d_i と、9個の変数 $u_{i,j}$ を含む。これらと標準的な方程式 (3) のパラメーター a_i および変数 f, g との関係は具体的にわかっている。

本講演の目的は、 q -middle convolution [3], [8] を方程式系 (5) に施して得られる変換と、 $E_6^{(1)}$ 型アフィンワイル群作用 $r_i(4)$ との関係を調べることである。

2. 結果

q -middle convolution を (5) に施すことにより次の変換 mc が得られる。

$$mc: \begin{aligned} b_1 &\rightarrow \frac{c_1 d_2}{d_1}, & b_2 &\rightarrow \frac{b_2 c_1 d_2}{b_1 d_1}, & b_3 &\rightarrow b_3, \\ c_1 &\rightarrow c_1, & c_2 &\rightarrow \frac{c_1 c_2 d_2}{b_1 d_1}, & c_3 &\rightarrow \frac{c_1 c_3 d_2}{b_1 d_1}, \\ d_1 &\rightarrow \tilde{c} \frac{c_1}{b_1}, & d_2 &\rightarrow \tilde{c}, & d_3 &\rightarrow \tilde{c} \frac{c_1 d_3}{b_1 d_1}, \\ f &\rightarrow \frac{c_1 d_2 f (c_1 g - 1)}{b_1 d_1 g (c_1 - f) + c_1 d_2 (f g - 1)}, & g &\rightarrow \frac{b_1 d_1}{c_1 d_2} g, \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\tilde{c}$ は任意定数である。変換 (7) に対して $\tilde{c} = \frac{b_1 d_1}{c_1}$ と特殊化し、スケール変換

$$sc: b_i \rightarrow k b_i, \quad c_i \rightarrow k c_i, \quad d_i \rightarrow d_i / k, \quad f \rightarrow k f, \quad g \rightarrow g / k, \quad k = \frac{c_1 d_2}{b_1 d_1}. \quad (7)$$

を導入すると、変換 (7) は $mc \cdot sc = r_1 r_2 r_3 r_2 r_1$ を満たす。

参考文献

- [1] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1829–1832.
- [2] H. Sakai, Lax form of the q -Painlevé equation associated with the $A_2^{(1)}$ surface, *J. Phys. A: Math. Gen* **39** (2006), 12203–12210.
- [3] H. Sakai and M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analogue of middle convolution, *IMRN* **2017**, (2017), 1975–2013.
- [4] K. Park, A 3×3 Lax form for q -Painlevé equations of type E_6 , *SIGMA* **19** (2023), 17pages.
- [5] M. Dettweiler and S. Reiter, An Algorithm of Katz and its Application to the Inverse Galois Problem, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [6] M. Dettweiler and S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.
- [7] N. Katz, Rigid local systems, *Ann. Math. Stud.* **139** (1996), Princeton University Press.
- [8] Y. Arai and K. Takemura, Reformulation of q -middle convolution and applications, arXiv:2503.11214.

$E_8^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性をもつ 3×3 線形 q 差分方程式

信川 喬彦 (皇學館大学)*

本稿では複素数 q を, $0 < |q| < 1$ ととり固定する. 以降, T_x を q シフト作用素とする:
 $T_x f(x) = f(qx)$. 次の線形 q 差分方程式を考える:

$$T_x y = Ay, \quad (0.1)$$

$$A = A(x) = I + xA_1 + x^2A_2 + \kappa x^3I : 3 \times 3 \text{ 行列}, \quad (0.2)$$

$$\det A = \kappa^3 \prod_{i=1}^9 (x + e_i). \quad (0.3)$$

ただし, I は単位行列である. パラメータが 10 個あるように見えるが, x のスケールで e_i のうち一つは 1 に規格化でき, また A の最低次が I であることから

$$\kappa^3 \prod_{i=1}^9 e_i = 1, \quad (0.4)$$

が条件としてかかるので, 本質的には 8 個パラメータがある. また, A_1 および A_2 の成分 18 個に $GL(3)$ による gauge 自由度が 8 次元あり, 行列式 (0.2) から 8 条件がかかるため, アクセサリー・パラメーターは 2 次元ぶんある.

方程式 (0.1) には 9 次対称群 $\mathfrak{S}_9$ が $\sigma : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ のように作用する. これ以外に, q -middle convolution という操作により方程式 (0.1) に対するある変換が構成できる. q -middle convolution mc_λ は Sakai–Yamaguchi [1] により導入され, Arai–Takemura [2] により再構成された, Euler 型 Jackson 積分変換

$$f(x) \mapsto x^\lambda \int_C f(t) \frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} d_q t \quad \left((x)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n) \right), \quad (0.5)$$

による線形 q 差分方程式の変換手法である.

主結果 $g = (-x/e_1)_\infty (-x/e_2)_\infty (-x/e_3)_\infty$ とおく. 方程式 (0.1) を次のように変換する:

1. g による gauge 変換を施す.
2. q -middle convolution mc_λ を施す. ただし, $q^\lambda = (\kappa e_1 e_2 e_3)^{-1}$ とする.
3. g^{-1} による gauge 変換を施す.

* 〒516-8555 三重県伊勢市神田久志本町 1704

e-mail: t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 39A13, 39A06

キーワード: affine Weyl 群, q -middle convolution

この変換により次の q 差分方程式 (0.1) が得られる：

$$T_x y = \tilde{A} y, \quad (0.6)$$

$$\tilde{A} = \tilde{A}(x) = I + x\tilde{A}_1 + x^2\tilde{A}_2 + \tilde{\kappa}x^3I : 3 \times 3 \text{ 行列}, \quad \det \tilde{A} = \tilde{\kappa}^3 \prod_{i=1}^9 (x + \tilde{e}_i). \quad (0.7)$$

ただし,

$$\tilde{e}_i = \begin{cases} e_i & i = 1, 2, 3 \\ \kappa e_1 e_2 e_3 e_i & i = 4, 5, 6, 7, 8, 9 \end{cases}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{\kappa(e_1 e_2 e_3)^2}. \quad (0.8)$$

条件 (0.4) を満たすパラメータ $(e_1, \dots, e_9, \kappa)$ に対する変換を

$$s_0 : (e_1, \dots, e_9, \kappa) \mapsto (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_9, \tilde{\kappa}), \quad (0.9)$$

$$s_i : e_i \leftrightarrow e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 8), \quad (0.10)$$

と定めると, これらは全て involution であり, 次の Dynkin 図形に付随する Coxeter 関係式を満たす：

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & s_0 & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ s_1 & \text{---} & s_2 & \text{---} & s_3 & \text{---} & s_4 & \text{---} & s_5 & \text{---} & s_6 & \text{---} & s_7 & \text{---} & s_8 \end{array}$$

これらの s_i を, q 差分方程式 (0.1) に対する q -middle convolution とパラメーターの隣接互換という形で与えたというわけである.

補足 方程式 (0.1) は, q 差分方程式のスペクトル型 [1] が

$$S = (S_0; S_\infty; S_{\text{div}}) = (3; 3; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (0.11)$$

(1 が 9 個) のものとして特徴付けられる. 気持ちは, 「3 階 3 点 Fuchs 型微分方程式を点平等にして q 差分化したもの」, すなわち

$$q\text{-analog of } \left\{ \begin{array}{ccc} x = t_1 & x = t_2 & x = t_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right\} \quad (0.12)$$

である.

参考文献

- [1] H. Sakai and M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, Int. Math. Res. Not. IMRN **2017**, no. 7, 1975–2013
- [2] Y. Arai and K. Takemura, Reformulation of q -middle convolution and applications, arXiv:2503.11214.

Grothendieck 多項式の主特殊化と q 超幾何級数

藤井 大計 (神戸大学)*1

島崎 達史 (神戸大学)*2

Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x|\beta)$ は, 数え上げ幾何学に背景を持ち, Lascoux-Schützenberger[4] により導入された多項式である. 多項式 $G_\lambda(x|\beta)$ は, Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ の 1 パラメータ拡張になっており, 非負整数の分割 λ によってパラメトライズされる次のような表示 [3] が知られている.

$$G_\lambda(x|\beta) = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j} (1 + \beta x_i)^{j-1} \right|}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}^n \quad (1)$$

上式において, $\beta = 0$ とすると, $G_\lambda(x|0) = s_\lambda(x)$ となる. [1] において, Grothendieck 多項式の特特殊値 $G_\lambda(1|\beta)$ と Gauss および Holman の超幾何級数との関係が明らかにされた. Holman の超幾何級数は, 表現論を背景に持つ多重超幾何級数で, 和公式が存在する [2]. この多重超幾何級数の q 類似として, Milne の q 超幾何級数 [6] が知られている.

本講演では, 主特殊化を施した特殊値 $G_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}|\beta)$ と Heine および Milne の q 超幾何級数との関係について述べる.

Theorem 1. 一行型の Grothendieck 多項式の主特殊化を施した特殊値は次の表示を持つ.

$$G_{(k)} = (1, q, \dots, q^{n-1}|\beta) = \frac{(q^{1+k})_{n-1}}{(q)_{n-1}} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^k, q^{1-n} \\ q^{k+1} \end{matrix}; -\beta q^n \right). \quad (2)$$

Remark 2. この式 (2) は, q を 1 とする極限で [1, Proposition 3.1.] に一致する.

一般の分割 λ に対する特殊値 $G_\lambda(1, q, \dots, q^{n-1}|\beta)$ は Milne の q 超幾何級数で表示できる.

Theorem 3. Grothendieck 多項式の主特殊化は次の表示を持つ.

$$G_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}|\beta) = \frac{(-1)^{m(m-1)/2} (-\beta)_n^m}{(1+\beta)^{m(m+1)/2} (q)_n^m} \times M \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{r \text{ 個}}; \underbrace{\begin{pmatrix} q^{-n} & -\beta & \dots & -\beta \\ q^{-n} & -\beta & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ q^{-n} & -\beta & & 0 \end{pmatrix}}_{r+1 \text{ 個}}; \underbrace{\begin{pmatrix} q & -q\beta & \dots & -q\beta \\ q & -q\beta & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ q & -q\beta & & 0 \end{pmatrix}}_{r+1 \text{ 個}}; \begin{pmatrix} q^{\lambda_1+n} \\ q^{\lambda_2+n-1} \\ \vdots \\ q^{\lambda_r+1} \end{pmatrix} \right). \quad (3)$$

*1 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科

e-mail: tfujii@math.kobe-u.ac.jp

*2 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科

e-mail: tsimazak@math.kobe-u.ac.jp

キーワード: Grothendieck 多項式, q 超幾何級数

ここで,

$$M((A_{ij})_{(n-1) \times (n-1)} | (a_{ij})_{n \times u} | (b_{ij})_{n \times v} | (z_{i1})_{n \times 1}) \\ = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - A_{ij} q^{k_i - k_j}) \right) \left(\prod_{j=1}^u \prod_{i=1}^n (a_{ij})_{k_i} \right) \left(\prod_{j=1}^v \prod_{i=1}^n \frac{1}{(b_{ij})_{k_i}} \right) \left(\prod_{i=1}^n z_{i1}^{k_i} \right), \quad (4)$$

であり, 行列 $(A_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$ は次の通りである.

$$(A_{ij})_{(n-1) \times (n-1)} = \begin{pmatrix} A_{12} & & & \\ A_{13} & A_{23} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Remark 4. この M と Milne [6, (1.21.a)] により導入された q 超幾何級数 $[F]^{(n)}$ との関係は, $M = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - A_{ij}) \right) [F]^{(n)}$ である.

参考文献

- [1] T. Fujii, T. Nobukawa, and T. Shimazaki, Special values of Grothendieck polynomials in terms of hypergeometric functions, Hiroshima Mathematica Journal **55** (2), 167-182, 2025.
- [2] W. J. Holman III, Summation Theorems for Hypergeometric Series in $U(n)$, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **11**(3): 523-532, 1980.
- [3] T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions, Advances in Mathematics, **243**: 22-66, 2013.
- [4] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math, **295**(11): 629-633, 1982.
- [5] C. Lenart, Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians, Annals of Combinatorics, **4**: 67-82, 2000.
- [6] S. C. Milne, A q -analog of hypergeometric series well-poised in $SU(n)$ and invariant G -functions, Adv. in Math. **58**, no.1, 1-60, 1985.

高階 Painlevé 系の量子化

上野 祐一 (皇學館大学 教育学部教育学科)*

n 変数量子 Garnier 系

Garnier 系は Painlevé 方程式と同様に多項式 Hamiltonian H_j の Hamiltonian 系でかくことができる．本講演では，3 変数, 4 変数の Garnier 系についてその量子類似を考える．さらには一般の n 変数 Garnier 系の場合についても，現在分かっていることについて報告する． n 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために，次のような Hamilton 系を考える． n 変数量子 Garnier 系には独立変数が n 個あり，Hamilton 系は次で与えられる．

$$dq_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n [q_i, H_j] dt_j, \quad dp_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n [p_i, H_j] dt_j$$

ここで， $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h$ ($h \in \mathbb{C}$) を満たす正準変数であり， $[,]$ は交換子である．また， $t_1, \dots, t_n$ は n 個の時間発展 (flow) の独立変数 (全ての変数と可換)，Hamiltonian H_i は $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ の非可換多項式として，対応する flow の正則性の条件から決めるものとする．この場合の変数関数の取り方は，Sasano-Yamada [3] の結果を元に以下の双有理変換量子正準変換を用いた．

$$\begin{aligned} r_i : \quad & q_i = -(x_i y_i - \alpha_i) y_i, \quad p_i = \frac{1}{y_i} \quad (i = 1, \dots, n), \\ & q_j = \begin{cases} \frac{1}{x_1} & (j = 1), \\ \frac{x_j}{x_1} & (j \neq 1), \end{cases} \quad p_j = \begin{cases} -x_1 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k + \alpha_i \right) & (j = 1), \\ x_1 y_j & (j \neq 1), \end{cases} \quad (i = n+1, n+2) \\ r_{n+3} : \quad & q_j = \begin{cases} 1 + y_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_1 - \alpha_{n+3} \right) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \\ & p_j = \begin{cases} \frac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \frac{1}{y_1} - y_1 & (j \neq 1). \end{cases} \\ r_{n+4} : \quad & q_j = \begin{cases} t_1 + t_1 y_1^2 - \sum_{i=2}^n \frac{t_1}{t_i} x_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_1}{t_i} x_i y_1 - \alpha_{n+4} \right) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \\ & p_j = \begin{cases} \frac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \frac{t_1}{t_j} \left(\frac{1}{y_1} - y_1 \right) & (j \neq 1). \end{cases} \end{aligned}$$

* e-mail: y-ueno@kogakkan-u.ac.jp

キーワード：高階 Painlevé 系, Hamiltonian, 量子化, 量子正準変換, 正則性

これらの変換は可換なパラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+4}$ を含み, r_{n+4} のみ時間変数 $t_1, \dots, t_n$ にも依存する. これらの変換の元で, t_i -flow がどの chart でも多項式となるような Hamiltonian H_i がただ一つに決まる. このとき, 次が予想できる.

予想 [5] Sasano-Yamada の結果を元に構成した張り合わせ関数は自然に量子化され, 双有理量子正準変換となる.

また, $n+4$ 個の量子正準変換に対して正則性を保つ Hamilton 系が一意に決まりそれは以下の形で書ける.

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)\kappa H_i = & q_i \left(\sum_{j=1}^n q_j p_j + a_{n+1} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j p_j + a_{n+2} \right) \\ & + \left\{ q_i(a_{n+3}t_i + a_{n+4} - \kappa) + (t_i - t_i q_i - q_i)v_i \right\} p_i \\ & - \sum_{j(\neq i)=1}^n \left\{ q_j v_i(p_j X_{i,j} + p_i \tilde{X}_{i,j}) + q_i v_j(p_i X_{i,j} + p_j X_{j,i}) \right\}, \end{aligned}$$

ここで,

$$v_i = q_i p_i - a_i, \quad \kappa = \sum_{i=1}^{n+4} a_i - h, \quad X_{i,j} = \frac{t_i(t_j - 1)}{t_j - t_i}, \quad \tilde{X}_{i,j} = \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_j}.$$

得られた Hamiltonian H_i の各 flow は可換 (Frobenius 完全積分可能) である.

この予想に対して, $n \leq 8$ までは確認済みである.

補足 高階 Painlevé 系である Sasano 系 [2] と Fuji-Suzuki-Tsuda 系 [1, 4] についても正則性による量子化を試みており, Fuji-Suzuki-Tsuda 系の場合と Sasano 系については $D_{n+2}^{(1)}$ 型については $k=2$, $D_{n+1}^{(1)}$ 型については $k=3$ の場合について, 全ての量子正準変換に対して正則性を保つ Hamilton 系が一意に決まることが分かっている.

参考文献

- [1] K. Fuji and T. Suzuki, *Higher order Painlevé systems of type A, Drinfeld-Sokolov hierarchies and Fuchsian systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B30** (2012), 181-208.
- [2] Y. Sasano, *Coupled Painlevé systems with affine Weyl group symmetry of type $D_l^{(1)}$* , Proceedings of Representation Theory, (2006), 71-76.
- [3] Y. Sasano and Y. Yamada, *Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.
- [4] T. Tsuda, *UC hierarchy and monodromy preserving deformation*, J. Reine Angew. Math., **690** (2014), 1-34.
- [5] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum higher order Painlevé systems*, in preparation.

Whittaker functions on affine Laumon spaces.

白石 潤一 (東京大学数理科学研究科) *

大川 領 (京都大学数理解析研究所) †

量子アフィン代数 $U_q = U_q(\mathfrak{g}(A_{N-1}^{(1)})) = U_q(A_{N-1}^{(1)})$ を考え, 以下の記号を用いる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A_{N-1}^{(1)})$ とし, $I = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\dot{I} = \{1, 2, \dots, N-1\}$ とする. アフィンリー代数 $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ は $N+1$ 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間で, 基底として $d, h_0, h_1, \dots, h_{N-1}$ をもつ. 元 $c = \sum_{i \in I} h_i \in \mathfrak{h}$ は, アフィンリー代数 $\mathfrak{g}$ の中心に属する. 双対 $\mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ の元 $\alpha_i, \Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ ($i \in I$) をそれぞれ単純ルートと基本ウエイトとする. つまり, これらは $\langle \alpha_i, h_j \rangle = c_{ij}, \langle \alpha_i, d \rangle = \delta_{i,0}$, および $\langle \Lambda_i, h_j \rangle = \delta_{i,j}, \langle \Lambda_i, d \rangle = 0$ ($i, j \in I$) を満たす. $\mathfrak{h}^*$ 上の非退化対称双線形形式が

$$(\alpha_i | \alpha_j) = c_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}, \quad (\alpha_i | \Lambda_0) = \delta_{i,0}, \quad (\Lambda_0 | \Lambda_0) = 0,$$

により定まり, 同一視 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ により標準元 $\mathcal{T} = \sum_{i,j \in \dot{I}} c^{ij} h_i \otimes h_j + c \otimes d + d \otimes c$ が得られる.

標準的な記法として以下を用いる:

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad (n)_t = \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}, \quad (n)_t! = \prod_{k=1}^n (k)_t,$$

$$\exp_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_t!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - t^2)^n x^n}{(t^2; t^2)_n} = \frac{1}{((1 - t^2)x; t^2)_{\infty}}.$$

量子アフィン代数 $U_q = U_q(A_{N-1}^{(1)})$ は, $\mathbb{C}$ 上の単位結合代数であり, e_i, f_i ($i \in I$) と q^h ($h \in \mathfrak{h}$) によって生成され, $i, j \in I$ と $h, h' \in \mathfrak{h}$ についてよく知られた関係式をみたす. $K = \langle q^h \mid h \in \mathfrak{h} \rangle$ をカルタン部分代数とし, $U_q^+ = \langle e_i, k \mid i \in I, k \in K \rangle, U_q^- = \langle f_i, k \mid i \in I, k \in K \rangle \subset U_q$ を上/下ボレル部分代数とする.

最高ウエイト $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i + k \Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ の Verma 加群 $M_{\lambda} = U_q^- \cdot 1_{\lambda}$ は 1_{λ} によって生成され, $e_i 1_{\lambda} = 0$ ($i \in I$) および, $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i \Lambda_i + \xi_0 \delta \in \mathfrak{h}^*$ に対し $q^{\xi} 1_{\lambda} = q^{(\xi|\lambda)} 1_{\lambda} = q^{\sum_i \xi_i \lambda_i + \xi_0 k} 1_{\lambda}$ という関係式で定まる.

ラプラシアンを $\mathcal{L} = \sum_{i \in I} (\alpha_i + \delta_{i,0} \delta) \Lambda_i$ とし, 元 $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}}$ を導入する. これは, U_q の生成元との交換関係として, $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} q^h = q^h q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}}$ ($h \in \mathfrak{h}$), $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} e_j = e_j q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} q^{\pm 1} q^{\pm h_j}$, $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} f_j = f_j q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} q^{\mp 1} q^{\mp h_j}$ ($j \in I$) をみたす. さらに Verma 加群 M_{λ} への $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}}$ の作用は, $q^{\pm \frac{1}{2} \mathcal{L}} \cdot 1_{\lambda} = q^{\pm \frac{1}{2} \sum_{i,j \in I} c_{ij} \lambda_i \lambda_j \pm k \lambda_0} \cdot 1_{\lambda}$ により定義される. ここで $\vartheta_i = x_i \partial / \partial x_i$ ($i \in I$) および $\vartheta_y = y \partial / \partial y$ をオイラー微分とし, $\Delta = \sum_{i,j \in I} c_{ij} \vartheta_i \vartheta_j$ を変数 x_i に作用するラプラス演算子とする. このとき $q^{\mathcal{L}+2\rho} q^{\xi} e_{-\beta} 1_{\lambda} = q^{\Delta+2\vartheta_y \vartheta_0+2 \sum_{i \in I} \vartheta_i} q^{\xi} e_{-\beta} 1_{\lambda}$ が成り立つ.

U_q の対合として以下をとる. 1. Chevalley 対合 ($\mathbb{Q}(q)$ 代数の射) $\omega : e_i \rightarrow f_i, f_i \rightarrow e_i, k_i \leftrightarrow k_i^{-1}$, 2. 反対合 ($\mathbb{Q}(q)$ 代数の射) $\sigma : e_i, f_i$ fixed, $k_i \leftrightarrow k_i^{-1}$. Verma 加群 M_{λ} 上の

*email: shiraish@ms.u-tokyo.ac.jp

†email: ohkawa.ryo@gmail.com

Shapovalov 形式は $(1_\lambda, 1_\lambda) = 1$ かつ $x \in U_q, u, v \in M_\lambda$ に対し $(xu, v) = (u, \omega \circ \sigma(x)v)$ を満たす対称双線型形式として定義される。

Whittaker ベクトルを定めるために、シュヴァレー生成元を修正し $E_i = e_i q^{-\Lambda_i + \Lambda_{i+1}}, F_i = q^{+\Lambda_i - \Lambda_{i+1}} f_i$ とおく。 F_i の Shapovalov 形式に関する随伴 F_i^* は $F_i^* = e_i q^{+\Lambda_i - \Lambda_{i+1}}$ となる。

定義 0.1. Whittaker ベクトル $W \in \widehat{M}_\lambda$ と $W^* \in \widehat{M}_\lambda$ は以下の等式により定義される：

$$E_i W = \frac{1}{1 - q^2} W, \quad F_i^* W^* = \frac{1}{1 - q^{-2}} W^* \quad (i \in I).$$

この 2 つのベクトルを Shapovalov 形式に入れることにより、Whittaker 函数

$$f(\xi|\lambda) = (q^{-\frac{1}{2}\mathcal{L}} q^\xi W, W^*) \in y^k \prod_{i \in I} x_i^{\lambda_i} \cdot \mathbb{C}[[1/x_0, \dots, 1/x_{N-1}]].$$

が定まる。ここで $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i \Lambda_i + \xi_\delta \delta$ に対し、 $x_i = q^{\xi_i}$ ($i \in I$)、また $y = q^{\xi_\delta}$ とおいた。

ホップ代数 $U_q(\mathfrak{g})$ は準三角的、すなわち U_q のテンソル積の適切な完備化において、以下の性質を満たす元 $\mathcal{R} \in U_q \widehat{\otimes} U_q$ が存在する。

$$\begin{aligned} (\tau \circ \Delta)(x) \mathcal{R} &= \mathcal{R} \Delta(x) \quad (x \in U_q), \\ (\Delta \otimes 1)(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}^{13} \mathcal{R}^{23}, \quad (1 \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{13} \mathcal{R}^{12} \quad \text{in } U_q^{\widehat{\otimes} 3}, \end{aligned}$$

Hopf ペアリングの標準元 Θ により、 $\mathcal{R} = \Theta q^{-\mathcal{T}}$ となる。さらに伊藤氏 [1] は Δ_+^{re} 上の任意の凸順序に基づき Cartan-Weyl 生成元 $e_\alpha, e_{-\alpha}$ ($\alpha \in \Delta_+$) を構成し、Khoroshkin-Tolstoi [2] の提案した無限積公式を証明した：

$$\Theta = \prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+}^> \Theta_\alpha, \quad \Theta_\alpha = \exp_{q_\alpha}((q^{-1} - q)e_\alpha \otimes e_{-\alpha}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(q^{-1} - q)^n}{(n)_{q_\alpha}!} e_\alpha^n \otimes e_{-\alpha}^n. \quad (1)$$

ここで $q_\alpha = q^{(\alpha|\alpha)/2}$ とし、記法 $(n)_1! = n!$ を用いた。

$\mathcal{D} = m(S \otimes \text{id}) \mathcal{R}_{21}$ とし、Drinfeld Casimir $\mathcal{C} = q^{2\rho} \mathcal{D}$ を定める。 $\mathcal{C}$ は Verma 加群 M_λ 上で $\mathcal{C} = q^{(\lambda|\lambda+2\rho)} \text{id}$ として作用する。 $(q^{-\frac{1}{2}\mathcal{L}} q^\xi \mathcal{C} W, W^*)$ を無限積公式 (1) を用いて計算することにより、以下を示した。

定理 0.2.

$$q^{(\lambda|\lambda+2\rho)} f(\xi|\lambda) = \frac{(1/(x_0 x_1 \cdots x_{N-1}); q^{2N})_\infty}{\prod_i (1/x_i; q^2)_\infty} q^{2k\vartheta_0 + \Delta + 2 \sum_{i \in I} \vartheta_i} \cdot f(\xi|\lambda)$$

References

- [1] K. Ito, A new description of convex bases of PBW type for untwisted quantum affine algebras, Hiroshima Math. J. **40** (2010), no. 2, 133–183
- [2] S. Khoroshkin and V. N. Tolstoi, The Cartan-Weyl basis and the universal R -matrix for quantum Kac-Moody algebras and superalgebras, in *Quantum symmetries (Clausthal, 1991)*, 336–351, World Sci. Publ., River Edge, NJ,

モノドロミー曲面のモノドロミー

Monodromy of monodromy surfaces

Alexander STOKES (早稲田大学)*

概 要

Painlevé equations are associated to complex algebraic surfaces in two different ways, which are related by biholomorphism under different instances of the Riemann-Hilbert correspondence. On the 'left-hand side' are Sakai surfaces, which provide Okamoto's initial value spaces, and on the 'right-hand side' are monodromy surfaces coming from associated linear problems. Symmetries of Sakai surfaces form extended affine Weyl groups and provide Bäcklund transformations of the Painlevé equations. However, under the Riemann-Hilbert correspondence the actions of the affine Weyl groups become trivial on monodromy surfaces.

In this talk we explain that there is still a shadow of the extended affine Weyl group symmetry on the other side of the Riemann-Hilbert correspondence, which takes the form of the monodromy group of the monodromy surface itself. This is motivated by the fact that the monodromy of smooth cubic surfaces is the finite Weyl group of type E_6 . We show that the monodromy of the monodromy surface associated with a Painlevé equation matches exactly with the underlying finite Weyl group of the affine Weyl group of symmetries of the corresponding Sakai surface.

Based on joint work with Pieter Roffelsen.

* e-mail: stokes@aoni.waseda.jp

web: <https://sites.google.com/view/alexanderstokes>

This work was supported by KAKENHI (24K22843).

Katz 理論的積分変換をめぐって

安達 駿弥 (宇都宮大学)*

0 はじめに

複素領域における微分方程式は解析学や特殊函数論をはじめとして、数論や微分幾何学、数理物理学や統計学といった幅広い分野に現れる。中でも Gauss の超幾何函数

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

が満たす微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式)

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (0.1)$$

のように解の大域挙動が明示的にわかる方程式は応用の幅も広く、様々な数理科学の発展に貢献している。したがって、微分方程式の大域解析の手法を整備して大域挙動が明示的にわかる方程式を増やしていくことは重要な研究テーマの一つである。

講演者はこのテーマに対して **Katz 理論** の視点から研究を進めている。Katz 理論とは N. Katz [15] によって構築された、Fuchs 型方程式に対する理論である。Fuchs 型方程式とは複素射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の線形常微分方程式であって特異点として確定特異点のみを持つもののことで、一般に

$$\frac{du}{dx} = \left(\sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i} \right) u, \quad A_i \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$$

という連立 1 階型 (システム) の形で表される。Gauss の超幾何微分方程式 (0.1) も未知関数ベクトル u を適切に設定することでこの形に書き直すことができる (後述)。Katz はこの形の方程式に対して Euler 変換 (ベキ関数による畳み込み)

$$f(x) \mapsto \int_{\Delta} f(t)(x-t)^{\lambda} dt$$

に由来する middle convolution という変換を導入した。この変換は Fuchs 型方程式を Fuchs 型方程式に移す可逆変換で、一般に方程式の階数を変化させる。それだけではなく、変換の前後で生じる解の大域挙動 (接続係数, モノドロミー) の変化が明示的に追跡できる ([7], [19])。つまり middle convolution によって高階の微分方程式の大域解析をより階

* 〒321-8505 栃木県宇都宮市峰町 350 宇都宮大学 共同教育学部

e-mail: sadachi@a.utsunomiya-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:24K22826) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 58A17, 44A10

キーワード: Katz 理論, 線形 Pfaff 系, middle Laplace transform, 多変数超幾何函数

数の低い方程式の大域解析に帰着させることが可能となる．他にも middle convolution に関連して Katz が導入した諸概念は Fuchs 型方程式に対する新たな視点を与えるとともに, Fuchs 型方程式が現れる様々な分野の研究に大きなインパクトを与えた ([14], [5]). 同時に Katz 理論自体も Fuchs 型とは限らない一般の線形常微分方程式へと拡張されている ([16, 24, 25]).

以上は常微分方程式に対する結果であるが, 原岡 [8] は Katz 理論の枠組が偏微分方程式の解析にも有用であることを見抜き, 線形 Pfaff 系と呼ばれる線形偏微分方程式系に対して middle convolution を多変数化することで高次元 Katz 理論の基盤を与えた. これは多変数超幾何微分方程式をはじめとする重要な方程式たちの解析に有用だけでなく, これまで知られていなかった大域解析可能な偏微分方程式系のクラスの新たな発見も可能にするものであった ([17]). 高次元 Katz 理論の視点に基づく偏微分方程式系やその大域解析の研究は, 他分野の視点も取り込みながら現在も活発に進められている ([11, 2]).

こうした背景の下で, 講演者は超平面配置に沿って特異性を持つ線形 Pfaff 系に対して middle Laplace transform と呼ばれる Katz 理論的積分変換を導入し, その基本的な性質を証明した ([1]). これは不確定特異性を持つ線形 Pfaff 系も自然に扱える枠組みであり, その大域解析に対しても有効に働くと期待している.

本稿ではまず Katz 理論とその高次元化の概略を, 講演に関係する部分に絞って (おそらく講演中には触れられないであろう内容も含めて) 紹介する. 続いて論文 [1] の内容の一部について, 論文には書かれていない細かい問題意識やアイデアも含めて概説する.

1 一変数 Katz 理論

まずは Fuchs 型方程式に対する Katz 理論の概略を具体例とともに説明する. (詳細については原岡 [9] やその英訳版 [10], 廣恵 [13] を参照されたい). 記号の準備も兼ねて, Fuchs 型方程式に関する基本的事項をごく簡単に復習しておこう. §0 で述べたように Fuchs 型方程式は

$$\frac{du}{dx} = A(x)u, \quad A(x) = \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i}, \quad A_i \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \quad (1.1)$$

という連立 1 階型 (システム) の形で表される. この方程式は $\{a_0 = \infty, a_1, \dots, a_q\} \subset \mathbb{P}^1$ に確定特異点を持つ. 右辺に現れる行列 A_i は $x = a_i$ における解の局所的な情報を持っている行列で, 留数行列と呼ばれる. また $t = 1/x$ として方程式 (1.1) を書き換えると $t = 0$ ($\Leftrightarrow x = \infty$) における留数行列が

$$A_0 := -(A_1 + A_2 + \dots + A_q)$$

になることがわかる. 簡単のため本稿を通して以下の仮定をおく:

各 A_i ($0 \leq i \leq q$) は対角化可能で, 固有値は全て 0 でない整数差を持たない. $(*)$

例 1.1. Gauss の超幾何微分方程式 (0.1) は $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点を持つ Fuchs 型方程式である. これを (1.1) の形に表すためには次のようにすれば良い: 未知関数ベクトルを

$$u = \begin{pmatrix} y \\ \frac{xy'}{\beta} \end{pmatrix}$$

とする. するとこれは

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \right) u \quad (1.2)$$

を満たす. ここで

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = -(A_1 + A_2) \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

である.

さて, 方程式 (1.1) は仮定 $(\star)$ の下で, $x = a_i$ の周りで

$$\mathcal{U}(x) = G(x)(x - a_i)^{A_i}, \quad G(x) = I + O(x - a_i) \quad (1.3)$$

という形の基本解行列 (解空間の基底を並べてできる行列) を持つことが知られている (Frobenius の方法). ここで $G(x)$ は $x = a_i$ の近傍で収束する行列係数のべき級数であり, $(x - a_i)^{A_i}$ は行列の指数関数を用いて

$$(x - a_i)^{A_i} = e^{A_i \log(x - a_i)} \quad (1.4)$$

で定義される多価関数である (つまり関数として値を確定させるためには分枝を固定する必要がある). この基本解行列 (1.3) を使うと方程式 (1.1) の $x = a_i$ における局所挙動が次のようにして求められる. Γ を $x = a_i$ の周りを正の向きに一周する閉曲線として, Γ に沿って基本解行列 $\mathcal{U}(x)$ を解析接続することを考える. するとこの解析接続の結果 (1.4) における $\log(x - a_i)$ が $\log(x - a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$ となることから $\mathcal{U}(x)$ は

$$\mathcal{U}(x) \mapsto \mathcal{U}(x)e^{2\pi\sqrt{-1}A_i}$$

という変化を受ける. つまり方程式 (1.1) の基本解行列 (1.3) の特異性は

$$e^{2\pi\sqrt{-1}A_i}$$

という定数行列によって記述されるのである. この行列を基本解行列 (1.3) に関する**局所モノドロミー**という. ここで可逆行列 P を使って $\mathcal{V}(x) = \mathcal{U}(x)P$ とすると, これも方程式 (1.1) の基本解行列を与え, この基本解行列 $\mathcal{V}(x)$ に関する局所モノドロミーは

$$P^{-1}e^{2\pi\sqrt{-1}A_i}P = e^{2\pi\sqrt{-1}(P^{-1}A_iP)}$$

となる. このことから方程式の $x = a_i$ における局所的なデータとしては留数行列 A_i そのものよりも $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ における共役類 $[A_i]$ を考える方が自然であることがわかる.

このように、一つの確定特異点における解の構造や多価性は比較的良好にわかり、それらは本質的に留数行列の共役類 $[A_i]$ によって記述される。一方、複数の特異点をまたぐような解析、例えばある特異点の周りでの基本解行列を別の特異点の近くに解析接続したときの振る舞い (接続問題) や、別の特異点を一周して戻ってくるように解析接続したときの振る舞い (モノドロミー表現) を調べる問題は**大域解析**と呼ばれており、これについては特別なクラスに属する方程式を除いて我々は一般的な解析方法を手にしていない。ここでいう特別なクラスとしては、解が積分で書けるような方程式や、次に説明する rigid な方程式たちが挙げられる。

1.1 Fuchs 型方程式の rigidity

ここから Katz 理論の説明に入る。まずは Fuchs 型方程式の rigidity (剛性) について説明しよう^{*1}。ここでいう剛性とは、方程式の特異点の位置と各特異点における局所挙動を固定したときに方程式をどれだけ変形できるか、ということを目指す。

各特異点における局所挙動を表すデータはその特異点における留数行列の共役類で与えられていたことに注意して、Fuchs 型方程式が rigid であることを次のように定義する。

定義 1.2. Fuchs 型方程式 (1.1) が rigid であるとは、留数行列の組 $(A_0, A_1, \dots, A_q)$ が次を満たすことである: $B_i \sim A_i$ ($i = 0, 1, \dots, q$), $B_0 + B_1 + \dots + B_q = O$ を満たすような行列の組 $(B_0, B_1, \dots, B_q) \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ に対して、ある $P \in \text{GL}(N, \mathbb{C})$ が存在して $B_i = P^{-1}A_iP$ ($i = 0, 1, \dots, q$) が成り立つ。

この定義からは少し読み取りづらいかもしれないが、Fuchs 型方程式 (1.1) が rigid であるということはつまり、各特異点における局所挙動のみから方程式全体が定数行列によるゲージ変換

$$v = Pu, \quad P \in \text{GL}(N, \mathbb{C}) \quad (1.5)$$

を除いて一意に決まってしまうことを意味している^{*2}。例えば Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) は rigid な方程式の典型例である。一方、rigid ではない場合は局所挙動とは独立なパラメータが方程式 (1.1) に存在する。そのようなパラメータは**アクセサリー・パラメータ**と呼ばれる。アクセサリー・パラメータの個数は方程式の局所的な情報と大域的な情報の間にどれだけズレがあるかを表す量であり、大域解析の難しさを表す一つの指標と考える。従って、与えられた方程式のアクセサリー・パラメータの個数を測ることは基本的な問題となるが、Katz は Fuchs 型方程式 (1.1) に対して **rigidity 指数**

$$\iota = (1 - q)N^2 + \sum_{i=0}^q \dim Z(A_i) \quad (Z(A) \text{ は } A \text{ の中心化群})$$

^{*1} 講演中に詳しく触れる余裕はないかもしれないが、Katz 理論における重要な概念なのでここで大まかに紹介する。

^{*2} 単独高階型方程式でいうと、Riemann scheme (特異点の位置と各特異点における特性指数) のみから方程式が一意的に復元できることに相当する。

を定義してこの問題に明快な解答を与えた.

定理 1.3 (Katz [15]). Fuchs 型方程式 (1.1) が既約 ^{*3}ならば $l \leq 2$ であり, そのアクセサリ・パラメータの個数は $2 - l$ で与えられる.

1.2 Katz operations

Fuchs 型方程式に対して, Katz operation と呼ばれる 2 つの操作 (addition と middle convolution) を定義する. これらは rigidity 指数を不変に保つ一方で, 一般に方程式の階数を変える. つまり Katz operation によって, 高階の Fuchs 型方程式の解析を同じ rigidity 指数を持つより低階の方程式の解析に帰着させることができる. 具体的な定義を述べる前に歴史的な経緯を少し述べておこう. まず Katz [15] が $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 上の局所系 (Fuchs 型方程式のモノドロミー表現と等価な対象) に対する操作として addition と middle convolution を定義した. その後 Dettweiler–Reiter [6, 7] が Katz の定義を Fuchs 型方程式のモノドロミー表現に対する線形代数的操作として再定式化し, さらにその操作とマッチするように Fuchs 型方程式に対する addition と middle convolution を定義した. そこで, ここでは Dettweiler–Reiter による定義を紹介する.

定義 1.4. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{C}^q$ として, Fuchs 型方程式 (1.1) に対して Fuchs 型方程式

$$\frac{dv}{dx} = B(x)v, \quad B(x) = \sum_{i=1}^q \frac{A_i + \alpha_i}{x - a_i}$$

を対応させる変換を α による **addition** といい, add_α で表す. ここで $A_i + \alpha_i$ は $A_i + \alpha_i I_N$ を意味する (以下この記法を断りなく使う). 方程式と係数関数を同一視して $add_\alpha(A(x)) = B(x)$ と書くこともある.

middle convolution の定義には少し準備が要る. まず $\lambda \in \mathbb{C}$ をパラメータとして, 方程式 (1.1) に対して

$$G_i = \sum_{j=1}^q E_{ij} \otimes (A_j + \delta_{ij}\lambda) = \begin{pmatrix} O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_1 & \cdots & A_i + \lambda & \cdots & A_q \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \end{pmatrix} (i \quad (1.6)$$

という $qN \times qN$ 行列 G_i を考える ($1 \leq i \leq q$). ここで $\otimes$ はクロネッカー積で E_{ij} は $q \times q$ の行列要素, δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す. すると簡単な計算で

$$\mathcal{K}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^N)^q \mid v_i \in \text{Ker } A_i \ (1 \leq i \leq q) \right\}, \quad \mathcal{K}_\infty := \text{Ker}(G_1 + G_2 + \cdots + G_q)$$

^{*3} ($A_1, A_2, \dots, A_q$) 不変部分空間が自明なもの, つまり $\{0\}$ と $\mathbb{C}^N$ しかない場合をいう.

はいずれも $(G_1, G_2, \dots, G_q)$ 不変であることがわかる. したがって各行列 G_i は商空間 $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ 上の作用を引き起こす. その作用を与える行列を $\bar{G}_i$ として middle convolution を以下のように定義する.

定義 1.5. $\lambda \in \mathbb{C}$ とする. Fuchs 型方程式 (1.1) に対して Fuchs 型方程式

$$\frac{dv}{dx} = B(x)v, \quad B(x) = \sum_{i=1}^q \frac{\bar{G}_i}{x - a_i} \quad (1.7)$$

を対応させる操作を λ による **middle convolution** といい, mc_λ で表す. これも addition 同様, 方程式と係数関数を同一視して $mc_\lambda(A(x)) = B(x)$ と表すこともある.

この定義からすぐにわかることとして,

- addition, middle convolution は特異点の位置を変えない.
- addition は方程式の階数 (係数行列のサイズ) を変えない ($N \rightarrow N$).
- middle convolution は方程式の階数を一般に変える ($N \rightarrow qN - \dim(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$).
- middle convolution の表示は商空間 $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ の基底の取り方に依存する.

といったことが挙げられる.

例 1.6. Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) に対して middle convolution を施して, 階数が変化することを見てみよう. 簡単のために

$$\alpha, \beta, \gamma, \gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta, \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$$

を仮定する (これは方程式 (1.2) の既約条件に対応する). $\lambda \in \mathbb{C}$ をパラメータとすると

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda & A_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma + \lambda & -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ A_1 & A_2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \gamma & -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

となる. 次に $\mathcal{K}_0$ を求める.

$$\text{Ker } A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Ker } A_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

より

$$\mathcal{K}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. $\mathcal{K}_\infty$ は λ の取り方に依存するが

$$\mathcal{K}_\infty = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \neq 0, \alpha, \beta) \\ \mathcal{K}_0 & (\lambda = 0) \\ \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle & (\lambda = \alpha) \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle & (\lambda = \beta) \end{cases}$$

となる. ここでは $\lambda = \beta$ としてみる. すると

$$\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (1.8)$$

となる. 商空間 $\mathbb{C}^4/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ に対する G_1, G_2 の作用 $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ を取り出すためには次のようにすればよい. まず (1.8) にベクトルを補って $\mathbb{C}^4$ の基底を作り, それらを並べた行列を作る. 例えば ${}^t(0, 0, 0, 1)$ を補って

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

としよう. この P を用いて G_1, G_2 を相似変換すると

$$P^{-1}G_1P = \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 0 & 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta - \gamma + 1 \end{array} \right), \quad P^{-1}G_2P = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\alpha + \gamma - 1 \end{array} \right),$$

というように同時ブロック三角化される (これは $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$ が (G_1, G_2) 不変であることによる). この右下部分に出てくるブロックがそれぞれ $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ である. つまり $\bar{G}_1 = \beta - \gamma + 1$, $\bar{G}_2 = -\alpha + \gamma - 1$. 従って β をパラメータとする middle convolution mc_β の結果として階数 1 の方程式

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{\beta - \gamma + 1}{x} + \frac{-\alpha + \gamma - 1}{x - 1} \right) v$$

が得られた. ちなみに $\lambda \neq \alpha, \beta$ を満たすようにパラメータ λ を取ると $\dim(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty) = 2$ となるので, mc_λ の結果として得られる方程式の階数は $4 - 2 = 2$ となる.

次に Katz operations の解析的な意味を紹介する．まず addition add_α は (1.1) の解に対してゲージ変換

$$v(x) = u(x) \prod_{i=1}^q (x - a_i)^{\alpha_i}$$

を施すことに対応する．

続いて middle convolution mc_λ について考える．これは解析的には次の 3 ステップで実現される．

Step 1 (大久保型方程式への変換). 方程式 (1.1) の解 $u(x)$ を用いて

$$U(x) = {}^t \left(\frac{u(x)}{x - a_1}, \frac{u(x)}{x - a_2}, \dots, \frac{u(x)}{x - a_q} \right)$$

という qN ベクトルを考えると、これは以下の方程式を満たすことが確かめられる．

$$(x - T) \frac{dU}{dx} = (A - I)U \quad (1.9)$$

ただし

$$T = \begin{pmatrix} a_1 I_N & & & \\ & a_2 I_N & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_q I_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_q \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \end{pmatrix}$$

である．この方程式 (1.9) は多項式係数の方程式になっていることに注意しておく．このタイプの方程式は**大久保型**と呼ばれ、後に middle Laplace transform を考える際にも重要な役割を果たす．

Step 2 (Euler 変換). 続いて $U(x)$ に対して λ をパラメータとする Euler 変換

$$V(x) = \int_{\Delta} U(t)(x - t)^\lambda dt$$

を考える (積分路 Δ は状況に応じて適切に設定する．例えば $\{a_1, \dots, a_q, \infty\}$ のうち 2 点を結ぶように取ることが多い)．するとこれは作用素の変換

$$\begin{cases} x \frac{d}{dx} & \mapsto x \frac{d}{dx} - \lambda - 1, \\ \frac{d}{dx} & \mapsto \frac{d}{dx} \end{cases}$$

を引き起こす．このことから $V(x)$ は

$$(x - T) \frac{dV}{dx} = (A + \lambda)V$$

を満たすことがわかる (標語: Euler 変換は大久保型方程式をスカラーシフトする)．この方程式の両辺に左側から $(x - T)^{-1}$ をかけると

$$\frac{dV}{dx} = \left(\sum_{i=1}^q \frac{G_i}{x - a_i} \right) V \quad (1.10)$$

となる. ここで留数行列 G_i は (1.6) で与えられる $qN \times qN$ 行列. ちなみに方程式 (1.10) は方程式 (1.1) の λ による **convolution** と呼ばれる.

Step 3 (商空間 $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ への射影). 方程式 (1.10) を商空間 $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ へ射影することで既約成分を取り出すことを考える. まず $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$ の基底を $u_1, u_2, \dots, u_m$ としてそこに $v_{m+1}, \dots, v_{qN}$ を補って $\mathbb{C}^{qN}$ の基底を作る. これらを並べて

$$P = (u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_{qN})$$

とする. すると $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$ が $(G_1, G_2, \dots, G_q)$ 不変なことから

$$G_i P = P \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & \bar{G}_i \end{array} \right)$$

となる. ここで右辺の行列の分割は $(m, qN - m) \times (m, qN - m)$ である. この P を用いて

$$V = P V_0$$

とすると V_0 は

$$\frac{dV_0}{dx} = \left(\sum_{i=1}^q \frac{P^{-1} G_i P}{x - a_i} \right) V_0$$

を満たす. ここで

$$V_0 = \left(\frac{*}{v} \right)$$

とする. ここでベクトルの分割は $(m, qN - m)$ である. もしくは同じことだが

$$v = (O_{qN-m, m}, I_{qN-m}) V_0$$

とすれば v は

$$\frac{dv}{dx} = \left(\sum_{i=1}^q \frac{\bar{G}_i}{x - a_i} \right) v$$

を満たすことがわかる. これは方程式 (1.1) に mc_λ を施して得られる方程式 (1.7) に他ならない. 従って (1.7) の解 $v(x)$ が (1.1) の解 $u(x)$ を用いて

$$v(x) = Q \int_{\Delta} U(t)(x - t)^\lambda dt$$

と積分表示できることがわかった. ここで $Q = (O_{qN-m, m}, I_{qN-m}) P^{-1}$. つまり middle convolution は方程式 (1.1) の解を拡大し, そこに Euler 変換と線形変換 (射影) を施すことに対応しているのである.

最後に Katz operation の持つ性質について述べる. まずは必要な記号を準備しよう.

定義 1.7. 2つの Fuchs 型方程式

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= A(x)u, & A(x) &= \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i}, & A_i &\in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \\ \frac{dv}{dx} &= B(x)v, & B(x) &= \sum_{i=1}^q \frac{B_i}{x - a_i}, & B_i &\in \text{Mat}(N, \mathbb{C})\end{aligned}$$

に対して, ある $P \in \text{GL}(N, \mathbb{C})$ が存在して

$$(B_1, B_2, \dots, B_q) = (P^{-1}A_1P, P^{-1}A_2P, \dots, P^{-1}A_qP)$$

が成り立つとき, 2つの方程式は**同値**であるといい, $A(x) \sim B(x)$ と表す. これは2つの方程式が定数行列によるゲージ変換 (1.5) によって移り合うことと対応している.

既約な Fuchs 型方程式と同値な方程式もまた既約であることに注意しておく.

定理 1.8 (Katz [15], Dettweiler–Reiter [6]). Fuchs 型方程式 (1.1) が既約であるとき, 次の成り立つ^{*4}.

- 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して方程式 (1.7) は既約である.
- 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して mc_λ の前後で rigidity 指数は不変.
- $mc_0(A(x)) \sim A(x)$.
- 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して $mc_\lambda \circ mc_\mu(A(x)) \sim mc_{\lambda+\mu}(A(x))$.

同様の主張が addition についても成り立つ.

§0 で述べたように, Katz operation (特に middle convolution) の前後で接続係数がどう変わるかは大島 [19] が, モノドロミー表現がどう変わるかは Dettweiler–Reiter [7] がそれぞれ明らかにしている. 彼らの結果はいずれも明示的で, operation の前後で生じる変化が具体的に追えるものになっている. 従って Katz operation は Fuchs 型方程式の大域解析に有用なツールを与えていると言える. 特に方程式 (1.1) が rigid な場合, Katz operation はその大域解析に決定的な役割を果たすことが次の定理からわかる.

定理 1.9 (Katz [15]). Fuchs 型方程式 (1.1) が既約かつ rigid ならば, addition と middle convolution を有限回合成することで階数 1 の方程式 $u' = 0$ へ変換できる.

この定理の証明を見ると「実際に方程式の階数を下げるにはどのようなパラメータを選んで addition と middle convolution を施せば良いか」という具体的な手続きがわかる. 階数 1 の方程式 $u' = 0$ の接続係数やモノドロミーは自明なので, Katz operation が可逆であることと, 上述の大島や Dettweiler–Reiter の結果を合わせることで任意の既約 rigid な方程式の接続係数やモノドロミーが具体的に得られることになる.

^{*4} 実際はもう少し弱い仮定の下でこの定理の主張が成立するが, ここでは説明を簡単にするために既約性を仮定した.

2 高次元 Katz 理論

Katz 理論の多変数化として、**線形 Pfaff 系**に対して Katz 理論を拡張することを考える (高次元 Katz 理論). $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を $\mathbb{C}^n$ の座標とする. 線形 Pfaff 系とは一般に

$$du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{i=1}^n A_i(\mathbf{x}) dx_i, \quad A_i(\mathbf{x}) \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}(\mathbf{x})) \quad (2.1)$$

の形で書かれる線形偏微分方程式系であり, 特に 1-形式 Ω が**完全積分可能条件**

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega \quad (2.2)$$

を満たすならば特異点集合に属さない任意の点において初期値問題の解の一意存在定理が成り立ち, さらに解空間が有限次元となる (cf. 原岡 [10]). つまり線形 Pfaff 系は常微分方程式の自然な多変数化の一つである. また後述するように多変数超幾何函数をはじめとする多変数特殊函数の多くが線形 Pfaff 系の解として特徴づけられることから, 線形 Pfaff 系に対して Katz 理論を展開し, さらにそれを大域解析の理論へ応用していくことは自然, かつ意義深い方向性だと思われる.

2.1 Haraoka's middle convolution

高次元 Katz 理論の端緒を開いたのは原岡 [8] である. そこでは $\mathbb{C}^n$ 内の超平面配置に沿って対数的特異性を持つ n 変数の線形 Pfaff 系

$$du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d \log f_H, \quad A_H \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \quad (2.3)$$

に対して middle convolution が拡張されている. ここで $\mathcal{A}$ は $\mathbb{C}^n$ における超平面配置, f_H は $H \in \mathcal{A}$ の定義多項式である. この形の線形 Pfaff 系 (2.3) は Fuchs 型方程式 (1.1) の多変数化にあたり, 例えば Appell–Lauricella の多変数超幾何函数はこのタイプの線形 Pfaff 系の解として特徴付けられる.

注意 2.1. 線形 Pfaff 系 (2.3) の完全積分可能条件 (2.2) は行列 A_H に対する可換条件として書き下すことができる (cf. 原岡 [8]).

原岡は middle convolution の解析的実現 (§1.2 で説明した 3 ステップ) に着目して middle convolution を多変数化した. 以下では, 記号が煩雑になるのを避けるために $n = 2$ の場合に絞ってそのアイデアを説明する (アイデア自体は n 変数でも有効である).

まず $(x_1, x_2) = (x, y)$ として

$$\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} \mid (f_H)_x \neq 0\}, \quad \mathcal{A}_y = \{H \in \mathcal{A} \mid (f_H)_y \neq 0\}$$

と定める. また各 $H \in \mathcal{A}_x$ に対して $f_H = (f_H)_x(x - a_H)$ で $a_H \in \mathbb{C}[y]$ を定め, 同様に $H \in \mathcal{A}_y$ に対して $f_H = (f_H)_y(y - b_H)$ で $b_H \in \mathbb{C}[x]$ を定める. このとき超平面配置 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \underbrace{\{H_1, \dots, H_p\}}_{\mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y^c} \cup \underbrace{\{H_{p+1}, \dots, H_q\}}_{\mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y} \cup \underbrace{\{H_{q+1}, \dots, H_r\}}_{\mathcal{A}_x^c \cap \mathcal{A}_y} \quad (2.4)$$

とラベルづけしよう. すると (2.3) は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\sum_{H \in \mathcal{A}_x} A_H \frac{(f_H)_x}{f_H} \right) u = \left(\sum_{i=1}^q \frac{A_{H_i}}{x - a_{H_i}} \right) u \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\sum_{H \in \mathcal{A}_y} A_H \frac{(f_H)_y}{f_H} \right) u = \left(\sum_{i=p+1}^r \frac{A_{H_i}}{y - b_{H_i}} \right) u \end{cases} \quad (2.5)$$

というように Fuchs 型方程式を連立させたような形で表すことができる.

原岡の基本的なアイデアは**ある変数に関する方程式を常微分方程式だと思って Katz の middle convolution を施したとき, 他の変数に関する方程式がどう変わるかを追跡する**というものである. どちらの変数を選んでも同じなので, ここでは x を選んで x 方向の middle convolution を定義する.

まず方程式 (2.3) の解 $u(x, y)$ を用いて

$$U(x, y) = {}^t \left(\frac{u(x, y)}{x - a_{H_1}}, \frac{u(x, y)}{x - a_{H_2}}, \dots, \frac{u(x, y)}{x - a_{H_q}} \right) \quad (2.6)$$

とすると, §1.2 と同様の計算でこれが x 方向について大久保型方程式

$$(x - T) \frac{\partial U}{\partial x} = (A - I)U \quad (2.7)$$

を満たすことが確かめられる. ただし

$$T = \begin{pmatrix} a_{H_1} I_N & & & \\ & a_{H_2} I_N & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{H_q} I_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{H_1} & A_{H_2} & \cdots & A_{H_q} \\ A_{H_1} & A_{H_2} & \cdots & A_{H_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{H_1} & A_{H_2} & \cdots & A_{H_q} \end{pmatrix}$$

である (T は y に依存していることに注意). これに対して λ による x 方向の Euler 変換

$$V(x, y) = \int_{\Delta} U(t, y) (x - t)^\lambda dt \quad (2.8)$$

を施すと, やはり §1.2 と同様にして $V(x, y)$ は x 方向に

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\sum_{i=1}^q \frac{G_{H_i}}{x - a_{H_i}} \right) V \quad (2.9)$$

という偏微分方程式を満たすことがわかる. ここで

$$\begin{aligned} G_{H_i} &= \sum_{j=1}^q E_{ij} \otimes (A_{H_j} + \delta_{ij} \lambda) \\ &= \begin{pmatrix} O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_{H_1} & \cdots & A_{H_i} + \lambda & \cdots & A_{H_p} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \end{pmatrix} (i \end{aligned} \quad (2.10)$$

である ($1 \leq i \leq q$). 次に $V(x, y)$ が y 方向に満たす方程式を求めよう. $H \in \mathcal{A}_x$ に対して

$$\mathcal{C}_{H,y} := \{H' \in \mathcal{A}_x \mid (a_H - a_{H'})_y \neq 0\}$$

と定め, 各 $H' \in \mathcal{C}_{H,y}$ に対して $c_{HH'} \in \mathbb{C}$ を

$$a_H - a_{H'} = (a_H - a_{H'})_y (y - c_{HH'})$$

で定める. すると次が成り立つ.

命題 2.2 (原岡 [8]). $u(x, y)$ を線形 Pfaff 系 (2.5) の解とすると, (2.8) で定義される $V(x, y)$ は次の偏微分方程式を満たす.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left(\sum_{i=p+1}^r \frac{G_{H_i}}{y - b_{H_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq q \\ H_j \in \mathcal{C}_{H_i,y}}} \frac{G_{H_{ij}}}{y - c_{H_i H_j}} \right) V. \quad (2.11)$$

ここで

$$G_{H_i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^q E_{ij} \otimes (A_{H_j} + \delta_{ij} \lambda) & (p+1 \leq i \leq q), \\ I_q \otimes A_{H_i} & (q+1 \leq i \leq r), \end{cases} \quad (2.12)$$

$$G_{H_{ij}} = (E_{jj} - E_{ji}) \otimes A_{H_i} + (E_{ii} - E_{ij}) \otimes A_{H_j} \quad (2.13)$$

である ($p+1 \leq i \leq q$ のときの G_{H_i} は (2.10) に他ならないことに注意).

こうして得られた方程式たち (2.9), (2.11) を合わせると $V(x, y)$ が満たす線形 Pfaff 系

$$dV = c_{x,\lambda}(\Omega)V, \quad c_{x,\lambda}(\Omega) = \sum_{H \in mc_x \mathcal{A}} G_H d \log f_H \quad (2.14)$$

が得られる. ここで

$$mc_x \mathcal{A} := \mathcal{A} \cup \{H_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq q, H_j \in \mathcal{C}_{H_i,y}\}$$

であり, H_{ij} は

$$f_{H_{ij}} = y - c_{H_i H_j}$$

で定義される超平面である. この方程式 (2.14) を線形 Pfaff 系 (2.3) の λ による x 方向の **convolution** という.

注意 2.3. いま見たように, 多変数の convolution では特異点集合が $\mathcal{A} \mapsto mc_x \mathcal{A}$ と変化する. これは一変数の場合には見られなかった現象である. すると, 超平面配置の問題として次のような問いが考えられる: 「convolution によって閉じている, つまり $mc_x \mathcal{A} = \mathcal{A}$ となる超平面配置を特徴付けよ」この問題は 大島 [20] によって一般の n 変数の場合で解決された.

ここまでで §1.2 における **Step 1** (大久保化) と **Step 2** (Euler 変換) に相当する操作が終わった. 最後に **Step 3** に相当する操作を考えよう.

命題 2.4 (原岡 [8]). 線形 Pfaff 系 (2.5) が完全積分可能条件 (2.2) を満たすならば

$$\mathcal{K}_0^x := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^N)^q \mid v_i \in \text{Ker } A_{H_i} \ (1 \leq i \leq q) \right\}, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{K}_\infty^x := \text{Ker}(G_{H_1} + G_{H_2} + \cdots + G_{H_q})$$

はいずれも $\{G_H \mid H \in mc_x \mathcal{A}\}$ の作用で不変である.

従って方程式 (2.14) の係数行列 G_H は商空間 $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0^x + \mathcal{K}_\infty^x)$ 上の作用を引き起こす. その作用を与える行列を $\bar{G}_H$ として次のように多変数版 middle convolution を定義する.

定義 2.5. $\lambda \in \mathbb{C}$ とする. 線形 Pfaff 系 (2.5) に対して線形 Pfaff 系

$$dv = mc_\lambda^x(\Omega)v, \quad mc_\lambda^x(\Omega) = \sum_{H \in mc_x \mathcal{A}} \bar{G}_H d \log f_H \quad (2.16)$$

を対応させる操作を λ による x 方向の **middle convolution** といい, mc_λ^x で表す.

線形 Pfaff 系 (2.5) が完全積分可能ならば, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して (2.16) は完全積分可能であることがわかる. さらに定理 1.8 や定理 1.9 の多変数版も成り立つ.

定理 2.6 (原岡 [8]). 線形 Pfaff 系 (2.5) が完全積分可能であり, かつ x 方向の方程式が既約であるとき, 次が成り立つ.

- 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して (2.16) の x 方向の方程式は既約.
- 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して (2.16) の x 方向の方程式の rigidity 指数は不変.
- $mc_0^x(\Omega) \sim \Omega$.
- 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して $mc_\lambda^x \circ mc_\mu^x(\Omega) \sim mc_{\lambda+\mu}^x(\Omega)$.
- さらに x 方向の方程式が rigid ならば, x 方向の addition と middle convolution を有限回合成することで階数 1 の線形 Pfaff 系へ変換できる.

ただし 1-形式に対する同値関係 $\sim$ は常微分方程式の場合同様, 定数行列によるゲージ変換 (1.5) によって方程式が移り合うことと定義する.

例 2.7. $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3\}$ を

$$H_1 = \{x = 0\}, \quad H_2 = \{x - 1 = 0\}, \quad H_3 = \{x - y = 0\}$$

で定め, $\mathcal{A}$ に沿って対数的特異性を持つ階数 1 の線形 Pfaff 系

$$du = \left(\alpha_{H_1} \frac{dx}{x} + \alpha_{H_2} \frac{d(x-1)}{x-1} + \alpha_{H_3} \frac{d(x-y)}{x-y} \right) u, \quad (2.17)$$

を考える. この方程式に対して $\lambda \in \mathbb{C}$ をパラメータとする x 方向の middle convolution を考えると階数 3 の方程式

$$dV = \left(G_{H_1} \frac{dx}{x} + G_{H_2} \frac{dx}{x-1} + G_{H_3} \frac{d(x-y)}{x-y} + G_{H_{13}} \frac{dy}{y} + G_{H_{23}} \frac{dy}{y-1} \right) V \quad (2.18)$$

が得られる ($H_{13} = \{y = 0\}$, $H_{23} = \{y = 1\}$ が新たに特異点集合として加わる). ここで

$$G_{H_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{H_1} + \lambda & \alpha_{H_2} & \alpha_{H_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{H_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{H_1} & \alpha_{H_2} + \lambda & \alpha_{H_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{H_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{H_1} & \alpha_{H_2} & \alpha_{H_3} + \lambda \end{pmatrix}$$

$$G_{H_{13}} = \begin{pmatrix} \alpha_{H_3} & 0 & -\alpha_{H_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{H_1} & 0 & \alpha_{H_1} \end{pmatrix}, \quad G_{H_{23}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{H_3} & -\alpha_{H_3} \\ 0 & -\alpha_{H_2} & \alpha_{H_2} \end{pmatrix}$$

である (この場合 $\mathcal{K}_0^x = \mathcal{K}_\infty^x = \{0\}$ であるので **Step 3** は不要). これは Appell の超幾何関数 $F_1(x, y)$ の満たす方程式と本質的に等価である.

また方程式 (2.17) は $u(x, y) = x^{\alpha_{H_1}}(x-1)^{\alpha_{H_2}}(x-y)^{\alpha_{H_3}}$ という解を持つことから, 方程式 (2.18) の解の積分表示も同時に得られる:

$$V(x, y) = \int_{\Delta} t^{\alpha_{H_1}}(t-1)^{\alpha_{H_2}}(t-y)^{\alpha_{H_3}}(x-t)^{\lambda} \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = {}^t \left(\frac{dt}{t}, \frac{dt}{t-1}, \frac{dt}{t-y} \right).$$

これは超幾何関数 $F_1(x, y)$ の積分表示を与えている. この積分を用いると方程式 (2.18) の大域解析 (接続問題, モノドロミーの導出) が可能になる. また, ここからさらに addition や middle convolution を合成していくことで Appell の F_2, F_3, F_4 の満たす方程式と解の積分表示を構成することができる.

注意 2.8. n 変数の場合にも同様のストーリーで線形 Pfaff 系 (2.3) に対する x_i 方向の middle convolution $mc_{\lambda}^{x_i}$ が定義できる. Fuchs 型方程式の場合と同様に $mc_{\lambda}^{x_i}$ は (2.3) の大域挙動 (接続係数, モノドロミー表現) の変化を引き起こすので, その変化を追跡することは重要な問題となる. 原岡 [11] は方程式 (2.3) の特異点集合 $\mathcal{A}$ がブレイド配置の場合に Dettweiler–Reiter [6, 7] の結果を拡張して $mc_{\lambda}^{x_i}$ に対応するモノドロミー表現の変換 (乗法的 middle convolution) を定義した. 原岡の結果は最近の講演者と廣恵一希氏との共同研究 [2] においてさらに拡張され, 特異点集合がより一般の超平面配置の場合にまで乗法的 middle convolution が定義できるようになった ($mc_{x_i} \mathcal{A} = \mathcal{A}$ を満たしていればよい. 例えばブレイド配置はこの条件を満たしている).

2.2 Middle Laplace transform

一変数・多変数いずれにおいても, middle convolution の重要なポイントは与えられた方程式を大久保型方程式

$$(x-T) \frac{\partial U}{\partial x} = AU$$

へ変換することであった (ここで T は成分が x によらない対角行列, A は定数行列). 前述したように, 大久保型方程式は多項式係数の形で書けていることから種々の積分変換と

相性が良い．つまり middle convolution は大久保型方程式と Euler 変換の相性の良さを活かした変換であると言える．この視点に立つと，与えられた方程式を大久保型方程式に拡大したのちに別の積分変換を施すことで，また別の Katz 的積分変換が定義できると期待するのは自然だろう．この期待を Laplace 変換の場合に実現したのが本講演の主結果であり，これから説明する **middle Laplace transform** である．まず対数的特異点型線形 Pfaff 系 (2.5) を使ってその実現のアイデアを具体的に説明しよう．線形 Pfaff 系 (2.5) の解 $u(x, y)$ を使って定義したベクトル (2.6) に対して x 方向の Laplace 変換

$$V(x, y) = \int_{\Delta} U(t, y) e^{-tx} dt \quad (2.19)$$

を施すと (積分路 Δ は積分が収束するようにとる)，これはよく知られているように作用素の変換

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & \mapsto & x, \\ x & \mapsto & -\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

を引き起こす．すると (2.6) が満たす x 方向の方程式 (2.7) は

$$x \frac{\partial V}{\partial x} = -(A + xT) V \quad (2.20)$$

と変化する．両辺を x で割って

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(T + \frac{A}{x}\right) V \quad (2.21)$$

と表しておく．この形の方程式は **Birkhoff 標準形** と呼ばれる．この方程式は x に関する常微分方程式とみると $x = 0$ に確定特異点， $x = \infty$ に不確定特異点を持つため，Fuchs 型ではないことに注意しよう．また T は y に依存しており，

$$-T = B_x + yB_{xy}, \quad B_x = -\sum_{j=1}^q E_{jj} \otimes a_{H_j}(0)I_N, \quad B_{xy} = -\sum_{j=1}^q E_{jj} \otimes (a_{H_j})_y I_N$$

と表せることにも注意しておく．

Middle convolution 同様に $V(x, y)$ が y 方向に満たす方程式を求めることを考えよう．詳しくは [1] を参照してもらうことにして結果のみを述べると次のようになる．

命題 2.9 ([1]). $u(x, y)$ を線形 Pfaff 系 (2.5) の解とするとき，(2.20) で定義される $V(x, y)$ は次の偏微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left(xB_{xy} + \sum_{i=q+1}^r \frac{G_{H_i}}{y - b_{H_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq q \\ H_j \in \mathcal{C}_{H_i, y}}} \frac{G_{H_{ij}}}{y - c_{H_i H_j}} \right) V$$

ここで G_{H_i} , $G_{H_{ij}}$ はそれぞれ (2.12), (2.13) で与えられる．

この結果と (2.21) を合わせることで $V(x, y)$ が満たす線形 Pfaff 系

$$dV = \mathcal{L}^x(\Omega)V, \quad \mathcal{L}^x(\Omega) = (B_x + yB_{xy})dx + xB_{xy}dy + \sum_{H \in \mathcal{B}} G_H d\log f_H \quad (2.22)$$

が得られる. ここで $\mathcal{B} := (mc_x \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x) \cup \{\hat{H}\}$, $\hat{H} = \{x = 0\}$ で $G_{\hat{H}} = -A$ とした. これは middle convolution における Euler 変換を Laplace 変換に取り替えたものに相当する (convolution の Laplace 変換類似と言ってもよい). この方程式 (2.22) を方程式 (2.5) の x 方向の Laplace transform と呼ぶことにしよう.

これで middle convolution の **Step 1** と **2** に相当する操作ができたことになる. 続いて商空間への射影 (**Step 3** に相当) はどうなるかを考えてみる.

命題 2.10. 線形 Pfaff 系 (2.5) が完全積分可能条件 (2.2) を満たすとする. すると (2.15) で定義される $\mathcal{K}_0^x$ は $\{B_x, B_{xy}, G_H \mid H \in \mathcal{B}\}$ の作用で不変である.

この命題のおかげで線形 Pfaff 系 (2.22) を商空間 $\mathbb{C}^N / \mathcal{K}_0^x$ に射影することができ, 線形 Pfaff 系

$$dv = \mathcal{M}\mathcal{L}^x(\Omega)v, \quad \mathcal{M}\mathcal{L}^x(\Omega) = (\bar{B}_x + y\bar{B}_{xy})dx + x\bar{B}_{xy}dy + \sum_{H \in \mathcal{B}} \bar{G}_H d\log f_H \quad (2.23)$$

が得られる. この方程式 (2.23) を方程式 (2.5) の x 方向の middle Laplace transform と呼ぶことにする.

こうして対数的特異性を持つ線形 Pfaff 系 (2.5) に対しては middle convolution の Laplace 変換類似として middle Laplace transform が定義できた. ここで出来上がった方程式を見てみると, middle convolution とは違って middle Laplace transform では

- 不確定特異性が現れる (つまり middle Laplace transform は (2.5) の形で閉じない)
- Laplace 変換を考えない変数 (今の場合 y) の方向の方程式についても不確定特異性が現れる
- 特異点集合が増えるのではなく, 形状が変わる

ということがわかる. これらのことから次の問題が生まれる.

問題 2.11. Middle Laplace transform で閉じるような線形 Pfaff 系のクラスを特徴付け, 特異点集合の変化を明示的に記述せよ. またそのクラスにおける middle Laplace transform の性質 (可逆性, 既約性の保存性) を調べよ.

論文 [1] ではこの問題に対する一つの解答を与えた. 以下, その概要を述べる. まずは middle Laplace transform を (2.23) の形の線形 Pfaff 系を含むように定式化しよう. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^2$ 内の超平面配置として,

$$du = \Omega u, \quad \Omega = S_x(y)dx + S_y(x)dy + \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d\log f_H \quad (2.24)$$

という形の線形 Pfaff 系を考える. ここで $A_H \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ であり $S_x(y)$ と $S_y(x)$ は $A_x, A_y, A_{xy}, A_{yx} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ によって

$$S_x(y) = A_x + yA_{xy}, \quad S_y(x) = A_y + xA_{yx}$$

と表されたとする. また超平面配置 $\mathcal{A}$ は (2.4) のようにラベルづけしておく. すると次が成り立つ.

定理 2.12 ([1]). 線形 Pfaff 系 (2.24) が完全積分可能条件 (2.2) を満たし, かつ以下の条件も満たすとする:

- (i) $A_{xy} = A_{yx}$,
- (ii) A_x, A_{xy} は対角化可能,
- (iii) $\mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y$ ならば $A_{xy} = O$.

すると (2.24) の解 $u(x, y)$ を使って定義されるベクトル (2.6) に対する x 方向の Laplace 変換 (2.19) は次の階数 qN の線形 Pfaff 系を満たす.

$$dV = \mathcal{L}^x(\Omega)V, \quad \mathcal{L}^x(\Omega) = -T_x(y)dx - T_y(x)dy + \sum_{H \in \mathcal{B}} G_H d \log f_H. \quad (2.25)$$

ここで

$$\begin{aligned} -T_x(y) &= B_x + yB_{xy}, \quad B_x = -\sum_{j=1}^q E_{jj} \otimes a_{H_j}(0)I_N, \quad B_{xy} = -\sum_{j=1}^q E_{jj} \otimes (a_{H_j})_y I_N, \\ -T_y(x) &= B_y + xB_{xy}, \quad B_y = -\sum_{j=1}^q E_{jj} \otimes \{A_y + (a_{H_j})_y A_x + a_{H_j} A_{xy}\} \end{aligned}$$

であり

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \cup \{(mc_x \mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}_x\}, \quad \mathcal{B}_x := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(x - S_x(y)) = 0\}$$

である. $G_H \in \text{Mat}(qN, \mathbb{C})$ も具体的に書くことができるがここでは省略する.

得られた方程式 (2.25) を線形 Pfaff 系 (2.24) の x 方向の **Laplace transform** と呼ぶことにする. 商空間への射影については次が成り立つ (これは命題 2.10 の一般化である).

命題 2.13 ([1]). 線形 Pfaff 系 (2.5) が完全積分可能条件 (2.2) と定理 2.12 の仮定 (i)-(iii) を満たすならば, (2.15) で定義される $\mathcal{K}_0^x$ は (2.25) における $\{B_x, B_y, B_{xy}, G_H \mid H \in \mathcal{B}\}$ の作用で不変である.

従って方程式 (2.25) は商空間 $\mathbb{C}^{qN}/\mathcal{K}_0^x$ へ射影することができ, 線形 Pfaff 系

$$dv = \mathcal{M}\mathcal{L}^x(\Omega)v, \quad \mathcal{M}\mathcal{L}^x(\Omega) = -\bar{T}_x(y)dx - \bar{T}_y(x)dy + \sum_{H \in \mathcal{B}} \bar{G}_H d \log f_H. \quad (2.26)$$

が得られる.

定義 2.14. 定理 2.12 の仮定 (i)-(iii) を満たす線形 Pfaff 系 (2.24) に対して線形 Pfaff 系 (2.26) を対応させる操作を x 方向の **middle Laplace transform** といい, $\mathcal{ML}^x$ で表す.

注意 2.15. 定理 2.12 における x 方向の Laplace 変換 (2.19) の代わりに逆ラプラス変換

$$W(x, y) = \int_{\Delta} U(t, y) e^{xt} dt$$

を考えることで $W(x, y)$ が満たす線形 Pfaff 系

$$dW = \mathcal{L}^{-x}(\Omega)W$$

も得られる. この方程式も Laplace transform の場合と同様に (2.24) の形になっている. さらに $\mathbb{C}^{qN}/\mathcal{K}_0^x$ へ射影できることもわかり, 結果として線形 Pfaff 系

$$dw = \mathcal{ML}^{-x}(\Omega)w \quad (2.27)$$

が得られる. そこで線形 Pfaff 系 (2.24) に対して方程式 (2.27) を対応させる操作を x 方向の **inverse middle Laplace transform** と呼び, $\mathcal{ML}^{-x}$ で表すことにする. ただし $\mathcal{ML}^{-x} \circ \mathcal{ML}^x(\Omega) \sim \Omega$ は自明ではないことに注意しておく.

以上の定式化の下で, 問題 2.11 の答えが次のように与えられる.

定理 2.16 ([1]). $\mathcal{H}_x$ を定理 2.12 の仮定 (i)-(iii) を満たす完全積分可能な線形 Pfaff 系 (2.24) の集合とすると, $\mathcal{H}_x$ は (inverse) middle Laplace transform について閉じている. さらに $\mathcal{H}_x$ に属する線形 Pfaff 系 (2.24) の x 方向の方程式が既約であるとき, 次が成り立つ.

- (2.16), (2.27) の x 方向の方程式も既約.
- 逆変換公式

$$\mathcal{ML}^{-x} \circ \mathcal{ML}^x(\Omega) \sim \Omega, \quad \mathcal{ML}^x \circ \mathcal{ML}^{-x}(\Omega) \sim \Omega$$

が成り立つ.

任意の対数的特異点型線形 Pfaff 系 (2.3) は $\mathcal{H}_x$ に属することに注意しておく.

注意 2.17. Middle Laplace transform を使うと, 原岡の middle convolution を $\mathcal{H}_x$ に属する方程式, すなわち不確定特異性を持つ線形 Pfaff 系に対して拡張することができる (講演で詳しく説明する予定). 不確定特異点を持つ常微分方程式については川上 [16], 竹村 [24], 山川 [25] らがそれぞれ異なる方法で middle convolution を定義しており, 講演者の方法は彼らの結果の多変数化を与えているとみなせる.

ここまで説明してきたことは全て一般の n 変数の場合に拡張可能である. 詳しくは原論文 [1] を参照されたい ^{*5}.

^{*5}ただし本稿では 2 変数の場合に絞って説明している都合で [1] と多少記号を変えている.

2.3 具体例としての多変数超幾何関数

階数 1 の方程式に対して middle Laplace transform を施すことで、古典的に知られている合流型多変数超幾何関数のいくつかを構成することができる。例を挙げよう。

2.3.1 Humbert の超幾何関数 Φ_1

階数 1 の線形 Pfaff 系 (2.17) に対して x 方向の middle Laplace transform を施すと、階数 3 の方程式

$$dV = \left[-(B_x + yB_{xy}) dx + G_{\hat{H}_1} \frac{dx}{x} - xB_{xy} dy + G_{H_{13}} \frac{dy}{y} + G_{H_{23}} \frac{dy}{y-1} \right] V \quad (2.28)$$

が得られる (この場合 $\mathcal{K}_0^x = \{0\}$ なので **Step 3** は不要であることに注意)。ここで

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{\hat{H}_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{H_1} & \alpha_{H_2} & \alpha_{H_3} \\ \alpha_{H_1} & \alpha_{H_2} & \alpha_{H_3} \\ \alpha_{H_1} & \alpha_{H_2} & \alpha_{H_3} \end{pmatrix}$$

であり $G_{H_{13}}, G_{H_{23}}$ はそれぞれ (2.18) に現れたものと同一。これは Humbert の 2 変数合流型超幾何関数 Φ_1 の満たす線形 Pfaff 系と本質的で等価である。また変換の作り方から解の積分表示

$$V(x, y) = \int_{\Delta} t^{\alpha_{H_1}} (t-1)^{\alpha_{H_2}} (t-y)^{\alpha_{H_3}} e^{-tx} \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = {}^t \left(\frac{dt}{t}, \frac{dt}{t-1}, \frac{dt}{t-y} \right)$$

も同時に得られる。

2.3.2 原岡の合流型超幾何関数

線形 Pfaff 系 (2.28) にさらに変換を合成してみよう。 $(-\alpha_{H_1} - \alpha_{H_3}, -\alpha_{H_2} - \alpha_{H_3}) \in \mathbb{C}^2$ をパラメータとする y 方向の addition

$$W = add_{(-\alpha_{H_1} - \alpha_{H_3}, -\alpha_{H_2} - \alpha_{H_3})}^y(V)$$

を施すと、方程式 (2.28) は

$$dW = \left[-(B_x + yB_{xy}) dx + G_{\hat{H}_1} \frac{dx}{x} - xB_{xy} dy + (G_{H_{13}} - \alpha_{H_1} - \alpha_{H_3}) \frac{dy}{y} + (G_{H_{23}} - \alpha_{H_2} - \alpha_{H_3}) \frac{dy}{y-1} \right] W$$

と変化する。ここに y 方向の inverse middle Laplace transform を施す。この場合の $\mathcal{K}_0^y$ は

$$\mathcal{K}_0^y = \text{Ker}(G_{H_{13}} - \alpha_{H_1} - \alpha_{H_3}) \oplus \text{Ker}(G_{H_{23}} - \alpha_{H_2} - \alpha_{H_3})$$

であり、計算すると $\dim \mathcal{K}_0^y = 2$ であることがわかる。従って得られる方程式の階数は $3 \times 2 - 2 = 4$ となる。実際に計算すると階数 4 の線形 Pfaff 系

$$dv = \left[C_x dx + C_y dy + C_1 \frac{dx}{x} + C_2 \frac{d(x-y)}{x-y} + C_3 \frac{dy}{y} \right] v \quad (2.29)$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}
C_x &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\
C_1 &= \begin{pmatrix} -\alpha_{H_2} - \alpha_{H_3} & -\alpha_{H_1}(\alpha_{H_2} + \alpha_{H_3}) & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha_{H_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{H_2} & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha_{H_2}(\alpha_{H_1} + \alpha_{H_2}) & -\alpha_{H_1} - \alpha_{H_3} \end{pmatrix}, \\
C_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_{H_3} & 0 & 0 & \alpha_{H_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{H_3} & 0 & 0 & \alpha_{H_3} \end{pmatrix}, \\
C_3 &= \begin{pmatrix} \alpha_{H_2} & 0 & \alpha_{H_2}(\alpha_{H_1} + \alpha_{H_3}) & 0 \\ 0 & \alpha_{H_2} + \alpha_{H_3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{H_1} + \alpha_{H_3} & 0 \\ 0 & \alpha_{H_1}(\alpha_{H_2} + \alpha_{H_3}) & 0 & \alpha_{H_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．この方程式は原岡 [12] で扱われた，超幾何関数 F_4 の満たす方程式に対する合流操作で得られる 2 変数超幾何微分方程式と本質的に一致する．また解の積分表示として

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= Q \int_{\Delta} t^{\alpha_{H_1}} (t-1)^{\alpha_{H_2}} (t-s)^{\alpha_{H_3}} s^{-(\alpha_{H_1} + \alpha_{H_3})} (s-1)^{-(\alpha_{H_2} + \alpha_{H_3})} e^{-tx} e^{sy} \vec{\psi}, \\
\vec{\psi} &= \left(\vec{\eta} \wedge \frac{ds}{s}, \vec{\eta} \wedge \frac{ds}{s-1} \right)
\end{aligned}$$

が得られる．ここで Q は商空間 $\mathbb{C}^6 / \mathcal{K}_0^y \cong \mathbb{C}^4$ への射影を表す 4×6 行列．

このように階数 1 の方程式に対して middle Laplace transform や addition を次々合成していくことで完全積分可能な線形 Pfaff 系を解の積分表示とセットで具体的かつ大量に構成できる．その中には古典的に知られていなかったものも含まれており，それらは新しい多変数特殊関数を定義していると考えられる．

3 今後の展望

最後に今後の展望を述べて，本稿を閉じることにする．

3.1 middle Laplace transform の大域解析への応用

Balser–Jurkat–Lutz [4] は常微分方程式の研究の中で Laplace 変換による大久保型方程式と Birkhoff 標準形の間の対応

$$(x - T) \frac{du}{dx} = Au \quad \xleftrightarrow{L} \quad \frac{dv}{dx} = - \left(T + \frac{A + I}{x} \right) v$$

に着目し，大久保型方程式 (左側) の確定特異点間の接続係数と Birkhoff 標準形 (右側) の $x = \infty$ における Stokes 係数 (不確定特異点近傍における解の挙動を表す量) がダイレ

クトに対応していることを証明した. Balser–Jurkat–Lutz の結果は先鋭的なものであるが, 一変数かつ大久保型方程式の Laplace 変換にしか適用できない. 一方 middle Laplace transform は多変数の線形 Pfaff 系に対して定義されており, 1 つの方向に関する方程式を一旦大久保型方程式に拡大し, そこに Laplace 変換を施す構造になっている. 従って middle Laplace transform を通じて [4] の手法が線形 Pfaff 系 (2.1) へ拡張できると思われる. これは不確定特異性を持つ完全積分可能系に対する大域解析の基本的な手法の一つになると期待される.

また原岡 [12] は強漸近展開と呼ばれる多変数版の漸近展開を用いて方程式 (2.29) の不確定特異点 $(x, y) = (\infty, \infty)$ における Stokes 係数を求めている. この結果を middle Laplace transform の立場から見直すことも興味深い問題である.

3.2 線形 Pfaff 系に対する種々の変換との組み合わせ

Middle Laplace transform や middle convolution を線形 Pfaff 系に対する既存の変換の中に位置付けることも重要な問題である. 線形 Pfaff 系に対しては今回取り上げた変換の他にも特異点集合への延長/制限や特異点の合流・開折, 座標変換といった様々な操作が定義され, それら全体を集めたものは線形 Pfaff 系の空間に作用する群をなしている. この群の作用を解析し, そして §3.1 で述べた方向性と組み合わせで大域挙動が明示的に計算できる方程式を組織的に増やしていくことは今後の講演者の大きな目標の一つである.

3.3 q 差分化

今回扱った (高次元) Katz 理論は線形微分方程式に対する理論であるが, 同様の理論を線形 q 差分方程式に対して構築することは, 可積分系や Painlevé 方程式などの研究にも繋がる重要なテーマの一つである. 一変数 Katz 理論の q 類似については, 坂井–山口 [22] による先駆的な仕事において rigidity 指数や middle convolution の q 類似が与えられて以降, 新井–竹村 [3] による再定式化や, 佐々木–高木–竹村 [23], 朴 [21], 信川 [18] らによる q -Painlevé 方程式への応用など, 現在盛んに研究されている. 一方, 多変数 q 差分方程式に対する高次元 Katz 理論の q 類似, すなわち原岡による多変数 middle convolution や今回導入した middle Laplace transform の q 類似を構成する研究は未開拓であり, 講演者にとって今後取り組んでいきたい方向性の一つである (現在, 信川喬彦氏との共同研究が進行中).

謝辞 この度, 特別講演という大変貴重な機会を与えてくださいました, 無限可積分系特別セッション世話人の竹村剛一先生と津田照久先生に深く感謝申し上げます. また本研究を進めるにあたり, 廣惠一希先生には数多くの有益な助言をいただきました. ここに記して心より御礼申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP24K22826 の助成を受けています.

参考文献

- [1] S. Adachi, Middle Laplace transform and middle convolution for linear Pfaffian systems with irregular singularities, [arXiv:2502.01263](#).
- [2] S. Adachi and K. Hiroe, On the Riemann-Hilbert problem for hyperplane arrangements with a good line, [arXiv:2601.00544](#).
- [3] Y. Arai and K. Takemura, Reformulation of q -middle convolution and applications, [arXiv:2503.11214](#).
- [4] W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz, On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities I, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 691–721.
- [5] V. Belavin, Y. Haraoka and R. Santachiara, Rigid Fuchsian Systems in 2-Dimensional Conformal Field Theories, *Commun. Math. Phys.* **365**, (2019) 17–60.
- [6] M. Dettweiler and S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* **30**, no. 6 (2000), 761–798.
- [7] M. Dettweiler and S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra.* **318**, (2007), 1–24.
- [8] Y. Haraoka, Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Stud. Pure Math.* **62** (2012), 109–136.
- [9] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.
- [10] Y. Haraoka, *Linear differential equations in the complex domain –from classical theory to forefront*, Lecture Notes in Mathematics, **2271**, Springer, 2020.
- [11] Y. Haraoka, Multiplicative middle convolution for KZ equations, *Math. Z.*, **294** (2020), 1787–1839.
- [12] Y. Haraoka, Asymptotic analysis for confluent hypergeometric function in two variables given by double integral, *Opuscula Math.*, **44**, no. 4 (2024), 505–541.
- [13] 廣惠一希, 重点解説 微分方程式とモジュライ空間, サイエンス社, 2022.
- [14] K. Hiroe, H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *4-dimensional Painlevé type equations*, MSJ memoirs **37**, 2018.
- [15] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton (1996).
- [16] H. Kawakami, Generalized Okubo systems and the middle convolution, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010** (2010), no. 17, 3394–3421.
- [17] S.-J. Matsubara-Heo and T. Oshima, Generalized hypergeometric functions with several variables, *Indag. Math.*, **36**(2) (2025), 507–566.
- [18] T. Nobukawa, A 3×3 linear q -difference system with $E_8^{(1)}$ -symmetry, [arXiv:2601.06070](#).
- [19] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, MSJ Memoirs **28**, 2012.
- [20] T. Oshima, Stable hyperplane arrangements, [arXiv:2510.11099](#).
- [21] 朴佳南, q -middle convolution と $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式, 研究集会「複素領域における関数方程式とその周辺 2025」における講演, 2025 年 12 月 12 日.
- [22] H. Sakai and M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog

- of middle convolution, *Int. Math. Res. Not.* **2017** (2017), 1975–2013.
- [23] S. Sasaki, S. Takagi and K. Takemura, q -middle convolution and q -Painlevé equation, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **18** (2022), Paper No. 056, 21 pp.
 - [24] K. Takemura, Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities, *New trends in quantum integrable systems*, (2011), 393–420.
 - [25] D. Yamakawa, Middle convolution and Harnad duality, *Math. Ann.*, **349** (2011), 215–262.