

ベルグマン核に関するラマダノフ予想

平地 健吾 (東京大学)*

1. はじめに

よく知られた未解決の予想は数学の発展に刺激を与える。予想の帰結が重要でなくても、問題解決への努力が興味深い理論を生み出すことがある。そのような多変数関数論の予想に

ラマダノフ予想¹: ベルグマン核が対数項をもたないのは球の場合に限る

がある。正確な主張は次の章で述べるように色々な解釈が可能である。2次元領域の場合に予想が正しいことが30年以上前にGraham [G2]によって示されている。これは私が大学院生だった頃で、しばらくは予想の高次元での解決を一つの目標としてベルグマン核の対数項について研究を続けていた[H2]。多くの人がこの予想は正しいと信じていたのであるが、Englis-Zhang [EZ]によって3次元上での(局所的な)ラマダノフ予想の反例が構成されてしまった。また最近Curry-Ebenfelt [CE]によって2次元の場合に(強い形の)ラマダノフ予想が全く別のアイディアで広い範囲の領域について示された。これに刺激を受け、久しぶりにこの問題に立ち戻り、高次元でのアプローチを考え直すことにした。この講演では私が体験したラマダノフ予想の進展についてお話する。

2. 様々なラマダノフ予想

核関数の定義と性質を復習してラマダノフ予想のいくつかのバージョンを述べる。

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を C^∞ 境界をもつ有界強擬凸領域とする。強擬凸性の定義は3章と5章で与えるが、(局所的には) 球を少しだけ変形した領域と思っていればよい。 Ω 上の L^2 正則関数のなすヒルベルト空間 $A^2(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ の正規直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を選び

$$B_\Omega(z) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^2$$

とおく。この級数は広義一様収束し実解析的関数を定義する; また和は $\{f_j\}$ の選び方によらない。 B_Ω を Ω のベルグマン核という。この定義では Ω 上のルベグ測度を使って L^2 内積を定義したが、複素多様体上でも正則 $(n, 0)$ -形式 f, g に対して

$$(f, g) := (-i)^n \int_{\Omega} f \wedge \bar{g}$$

により内積を定義すれば、同様にベルグマン核を (n, n) -形式として自然に定義することができる。

本研究は科研費(課題番号:15H02057)の助成を受けたものである。

*〒157-8914 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

¹ この予想はFeffermanの定理を見れば自然に思いつくものであるが、名前がある方が便利なのでその主張を含む論文[R]を引用してラマダノフ予想と呼ばれることが多い。

単位球 $\Omega_0 = \{|z|^2 < 1\}$ においては

$$B_{\Omega_0}(z) = c_n(1 - |z|^2)^{-n-1}, \quad c_n = n!/\pi^n,$$

である. 一般の強擬凸領域では次のような Fefferman の漸近展開が知られている: ρ を Ω の C^∞ 定義関数 $\Omega = \{\rho > 0\}$ とすると

$$B_\Omega(z) = \varphi(z)\rho(z)^{-n-1} + \psi(z)\log \rho(z),$$

ここで $\varphi, \psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (境界までこめて C^∞) である. 球の場合にはなかった対数項が現れる. さらに球を変形してベルグマン核の変分を計算すると対数項が実際に現れることがわかる. 自然に次の予想を思いつく.

ラマダノフ予想. ベルグマン核の対数項 ψ が消えるのは領域 Ω が球 Ω_0 と双正則同値である場合に限る.

この予想には簡単な反例がある. まずベルグマン核の漸近展開は局所化可能であることに注意する. すなわち二つの強擬凸領域 $\Omega, \tilde{\Omega}$ が共通の境界点 $p \in \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}$ の近傍で一致すれば $B_\Omega(z) - B_{\tilde{\Omega}}(z)$ は p の近傍での C^∞ 関数に拡張される. とくに漸近展開の対数項は $\text{mod } O(\rho^\infty)$ で一致する. 次にベルグマン核は双正則不変性をもつことに注意する. これは (n, n) -形式として定義から明らかである. とくに $\partial\Omega$ が spherical, すなわち $\partial\Omega_0$ と局所的に正則同値² であれば対数項は消える.

境界が spherical であるが単連結でない (とくに球と双正則同値でない) 領域の例が知られている. この様な領域では対数項が消える. そこで予想を修正する.

局所的ラマダノフ予想. ベルグマン核の対数項が境界点 $p \in \partial\Omega$ の近傍で 0 であれば $\partial\Omega$ は p の近くで spherical である.

これが通常ラマダノフ予想とよばれるものである. $n = 2$ の場合は Graham [G2] により肯定的に解決された. 高次元の場合, 複素多様体の領域を考えると反例があることが Englis-Zhang [EZ] によって示された; これについては4章で説明する. この例では $\psi = 0$ が全体で成り立つが領域はスタインではない (とくに $\mathbb{C}^n$ の領域にはならない). この点に注意して予想を多様体の場合に拡張しておく.

大域的ラマダノフ予想. スタイン多様体の強擬凸領域のベルグマン核の対数項が全体で消えるのは境界が spherical である場合に限る.

Curry-Ebenfelt [CE] は2次元の多くの領域で $\psi = 0$ より弱い $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ から $\partial\Omega$ が spherical であることを導いた. そこで仮定を弱めた予想を考える.

強い大域的ラマダノフ予想. スタイン多様体の強擬凸領域のベルグマン核の対数項の境界値 $\psi|_{\partial\Omega}$ が全体で消えるのは境界が spherical である場合に限る.

この主張では $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ が全体で満たされることが重要である. Spherical でないが $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ が局所的に成り立つ境界の例は全ての次元で作ることができる [G1].

² 正確に述べると $p \in \partial\Omega$ が spherical であるとは, p の開近傍 U と $p_0 \in \partial\Omega_0$ の開近傍 U_0 の間の微分同相 $F: U \rightarrow U_0$ で $F(p) = p_0$, $F(U \cap \Omega) = V \cap \Omega_0$, $F|_{U \cap \Omega}$ は正則であるものが存在するときをいう.

3. 複素モンジュ・アンペール方程式

2次元領域のときに局所的ラマダノフ予想が正しかったのは実3次元のCR幾何の特殊性による。その様子を簡単に説明する。

Fefferman のアイディアに従ってベルグマン核を複素モンジュ・アンペール方程式の解を用いて近似することを考える。 Ω の定義関数 u に対して方程式

$$(-1)^n \det \begin{pmatrix} u & \partial u / \partial z^j \\ \partial u / \partial \bar{z}^k & \partial^2 u / \partial z^j \partial \bar{z}^k \end{pmatrix} = 1 \quad \text{on } \Omega$$

を考える。ここで j, k は 1 から n を動き、 $n+1$ 次正方行列の行列式を表す。この方程式の解 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{n+2-\epsilon}(\bar{\Omega})$ が一意的に存在することが Cheng-Yau により示されている。³ 単位球においては $u = 1 - |z|^2$ であり、ベルグマン核と u のベキは一致する⁴：

$$B(z) = c_n u(z)^{-n-1}.$$

一般の領域での両辺のずれ $B(z) - c_n u(z)^{-n-1}$ を詳しく調べる。 u は境界で次の形の漸近展開をもつ：

$$u \sim \rho + \rho \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \cdot (\rho^{n+1} \log \rho)^j, \quad \rho, \eta_j \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

対数項が沢山現れて複雑そうであるが、本質的なのは初項 η_1 のみである。

定理 3.1 ([G1]) 境界点 $p \in \partial\Omega$ の近傍 $U \subset \mathbb{C}^n$ を考える。 $\eta_1|_{U \cap \partial\Omega} = 0$ であれば $U \cap \bar{\Omega}$ において $\eta_j = O(\rho^\infty)$, $j \geq 1$, が成り立つ。とくに $u \in C^\infty(U \cap \bar{\Omega})$ である。

解 u は大域的に決定されるが $u^{-n-1} = \varphi_0 \rho^{-n-1} + \varphi_1 \log \rho + O(\rho^{n+1} \log \rho)$ の mod $C^\infty(\bar{\Omega})$ の特異性は局所化可能である。放物型不変式論 [H2] を用いると

$$B(z) - c_n u(z)^{-n-1} = \begin{cases} O(\rho^{-n+1}), & n \geq 3 \\ O(\rho \log \rho), & n = 2 \end{cases}$$

までは簡単に示すことができる。右辺を記述するには境界の不変量を導入する必要がある。ここでは Moser による標準型を使う。

$\mathbb{C}^n$ 内の強疑凸超曲面 M の点 p で $z = 0$ となる局所座標系 z をうまく選べば M は

$$2 \operatorname{Re} z_n - |z'|^2 + h(z', \bar{z}', \operatorname{Im} z_n) = 0, \quad h = O(|z|^3), \quad (3.1)$$

ここで $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$, という形であらわすことができる(このような座標が存在するとき M は p で強疑凸であると定義しても良い; ジーゲル領域 $\{2 \operatorname{Re} z_n > |z'|^2\}$ は球と双正則であり、上式は M が p において球面で 2 次まで近似できることを主張している)。 h を出来る限り小さくすることを考える。

$n \geq 3$ のときには $h = O(|z|^4)$ が最良であり、次のように書くことができる：

$$h = \sum_{i,j,k,l=1}^{n-1} A_{ij\bar{k}\bar{l}} z_i z_j \bar{z}_k \bar{z}_l + O(|z|^5).$$

³ これから Ω の完備ケーラー・アインシュタイン計量 $-i\partial\bar{\partial} \log u$ が与えられるが、今は使わない。

⁴ Ramadanov [R] はこの等式が成り立つのは Ω が球と双正則同値であるときに限ることを示した。

さらに $A_{2,2} = (A_{ij\bar{k}\bar{l}})$ とおくとトレース $\text{tr } A_{2,2} := \sum_{k=1}^{n-1} A_{kj\bar{k}l}$ が消えるように正規化可能である. $A_{2,2}$ が M の各点で消えれば M は spherical になることが知られている. 一方 $n = 2$ の場合 $\text{tr } A_{2,2} = 0$ は $A_{2,2} = 0$ と同値であり, さらに

$$h = 2 \text{Re} (A_{4,2} z_1^4 \bar{z}_1^2) + O(|z|^7)$$

の形に正規化が可能である. この場合も $A_{4,2}$ が各点で消えれば M は spherical になる.

点 $p \in M$ を動かす時, $A_{2,2}$ と $A_{4,2}$ は M 上のテンソル場と見ることができる. これらのテンソルのノルムを用いると

$$B(z) - c_n u(z)^{-n-1} = \begin{cases} c'_n \|A_{2,2}\|^2 \rho^{-n+1} + O(\rho^{-n+2}), & n \geq 3 \\ c'_2 |A_{4,2}|^2 \rho \log \rho + O(\rho^2 \log \rho), & n = 2 \end{cases} \quad (3.2)$$

と表すことができる. ここで c'_n は 0 でない定数である. どちらの場合も右辺の係数が消えると境界は spherical になる.

Graham は (3.2) を用いて 2 次元の局所的ラマダノフ予想を次のように解決した:

定理 3.2 ([G2]) 2 次元強擬凸領域のベルグマン核の対数項 ψ が $p \in \partial\Omega$ の近傍で $\psi = O(\rho^2)$ を満たせば $\partial\Omega$ は p の近くで spherical である.

証明. 2 次元の場合, (3.2) の両辺の対数項を比較すると

$$\psi = -3c_2 \eta_1 + c'_2 |A_{4,2}|^2 \rho + O(\rho^2)$$

をえる. $\psi = O(\rho)$ であればとくに $\eta_1|_{\partial\Omega} = 0$ である. よって定理 3.1 により $\eta_1 = O(\rho^\infty)$. これを上式に代入すると

$$\psi = c'_2 |A_{4,2}|^2 \rho + O(\rho^2).$$

従って $\psi = O(\rho^2)$ から $|A_{4,2}|^2 = 0$ が導かれる. これは $\partial\Omega$ が spherical であることを示している. $\square$

$n \geq 3$ の場合は (3.2) の右辺は対数項の前で止まっている. さらに詳しい解析をして対数項を取り出す事も可能であるが [H1], 次章の反例が示すように, この方針で局所的ラマダノフ予想が解決できる訳ではない.

4. 局所的ラマダノフ予想の反例

Englis-Zhang [EZ] はエルミート対称空間を用いて 3 次元以上の領域での局所的ラマダノフ予想の反例を構成した. ここではリーマン・ロッホの定理を用いれば, より一般的に $\psi = 0$ となる領域を構成することができることを説明する.

$\pi: L \rightarrow X$ を $n-1$ 次元コンパクト複素多様体 X 上の正の複素直線束とする. これは L の双対を (L^*, h) とするとき (h は L^* のエルミート計量), 領域

$$\Omega = \{v \in L^* : |v|_h < 1\}$$

が強擬凸であることと同値である. Ω の定義関数として $\rho(v) = -\log |v|_h^2$ を選ぶ.

自然数 $m > 0$ に対して $H^0(X, L^{\otimes m})$ に L の計量と曲率 $i\partial\bar{\partial}\rho$ の定める X のケーラー形式 ω を用いて内積を定義する. その正規直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{d_m}$ のノルムの和により $L^{\otimes m}$ のベルグマン核

$$B_m(x) = \sum_{j=1}^{d_m} |f_j(x)|_h^2 \in C^\infty(X)$$

を定義する. B_m は $m \rightarrow \infty$ のとき各点で発散し, 漸近展開 (Tian-Yau-Zelditch-Catlin 展開などと呼ばれる)

$$B_m(x) \sim m^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{-j}$$

を持つ. ここで $a_j \in C^\infty(X)$ は ω の曲率の微分の不変式を用いて記述できる (X, ω) の局所不変量である. その具体的な計算は大変であるが, 積分だけなら簡単に計算することができる. 左辺の積分は $\dim H^0(X, L^{\otimes m})$ であり (m が大きいとき) m の多項式 (L のヒルベルト多項式) になる. よって右辺の積分は最初の $n-1$ 項を除いて 0 になる. とくに $L \rightarrow X$ が等質であれば $a_j(x)$ は定数関数となり, 積分が消えるという条件から

$$a_j(x) = 0, \quad j \geq n,$$

が導かれる.

次に Ω の体積要素 $dV = i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge (i\partial\bar{\partial}\rho)^n$ に関するベルグマン核 B_Ω^{dV} を考える. Ω の S^1 対称性を用いると Fefferman の漸近展開は X 上の関数 $a'_j(x)$ を用いて

$$B_\Omega^{dV}(v) \sim \rho^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^n a'_j(x) \rho^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} a'_j(x) \rho^j \log \rho \right), \quad \rho \rightarrow 0,$$

と書くことができる. $B_\Omega^{dV}(v)$ の複素化 $B_\Omega^{dV}(v, e^{i\theta}v)$ の θ に関するフーリエ展開を考えると a'_j は a_j の定数倍であることが分かる. よって $L \rightarrow X$ が等質であれば B_Ω^{dV} の対数項は消える.

この例では dV の選び方が特殊であり局所的ラマダノフ予想の反例であるとは言えない. 一般に Ω の複素構造のみから決まる (n, n) -形式としてのベルグマン核 B_Ω と B_Ω^{dV} の間に簡単な変換則はない. しかしケーラー形式 ω がアインシュタインであると仮定すると B_Ω を B_Ω^{dV} の微分を用いて表すことができる. とくに B_Ω^{dV} が対数項を持たなければ B_Ω もそうであることが分かる⁵.

ケーラー形式が ω がアインシュタインかつ $\partial\Omega$ が spherical でない例があることを確かめておく必要がある. 例えば $n = k(l-k)$ 次元グラスマン多様体

$$X_k = U(l)/U(k) \times U(l-k), \quad 1 < k \leq l-k,$$

を考え, L^* として X_k の標準束 $((n, 0)$ -形式のなす直線束) を選ぶ. $k > 1$ のときには $\partial\Omega$ が spherical でないことが spherical 曲面の分類定理と $\partial\Omega$ のコホモロジーの計算の比較で示すことができる [EZ].

⁵ 証明は未発表であるが道具はすべて [H3] に含まれている. 表現論を用いた少し条件の付いた証明は [LMZ] にある.

5. CR 多様体の幾何

大域的ラマダノフ予想を考えるには CR 多様体の幾何についての少しの準備が必要である. $M = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) = 0\}$ を実超曲面, J を $\mathbb{C}^n$ の複素構造とすると, $H := TM \cap JTM$ はランク $2n-2$ をもつ. J の $\pm i$ 固有空間への直和分解を $\mathbb{C}H = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ とすれば $T^{1,0} = \mathbb{C}TM \cap T^{1,0}\mathbb{C}^n$ が成り立つ. $T^{1,0}$ は M の CR 構造とよばれる. $T^{1,0}$ には $L_\rho(Z, W) := \partial\bar{\partial}\rho(Z, \bar{W})$ によりレビ形式とよばれるエルミート形式が定まる. L_ρ が正定値になるとき M は強擬凸であると定義する (これは表示 (3.1) の存在と同値). 別の定義関数 $\hat{\rho} = e^u \rho$ に対してレビ形式は $L_{\hat{\rho}} = e^u L_\rho$ となるのでレビ形式の共形族は定義関数の選び方によらない. よって CR 幾何は共幾何の類似と見ることができる.

定義関数 (あるいはレビ形式) を固定すると M に接した実ベクトル場 ξ で $\partial\bar{\partial}\rho(\xi, V)$, $\forall V \in TM$, $(JT)\rho = 1$ を満たすものが一意に定まる (Reeb ベクトル場とよばれる). このとき ξ は直和分解

$$\mathbb{C}TM = \mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0} \oplus T^{0,1} \quad (5.1)$$

を定める. $T^{1,0}$ の局所フレーム Z_α , $\alpha = 1, \dots, n-1$, と ξ を用いて直和分解に則した局所フレーム $\xi, Z_\alpha, \bar{Z}_\alpha$ を定め, その双対フレームを $\theta, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha$ とおく. M 上のテンソル束をこれらのフレームについての上下のインデックスを用いて表すことにする. 例えば

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} := (T^{1,0})^* \otimes (T^{1,0})^*, \quad \mathcal{E}_\alpha^{\bar{\beta}} := (T^{1,0})^* \otimes T^{0,1}$$

またレビ形式 $h_{\alpha\bar{\beta}} = L_\rho(Z_\alpha, \bar{Z}_\beta)$ とその逆行列 $h^{\alpha\bar{\beta}}$ を用いてインデックスを上げ下げする. 上の 2 つのテンソル束は次のような対応で同型になる:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} \ni f_{\alpha\beta} \mapsto f_\alpha^{\bar{\beta}} := f_{\alpha\bar{\gamma}} h^{\bar{\gamma}\bar{\beta}} \in \mathcal{E}_\alpha^{\bar{\beta}}.$$

テンソルの対称化を $f_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha})$ とおき, $\mathcal{E}_{(\alpha\beta)}$ で対称テンソルのなす $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ の部分束を表す. §3 で定義した $A_{4,2}$ は $\text{tr}^2 A_{4,2}$ と同一視すれば $\mathcal{E}_{(\alpha\beta)}$ の断面, $A_{2,2}$ は $\mathcal{E}_{(\alpha\beta)(\bar{\gamma}\bar{\delta})}$ の断面と見ることができる.

共形幾何ではリーマン計量を固定するごとに定まるレビ-チビタ接続が用いられる. 一方, CR 幾何ではレビ形式 L_ρ を一つ固定すると分解 (5.1) と L_ρ を保つ接続 ∇ がトーションに関する正規化で一意的に定義される (田中-Webster 接続とよばれる). 以下では $\nabla_\alpha = \nabla_{Z_\alpha}$ と書き, ∇ のトーションを $\tau_{\alpha\beta} := h_{\alpha\bar{\gamma}} d\bar{\theta}^\gamma(\xi, Z_\beta)$ とおく (これは一般には消えない).

6. 大域的ラマダノフ予想: 2次元の場合

Curry-Ebenfelt による 2次元の強い大域的ラマダノフ予想についての結果を説明する. 以下では強擬凸領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) > 0\}$ の境界を $M = \partial\Omega$ おき, 対数項の境界値を $\psi_0 := \psi|_{\partial\Omega}$ と書く.

定理 6.1 (Curry-Ebenfelt [CE]) 強擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ が $\psi_0 = 0$ を満たすとする. 境界 M の近傍で定義された正則ベクトル場 V で

$$\text{Re}(V\rho)^2 > 0 \quad (6.1)$$

を満たすものが存在すれば, M は spherical である.

例えば $\rho = 1 - |z|^2$, $V = \sum_{j=1}^n z^j \partial_{z_j}$ とすれば境界 S^3 上では $(V\rho)^2 = 1$ となり (6.1) を満たす. この条件は領域を少し変形しても保たれる.

定理 6.1 は次のような不思議な積分等式から導かれる: 正則ベクトル場 V に対してそのハミルトン・ポテンシャルを $f = \overline{iV\rho}$ で定義すると

$$\int_M f^2 |A_{4,2}|^2 = 0. \quad (6.2)$$

とくに $\text{Re}(f^2) > 0$ であれば $|A_{4,2}^0|^2 = 0$ となり M が spherical になる.

これは3次元に特有の事実である. その状況を説明するために一般の次元で強擬凸超曲面 $M \subset \mathbb{C}^n$ を考える. 正則ベクトル場 V のハミルトン・ポテンシャル f は M 上で2階の微分方程式

$$D_0 f := \nabla_\alpha \nabla_\beta f + i(n-1)\tau_{\alpha\beta} f = 0$$

を満たす. D_0 の像は対称テンソルであり $D_0: \mathcal{E} := C^\infty(M, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\alpha\beta)}$ と見ることができる⁶. 逆に M 上の関数 f が $D_0 f = 0$ を満たせば M に沿って定義された (M に接しているとは限らない) ベクトル場

$$V_f := \bar{f}(JT - iT) - \nabla^\alpha \bar{f} \cdot Z_\alpha$$

は M の強擬凸側の近傍へ正則ベクトル場として拡張できる.

$n = 2$ の場合には D_0 の随伴作用素 $(D_0)^*: \mathcal{E}_{(\alpha\beta)} \rightarrow \mathcal{E}$ を用いて

$$\psi_0 = (D_0)^* A_{4,2} \quad (6.3)$$

と表すことができる (本当は定数倍の違いがあるが気にしない). (6.2) は $D_0 f = 0$ と $(D_0)^* A_{4,2} = 0$ から巧みな部分積分により導かれる.

ここで用いた D_0 と D_0^* はCR構造の変形複体に現れる作用素である.

$$\begin{array}{ccccc} & & D_1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{D_0} & \mathcal{E}_{(\alpha\beta)} & \xrightarrow{D_1} & \mathcal{E}_{(\alpha\beta)} & \xrightarrow{D_0^*} & \mathcal{E} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & \xrightarrow{\bar{D}_0} & \mathcal{E}_{(\bar{\alpha}\bar{\beta})} & \xrightarrow{\bar{D}_1} & \mathcal{E}_{(\bar{\alpha}\bar{\beta})} & \xrightarrow{\bar{D}_0^*} & \mathcal{E} \end{array}$$

ψ_0

D_1 (と斜めの矢印) は4階の微分作用素である. 各バンドルに適切な直線束 $(TM/H)^{\otimes m}$ を掛けて重みをつければ, ここに現れるすべての微分作用素は $SU(2, 1)$ の一次分数変換としての $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ への作用に関して不変である. 球面 S^3 の場合にはこれは Bernstein-Gelfand-Gelfand 複体として知られている. ψ_0 の一次変分 $\dot{\psi}_0$ が変形複体の3つの作用素の合成 (どの合成でもよい) で書けるため, ψ_0 の解析が簡単になる.

この複体は幾何的には次のように解釈できる. 実数値の $f \in \mathcal{E}$ に対して V_f (の実部) で生成されるフロー F_t で M を動かし曲面の族 $M_t := F_t(M) \subset \mathbb{C}^2$ を考える. M_t に

⁶ 行儀が悪いが, 誤解の恐れがないときにはベクトル束とその断面の空間を同じ記号で書く.

対する $A_{4,2}$ と ψ_0 を順に $A_{4,2}^t, \psi_0^t$ と書けば

$$\dot{A}_{4,2} := \frac{d}{dt} A_{4,2}^t \Big|_{t=0} = D_1 D_0 f, \quad \dot{\psi}_0 := \frac{d}{dt} \psi_0^t \Big|_{t=0} = D_0^* D_1 D_0 f,$$

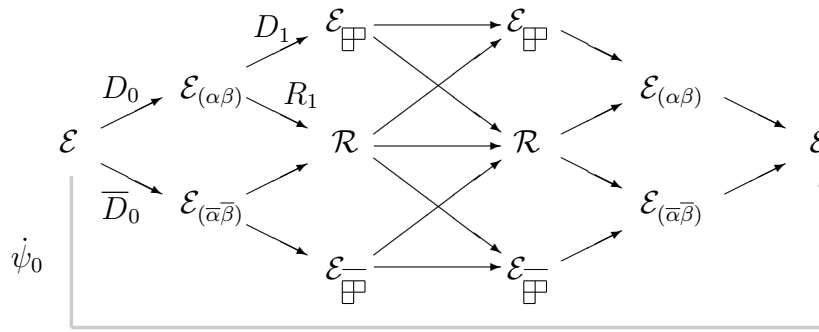
とくに $\dot{\psi}_0 = D_0^* \dot{A}_{4,2}$ が成り立つ; これは (6.3) の一次変分である. 次元が高くなると, このような $\dot{\psi}_0$ の分解は成り立たないため, この議論の一般化は期待できない.

7. 大域的ラマダノフ予想: 高次元以上の場合

$n \geq 3$ の場合でも変形複体を用いて ψ_0 を調べることができる. 少なくとも単位球の小さな変形には大変有効である.

定理 7.1 (準備中)⁷ 単位球 Ω_0 に C^∞ 位相で十分近い $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ に対して, $\psi_0 = 0$ となるのは $\partial\Omega$ が spherical であるときに限る.

2次元の場合は定理 6.1 に含まれているので以下では $n \geq 3$ とする. 例えば $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ での変形複体は $SU(3, 1)$ 不変な微分作用素のなす次の図式⁸である:



ここで $\mathcal{E}_{\square}$ はヤング図形 $\square$ の対称性をもつ $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}$ の部分空間である (この記法を使うと $\mathcal{E}_{(\alpha\beta)} = \mathcal{E}_{\square}$ とも書ける). また $\mathcal{R}$ は $A_{2,2}$ の対称性をもつ trace-free テンソルの空間である. この図式に現れる微分作用素の合成で対数項の一次変分 $\dot{\psi}_0$ を表すことはできない. しかし表現論を使うと S^{2n-1} での $\dot{\psi}_0$ を具体的に書くことができる. $\mathcal{E}(m)$ を $\mathbb{C}(TM/H)^{\otimes m}$ の断面の空間とすると, $\dot{\psi}_0$ (の複素化) はスカラー倍を除いて唯一の $SU(n, 1)$ 不変線型作用素

$$\mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{E}(-n-1)$$

として特徴づけができる. このような作用素の例は具体的に

$$P_n = \mathcal{L}_{-n-1} \mathcal{L}_{-n+1} \cdots \mathcal{L}_{n-1} \mathcal{L}_{n+1}, \quad (7.1)$$

ここで $\mathcal{L}_\lambda = \nabla_\alpha \nabla^\alpha - \nabla^\alpha \nabla_\alpha + i\lambda T$, と書くことができるので $f \in \mathcal{E}(1)$ に対して $\dot{\psi}_0(f) = c \operatorname{Re} P_n f$ となる. 幸い, この作用素については詳しい解析の結果が知られている.

⁷ 講演までに論文が完成していない可能性がある.

⁸ ただし $\dot{\psi}_0$ に対応するグレーの長い矢印を除く.

定理の証明には線型化モデルだけでなく CR 構造のモジュライ空間を調べる必要がある. CR 構造の変形を $T^{1,0} \subset \mathbb{C}H$ の変形として捉える. フレーム Z_α と (小さな) 対称テンソル $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}_{(\alpha\beta)}$ を用いて新しい CR 構造を

$$H_\varphi^{1,0} = \text{span}\{Z_\alpha + \varphi_\alpha^{\bar{\beta}} \bar{Z}_\beta\}$$

で定義する. 接触構造 H を固定した CR 構造の小さな変形は全てこの形で与えられる. $H_\varphi^{1,0}$ が複素多様体に埋め込まれた超曲面として実現可能であるための必要十分条件は可積分性 (複素多様体の変形と同様に)

$$\partial_b \varphi - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0 \quad (7.2)$$

で与えられる. ここで $\partial_b \varphi = \nabla_{[\alpha\varphi\beta]\gamma} := \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \varphi_{\beta\gamma} - \nabla_\beta \varphi_{\alpha\gamma})$ である. $M = S^{2n-1}$ の可積分 CR 構造の空間を

$$\mathcal{J} = \{\varphi_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}_{(\alpha\beta)} : \varphi \text{ は (7.2) を満たす}\},$$

(M, H) の接触変換を

$$\text{Diff}_C = \{F: M \rightarrow M, F \text{ は } F_*H = H \text{ を満たす微分同相}\}$$

とおくと, $F \in \text{Diff}_C$ の $\varphi \in \mathcal{J}$ への作用 $F_\# \varphi$ を $H_{F_\# \varphi}^{1,0} = F_* H_\varphi^{1,0}$ で定義することができる. φ と $F_\# \varphi$ は同じ CR 構造を定義する. よって Diff_C の軌道からよい大表元を選ぶことを考える. 可積分条件 (7.2) は非線形なので $\mathcal{J}$ の 0 での接空間

$$T_0 \mathcal{J} = \{\varphi_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}_{(\alpha\beta)} : \partial_b \varphi = 0\}$$

を考える. 複素構造の変形に対する倉西の理論の類似として 0 の近くでの全単射 (より正確には Folland-Stein ノルムに関するバナッハ多様体としての同型)

$$K: T_0 \mathcal{J} \xrightarrow{\cong} \mathcal{J}$$

が得られる. さらに球面では $D_0 \mathcal{E} = \ker \partial_b$ が成り立つので, 0 の近くでの局所的な全射

$$K \circ D_0: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{J}$$

が得られる. これは CR 構造の小さな変形は $\mathcal{E}$ を用いてパラメータ付できることを示している.

定理 7.2 (スライス定理: Bland-Duchamp)⁹ $\ker D_0 \subset \mathcal{E}$ に直交する $\mathcal{E}$ の部分空間 $\mathcal{N}$ で次の条件を満たすものが存在する. 小さな $\varphi \in \mathcal{J}$ に対しては id に近い $F \in \text{Diff}_C$ と小さな $f \in \mathcal{N}$ を用いて $F_\# \varphi = K(D_0 f)$ と表すことができる. さらに組 (F, f) は S^{2n-1} の CR 自己同型 $SU(n, 1)$ の作用を除いて一意である. とくに $\varphi \in \mathcal{J}$ が S^{2n-1} の標準的 CR 構造と同型である必要十分条件は $f = 0 \in \mathcal{N}$ である.

⁹ この定理は 1992 年に [BD1] でアナウンスされたが証明は未完である. Bland 氏よりノートを譲り受け [BD2] を参考にして私が不足部分を補うことになった. 実際には「小さな」と「近い」は Folland-Stein ノルムを使って正確に述べる必要がある.

f が定める CR 構造 $K(D_0f)$ に関する ψ_0 を $\psi_0(f)$ とおく. ψ_0 は (非線形) 偏微分作用素

$$\psi_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}} := C^\infty(M, \mathbb{R})$$

とみなすことができる. これを標準形 $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$ の空間に定義域を制限して考える. $0 \in \mathcal{N}$ において微分を考えると $\dot{\psi}_0$ は (7.1) の不変作用素 P_n を用いて

$$\operatorname{Re} P_n: \mathcal{N} = T_0\mathcal{N} \rightarrow T_0\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$$

で与えられる. $\mathcal{N}$ と $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ に Folland-Stein ノルムに関するバナッハ多様体の構造を与えると, $\operatorname{Re} P_n$ が連続な逆作用素を持つことが示される. よって逆写像定理により ψ_0 の $\mathcal{N}$ への制限は 0 の近くで同型となり $\psi_0(f) = 0$ から $f = 0$ が導かれる.

参考文献

- [BD1] J. Bland, T. Duchamp: Contact geometry and CR-structures on spheres, Topics in complex analysis (Warsaw, 1992), 99-113, Banach Center Publ., 31, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1995.
- [BD2] J. Bland, T. Duchamp: The space of Cauchy-Riemann structures on 3-D compact contact manifolds, J. Differential Geom. 88 (2011), 189-230.
- [CE] S. Curry, P. Ebenfelt: Bounded strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^2$ with obstruction flat boundary, to appear in Amer. J. Math. [arXiv:1803.09053](#); Part II, to appear in Adv. Math. [arXiv:1810.05362](#)
- [EZ] M. Engliš, G. Zhang: Ramadanov conjecture and line bundles over compact Hermitian symmetric spaces, Math. Z. 264 (2010), 901-912.
- [LMZ] A. Loi, R. Mossa, F. Zuddas: The log-term of the Bergman kernel of the disc bundle over a homogeneous Hodge manifold, Ann. Global Anal. Geom. 51 (2017), 35-51.
- [G1] C.R. Graham: Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation, Compositio Math. 64 (1987), no. 2, 133-155.
- [G2] C.R. Graham: Scalar boundary invariants and the Bergman kernel, Lecture notes in math. vol. 1276, Springer-Verlag, 1987, pp. 108-135.
- [HKN] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa: CR invariants of weight five in the Bergman kernel, Adv. Math. 143 (1999), 185-250.
- [H1] K. Hirachi: Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel, Ann. of Math. 151 (2000), 151-190.
- [H2] 平地健吾: 強擬凸領域におけるベルグマン核の不変式論, 数学 52 (4) pp. 360-375, 2000, 日本数学会
- [H3] K. Hirachi: Logarithmic singularity of the Szegő kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains, Ann. of Math. 163 (2006), 499-515.
- [R] I.P. Ramadanov: A characterization of the balls in $\mathbb{C}^n$ by means of the Bergman kernel, C. R. Acad. Bulgare Sci. 34 (1981), 927-929.