

✿ 日本数学会

2026年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

(4日目 / 3月26日)

2026年3月

於 東京理科大学

Exact solutions to an autonomous dKdV equation via Painlevé-type ordinary difference equations

中園 信孝 (東京農工大学)*

本講演では、自励な 2 次元偏差分方程式

$$\epsilon u_{l+1,m+1} - u_{l,m} = \frac{\epsilon}{u_{l,m+1}} - \frac{1}{u_{l+1,m}}, \quad (l, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad u_{l,m} \in \mathbb{C}, \quad \epsilon \in \mathbb{C}^* \quad (1)$$

がパンルヴェ型の q -差分方程式によって記述される特殊解を持つことを示す。方程式 (1) は $\epsilon = 1$ とすると [2] の広田の dKdV 方程式と呼ばれる方程式に帰着する。また、方程式 (1) は [4] の広田の dKdV 方程式の非自励版の特殊な場合として導出できる。これらのことより、本講演では方程式 (1) も広田の dKdV 方程式と呼ぶ。

以下は本講演で用いる q -差分パンルヴェ方程式である。ただし、 $\alpha_l = \epsilon^l \alpha_0$, $\beta_m = \epsilon^m \beta_0$

q -P_{II} ($A_6^{(1)}$ -surface) [5]:

$$F_{l+1,m} F_{l,m} = \frac{G_{l+1,m} + 1}{\alpha_{l+1}^2 G_{l+1,m}}, \quad G_{l+1,m} G_{l,m} = \frac{\beta_m^2 (F_{l,m} + 1)}{\alpha_{l+1}^2 F_{l,m}}$$

q -P_{III}^{D₇(1)} ($A_6^{(1)}$ -surface) [10]:

$$G_{l,m+1} G_{l,m} = \frac{\beta_m^2 (H_{l,m+1} + \alpha_l^2)}{H_{l,m+1} (\beta_m^2 H_{l,m+1} + \alpha_l^2)}, \quad H_{l,m+1} H_{l,m} = \frac{\alpha_l^2}{G_{l,m} (G_{l,m} + 1)}$$

q -P_{IV} ($A_5^{(1)}$ -surface) [3]:

$$\begin{cases} \frac{F_{l+1,m}}{G_{l,m}} = \frac{\beta_m^2 (1 + H_{l,m} + H_{l,m} F_{l,m})}{1 + F_{l,m} + F_{l,m} G_{l,m}}, \\ \frac{G_{l+1,m}}{H_{l,m}} = \frac{1 + F_{l,m} + F_{l,m} G_{l,m}}{\gamma^2 (1 + G_{l,m} + G_{l,m} H_{l,m})}, \\ \frac{H_{l+1,m}}{F_{l,m}} = \frac{\epsilon^2 \gamma^2 (1 + G_{l,m} + G_{l,m} H_{l,m})}{\beta_m^2 (1 + H_{l,m} + H_{l,m} F_{l,m})}, \\ F_{l,m} G_{l,m} H_{l,m} = \alpha_l^2 \end{cases}$$

q -P_{III} ($A_5^{(1)}$ -surface) [1]:

$$F_{l,m+1} F_{l,m} = \frac{\alpha_l^2 \beta_m^2 \gamma^2 (1 + H_{l,m+1})}{H_{l,m+1} (\gamma^2 + \beta_m^2 H_{l,m+1})}, \quad H_{l,m+1} H_{l,m} = \frac{\alpha_l^2 \gamma^2 (\beta_m^2 + F_{l,m})}{\beta_m^2 F_{l,m} (1 + F_{l,m})}$$

* 〒184-8588 東京都東京都小金井市中町 2-24-16 東京農工大学 工学研究院

e-mail: nakazono@go.tuat.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:23K03145) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 33E17, 35Q53, 37K10, 39A13, 39A14, 39A23, 39A45

キーワード: discrete KdV equation; q -Painlevé equations

以下は本講演で用いる $2h$ -階のパンルヴェ型 q -差分方程式 [7, 8] である。

$$X_{n+2h}X_n = -\frac{1}{\prod_{k=1}^{2h-1} X_{n+k}} \left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{2h-1} X_{n+k}} + \gamma_n \right), \quad \gamma_{n+2h} = \epsilon\gamma_n \quad (2)$$

$$X_{n+2h}X_n = -\frac{1}{\prod_{k=1}^{h-1} X_{n+2k}} \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{h-1} X_{n+2k+1}} + \gamma_n \right), \quad \gamma_{n+2h+1} = \epsilon\gamma_n \quad (3)$$

$h = 1$ のとき, 方程式 (2) は q -P_I ($A_7^{(1)}$ -surface) [9] に等しく, 方程式 (3) は q -P_I ($A_6^{(1)}$ -surface) [9] に等しい。

本講演は論文 [6] の内容についてのものです。

参考文献

- [1] H. W. Capel, F. W. Nijhoff, and V. G. Papageorgiou. *Phys. Lett. A*, 155(6-7):377–387, 1991.
- [2] R. Hirota. *J. Phys. Soc. Japan*, 43(4):1424–1433, 1977.
- [3] K. Kajiwara, M. Noumi, and Y. Yamada. *J. Phys. A*, 34(41):8563–8581, 2001.
- [4] K. Kajiwara and Y. Ohta. *Journal of the Physical Society of Japan*, 77(5):054004, 2008.
- [5] M. D. Kruskal, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, and A. Ramani. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5(3):273–280, 2000.
- [6] N. Nakazono. *arXiv preprint arXiv:2503.06013*, 2025.
- [7] N. Nakazono. *Physica Scripta*, 99(8):085214, 2024.
- [8] N. Okubo. *arXiv preprint arXiv:1704.05403*, 2017.
- [9] A. Ramani and B. Grammaticos. *Phys. A*, 228(1-4):160–171, 1996.
- [10] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, and K. M. Tamizhmani. *J. Phys. A*, 33(3):579–590, 2000.

Little μ -function, the Rogers-Ramanujan continued fraction and Schur's q -Fibonacci numbers

渋川 元樹 (北見工業大学・工)*¹

土見 怜史 (近畿大学・総合理工)*²

概 要

一般化 μ 関数 [ST] の退化極限である little μ 関数の特殊化についての諸公式を与える. この特殊化は, 特に I. Schur により導入された q -Fibonacci 数列の漸化式 [A], [S] を満たしており, 初期値がテータ関数で表されることを示す.

$\tau \in \mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}; \text{Im}(\tau) > 0\}$, $q := e^{2\pi i\tau}$ に対して

$$(x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j), \quad (x)_n = (x; q)_n := \frac{(x; q)_\infty}{(q^n x; q)_\infty} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$(x_1, \dots, x_r; q)_\nu = (x_1, \dots, x_r)_\nu := (x_1)_\nu \cdots (x_r)_\nu \quad (\nu \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}), \quad \binom{n}{j}_q := \frac{(q)_n}{(q)_{n-j}(q)_j},$$

$$G(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty}, \quad H(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty},$$

$$R(q) := q^{\frac{1}{5}} \frac{H(q)}{G(q)}, \quad \eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} (q; q)_\infty, \quad \theta(x; q) = \theta(x) := (x, q/x)_\infty$$

とおく. また適当な複素パラメータ $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, x$ に対して, q 超幾何関数を次で定める:

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s, q)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r+1} x^n,$$

$${}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, x \right) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n} \left((-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)^{s-r} x^n.$$

定義 1. $x, y \in \mathbb{C}^\times \setminus q^{\mathbb{Z}}$ について, little μ 関数 $l\hat{\mu}(x, y)$ を次で定める;

$$l\hat{\mu}(x, y) := \frac{iq^{-\frac{1}{8}}}{(x, q)_\infty \theta(qy)} {}_1\psi_2 \left(\begin{matrix} x \\ 0, 0 \end{matrix}; q, \frac{1}{y} \right).$$

定理 2. $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$M_n(x; q) := -iq^{\frac{1}{8}} l\hat{\mu}(x, q^{n-1}/x) = \frac{1}{(x, q)_\infty \theta(q^n/x)} {}_1\psi_2 \left(\begin{matrix} x \\ 0, 0 \end{matrix}; q, xq^{1-n} \right)$$

本研究は科研費 (JSPS KAKENHI Grant Number 21K13808, 25KJ0371) の助成を受けたものである.
キーワード: Zwergers' μ -function, q -hypergeometric function, q -Borel transform, q -Laplace transform, Rogers-Ramanujan continued fraction, q -Fibonacci numbers

*¹ 〒090-0015 北海道北見市公園町165 北見工業大学工学部

e-mail: g-shibukawa@mail.kitami-it.ac.jp

*² 〒657-8501 大阪府東大阪市小若江3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科

e-mail: tsuchimi@math.kindai.ac.jp

とする. この時,

$$\begin{aligned} M_0(x; q) &= G(q)H(q) \left(\frac{\theta(x^5q^2; q^5)}{\theta(xq)\theta(x^2)} + \frac{\theta(x^5q^3; q^5)}{\theta(x)\theta(x^2q)} \right), \\ M_1(x; q) &= G(q)H(q) \left(\frac{\theta(x^5q; q^5)}{\theta(x)\theta(x^2)} + \frac{\theta(x^5q^4; q^5)}{\theta(xq)\theta(x^2q)} \right) \end{aligned}$$

で, $M_n(x; q)$ は Schur's q -Fibonacci 数列の漸化式

$$F_n(q) - F_{n-1}(q) - q^{n-2}F_{n-2}(q) = 0$$

を満たす. また, $M_n(x^{-1}; q) = M_n(xq; q) = M_n(x; q)$ かつ

$$\begin{aligned} M_n(x; q) &= \frac{1}{(q^{n+1}/x, q)_\infty \theta(x)} {}_0\psi_1 \left(\begin{matrix} - \\ xq^{-n}; q, \frac{x^2}{q^n} \end{matrix} \right) \\ &= \frac{1}{(x, q^{1-n}/x)_\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - x^2q^{2k-n-1}) \frac{(x)_k}{(xq^{-n})_k} q^{\frac{k(5k-7)}{2}} (-x^3q^{-n})^k, \\ {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0; q, q^{n+1} \end{matrix} \right) &= \frac{(-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \theta(x)^2 \theta(y)^2}{y\theta(x/y)\theta(xy)} (M_{n-1}(x; q) - M_{n-1}(y; q)). \end{aligned}$$

特に非負整数 n に対して

$$M_n(x; q) = M_0(x; q)T_{n-1}(q) + M_1(x; q)S_n(q)$$

が成り立つ. ただし, $T_{-1}(q) := 1$, $S_0(q) := 0$, $T_0(q) := 0$ かつ

$$S_n(q) := \sum_{0 \leq 2j \leq n-1} q^{j^2} \binom{n-j-1}{j}_q, \quad T_n(q) := \sum_{0 \leq 2j \leq n-1} q^{j^2+j} \binom{n-j-1}{j}_q.$$

定理 3. 非負整数 m, n に対して,

$$\begin{aligned} &(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0; q, q^{n+1} \end{matrix} \right) M_m(x; q) - (-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0; q, q^{m+1} \end{matrix} \right) M_n(x; q) \\ &= T_{n-1}(q)S_m(q) - T_{m-1}(q)S_n(q). \end{aligned}$$

特に $m = n + 1$ の時,

$${}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0; q, q^{n+1} \end{matrix} \right) M_{n+1}(x; q) + q^n {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0; q, q^{n+2} \end{matrix} \right) M_n(x; q) = 1.$$

更に $n = 0$ の時,

$$G(q)M_1(x; q) + H(q)M_0(x; q) = \frac{1}{R(q)} - R(q) - \frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)} = 1.$$

参考文献

- [A] G. Andrews, *Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities*, The Fibonacci Quart. **42** (2004), no. 1, 3–19.
- [GIS] Kristina Garrett, Mourad E. H. Ismail and Dennis Stanton, *Variants of the Rogers-Ramanujan identities*, Adv. in Appl. Math. **23** (1999), no. 3, 274–299.
- [S] I. Schur, *Ein Beitrag zur Additiven Zahlentheorie*, Sitzungsber., Akad. Wissensch. Berlin. Phys.-Math. Klasse, (1917), pp. 302–321.
- [ST] Shibukawa, G. and Tsuchimi, S., *A generalization of Zwegers' μ -function according to the q -Hermite-Weber difference equation*, SIGMA, **19** (2023) 014 pp23.

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の結晶基底のパス表示とヤング図形との新奇な対応について

宮澤 壮太 (防衛大学校)*1

高木太一郎 (防衛大学校)*2

アフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ およびそのディンキン図の頂点集合 $I = \{0, 1\}$ から頂点 0 を除いたディンキン図に対する有限次元単純リー環 \mathfrak{sl}_2 を考える。 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル 1 最高ウェイト表現 $V(\Lambda_0)$ は、部分代数であるこの \mathfrak{sl}_2 の表現に制限することによって次のように \mathfrak{sl}_2 の最高ウェイト $\bar{\lambda}$ の有限次元既約表現 $V(\bar{\lambda})$ の直和に分解される [1]。

$$V(\Lambda_0) \downarrow_{\mathfrak{sl}_2}^{\widehat{\mathfrak{sl}}_2} = \bigoplus_{\bar{\lambda}, n \geq 0} V(\bar{\lambda})_n^{\oplus [V(\Lambda_0) : \bar{\lambda} + \Lambda_0 - n\delta]}.$$

ただし、 $V(\bar{\lambda})_n$ の添え字 n は虚ルート δ による次数を表し、引数 $\bar{\lambda}$ は $V(\Lambda_0)$ のウェイトとしては $\bar{\lambda} + \Lambda_0 - n\delta$ と解釈し、次数 n における $V(\bar{\lambda})$ の重複度を $[V(\Lambda_0) : \bar{\lambda} + \Lambda_0 - n\delta]$ とした。表現 $V(\Lambda_0)$ の諸性質はもちろん昔から良く知られており、重複度がゼロでないのは r を非負整数として $V(\bar{\lambda})$ が \mathfrak{sl}_2 の $2r + 1$ 次元既約表現となる $\bar{\lambda} = 2r\bar{\Lambda}_1$ の場合である。対応する分岐関数 $b_{2r\bar{\Lambda}_1}^{V(\Lambda_0)}(q)$ の定義とその 2 種類の表現は

$$b_{2r\bar{\Lambda}_1}^{V(\Lambda_0)}(q) := \sum_{n \geq 0} [V(\Lambda_0) : 2r\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_0 - n\delta] q^n = \frac{q^{r^2}(1 - q^{2r+1})}{(q; q)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2} Z_{2n,n}^{(r)}(q)}{(q; q)_{2n}},$$

となる。ここで $Z_{2n,n}^{(r)}(q)$ は次のような q 二項係数の差である。

$$Z_{2n,n}^{(r)}(q) = \begin{bmatrix} 2n \\ n-r \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} 2n \\ n-r-1 \end{bmatrix}_q.$$

一つ目の表現は次のように書ける。

$$\frac{q^{r^2}(1 - q^{2r+1})}{(q; q)_\infty} = \frac{q^{1+3+\dots+(2r-1)}}{\prod_{m=1, m \neq 2r+1}^{\infty} (1 - q^m)}.$$

整数の分割における minimal excludant [2] の概念によれば、このことは次を意味する。

命題 1. $V(\Lambda_0)$ を上記のように分解したとき、次数 n における \mathfrak{sl}_2 の $2r + 1$ 次元既約表現の重複度は、最小除外奇数が $2r + 1$ であるような n の分割の個数と一致する。

一方、講演者の一人は分岐係数の二つ目の表現を母関数とするヤング図形の組合せ論を考察することにより新しい partition statistic を定義し、それを *sqrnk* と名づけて以下の結果を得た [3]。

命題 2. 最小除外奇数が $2r + 1$ であるような n の分割の個数は、*sqrnk* が r であるような n の分割の個数と一致する。

*1 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校 理工学研究科

e-mail: em64040@nda.ac.jp

*2 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校 応用科学群 応用物理学科

e-mail: takagi@nda.ac.jp

量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の結晶 $B(\Lambda_0)$ のパスによる表示 [4] を用いた例で命題 1 を確認する。ここではパスを右から左への半無限のビット列で表し、次数 0 の ground state は 01 を繰り返した $\bar{p} = \cdots \bar{p}_4 \bar{p}_3 \bar{p}_2 \bar{p}_1 = \cdots 0101$ とする。一般の state は十分左側で \bar{p} と一致するようなビット列 $p = \cdots p_2 p_1$ で隣接する 01 ペアを繰り返しすべて無視すると偶数個のビットが残るものであり、特に残ったビットに 1 が含まれないものは柏原作用素 \tilde{f}_1 の作用に関する highest states となる。パス p のエネルギー $E(p)$ を energy function $H(a, b) = 1(a \geq b)$, $0(a < b)$ を用いて $E(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k \{H(p_{k+1}, p_k) - H(\bar{p}_{k+1}, \bar{p}_k)\}$ とすればこれが虚ルート δ による次数となる。例えば次数 4 では highest states となるパスは 5 つあり、そのうち \mathfrak{sl}_2 の 5 次元既約表現に対応するものが一つ ($\cdots 010000$)、3 次元既約表現に対応するものが二つ ($\cdots 0100101010$ および $\cdots 01001001$)、1 次元既約表現に対応するものが二つ ($\cdots 0100101011$ および $\cdots 01001101$) ある。一方、4 の分割のうち最小除外奇数が 5 であるものが一つ ($3+1$)、3 が二つ ($2+1+1$ および $1+1+1+1$)、1 が二つ (4 および $2+2$) であり、確かに個数が一致する。

結晶 $B(\Lambda_0)$ のパス表示において次数 n では highest states となるパスは全部で $p(n)$ (n の分割数) 個あるが、そのうち $2r+1$ 次元既約表現の highest states に対応するパス全体のなす集合を $\mathcal{P}_{n,r}^{\Lambda_0}$ とする。整数 n の分割はマス目の数が n のヤング図形で表されるが、組合せ論的操作によってヤング図形からパスを構成することによる 1 対 1 の対応を想定し、上述の 2 つの命題に対応して以下のような 2 つの問題を考える。

1. 最小除外奇数が $2r+1$ であるような n の分割全体のなす集合と、 $\mathcal{P}_{n,r}^{\Lambda_0}$ との間の組合せ論的な 1 対 1 の対応は存在するか？
2. sqrank が r であるような n の分割全体のなす集合と、 $\mathcal{P}_{n,r}^{\Lambda_0}$ との間の組合せ論的な 1 対 1 の対応は存在するか？

本研究における主結果は、後者の 1 対 1 の対応が存在することを示し、その組合せ論的操作を具体的に記述したことである。例えば上述の次数 4 の場合については以下のような対応となる。

$$\begin{aligned} \cdots 010000 &\longleftrightarrow 2+2, \\ \cdots 0100101010 &\longleftrightarrow 1+1+1+1, & \cdots 01001001 &\longleftrightarrow 3+1, \\ \cdots 0100101011 &\longleftrightarrow 2+1+1, & \cdots 01001101 &\longleftrightarrow 4. \end{aligned}$$

組合せ論的操作の詳細については講演にて報告する。また、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のもう一つのレベル 1 最高ウェイト表現 $V(\Lambda_1)$ に対応する結晶 $B(\Lambda_1)$ のパス表示についても同様の結果を得たので、これについても報告したい。

参考文献

- [1] 尾角正人, アフィンリー環の分岐関数のフェルミ公式予想について
日本数学会 2025 年度年会 無限可積分系セッション講演アブストラクト pp.45–50.
- [2] G.E. Andrews and D. Newman, *The minimal excludant in integer partitions*, Journal of Integer Sequences **23** (2020) Article 20.2.3.
- [3] T. Takagi, *A polynomial bosonic form of statistical configuration sums and the odd/even minimal excludant in integer partitions*, Annals of Combinatorics (accepted)
- [4] Kang, S-J., Kashiwara, M., Misra, K.C., Miwa, T., Nakashima, T., Nakayashiki, A.: *Affine crystals and vertex models*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (suppl. 1A), 449–484 (1992)

スケルトンRSKによる結晶グラフの分解

小林雅人 (神奈川大学)*

日本数学会 東京理科大学 2026年3月

タイプAの柏原結晶グラフ $\mathbf{B}(\lambda) = (\text{SSYT}(\lambda) \sqcup \{0\}, e_i, f_i, \rightarrow)$ (λ は分割)は自然に半標準盤の標準化による同値類に分解できる。各同値類は準結晶と呼ばれ、詳しく調べられるようになったのは最近10年ほどである。Maas-Gariépy (2023)は、 $\text{SSYT}(\lambda)$ のこの同値類の商集合をクリスタルスケルトンと呼びグラフ構造を導入した。さらに、彼女は準結晶が $\mathbf{B}(\lambda)$ の連結な部分グラフを成し、その生成関数は、ちょうど1つの基本的準対称関数に等しいことを証明した。Cain-Malheiro-Rodrigues-Rodrigues, Brauner-Corteel-Daugherty-Schilling などにも後続の研究 (両方とも2025年)がある。これを受け、小林は結晶スケルトン多項式を

$$\text{Sk}_\lambda(x) = \sum_{T \in \text{ST}(\lambda)} x^{\text{des } T}$$

と導入した。ただし、 $\text{ST}(\lambda)$ は形が λ の標準盤全体の集合、 $\text{des } T$ は T の降下列、 $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, $n = |\lambda|$ である。古典的なRSK対応

$$\text{Knuth arrays}_n \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{SSYT}(\lambda) \times \text{SSYT}(\lambda), \quad w \mapsto (P(w), Q(w))$$

はSchur関数の和の基本的準対称関数に関する展開

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(X) s_\lambda(Y) = \sum_{w \in S_n} F_{\text{des } w^{-1}}(X) F_{\text{des } w}(Y)$$

を導く。ただし、 X, Y は無変数の組を表す。もちろん、RSKを制限すれば、R, RS対応になる。

$$\begin{aligned} S_n^{\text{invol}} &\rightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda), \quad w \mapsto P(w), \\ S_n &\rightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda), \quad w \mapsto (P(w), Q(w)), \\ \mathbf{N}^n &\rightarrow \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{SSYT}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda), \quad w \mapsto (P(w), Q(w)) \end{aligned}$$

小林は、このスケルトン版も自然に成り立つことを示した。

定理 1

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} \text{Sk}_\lambda(x) &= \sum_{w \in S_n^{\text{invol}}} x^{\text{des } w}. \\ \sum_{\lambda \vdash n} \text{Sk}_\lambda(x) \text{Sk}_\lambda(y) &= \sum_{w \in S_n} x^{\text{des}(w^{-1})} y^{\text{des } w}. \\ \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(X) \text{Sk}_\lambda(y) &= \sum_{w \in S_n} F_{\text{des}(w^{-1})}(X) y^{\text{des } w}. \end{aligned}$$

キーワード：結晶グラフ、スケルトン、RSK対応

* 221-8686 横浜市神奈川区六角橋3-27-1 神奈川大学

e-mail: masato210@gmail.com

また、この q -類似も存在する。その特殊化では、新しい Mahonian 統計や次数付き Frobenius 特性関数が得られる。さらに、major index や charge, cocharge との関係も判明した。講演では、これらの詳細を紹介したい。

参考文献

- [1] S. Brauner, S. Corteel, Z. Daugherty, A. Schilling, Crystal skeletons and their axioms, [arXiv:2503.14782](#).
- [2] A. J. Cain, A. Malheiro, F. Rodrigues, I. Rodrigues, Structure of quasi-crystal graphs and applications to the combinatorics of quasi-symmetric functions, to appear. [arXiv:2302.07694](#).
- [3] M. Kobayashi, Crystal skeleton polynomials, in preparation.
- [4] F. Maas-Gariépy, Quasicrystal structure of fundamental quasisymmetric functions, and skeleton of crystals, [arXiv:2302.07694](#).

周期 TASEP のベータ方程式の解法と完全性の証明

代数曲線を用いた解法

岩尾 慎介 (慶大商)*

1 はじめに: 周期 TASEP とベータ方程式

(本講演の内容は、プレプリント [1] に基づく。)

1次元上に並んだ格子上を、区別のつかない粒子が一方方向に進む確率過程を完全非対称単純排他過程 (TASEP) という。ここでは、周期境界条件を課した TASEP (図 1) を考える。以下、粒子の個数を N 、系のサイズを L とする ($N < L$)。

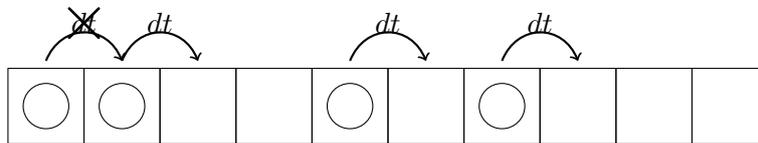


図 1 TASEP の状態の例。ここでは $L = 10$, $N = 4$ である。

このとき、系のとり得る状態は $\Omega = \binom{L}{N}$ 個ある。各状態は、以下の規則で遷移する。

- t を時刻とする。微小時間範囲 $[t, t + dt]$ の間に、各粒子は独立に、確率 dt で右のマスに移動する。ただし、自分の右のマスに他の粒子があるときは移動しない。

TASEP の挙動は、マスター方程式

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = M\psi(t) \quad (1)$$

($M \in \mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$: マルコフ行列, $\psi \in \mathbb{R}^{\Omega}$: 確率ベクトル) により記述される。したがって TASEP の挙動は M の固有値・固有ベクトルが求まれば完全に解析される。

しかし、系のサイズに比して M のサイズが大きすぎる、 M の具体形が複雑であるなどの理由から、標準的な線形代数の方法のみで M の固有値を分析するのは困難である。そこで、一般の L, N に対して統一的に M の固有値・固有ベクトルを求める手法として、**ベータ仮設法**がよく知られている。これは、**ベータ方程式**

$$\frac{z_i^N}{(1 - z_i)^L} = (-1)^{N+1} \prod_{j=1}^N z_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

* 〒223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉4丁目1-1 慶應義塾大学 日吉キャンパス

e-mail: iwao-s@keio.jp

本研究は科研費 (課題番号:22K03239,23K03056) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 82B23, 60j27, 82C22

キーワード: Bethe ansatz, periodic TASEP, completeness, algebraic curves and Riemann surfaces.

をみたく複素数の組 (z_1, \dots, z_N) を見つけることができれば、以下の手順で λ, ψ が構成できるというものである。(この具体形は本講演では用いない。)

x_1, \dots, x_N に依存しない定数 C_σ ($\sigma \in S_N$) をとることができて、

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma \in S_N} C_\sigma (1 - z_{\sigma(1)})^{x_1} \dots (1 - z_{\sigma(N)})^{x_N}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \frac{z_i}{1 - z_i}.$$

ただし、 $\psi(x_1, \dots, x_N)$ の変数 $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq L$ は、粒子の位置をあらわす。

したがって、TASEP の挙動を解析するにはベータ方程式 (2) の解を求めればよい。

2 TASEP ベータ方程式の解法

ベータ方程式 (2) の解を求める試みはさまざまな研究者によってなされてきた。ここでは、複素関数論を援用した数値解析的な方法が多く用いられてきたが、Prolhac[2, 3] の一連の仕事により、リーマン面を用いた純理論的な手法も発達した。

本研究では Prolhac の研究を推し進め、ベータ方程式 (2) を代数幾何学的に再定式化する。この定式化には、古典的によく知られているリーマン面と \mathbb{C} 上の代数曲線の等価性を用いる。うれしいことに、再定式化の結果、ベータ方程式 (2) は非常に初等的な「平面曲線と直線の交点の座標を求める問題」に帰着してしまう。したがってこの方法で、ベータ方程式 (2) のすべての解を得ることが可能となる。

系として、TASEP ベータ仮設法の**完全性問題**を (パラメータが generic な場合に) 肯定的に解決することができた。これは、「ベータ方程式 (2) の解がもとのマスター方程式 (1) の解をすべて尽くすか」という問いで、ベータ仮設法における基本的な問題である。(ベータ方程式の完全性は多くの研究者が成り立つと認めているものの、数学的に厳密な証明となると、(私 (と共同研究者) の知る限り) 載っている文献は無かったようである。)

$L, N \rightarrow \infty$ における TASEP の挙動を考える際には、用いられるリーマン面の種数と連結成分の個数を L や N の関数としてあらわす明示式が重要になる。時間があれば、これらの不変量の計算の方法についても紹介したい。

参考文献

- [1] S. Iwao and K. Motegi, "Bethe roots for periodic TASEP and algebraic curve," arXiv:2504.19690.
- [2] S. Prolhac, Riemann surfaces for KPZ with periodic boundaries, SciPost Phys. 8, 008 (2020).
- [3] S. Prolhac, Riemann surface for TASEP with periodic boundaries, J. Phys. A: Math. Theor. 53, 445003 (2020).