

調和束・モノポール・インスタントン

—微分幾何と代数幾何の交錯—

望月 拓郎 (京都大学数理解析研究所)*

複素微分幾何学における興味深いテーマとして、代数幾何的な対象と微分幾何的な対象の対応の追究が挙げられます。微分幾何的な対象は非線形な偏微分方程式で定式化されるため、非自明な例の存在を示すことさえ難しい場合が多いのに対して、対応する代数幾何的な対象は相対的には調べやすくなることがあります。一方で、微分幾何的な情報によって、代数幾何的な対象についてより深く研究することができるようになることもあります。そのため、このような対応は双方向に豊かな実りをもたらすと考えられます。

そのような対応の一つとして、代数多様体上のベクトル束の計量に関する“Kobayashi-Hitchin 対応”が詳しく研究されてきました。1960年代に Narasimhan と Seshadri によって、コンパクト Riemann 面上の既約ユニタリ接続を持つベクトル束と、安定で次数0の代数的ベクトル束の間の対応が証明されました。これは、1980年代に Kobayashi, Lübke, Donaldson, Hitchin, Uhlenbeck, Yau 達によって高次元の場合に拡張され、滑らかな射影多様体上の既約 Hermitian-Einstein 接続を持つベクトル束と安定な代数的ベクトル束の間の同値が確立されました。その後、さまざまな変種が研究されました。中でも、Simpson と Corlette によって詳しく研究された調和束・Higgs 束・平坦束の対応は極めて興味深いものです。筆者は特異性を持つ調和束の場合の対応を研究し、さらに半単純代数的ホロノミック D 加群と純ツイスター D 加群の対応を得ました。これは代数的ホロノミック D 加群の半単純性の研究に応用されました。

純ツイスター D 加群や混合ツイスター D 加群の関手性によって、非常に多くの有理型平坦束が自然に調和束の構造を持つことがわかります。最近では、調和束の“存在”以上の情報を得ることに興味を持って研究しています。また、調和束の非可換ホッジ理論の類似として、周期性を持つようなモノポールと差分加群の間の小林-Hitchin 対応を得ました。以下では、このような発展について報告します。

1. 調和束

1.1. 背景

この節の内容の詳細は、例えば [12, 13, 17, 18, 21, 26] や、そこで挙げられている参考文献を御参照ください。

1.1.1. 定義

X を複素多様体とします。 $(E, \bar{\partial}_E)$ を X 上の Higgs 束、すなわち、 $(E, \bar{\partial}_E)$ は X 上の正則ベクトル束で、 θ は $\text{End}(E) \otimes \Omega^{1,0}$ の正則切断で $\theta \wedge \theta = 0$ を満たすものとします。 h を E のエルミート計量とすると、Chern 接続 $\nabla_h = \bar{\partial}_E + \partial_{E,h}$ と θ の随伴 $\theta_h^\dagger$ が得られます。接続 $\mathbb{D}_h^1 := \nabla_h + \theta + \theta_h^\dagger$ が平坦 (i.e., $\mathbb{D}^1 \circ \mathbb{D}^1 = 0$) の時、 h を $(E, \bar{\partial}_E, \theta)$ の多重調和計量といい、 $(E, \bar{\partial}_E, \theta, h)$ を調和束といいます。

多重調和計量は平坦束に対しても定義されます。 (V, ∇) を X 上の平坦束とし、 h を V のエルミート計量とします。 ∇ はユニタリ計量 ∇_h と $\text{End}(E) \otimes (\Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1})$ の自己共役切断 Φ_h の和 $\nabla = \nabla_h + \Phi_h$ に一意的に分解されます。さらに、 $\nabla_h = \bar{\partial}_{E,h} + \partial_{E,h}$ 、 $\Phi_h = \theta_h^\dagger + \theta_h$ のように $(0,1)$ -部分と $(1,0)$ -部分の和に分解されます。 $(V, \bar{\partial}_{V,h}, \theta_h)$ が Higgs 束のとき、 h を (V, ∇) の多重調和計量といいます。このとき、 $(V, \bar{\partial}_{V,h}, \theta_h, h)$ は調和束になります。 (V, ∇, h) という組を調和束ということもあります。

1.1.2. Kobayashi-Hitchin 対応

X が射影多様体の時、既約調和束と単純平坦束の間の同値性が Corlette によって示され、Chern 指標が自明である安定 Higgs 束と既約調和束の間の同値性が Simpson によって示されました。 $\dim X = 1$ で階数

本研究は科研費(課題番号:15K04843, 16H06335, 17H06127)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 53C07, 58E15, 14D21, 14H60, 81T13, 14F10, 32C38, 32S35

キーワード: 調和束, モノポール, ツイスター D 加群, Kobayashi-Hitchin 対応, Higgs 束, 接続, 差分加群

* 〒606-8502 京都市左京区 京都大学数理解析研究所

e-mail: takuro@kurims.kyoto-u.ac.jp

が2の時はDonaldsonとHitchinによる結果であり、さらに、Ohsawa-Diederichによる先駆的な研究も知られています。この同値は、Higgs束や平坦束のモジュライの豊かな研究の出発点の一つであり極めて重要なものです。

調和束とHiggs束と平坦束の間の同値は、複素数 λ によってパラメータ付けされる同値の族に拡張されます。任意の複素数 λ をとります。 $(E, \bar{\partial}_E, \theta, h)$ を調和束とすると、微分作用素 $\mathbb{D}^\lambda := \bar{\partial}_E + \lambda\theta_h^\dagger + \lambda\partial_{E,h} + \theta$ は平坦 λ -接続になります。すなわち、各 $f \in C^\infty(X)$ と各 $s \in C^\infty(X, E)$ について $\mathbb{D}^\lambda(fs) = (\bar{\partial}_X + \lambda\partial_X)f \cdot s + f\mathbb{D}^\lambda(s)$ が成り立ち、さらに可積分条件 $\mathbb{D}^\lambda \circ \mathbb{D}^\lambda = 0$ が満たされます。そして、 X が射影多様体であれば、Chern指標が自明である安定 λ -平坦束と既約調和束の間の同値性がDeligneとSimpsonによって示されました。Higgs束との対応、平坦束との対応はそれぞれ $\lambda = 0, \lambda = 1$ に現れます。

1.1.3. 特異性をもつ場合

§1.1.2で述べた対応は特異性のある場合に拡張されています。 X を射影多様体とし、 $H = \bigcup_{i \in \Lambda} H_i$ を複素多様体 X の単純正規交叉超曲面とします。大雑把にいうと、 $X \setminus H$ 上の調和束と (X, H) 上の有理型 λ -平坦束との間の対応が得られるのですが、それぞれ“境界条件”を課する必要があります。

$(E, \bar{\partial}_E, \theta)$ を $X \setminus H$ 上の調和束とします。 θ の“固有値”を集めることでスペクトル多様体 $\Sigma_\theta \subset T^*(X \setminus H)$ が定まります。 Σ_θ が代数的な場合、 $(E, \bar{\partial}_E, \theta)$ を (X, H) 上のワイルド調和束といいます。 $(X$ が代数的でない場合には、“ $\mathbb{P}(T^*X \oplus \mathcal{O}_X)$ における閉包が複素解析的”という条件を課します。) また、 Σ_θ の $T^*X(\log H)$ における閉包が X 上固有、という強い条件を課することで得られる従順調和束というものを考えることもあります。

$\mathcal{O}_X(*H)$ を H に極を持ち得る X 上の有理型関数のなす層とします。 $\mathcal{V}$ を局所自由 $\mathcal{O}_X(*H)$ -加群とし、 $\mathbb{D}^\lambda$ を $\mathcal{V}$ の平坦 λ -接続とします。 $(\mathcal{V}, \mathbb{D}^\lambda)$ の“境界条件”は $\mathcal{V}$ 上のフィルター付ベクトル束 $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ で、 $\mathbb{D}^\lambda$ との両立条件を満たすものです。 $\mathcal{V}$ 上のフィルター付ベクトル束とは $\mathcal{V}$ の局所自由 $\mathcal{O}_X$ -部分加群の増大列 $\mathcal{P}_a\mathcal{V}$ ($a \in \mathbb{R}^\Lambda$) で、 $\mathcal{P}_a\mathcal{V}(*H) = \mathcal{P}\mathcal{V}$ であり、各 $P \in H$ のまわりでは“locally abelian”という条件を満たすものです。 $\mathbb{D}^\lambda$ とフィルター $\mathcal{P}_*\mathcal{V}$ との両立条件は、各 $P \in H$ において、次の二つが満たされることです：(i) P における形式的完備化の不確定値に関する分解 $(\mathcal{V}, \mathbb{D}^\lambda)|_{\hat{P}} = \bigoplus_{a \in \mathcal{I}(P)} (\mathcal{V}_{P,a}, \mathbb{D}_{P,a}^\lambda)$ に応じて $\mathcal{P}_*(\mathcal{V})|_{\hat{P}} = \bigoplus \mathcal{P}_*\mathcal{V}_{P,a}$ と分解される、(ii) $\mathbb{D}^\lambda - da \text{ id}_{\mathcal{V}_{P,a}}$ は $\mathcal{P}_*(\mathcal{V}_{P,a})$ に関してlogarithmic。(ここでは $\mathbb{D}^\lambda$ が“変わり点”を持たない状況に限定しています。変わり点を解消できることがKedlayaや筆者の仕事で知られているので、理論的にはこのような場合を考えれば十分です。) このような条件を満たす $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \mathbb{D}^\lambda)$ を良フィルター付 λ -平坦束といいます。より強く、(i)において $\mathcal{I}(P) = \{0\}$ が各 $P \in H$ で満たされるようなものを正則フィルター付 λ -平坦束といいます。

定理 1.1 (X, H) 上の既約な良ワイルド調和束と (X, H) 上の安定な良フィルター付 λ -平坦束 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ で $\text{ch}_i(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = 0$ を満たすものが同値。

この定理は $\dim X = 1$ の場合は本質的にはSimpson, Biquard-Boalch, Sabbahによるものです。 $\dim X > 1$ の時、 $\lambda = 1$ の場合の証明は[13]で与えられています。 $\lambda = 0$ の場合は[26]で説明されています。 $\lambda \neq 0, 1$ の場合は $\lambda = 1$ の場合と同様です。従順調和束と正則フィルター付 λ -平坦束の間の同値は、 $\lambda \neq 0, 1$ の場合も含めて、[10, 11]で与えられています。

(X, H) が S^1 -作用を持つ場合、 S^1 -作用に関して斉次性を持つような良ワイルド調和束と良フィルター付Higgs束の間の対応が得られます[26]。これは、半無限ホッジ構造の変動やフロベニウス多様体などの構造の微分幾何的構成において役立つことが期待されます。

定理1.1は半単純有理型平坦束の研究において特に有用でした。有理型平坦束 $(\mathcal{V}, \nabla)$ 上には標準的なフィルター付平坦束 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \nabla)$ が存在し、 $(\mathcal{V}, \nabla)$ が単純であることと $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \nabla)$ の安定性が同値になりますので、代数的半単純有理型平坦束は標準的な多重調和計量を持つことがわかります。これは、調和束が遍在していることを意味しています。

Higgs束に関しても1次元の場合は既に有用な定理であり、高次元の場合にも例えばDonagi-Pantev-Simpsonによって幾何学的Langlands理論への応用が研究されています。ただし、高次元の場合は、有理型Higgs束 $(\mathcal{V}, \theta)$ に対して $\text{ch}_i(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = 0$ ($i = 1, 2$)を満たすように良フィルター付Higgs束 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \theta)$ をとることが難しくなり、このことが応用上での障害になります。

1.1.4. ツイスター D 加群

Simpson のメタ定理と, M. Saito によるホッジ加群の理論に基づいて, Sabbah や筆者によって調和束の “ D 加群版” である純ツイスター D 加群やその一般化の混合ツイスター D 加群が研究されました. これらは, 層に対して通常行なうような操作に関して閉じています. また, X の複素解析的閉集合 Z に台を持つ純ツイスター D 加群は, Z の Zariski 開集合上のワイルド調和束と (重みの取り方を除いて) 同値になります. したがって, 与えられた純ツイスター D 加群に対してさまざまな操作を施し, 必要ならば重みフィルトレーションに関する Gr をとることで, 調和束を得られます.

例えば, H を射影多様体 X の超曲面とし, $X \setminus H$ 上の代数関数 f が与えられた時, $\mathcal{E}^f := (\mathcal{O}_X(*H), d+df)$ という有理型平坦束が得られます. これにさまざまな操作, 例えば積分を施すことで, 興味深い D 加群が得られます. 一方 $\mathcal{E}_{|X \setminus H}^f$ は自然な多重調和計量を持つため, $\mathcal{E}^f$ を下部構造として持つ混合ツイスター D 加群が得られます. したがって, $\mathcal{E}^f$ から出発して得られる D 加群は, 自然に混合ツイスター D 加群の構造を持ちます.

ツイスター D 加群の定義は組み入っているため, ここではツイスター D 加群の基盤となる $\mathcal{R}$ 加群を説明します. X を複素多様体とし, Θ_X を正則接ベクトルのなす層とします. $p: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$ を射影とします. $\mathbb{C} \times X$ 上の正則な微分作用素全体のなす層 $D_{\mathbb{C} \times X}$ の中で, $p^*\Theta_X(-(\{0\} \times X))$ によって $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}$ 上生成される代数の部分層があります. これを $\mathcal{R}_X$ であらわすことにします. $\mathcal{R}_X$ -加群 $\mathcal{M}$ は, 平坦 λ -接続の族を持つ $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}$ 加群と同値です. $\mathcal{R}_X$ -加群にさまざまなデータを付加したものが混合ツイスター D 加群になります. 調和束 $(E, \bar{\partial}_E, \theta, h)$ に対応する純ツイスター D 加群の場合は, λ -平坦束の族 $(E, \mathbb{D}^\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を考えることになります.

1.2. 課題

調和束やツイスター D 加群の一般論は完成し, ホロノミック D -加群の半単純性の研究への応用もなされました. 今後は他の研究に応用することが望まれます. 例えば, §1.1.3 でも触れましたが, ある種の有理型 Higgs 束上に定理 1.1 を適用できるような良いフィルター付ベクトル束を構成して, 調和束や D 加群を得られるか? というのは興味深い課題です.

§1.1.3–1.1.4 で触れたように, 調和束や混合ツイスター D 加群は非常に多く存在します. また, ツイスター D 加群の下部構造である $\mathcal{R}$ 加群は, “量子化”, “量子曲線”, “量子 D -加群” 等の名前でさまざまな領域に現れています. 他の状況で現れた $\mathcal{R}$ 加群が, ツイスター D 加群の下部構造になっているか? という問は自然ですし, ある状況ではそのようなことが期待されています. ツイスター D 加群の下部構造になっている $\mathcal{R}$ 加群はかなり強い条件を満たしますので, そのようなことがわかればなんらかの応用も期待されます.

しかし, 今のところ, 具体的な表示を持つ $\mathcal{R}$ 加群がツイスター D 加群の下部構造になっていることを示す方法はあまりありません. 一つの理由は, “存在” 以上のことがよくわかる混合ツイスター D 加群や調和束の例が少ない, という点にあるように思われます. ですから, 調和束やツイスター D 加群の理論と他の諸研究との関わりを探すには, 完全にはなくても, ある程度具体的に記述できる例を見つけていくことが一つの道筋になると思われます. §1.3–§1.5 では, $\mathcal{R}$ 加群や V -フィルトレーションを具体的に記述できるツイスター D 加群の例について述べます. また, §1.6 では, 自然な調和束の族 $(E, \bar{\partial}_E, t\theta, h_t)$ ($t \in \mathbb{C}^*$) の $t \rightarrow \infty$ における挙動について触れます.

1.3. Better behaved GKZ-systems

Borisov-Horja [1] によって導入された better behaved GKZ-systems について述べます. $\mathbb{Z}^n$ の部分集合 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ を $\mathbb{Z}^n = \sum_{i=1}^m \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ が満たされるようにとり, 次のようにおきます.

$$K_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_{j=1}^m r_j \mathbf{a}_j \mid r_j \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}, \quad K(\mathcal{A}) := \mathbb{Z}^n \cap K_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}), \quad K(\mathcal{A})^\circ := \mathbb{Z}^n \cap (K_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \text{ の内部}).$$

$K(\mathcal{A})$ の部分集合 Γ が, $\Gamma + \mathbf{a} \subset \Gamma$ ($\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}$) を満たすとし, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ をとります. この時, $\mathbb{C}^m$ 上の関数の組 $(\Phi_c \mid c \in \Gamma)$ に関して, 次の (1), (2) によって定まる微分方程式系 GKZ($\mathcal{A}, \Gamma, \beta$)

を better behaved GKZ-system といいます。

$$\partial_{x_j} \Phi_{\mathbf{c}} = \Phi_{\mathbf{c}+\mathbf{a}_j} \quad (\forall \mathbf{c} \in \Gamma, \forall j = 1, \dots, m) \quad (1)$$

$$\left(\sum_j a_{j,i} x_j \partial_{x_j} + c_i - \beta_i \right) \Phi_{\mathbf{c}} = 0 \quad (\forall \mathbf{c} \in \Gamma, \forall i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

対応する $\mathbb{C}^m$ 上の D 加群を $M(\mathcal{A}, \Gamma, \beta)$ であらわします。特に興味があるのは $M_{\mathcal{A},*} := M(\mathcal{A}, K(\mathcal{A}), 0)$ と $M_{\mathcal{A},!} := M(\mathcal{A}, K(\mathcal{A})^\circ, 0)$ です。

$(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^m$ 上の代数関数 $F_{\mathcal{A}} := \sum x_j t^{\mathbf{a}_j}$ に付随する代数的 D 加群 $L(F_{\mathcal{A}}) := (\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^m}, d + dF_{\mathcal{A}})$ を考えます。 $\pi : (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ を射影とすると、 $M_{\mathcal{A},*} \simeq \pi_*^0 L(F_{\mathcal{A}})$ と $M_{\mathcal{A},!} \simeq \pi_!^0 L(F_{\mathcal{A}})$ が成り立ちます。これより、 $M_{\mathcal{A},*}$ と $M_{\mathcal{A},!}$ は自然に混合ツイスター D 加群の下部構造になることがわかります。したがって、特に対応する $\mathcal{R}$ -加群 $\mathcal{M}_{\mathcal{A},*}$ ($*$ = *, !) が得られます。

定理 1.2 (Reichelt-Sevenheck [32], M [23]) $\mathbb{C}_\lambda \times \mathbb{C}^m$ 上の関数の組 $(\Phi_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \Gamma)$ に関する次のような微分方程式系 GKZ $_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, \Gamma, \beta)$

$$\lambda \partial_{x_j} \Phi_{\mathbf{c}} = \Phi_{\mathbf{c}+\mathbf{a}_j} \quad (\forall \mathbf{c} \in \Gamma, j = 1, \dots, m),$$

$$\left(\lambda(c_i - \beta_i) + \sum_{j=1}^m a_{j,i} \lambda x_j \partial_{x_j} \right) \Phi_{\mathbf{c}} = 0 \quad (\forall \mathbf{c} \in \Gamma, i = 1, \dots, n),$$

に付随する $\mathcal{R}$ -加群を $\mathcal{M}^{\text{GKZ}}(\mathcal{A}, \Gamma, \beta)$ とすると、

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},*} \simeq \mathcal{M}^{\text{GKZ}}(\mathcal{A}, K(\mathcal{A}), 0), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{A},!} \simeq \mathcal{M}^{\text{GKZ}}(\mathcal{A}, K(\mathcal{A})^\circ, 0).$$

1.4. Toda 方程式

r を正整数とし、 $q \in \mathbb{C}^*$ を変数として、 r 次正方形行列 $\mathcal{K}(r, 1)$ を次のように定めます。

$$\mathcal{K}(r, 1)_{i,j} := \begin{cases} 1 & (i = j + 1) \\ q & ((i, j) = (1, r)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$E = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} e_i$ 上の Higgs 場 $\theta \mathbf{e} = \mathbf{e} \mathcal{K}(r, 1) dq/q$ を得ます。

定理 1.3 (Guest-Lin [4, 5], M [14, 15]) (E, θ) の調和計量 h で $\det(h) = A \log |q|$ (A は正定数) を満たすものは、実数の組 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ で $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq a_1 - 1$ を満たすものによって分類されます。また、各 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$ について、調和束 $(E, \theta, h_{\mathbf{a}})$ に付随する $\mathcal{R}$ -加群 $\mathcal{M}_{\mathbf{a}}$ は、次のようにあらわされます：

$$\mathcal{M}_{\mathbf{a}}(*q) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda \times \mathbb{C}_q^*} \tilde{e}_i, \nabla^{\text{rel}} \right), \quad q \nabla_q^{\text{rel}} \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}} \left(-\text{diag}[a_1, \dots, a_r] + \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}(r, 1) \right)$$

さらに、 $q = \infty$ における Stokes 構造が $\mathbf{a}$ によって記述されます。

1.5. Kontsevich 複体

X を滑らかな射影多様体とし、 H を正規交叉超曲面とします。全射 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $f^{-1}(\infty) \subset H$ を満たすようにとります。 f の極因子を $(f)_\infty$ であらわします。 Ω_f^j を

$$df : \Omega_X^j(\log H) \rightarrow \Omega_X^{j+1}(\log H) \otimes \mathcal{O}_X((f)_\infty) / \Omega_X^{j+1}(\log H)$$

の核として定めます。各 $(\lambda, \tau) \in \mathbb{C}^2$ について複体 $(\Omega_f^\bullet, \lambda d_X + \tau df)$ が得られます。これを Kontsevich 複体といいます。

ある混合ツイスター D 加群の V -フィルトレーションによって Kontsevich 複体を捉えることができます。 $X^{(1)} := X \times \mathbb{C}_\tau$, $H^{(1)} := H \times \mathbb{C}_\tau$ とおき、 $q_X : \mathbb{C}_\lambda \times X^{(1)} \rightarrow X$ を射影とし、 $\overline{\Omega}_f^j := \lambda^{-j} q_X^* \Omega_f^j$ とおきます。さらに、次のようにおきます。

$$\mathfrak{K}(f) := \left(\overline{\Omega}_f^\bullet, d_X + \lambda^{-1} \tau d_X f \right) \simeq (q_X^* \Omega_f^\bullet, \lambda d_X + \tau d_X f)$$

$(X^{(1)}, H^{(1)})$ 上の有理型関数 τf に同伴する D -加群 $(\mathcal{O}_{X^{(1)}}(*H^{(1)}), d_X + d_X(\tau f))$ は自然に混合ツイスター加群の構造を持ち、特に対応する $\mathcal{R}_{X^{(1)}}$ -加群 $\mathcal{L}_*(\tau f, H^{(1)})$ が得られます。

定理 1.4 ([20]) $\mathcal{L}_*(\tau f, H^{(1)})$ は τ に沿った V -フィルトレーションを持ち、その residue は nilpotent であり、さらに quasi-isomorphism $\mathfrak{K}(f) \rightarrow \overline{\Omega}_X^\bullet \otimes V_{-1}\mathcal{L}_*(\tau f, H^{(1)})$ が自然に得られます。

混合ツイスター D 加群についての一般論を用いると Esnault-Sabbah-Yu, Morihiko Saito, Kontsevich によって得られていた定理 “ $\dim \mathbb{H}^j(X, (\Omega_f^\bullet, \lambda d + \tau df))$ は (λ, τ) に依存しない” は定理 1.4 の系になります。

1.6. 漸近挙動と極限配置

X をコンパクトリーマン面とし、 $(E, \bar{\partial}_E, \theta)$ を次数 0 の安定 Higgs 束とします。任意の $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ について、 $(E, \bar{\partial}_E, t\theta)$ は調和計量 h_t を持ちます。Higgs 束のモジュライ上のハイパーケーラー計量への興味から、 $(E, \bar{\partial}_E, t\theta, h_t)$ の $t \rightarrow \infty$ における挙動について Mazzeo-Swoboda-Weiss-Witt [8, 9] をはじめとする多くの人達によって活発に研究されています。ここでは、 $\text{rank } E = 2$ の場合に、筆者による結果を紹介します。

Σ_θ を θ のスペクトル曲線とします。 $\Sigma_\theta \rightarrow X$ のファイバーの個数が全ての $P \in X$ について 1 の場合は簡単なので、一般の $P \in X$ に関してはファイバーの個数が 2 とします。 $D(\theta)$ をファイバーの個数が 1 であるような $P \in X$ のなす集合とします。 $\text{tr}(\theta) = 0$ の場合に考えれば十分です。必要ならば適当な被覆写像による引き戻しを考えることで、 $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ と X 上の直線束 L_i ($i = 1, 2$) を用いて $(E, \theta)|_{X \setminus D(\theta)} = (L_1, \omega)|_{X \setminus D(\theta)} \oplus (L_2, -\omega)|_{X \setminus D(\theta)}$ のようにあらわされます。さらに、誘導射 $E \rightarrow L_i(*D(\theta))$ が全射 $E \rightarrow L_i$ を誘導するようにとれます。 $d_i := \deg(L_i)$ ($i = 1, 2$) とおきます。 $d_1 \leq d_2$ と仮定できます。各 $P \in D(E, \theta)$ について、 m_P を ω の P における 0 点の位数とし、 ℓ_P を $\det(E) \rightarrow L_1 \oplus L_2$ の余核の P における長さとして、 $\chi_P : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ を次のように定めます。

$$\chi_P(a) := \begin{cases} (m_P + 1)a - \ell_P/2 & (a \leq \ell_P/2(m_P + 1)) \\ 0 & (a \geq \ell_P/2(m_P + 1)) \end{cases}$$

次の条件を満たす $a_{E, \theta} \in \mathbb{R}$ が一意的に定まります。

$$0 \leq a_{E, \theta} \leq \max_{P \in Z(\omega)} \{\ell_P/2(m_P + 1)\}, \quad d_1 + \sum_{P \in Z(\omega)} \chi_P(a_{E, \theta}) = 0$$

L_1 と L_2 の P におけるパラボリックウェイトを、それぞれ $-\chi_P(a_{E, \theta})$ and $\chi_P(a_{E, \theta}) + \ell_P$ とおくと、 $D(E, \theta)$ に特異性を持つような平坦計量 $h_{L_i}^{\lim}$ が定まります。次の定理は、 h_t が近似的にどのように表されるかを述べています。

定理 1.5 ([19]) $D(E, \theta)$ の外で $\lim_{t \rightarrow \infty} h_t = h_{L_1}^{\lim} \oplus h_{L_2}^{\lim}$ 。

2. モノポール

2.1. 粗い主張

モノポールの Kobayashi-Hitchin 対応を研究して、次のような対象の同値を得ています。

- 一つの周期性を持つモノポール $\longleftrightarrow \mathbb{C}$ 上の差分加群 [24].
- 二つの周期性を持つモノポール $\longleftrightarrow \mathbb{C}^*$ 上の差分加群 [25].
- 三つの周期性を持つモノポール $\longleftrightarrow$ 楕円曲線上の差分加群 [27].

実際には、調和束の時のように、ツイスターパラメータに依存する対応の族が得られます。以下でモノポールや差分加群について説明します。§2.3 で、二重周期の場合に、より詳しい主張を述べます。

2.1.1. モノポール

X を向きづけられた 3 次元リーマン多様体とします. E を X 上のベクトル束とし, h を E のエルミート計量, ∇ を (E, h) のユニタリ接続, ϕ を E の h に関する反エルミート自己準同型とします. Bogomolny 方程式 $F(\nabla) = *\nabla\phi$ が満たされる時, 組 (E, h, ∇, ϕ) をモノポールといいます. ここで, $F(\nabla)$ は ∇ の曲率であり, $*$ は X のホッジ作用素です.

Γ を $\mathbb{R}^3$ の非自明な離散部分群とし, $\mathcal{M}_\Gamma := \mathbb{R}^3/\Gamma$ とおくと, これは自然にリーマン多様体です. ここでは, $\mathcal{M}_\Gamma$ から有限個の点を除いた多様体上のモノポールに特に興味を持ちます. Γ が $\mathbb{Z}$ と同型の時, そのようなモノポールは周期性を持つ $\mathbb{R}^3$ 上の特異モノポールとみなせるため, 周期的モノポールといいます. 同様に, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^2$ の時は二重周期性を持つモノポール, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^3$ の時は三重周期性を持つモノポールといいます. このような周期性を持つモノポールについての組織的な研究は Cherkis-Kapustin [3] によって始められました.

2.1.2. 差分加群

α を複素数とすると, 多項式環 $\mathbb{C}[y]$ の自己同型 Φ^* が, $\Phi^*(f)(y) := f(y + \alpha)$ によって定まります. $\mathbb{C}[y]$ -加群 V に, $\mathbb{C}$ -線形自己同型 $\Phi^* : V \rightarrow V$ で $\Phi^*(fs) = \Phi^*(f)\Phi^*(s)$ ($\forall f \in \mathbb{C}[y], \forall s \in V$) を満たすものが与えられている時, (V, Φ^*) を $\mathbb{C}$ 上の差分加群といいます. 非可換環 $\mathcal{A}_\alpha := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[y](\Phi^*)^n$ を $\Phi^* \cdot f(y) = f(y + \alpha) \cdot \Phi^*$ によって定めると, $\mathbb{C}$ 上の差分加群は $\mathcal{A}_\alpha$ -加群と同値です. ここでは, 常に次の三つを仮定します. (i) V は $\mathbb{C}[y]$ 上 torsion-free, (ii) $\mathcal{A}_\alpha$ 上有限生成, (iii) 有限階数の自由 $\mathbb{C}[y]$ -部分加群 $V \subset V$ で, $\mathcal{A}_\alpha \cdot V = V$, $V \otimes_{\mathbb{C}[y]} \mathbb{C}(y) = V \otimes_{\mathbb{C}[y]} \mathbb{C}(y)$ を満たすものが存在.

$\mathbb{C}^*$ 上でも “差分加群” を考えることができ, q -差分加群とも呼ばれます. 0 でない複素数 q をとると, Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[y, y^{-1}]$ の自己同型 Φ^* が, $\Phi^*(f)(y) = f(qy)$ によって定まります. $\mathbb{C}[y, y^{-1}]$ -加群 V に, $\mathbb{C}$ -線形自己同型 $\Phi^* : V \rightarrow V$ で $\Phi^*(fs) = \Phi^*(f)\Phi^*(s)$ ($\forall f \in \mathbb{C}[y, y^{-1}], \forall s \in V$) が成り立つものが与えられている時, (V, Φ^*) を $\mathbb{C}^*$ 上の差分加群といいます. 非可換環 $\mathcal{B}_q := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[y, y^{-1}](\Phi^*)^n$ を $\Phi^* \cdot f(y) = f(qy) \cdot \Phi^*$ によって定めると, $\mathbb{C}^*$ 上の差分加群は $\mathcal{B}_q$ -加群と同値です. $\mathbb{C}^*$ 上の差分加群の場合も, 上の (i), (ii), (iii) に対応する条件を常に課します.

同様の対象は, 楕円曲線に関しても考えられます. T を楕円曲線とし, $\alpha \in T$ をとると, T の自己同型 $\Phi : T \rightarrow T$ が $\phi(z) = z + \alpha$ によって定まります. 雑にいうと, $\mathcal{O}_T$ -加群 $\mathcal{V}$ と同型 $\Phi^*(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{O}_T(*D) \simeq \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_T(*D)$ の組を楕円曲線上の差分加群といいます. (ただし, D は T の有限部分集合です.)

2.2. 背景

この研究の背景には, 複素解析的データによるモノポールの分類と, リーマン面上の調和束の非可換ホッジ理論, という二つの研究の流れがあります.

2.2.1. モノポールの分類

モノポールの複素解析的データによる分類に関しては, 1980 年代以来, 多くの興味深い研究がありました. 最も古典的なのは, Donaldson と Hitchin による研究です. 彼等は $\mathbb{R}^3$ 上の $SU(2)$ -モノポールで曲率が L^2 という条件を満たすものと, $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への正則写像の対応を得ました. (L^2 -曲率という条件から, 周期性を持つモノポールは自動的に排除されます.) Donaldson と Hitchin による同値は Nahm 方程式の解を経由するものでしたが, 後に Hurtubise が直接的な対応を得ています. さらに, この対応は Hurtubise-Murray, Jarvis の研究によって, より一般のコンパクト群 G の場合の対応に拡張されました. 比較的最近になって, Kapustin-Witten [6] による物理的観点からの幾何学的 Langlands 理論の研究によって再びモノポールに興味もたれています. 彼等の仕事に触発されて, Norbury [29] はコンパクトリーマン面 Σ 上のベクトル束の Hecke modification が $[0, 1] \times \Sigma$ 上の直積上の特異性をもつモノポールと対応することを示しました. また, Charbonneau-Hurtubise [2] は, $S^1 \times \Sigma$ 上の特異性を持つモノポールと, Σ 上のベクトル束と有理自己同型の組の間の Kobayashi-Hitchin 対応を得ました.

2.2.2. リーマン面上の調和束の非可換ホッジ理論との類似

§2.1 で述べた対応が非可換ホッジ理論との類似であることを説明します. $\mathbb{R}^4$ 上に自然なユークリッド計量を考えると自然にハイパーケーラー多様体です. 開集合 U 上のインスタントンとは, ベクトル束 E , エ

ルミート計量 h , ユニタリ接続 ∇ の組で ASD 方程式 $F(\nabla) + *F(\nabla) = 0$ を満たすものです.

L を $\mathbb{R}^4$ の実部分ベクトル空間で, $\mathcal{U} = \mathcal{U} + L$ が満たされるとします. $\pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/L$ を射影とします. インスタントン (E, ∇, h) が L -同変の時, $\mathcal{U}/L$ 上にエルミート計量付ベクトル束 (E', h') と L -同変な同型 $(E, h) \simeq \pi^{-1}(E', h')$ が得られます. さらに E' 上にはユニタリ接続 ∇' が誘導され, $\nabla - \pi^{-1}(\nabla')$ より E' の交代エルミート準同型の組 ϕ' が得られます. ASD 方程式は ∇' と ϕ' に関する非線形偏微分方程式に翻訳されます. よく知られているように, $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ の時には, Bogomolny 方程式, $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$ の時には Hitchin 方程式, $\dim_{\mathbb{R}} L = 3$ の時には Nahm 方程式が得られます. 特に, 調和束もモノポールもインスタントンの次元簡約です.

複素座標 $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ を $\sum dx_i^2 = dz d\bar{z} + dw d\bar{w}$ のようにとります. 各複素数 λ について, 複素座標 (ξ, η) を $(\xi, \eta) = (z + \lambda \bar{w}, w - \lambda \bar{z})$ で与えると, これは, ハイパーケーラー多様体 $\mathbb{R}^4$ のツイスターパラメータ λ に対応する複素構造を与えます. この複素構造と開集合 $\mathcal{U}$ から得られる複素多様体を $\mathcal{U}^\lambda$ で表します.

$L = \mathbb{C}_z \times \{0\}$ で, $\mathcal{U}^\lambda = \mathbb{C}_z \times U_w$ の場合を考えてみます. (ただし, U_w は $\mathbb{C}_w$ の開集合.) この時, $\mathcal{U}^\lambda$ 上の L -同変正則ベクトル束は U_w 上の λ -平坦束と同値になります. 実際,

$$\partial_{\bar{\eta}} = \frac{1}{1+|\lambda|^2} (\partial_{\bar{w}} - \lambda \partial_{\bar{z}}), \quad \partial_{\xi} = \frac{1}{1+|\lambda|^2} (\lambda \partial_w + \partial_z)$$

のようにあらわされるので, ∂_{ξ} と $\partial_{\bar{\eta}}$ の可換な作用は, 変数 w に関してみると平坦 λ -接続とみなせます. $\mathcal{U}$ 上の L -同変インスタントンと U_w 上の調和束の間の同値は, インスタントンから誘導される $\mathcal{U}^\lambda$ 上の正則ベクトル束と, 調和束から誘導される λ -平坦束の間の同値と両立します. したがって, 調和束と λ -平坦束の間の同値は, $\mathcal{U}^\lambda$ 上の適当な境界条件や安定性条件を満たす L -同変正則ベクトル束と $\mathcal{U}$ 上の L -同変インスタントンの間の同値とみなすことができます.

$L = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ とし, Γ を $(\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w)/L$ の離散部分群とします. Γ の引き戻しとして, $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ が誘導されます. $\tilde{\Gamma}$ -同変インスタントンは $\mathcal{U}/\tilde{\Gamma}$ 上のモノポールと同値です. そこで, 調和束についての対応の類似として, この状況でどのような対象の間の対応が得られるのかを問うのは自然な問題です. §2.1 で挙げた対応はこの問の解答であり, その意味で非可換ホッジ理論をモノポールの状況で考えていることになります.

以上が筆者にとっての元々の研究動機でしたが, [7] ではモノポールと差分加群の間の対応が Fukaya 圏の非可換ホッジ理論の例として捉えられています.

2.3. 二重周期の場合

二重周期モノポールの場合に, §2.1 で述べた対応をもう少し詳しく説明します.

2.3.1. 有理型モノポール

Γ を $\mathbb{C}$ の格子 (離散部分群で $\mathbb{C}/\Gamma$ がコンパクト) とします. $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times (\mathbb{C}/\Gamma)$ とします. t, z をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の標準座標とし, ユークリッド計量 $dt dt + dz d\bar{z}$ を考えます. Z を $\mathcal{M}$ の有限集合とします. 次のような条件が満たされる時, $\mathcal{M} \setminus Z$ 上のモノポール (E, h, ∇, ϕ) が有理型であるといいます.

- Z を含むコンパクト集合 $K \subset \mathcal{M}$ をとると, $\mathcal{M} \setminus K$ 上で $F(\nabla)$ は有界.
- 各 $P \in Z$ は (E, h, ∇, ϕ) の Dirac 型特異点.

ここで, Dirac 型特異点とは Kronheimer によって導入された概念で, 次のように定義されます. U を $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ における $(0, 0)$ の近傍とし, (E, h, ∇, ϕ) を $U \setminus \{(0, 0)\}$ 上のモノポールとします. $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ を $\varphi(u_1, u_2) = (|u_1|^2 - |u_2|^2, 2u_1 u_2)$ とおきます. $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U)$ とおき, $\xi := -u_1 d\bar{u}_1 + \bar{u}_1 du_1 - \bar{u}_2 du_2 + u_2 d\bar{u}_2$ とおきます. $\tilde{U} \setminus \{(0, 0)\}$ 上のエルミート計量付ベクトル束 $(\tilde{E}, \tilde{h}) := \varphi^{-1}(E, h)$ が得られます. さらに, ユニタリ接続 $\tilde{\nabla} := \varphi^{-1}(\nabla) + \sqrt{-1}\xi \otimes \varphi^{-1}(\phi)$ が得られます. $(\tilde{E}, \tilde{h}, \tilde{\nabla})$ が $\tilde{U} \setminus \{(0, 0)\}$ 上のインスタントンになることが Kronheimer によって示されています. そして, $(\tilde{E}, \tilde{h}, \tilde{\nabla})$ が $\tilde{U}$ 上のインスタントンに延長される時に, $(0, 0) \in U$ を (E, h, ∇, ϕ) を Dirac 型特異点といいます. $|\phi|_h = O((|t|^2 + |z|^2)^{-1/2})$ が Dirac 型特異点の必要条件であることはよく知られていましたが, 十分条件でもあることが [28] で示されています.

2.3.2. 安定パラボリック q -差分加群

V を q -差分加群とします. V のパラボリック構造は “ $\{0, \infty\}$ における良いパラボリック構造” と “有限部分におけるパラボリック構造” からなります.

まず, 0 における良いパラボリック構造を説明します. $V_{|\hat{0}} := V \otimes_{\mathbb{C}[y]} \mathbb{C}[[y]]$ とおきます. ここには自然に q -差分作用素 Φ^* が誘導され, “傾き” による分解 $V_{|\hat{0}} = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{Q}} V_{\hat{0}, \omega}$ が得られます. (各 $\omega = \ell/k$ ($\ell, k \in \mathbb{Z}$) について, $\Phi^*(V_{\hat{0}, \omega}) = V_{\hat{0}, \omega}$ であり, $\mathbb{C}[[y]]$ -格子 $\mathcal{L}_\omega \subset V_{\hat{0}, \omega}$ を適切にとると $y^\ell(\Phi^*)^k(\mathcal{L}_\omega) = \mathcal{L}_\omega$.) そして, (V, Φ^*) の良いパラボリック構造とは, 次の (i)–(iv) を満たす $\mathbb{C}[[y]]$ -格子の増大列 $\mathcal{P}_* V_{|\hat{0}} = (\mathcal{P}_a V_{|\hat{0}} \mid a \in \mathbb{R})$ として定義されます: (i) 各 $a \in \mathbb{R}$ について $\mathcal{P}_a V_{|\hat{0}} = \bigcap_{b > a} \mathcal{P}_b V_{|\hat{0}}$, (ii) 各 $a \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{Z}$ について $y^n \mathcal{P}_a V_{|\hat{0}} = \mathcal{P}_{a-n} V_{|\hat{0}}$, (iii) $\mathcal{P}_a V_{|\hat{0}} = \bigoplus_{\omega} \mathcal{P}_a V_{\hat{0}, \omega}$, (iv) $\Phi^* \mathcal{P}_a V_{\hat{0}, \omega} = \mathcal{P}_{a+\omega} V_{\hat{0}, \omega}$. このうち, (i), (ii) は通常のフィルター付ベクトル束の条件で, (iii), (iv) が q -差分作用素との両立性を意味します. ∞ における良いパラボリック構造も同様に定式化されます.

V の有限部分におけるパラボリック構造とは次のようなデータです.

- 有限階数自由 $\mathbb{C}[y, y^{-1}]$ -部分加群 $V \subset V$ で, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Phi^*)^n V = V$, $V \otimes_{\mathbb{C}[y, y^{-1}]} \mathbb{C}(y) = V \otimes_{\mathbb{C}[y, y^{-1}]} \mathbb{C}(y)$ を満たすもの.
- 有限集合 $D \subset \mathbb{C}^*$ で, $V(*D) = (\Phi^*)^{-1}(V)(*D)$ を満たすもの.
- 各 $\alpha \in D$ について, 列 $t_\alpha = (0 \leq t_{\alpha,0} < t_{\alpha,1} < \dots < t_{\alpha,m(\alpha)} < 1)$ と, $V(*D) \otimes_{\mathbb{C}[y, y^{-1}]} \mathbb{C}[[y - \alpha]]$ の $\mathbb{C}[[y - \alpha]]$ -lattice の組 $\mathcal{L}_\alpha = (\mathcal{L}_{\alpha,i} \mid i = 1, \dots, m(\alpha))$.

パラボリック q -差分加群 $V_* := (V, (V, \{t_\alpha, \mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in D}), (\mathcal{P}_* V_{|\hat{0}}, \mathcal{P}_* V_{|\infty}))$ の次数を定義します. V と $(\mathcal{P}_* V_{|\hat{0}}, \mathcal{P}_* V_{|\infty})$ より, $(\mathbb{P}^1, \{0, \infty\})$ 上のフィルター付ベクトル束 $\mathcal{P}_* V$ が得られ, 特に, その次数 $\deg(\mathcal{P}_* V) \in \mathbb{R}$ が定まります. また, 各 $\alpha \in D$ と $i = 0, \dots, m(\alpha)$ について, $\mathcal{L}_{\alpha,i+1}$ と $\mathcal{L}_{\alpha,i}$ の相対次数 $\deg(\mathcal{L}_{\alpha,i+1}, \mathcal{L}_{\alpha,i})$ を次のように定めます.

$$\deg(\mathcal{L}_{\alpha,i+1}, \mathcal{L}_{\alpha,i}) := \text{length}(\mathcal{L}_{\alpha,i+1}/\mathcal{L}_{\alpha,i+1} \cap \mathcal{L}_{\alpha,i}) - \text{length}(\mathcal{L}_{\alpha,i}/\mathcal{L}_{\alpha,i+1} \cap \mathcal{L}_{\alpha,i}).$$

ただし, 形式的に $\mathcal{L}_{\alpha,0} := V \otimes \mathbb{C}[[y - \alpha]]$, $\mathcal{L}_{\alpha,m(\alpha)+1} := (\Phi^*)^{-1}(V) \otimes \mathbb{C}[[y - \alpha]]$ とおきます. すると, V_* の次数は次のように定義されます.

$$\begin{aligned} \deg(V_*) &:= \deg(\mathcal{P}_* V) + \sum_{\alpha \in D} \sum_{i=0}^{m(\alpha)} (1 - t_{\alpha,i}) \deg(\mathcal{L}_{\alpha,i+1}, \mathcal{L}_{\alpha,i}) \\ &\quad - \sum_{\omega \in \mathbb{Q}} \frac{\omega}{2} \left(\dim_{\mathbb{C}((y^{-1}))} ((V_{|\infty})_\omega) + \dim_{\mathbb{C}((y))} ((V_{|\hat{0}})_\omega) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mu(V_*) := \deg(V_*)/\text{rank}(V)$ を用いて安定性条件が標準的に定義されます. すなわち, V_* が安定であるとは, 任意の非自明な部分パラボリック q -差分加群 V'_* について $\mu(V'_*) < \mu(V_*)$ が成り立つこととして定義されます.

2.3.3. 二重周期モノポールの場合の主張

λ を複素数とします. Γ の生成元 μ_1, μ_2 を (i) $\lambda \neq \pm \sqrt{-1} \mu_1 |\mu_1|^{-1}$, (ii) $\text{Im}(\mu_2/\mu_1) > 0$ のようにとります. そして,

$$q^\lambda := \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \frac{\mu_2 + \lambda^2 \bar{\mu}_2}{\mu_1 + \lambda^2 \bar{\mu}_1}\right)$$

とおきます.

定理 2.1 各 λ ごとに, $\mathcal{M}$ 上の既約な有理型モノポールと次数 0 の安定パラボリック q^λ -差分加群の間に同値が存在します. (同値の構成法は §2.4 で説明します.)

λ を固定しても, 定理の主張は μ_1 の取り方に依存しています. しかし, $|\lambda| \neq 1$ の場合には, q -差分加群に関する Riemann-Hilbert 対応を用いると, 次のような意味で本質的には μ_1 の取り方には依存せず, λ の

みに依存することがわかります。 $|\lambda| \neq 1$ の時には $|q^\lambda| \neq 1$ なので、楕円曲線 $T^\lambda := \mathbb{C}^*/(q^\lambda)^\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ が得られます。 Ramis, Sauloy, Zhang [31], van der Put, Reversat [30], Kontsevich, Soibelman 達の研究によって、 q^λ -差分加群は T^λ 上のベクトル束で二つの anti-Harder-Narasimhan フィルトレーションを持つものと同値であることが知られています。 この q -差分加群に関する Riemann-Hilbert 対応は、パラボリック構造を持つ場合に拡張されます [25]。すると、 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{Z}$ 上の有理型モノポールから得られたパラボリック q^λ -差分加群に対応して、 T^λ 上に二つのフィルトレーションを持つベクトル束が得られますが、これは、 μ_1 の取り方に (フィルトレーションの指数のスケーリングを除いて) 依存しないことがわかります。

定理の証明には、例えば次の三つ問題を議論する必要があります。 (i) 有理型モノポールの $|t| \rightarrow \infty$ における漸近挙動の研究, (ii) パラボリック q -差分加群を有理型モノポールから構成, (iii) 体積が無限のケーラー多様体上での Kobayashi-Hitchin 対応. (i) では簡単なモノポールの直和に漸近的に近づくことを示します。このような研究における基礎になります。 (ii) は §2.4 で説明します。 (iii) は有理型モノポールをパラボリック q -差分加群から構成する上で最も重要なステップになります。モノポールはインスタントンの次元簡約なので、モノポールの構成問題は Hermitian-Einstein 計量の構成問題に帰着されます。 Simpson [33] は非コンパクトケーラー多様体上の正則ベクトル束上の Hermitian-Einstein 計量に関する Kobayashi-Hitchin 対応を確立しました。これは大変有益な定理なのですが、体積が有限という条件が課されているので、そのままでは定理 2.1 の証明に使うことはできません。そこで、体積が無限の場合を [22] で研究しました。

2.4. q -差分加群の構成

2.4.1. 古典的なアイデア

$\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ という同型を、 $\sum dx_i^2 = d\tau d\tau + d\alpha d\bar{\alpha}$ が満たされるようにとります。 $U = \{T_1 < \tau < T_2\} \times U_\alpha$ とおきます。

(E, h, ∇, ϕ) を U 上のモノポールとします。 $\partial_{E,\tau} := \nabla_\tau - \sqrt{-1}\phi$, $\partial_{E,\bar{\alpha}} := \nabla_{\bar{\alpha}}$ とおくと、Bogomolny 方程式より、 $\partial_{E,\tau}$ と $\partial_{E,\bar{\alpha}}$ は可換です。各 $T_1 < t_1 < T_2$ について、 $E_{t_1} := (E|_{\tau=t_1}, \partial_{E,\bar{\alpha}})$ は U_α 上の正則ベクトル束になり、さらに、 $\partial_{E,\tau}$ によって誘導される同型 $E_{t_1} \simeq E_{t_2}$ は正則ベクトル束の同型になります。

また、 $T_1 < t_0 < T_2$ として、 (E, h, ∇, ϕ) が $U^* = U \setminus \{(t_1, \alpha_0)\}$ 上のモノポールとすると、 $t_1 < t_0 < t_2$ の時、 $E_{t_1}|_{U_\alpha \setminus \{\alpha_0\}} \simeq E_{t_2}|_{U_\alpha \setminus \{\alpha_0\}}$ が得られますが、 (t_0, α_0) が Dirac 型特異点であればこの同型は $\alpha = \alpha_0$ において有理型になり、Hecke modification を与えることになります。

このアイデアはモノポールと複素解析的な対象を結びつける研究において本質的に用いられてきました。周期性を持つモノポールの研究でも重要ですが、ほとんどの場合に修正が必要になります。

2.4.2. 構成

(t, z) を $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ の座標とし、 (E, h, ∇, ϕ) を $\mathbb{R} \times (\mathbb{C}/\Gamma)$ 上のモノポールとします。(説明を簡単にするために $\mathcal{Z} = \emptyset$ の場合を述べます。)

複素数 λ をとり、 (τ, α) を次のように定めます。

$$\alpha := \frac{1}{1+|\lambda|^2}(z + \lambda^2 \bar{z} - 2\sqrt{-1}t), \quad \tau := \frac{1}{1+|\lambda|^2}(2\operatorname{Im}(\bar{\lambda}z) + (1-|\lambda|^2)t).$$

$dt dt + dz d\bar{z} = d\tau d\tau + d\alpha d\bar{\alpha}$ が成り立ちますので、 $\partial_{E,\tau}$, $\partial_{E,\bar{\alpha}}$ を前のように定めると、 $[\partial_{E,\tau}, \partial_{E,\bar{\alpha}}] = 0$ が成り立ちます。しかし、 $\lambda \neq 0$ とすると、 (τ, α) は Γ の作用をあらわすのに適していません。また、曲率が減衰する方向ともあっていません。したがってより良い座標をとる必要があります。

実数 s_1 と絶対値が 1 の複素数 g_1 を $-\lambda \bar{\mu}_1 + s_1 = g_1(\mu_1 + \lambda s_1) \neq 0$ のようにとることができます。そして、 $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ を次のようにおきます。

$$u := \frac{1+|\lambda|^2}{1-\lambda g_1} \alpha, \quad t := \tau - \operatorname{Im}\left(\frac{g_1 + \bar{\lambda}}{1-\lambda g_1} \alpha\right).$$

この座標の方が、今の目的にはより適合しています。

ベクトル場について次が成り立ちます。

$$\partial_u = \frac{1-\bar{\lambda}g_1}{1+|\lambda|^2} \partial_\alpha - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{(\bar{g}_1 + \lambda)}{1+|\lambda|^2} \partial_\tau, \quad \partial_t = \partial_\tau.$$

そこで, E に作用する微分作用素 $\partial_{E,\bar{u}}$ と $\partial_{E,t}$ を以下のように定義します.

$$\partial_{E,\bar{u}} := \frac{1 - \bar{\lambda}\bar{g}_1}{1 + |\lambda|^2} \partial_{E,\bar{\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{(\bar{g}_1 + \lambda)}{1 + |\lambda|^2} \partial_{E,\tau}, \quad \partial_{E,t} := \partial_{E,\tau}.$$

すると, $[\partial_{E,\bar{u}}, \partial_{E,t}] = 0$ が成り立ちます.

$\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ の $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z$ への作用を $e_i(t, z) = (t, z + \mu_i)$ によって定めます. すると, (t, u) に関して, e_1 の作用は $e_1(t, u) = (t, u) + (0, \mu_1 + \lambda s_1)$ のようにあらわされます. したがって, $U := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\mu_1 + \lambda s_1} u\right)$ とおくと, (t, U) は $\mathcal{M}^{\text{cov}} := (\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_u)/\mathbb{Z}e_1$ と $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_U^*$ の同型を誘導します. さらに,

$$q^\lambda := \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \frac{\mu_2 + \lambda^2 \bar{\mu}_2}{\mu_1 + \lambda^2 \bar{\mu}_1}\right), \quad t^\lambda := -\frac{\text{Vol}(\mathbb{C}/\Gamma)}{\text{Re}(g_1 \mu_1)} \neq 0$$

とおくと, e_2 の $\mathcal{M}^{\text{cov}}$ への作用は, $e_2(t, U) = (t + t^\lambda, q^\lambda U)$ のようにあらわされます.

E の $\mathcal{M}^{\text{cov}} \rightarrow \mathcal{M}$ による引き戻しを E^{cov} であらわします. このとき, (E, h, ∇, ϕ) の $|t| \rightarrow \infty$ における漸近挙動の研究の帰結として, 次が得られます.

命題 2.2 $\mathbb{C}_U^*$ 上の $E(t_1) = (E^{\text{cov}}|_{t=t_1}, \partial_{E,\bar{u}})$ と $h|_{t=t_1}$ から定まる Chern 接続の曲率は, $h_{t=t_1}$ と

$$\frac{1}{(-\log |U|^2)^2 + 1} \frac{dU d\bar{U}}{|U|^2}.$$

に関して有界.

これより, 曲率に関してこのような評価が成り立つ計量付正則ベクトル束の一般論によって, $E(t_1)$ は局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*\{0, \infty\})$ -加群 $\mathcal{P}(E(t_1))$ に延長されます. $[\partial_{E,t}, \partial_{E,\bar{u}}] = 0$ より, 次の正則同型が得られます.

$$\mathcal{P}E(t_1) \simeq \mathcal{P}E(t_2).$$

$\Phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\Phi(U) = q^\lambda U$ によって定めます. 構成より, 次の同型が得られます.

$$\mathcal{P}E(t_1) \simeq \Phi^* \mathcal{P}(E(t_1 + t^\lambda)).$$

したがって, $V := H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{P}E(0))$ とおくと, 自然に q^λ -差分加群になります.

さらに, 正則切断の計量に関する増大度によって, $\mathcal{P}E(0)$ は $U = 0, \infty$ におけるパラボリック構造を持ちます. これが, V の $\{0, \infty\}$ における良いパラボリック構造であることがわかります. もしも $Z \neq \emptyset$ ならば, 有限部分におけるパラボリック構造を誘導することが容易にわかります. こうして, V のパラボリック構造が得られます.

参考文献

- [1] L. Borisov, P. Horja, *On the better behaved version of the GKZ hypergeometric system*, Math. Ann. **357** (2013), 585–603.
- [2] B. Charbonneau, J. Hurtubise, *Singular Hermitian-Einstein monopoles on the product of a circle and a Riemann surface*, Int. Math. Res. Not. (2011), 175–216.
- [3] S. A. Cherkis, A. Kapustin, *Nahm transform for periodic monopoles and $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. **218**, (2001), 333–371.
- [4] M. Guest, C.-S. Lin, *Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa*, J. Reine Angew. Math. **689** (2014), 1–32.
- [5] M. Guest, C.-S. Lin, *Some tt^* structures and their integral Stokes data*, Commun. Number Theory Phys. **6** (2012), 785–803.
- [6] A. Kapustin, E. Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program*, Commun. Number Theory Phys. **1** (2007), 1–236.
- [7] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Riemann-Hilbert correspondence in dimension one, Fukaya categories and periodic monopoles*, preprint.
- [8] R. Mazzeo, J. Swoboda, H. Weiss, F. Witt, *Limiting configurations for solutions of Hitchin's equation*, Semin. Theor. Spectr. Geom. **31** (2012–2014) 91–116.
- [9] R. Mazzeo, J. Swoboda, H. Weiss, F. Witt, *Ends of the moduli space of Higgs bundles*, Duke Math. J. **165** (2016), 2227–2271.

- [10] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application*, Astérisque **309** (2006), viii+117.
- [11] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles. II*, Geom. Topol. **13** (2009), 359–455.
- [12] 望月拓郎, “従順調和バンドルの漸近挙動と純ツイスター D 加群について” 数学 **58** (2006) 337–363.
- [13] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor D -modules*, Astérisque **340**, Société Mathématique de France, Paris, 2011.
- [14] T. Mochizuki, *Harmonic bundles and Toda lattices with opposite sign I*, the first part of arXiv:1301.1718, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [15] T. Mochizuki, *Harmonic bundles and Toda lattices with opposite sign II*. Comm. Math. Phys. **328** (2014), 1159–1198.
- [16] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic instantons with square integrable curvature*, Geom. Topol. **18**, (2014), 2823–2949.
- [17] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and twistor $\mathcal{D}$ -modules*, Proceedings of ICM 2014 Seoul.
- [18] T. Mochizuki, *Mixed twistor D -modules*, Lecture Notes in Mathematics, **2125**. Springer, Cham, 2015. xx+487
- [19] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces*, J. Topol. **9** (2016), 1021–1073.
- [20] T. Mochizuki, *A twistor approach to the Kontsevich complexes*, Manuscripta Math. **157** (2018), 193–231.
- [21] 望月拓郎 “ヒッグス束や接続の Kobayashi-Hitchin 対応について” (第16回岡シンポジウムの講義録), (2018)
- [22] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles*, arXiv:1712.08978, to appear in Trans. AMS.
- [23] T. Mochizuki, *Twistor property of GKZ-hypergeometric systems*, arXiv:1501.04146.
- [24] T. Mochizuki, *Periodic monopoles and difference modules*, arXiv:1712.08981.
- [25] T. Mochizuki, *Doubly periodic monopoles and q -difference modules*, arXiv:1902.03551.
- [26] T. Mochizuki, *Good wild harmonic bundles and good filtered Higgs bundles*, arXiv:1902.08298
- [27] T. Mochizuki, *Triply periodic monopoles and difference modules on elliptic curves*, arXiv:1903.03264
- [28] T. Mochizuki, M. Yoshino, *Some characterizations of Dirac type singularity of monopoles*. Comm. Math. Phys. **356**, 613–625.
- [29] P. Norbury, *Magnetic monopoles on manifolds with boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1287–1309.
- [30] M. van der Put, M. Reversat, *Galois theory of q -difference equations*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 665–718.
- [31] J.-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, *Local analytic classification of q -difference equations*, Astérisque **355** (2013).
- [32] T. Reichelt, C. Sevenheck, *Non-affine Landau-Ginzburg models and intersection cohomology*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), 665–753.
- [33] C. T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.