

等質開凸錐

野村 隆昭 (九大名誉教授／阪市大数学研)*

2019年9月19日

1. 序

正定値実対称行列や正定値 Hermite 行列は数学の多くの分野に登場する．私にとっては，解析概論を読んでいて多変数関数の極値問題の所で出会ったのが最初であったように思う．正定値実対称行列の全体 $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ は，同じサイズの実対称行列がなす実ベクトル空間 $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ における開凸錐であり，線型 Lie 群 $GL(r, \mathbb{R})$ の推移的な作用

$$\text{Sym}(r, \mathbb{R}) \ni X \mapsto gX^t g \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}) \quad (g \in GL(r, \mathbb{R})) \quad (1.1)$$

がある．このように，線型 Lie 群が推移的に作用するという条件で一般化したものが**等質開凸錐**である．

等質開凸錐の理論は Vinberg の論文 [21] によって基礎付けがなされたが，研究の動機としては，Piatetski-Shapiro による非対称な等質 Siegel 領域（有界領域に正則同相）の例が正定値実対称行列のなす凸錐を用いた第2種の Siegel 領域であったため，非対称な第1種等質 Siegel 領域 $V + i\Omega$ を得るためには，凸錐 Ω としては Riemann 対称空間にならないものを見いだす必要があったことによる．

本稿では，等質開凸錐について，伊師英之氏，甲斐千舟氏，中島秀斗氏，山崎貴史氏との共同研究や彼ら自身によって得られたことの一部も含めて，ここ20年程の研究成果についてまとめてみたい．

2. Koszul–Vinberg 代数

まず，等質開凸錐について定義を与えておこう． V を有限次元の実ベクトル空間とし，ノルムにより位相が入っているとする． Ω は V に含まれる凸錐で，開集合であるとする（以下，**開凸錐**という）．さらに， Ω は**正則 (regular)**，すなわち，直線を全く含まないとする¹． Ω の**線型同型群**を $GL(\Omega)$ によって表す：

$$GL(\Omega) := \{g \in GL(V) ; g(\Omega) = \Omega\}.$$

$GL(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であるから，線型 Lie 群である． Ω が**等質**であるとは，この $GL(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するときをいう．

Vinberg [21] の研究手法は，等質開凸錐の1点の接空間に導入される代数構造²に着目することにある．

本研究は科研費(課題番号:15K04901 および 19K03520)の助成を受けており，大阪市立大学数学研究所(文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」)によっても部分的に支援されています．

2010 Mathematics Subject Classification: 15B48, 16W10, 17D25, 22F30, 43A85, 46L70, 47L07

キーワード：正定値行列，等質錐，基本相対不変式，向き付けグラフ，左対称代数

* 〒110-0016 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学数学研究所

e-mail: tnomura@sci.osaka-cu.ac.jp

web: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/>

¹ したがって半空間等は避け，原点において尖っている凸錐を対象とする．

² Vinberg [21] では clan (ロシア語に忠実に書くと klan) と呼ばれているものである．

定義 2.1

有限次元実ベクトル空間 V に双線型な積 $x \triangle y = L(x)y$ が定義されているとする。次の (1)~(3) が成り立つとき, V を **Koszul–Vinberg 代数** という。

- (1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$ ($x, y \in V$).
- (2) V 上の線型形式 s が存在して, $s(x \triangle y)$ は V に正定値内積を定義する。
- (3) 各左乗法作用素 $L(x)$ ($x \in V$) は実固有値のみを持つ。

注意 2.2 (あ) 積 $\triangle$ には結合法則を要求しない。

(い) 条件 (1) をみたす代数を**左対称代数**という。3重線型写像 (**結合子**) $[a, b, c] := (a \triangle b) \triangle c - a \triangle (b \triangle c)$ を導入するとき, 条件 (1) と $[a, b, c]$ が左二つの変数 a, b に関して対称であることが同値になるのでこの呼び名がある。左対称代数では, $x \triangle y - y \triangle x$ によって Lie 代数の構造が入る (**Lie 認容代数**)。したがって, (1) は $x \mapsto L(x)$ が Lie 代数の準同型であることを示す (結合法則がないので乗法的とは限らない)。□

以下, Ω を有限次元ベクトル空間 V の等質開凸錐とする。このとき, $GL(\Omega)$ の分裂可解 (すなわち, $\mathbb{R}$ 上三角化可能な) 部分群 H が存在して, H は Ω に単純推移的に作用する。1 点 $e \in \Omega$ を固定すると軌道写像 $H \ni h \mapsto he \in \Omega$ は微分同相になるから, $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$ とするとき, H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto Te \in V$ は線型同型写像である。ゆえに, 各 $x \in V$ に対して一意的に線型作用素 $L(x) \in \mathfrak{h}$ が存在して, $L(x)e = x$ となる。ここで, $x \mapsto L(x)$ も線型であることに注意して, $x \triangle y := L(x)y$ によって V に積 $\triangle$ を導入すると, V は Koszul–Vinberg 代数になる。しかも e は V の単位元である。したがって, $x \mapsto L(x)$ は Lie 代数の同型である。次を書き留めておこう。

$$\mathfrak{h} = \{L(x); x \in V\}, \quad H = \exp \mathfrak{h}, \quad \Omega = He \text{ (} e \text{ を通る } H \text{ 軌道)}. \quad (2.1)$$

単位元 e を持つ Koszul–Vinberg 代数 V は次のような分解を持つ (**正規分解**という)。 V の原始ベキ等元の完全直交系 $c_1, \dots, c_r$ ($c_1 + \dots + c_r = e$) が存在して,

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ji} \quad (\text{直交直和: ただし } V_{ii} = \mathbb{R}c_i, i = 1, 2, \dots, r).$$

ここで, r は V の (あるいは Ω の) **階数** と呼ばれる。本講演では, V については次のような形式的な「対称行列の行列環」のイメージを持っていれば十分である。

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & V_{21} & \dots & V_{r-1,1} & V_{r1} \\ V_{21} & \mathbb{R}c_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ V_{r-1,1} & & & \mathbb{R}c_{r-1} & V_{r,r-1} \\ V_{r1} & \dots & \dots & V_{r,r-1} & \mathbb{R}c_r \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

例 2.3 $\text{Sym}(r, \mathbb{R}) \supset \mathcal{P}(r, \mathbb{R})$

$GL(r, \mathbb{R})$ の部分群で, 対角成分がすべて正である下三角行列全体がなすもの (分裂可解) を $H(r, \mathbb{R})$ で表す。式 (1.1) における作用を $H(r, \mathbb{R})$ に制限すると, その作用は単純推移的である。すなわち, $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ は単位行列 $e \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ を通る $H(r, \mathbb{R})$ 軌道であり, したがって, $\Omega = \{h^t h; h \in H(r, \mathbb{R})\} \approx H(r, \mathbb{R})$ (微分同相) である。Koszul–Vinberg 代数としての $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ における積は $x \triangle y = \underline{x}y + y^t(\underline{x})$ である。ただし, $x = (x_{ij}) \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ に対して, $\underline{x}$ は次で定義される行列である:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}(r, \mathbb{R}) := \text{Lie}(H(r, \mathbb{R})).$$

明らかに $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$ であり, $L(x)y = \underline{x}y + y{}^t(\underline{x})$ である. また, $s_0(x) := \text{Tr}(x)$ とおくと, $s_0(x \triangle y) = \text{Tr}(xy)$ となっている. さらに, 各 $x = (x_{ij}) \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ と $k = 1, \dots, r$

に対して, $\Delta_k(x) := \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}$ (**首座小行列式**) とおくと,

$$\Omega = \{x \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}) ; \Delta_k(x) > 0 \ (k = 1, \dots, r)\}. \quad (2.3)$$

ここで式(2.3)において,

$$\Delta_k(hx^th) = (\det h_k)^2 \Delta_k(x) \quad (h \in H(r, \mathbb{R}), x \in \text{Sym}(r, \mathbb{R}))$$

であることに注意する. ただし,

$$h = \left(\begin{array}{c|c} h_k & O \\ \hline * & h'_{r-k} \end{array} \right) \quad (h_k \in H(k, \mathbb{R}), h'_{r-k} \in H(r-k, \mathbb{R})).$$

各 $h \mapsto (\det h_k)^2$ ($k = 1, \dots, r$) は $H(r, \mathbb{R})$ の1次元表現であるから, 各 $\Delta_k(x)$ は $H(r, \mathbb{R})$ に関する**相対不変式**である. $\square$

3. 基本相対不変式

前節の記号を踏襲する. 例2.3の状況を一般化して, Vinberg [21] では V 上の多項式で H の作用に関して**相対不変**なもの, すなわち H の1次元表現 χ_k ($k = 1, \dots, r$) が存在して $D_k(hx) = \chi_k(h)D_k(x)$ ($h \in H, x \in \Omega$) をみたす多項式関数 $D_1, \dots, D_r$ を帰納的に定義して, Ω をこれらの正領域として表している:

$$\Omega = \{x \in V ; D_k(x) > 0 \ (k = 1, \dots, r)\}. \quad (3.1)$$

この $D_1(x), \dots, D_r(x)$ を **Vinberg 多項式**と呼ぶ. Vinberg 多項式は一般に可約であり, $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ のときは例2.3で述べた首座小行列式を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned} D_1(x) &= \Delta_1(x), & D_2(x) &= \Delta_2(x), \\ D_k(x) &= \Delta_1(x)^{2^{k-3}} \Delta_2(x)^{2^{k-4}} \cdots \Delta_{k-2}(x) \cdot \Delta_k(x) \quad (k = 3, \dots, r). \end{aligned}$$

実は, 一般の Ω に対しても $\deg D_k(x) = 2^{k-1}$ である. 伊師氏の論文[3]では, Vinberg 多項式 $\{D_k\}$ から互除法的な手法で帰納的に既約因子を取り出している. ゆえに, 既約な H 相対不変な多項式 $\Delta_k(x)$ ($k = 1, \dots, r$) により, 式(3.1)は次式に書き直せる.

$$\Omega = \{x \in V ; \Delta_k(x) > 0 \ (k = 1, \dots, r)\}. \quad (3.2)$$

$\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ を Ω に付随する**基本相対不変式**と呼ぶ. $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ のときは, もちろん首座小行列式が基本相対不変式である. さらに, 中島氏の論文[13]では, 各 k に対する $\Delta_k(x)$ を, $D_k(x)$ を $D_j(x)$ ($j = 1, \dots, k-1$) のべき積で割る式で表し, 分母の $D_j(x)$ のべき指数を Ω から定まる代数的な量を用いて明示的に記述することに成功している. また, 基本相対不変式は Koszul-Vinberg 代数 V の右乗法作用素 $R(x)$ の行列式 $\det R(x)$ の既約因子のすべてである(論文[7]). しかも, 中島氏の上記の論文[13]では, $\det R(x)$ の因数分解における各 $\Delta_k(x)$ のべき指数を, Ω から定まる代数的な量を用いて明示的に表示することにも成功している.

4. 対称錐の特徴付け

有限次元ベクトル空間 V の正則開凸錐 Ω に対して、双対ベクトル空間 V^* の開凸錐

$$\Omega^* := \{f \in V^* ; \langle f, x \rangle > 0 \ (\forall x \in \text{Cl}(\Omega) \setminus \{0\})\}$$

を Ω の**双対錐**という。 V のある正定値内積によって V^* と V を同一視すると $\Omega^* = \Omega$ となる時、 Ω は**自己双対**であるという。 等質な自己双対開凸錐を**対称錐**という。 既約な対称錐は、Euclid 型 Jordan 代数を用いて分類される (Faraut–Korányi の著書 [1] 参照)。 それらは、 $\mathcal{P}(r, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), $\mathcal{P}(3, \mathbb{O})$, および Lorentz 錐 $\Lambda_n \subset \mathbb{R}^n$ である。

等質開凸錐の中で対称錐を特徴付けるのは興味深い問題である。 この問題に関しては様々な研究があるが、ここではまず前節の基本相対不変式に着目する。 $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ では、首座小行列式 $\Delta_k(x)$ ($k = 1, \dots, r$) に対して $\deg \Delta_k(x) = k$ であった。 一般の既約対称錐でも首座小行列式の類似物 $\Delta_k(x)$ ($k = 1, \dots, r$) を定義することができて、それらは基本相対不変式であり、 $\deg \Delta_k(x) = k$ ($k = 1, \dots, r$) である。 ここで、『基本相対不変式に対する $\deg \Delta_k(x) = k$ ($\forall k = 1, \dots, r$) ... ① は既約対称錐を特徴付けるか』という問題が生じるが、解答は**否**である (中島氏との共著論文 [15, 16] 参照)。 実際、どの階数 r ($r \geq 3$) においても基本相対不変式の次数が $1, 2, \dots, r$ となるような等質開凸錐で対称錐ではないものの系列を例示できる。 しかし、双対錐の基本相対不変式にも①を要求すると、既約対称錐の特徴付けになる (山崎氏との共著論文 [23])。

次に、各基本相対不変式 $\Delta_k(x)$ を複素化 $V_{\mathbb{C}}$ 上の正則多項式に自然に拡張しておく。 共著論文 [7] を執筆したそもそもの動機は、Siegel 右半空間 $\mathfrak{H} := \mathcal{P}(r, \mathbb{R}) + i \text{Sym}(r, \mathbb{R}) \subset \text{Sym}(r, \mathbb{C})$ において $\text{Re} \frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0$ ($w \in \mathfrak{H}; k = 1, \dots, r$) ... ② が成り立つが、『② は対称錐を特徴付けるか』という Gindikin 氏の質問 (2004) に答えるためであった。 確かに②は $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ を既約対称錐に一般化しても成り立つが、非対称錐でも成り立つ例があるというのが論文 [7] の一つの定理と例である。 なお、中島氏の論文 [14] では、双対錐の基本相対不変式の系に対しても②を要求することで、既約対称錐の特徴付けを得ることが示されている。

さて、 $\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ は Riemann 対称空間であり、単位行列 $e \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ における symmetry は $x \mapsto x^{-1}$ で与えられる。 一般の対称錐では、対応する Euclid 型 Jordan 代数の逆元に x^{-1} を読み替えるとよい。 いずれにしても、写像 $x \mapsto x^{-1}$ は -1 次斉次の写像である。 さらに一般の等質開凸錐 Ω では、この逆元写像を代替するものとして、次で定義される Vinberg の ***写像** $\Omega \ni x \mapsto x^* \in \Omega^*$ がある。 ここで、 x^* の定義は

$$\langle x^*, v \rangle := \frac{\int_{\Omega^*} \langle f, v \rangle e^{-\langle f, x \rangle} df}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle f, x \rangle} df} \quad (v \in V).$$

容易に $(\lambda x)^* = \lambda^{-1} x^*$ ($\lambda > 0$) がわかる。 Ω が既約対称錐の場合は、対応する Euclid 型 Jordan 代数のトレース内積の定数倍を調整して Ω^* と Ω を同一視すると、 x^* は Jordan 代数の逆元 x^{-1} に等しくなる。

また、実ベクトル空間 V に開凸錐 Ω があるので、 V には半順序が入る。 すなわち、

$$x, y \in V \text{ に対して、 } x \geq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x - y \in \text{Cl}(\Omega).$$

$\mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ における写像 $x \mapsto x^{-1}$ は次の性質を持つ。

$x, y \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ とする³. このとき, $x \geq y \iff y^{-1} \geq x^{-1}$.

証明は下記の 1 行で終わる. その証明を Euclid 型 Jordan 代数の場合へ翻訳するのは容易である.

$$y^{-1} - x^{-1} = y^{-1/2} (y^{1/2} x^{-1} y^{1/2})^{1/2} y^{-1/2} (x - y) y^{-1/2} (y^{1/2} x^{-1} y^{1/2})^{1/2} y^{-1/2}.$$

定理 4.1 (甲斐 [9])

Ω が対称錐であることと, Ω が次の性質を持つことは同値である.

$$x, y \in \Omega \text{ に対して, } x \geq y \text{ (}\Omega \text{ に関して)} \iff y^* \geq x^* \text{ (}\Omega^* \text{ に関して)}.$$

甲斐氏の論文 [9] ではもう少し強いことも示されている. Ω の 2 元 x, y が Ω に関して **比較可能** であるとは, $x \geq y$ または $y \geq x$ が成立するときをいう. このとき, Ω が対称錐であることと, Ω が次の性質を持つことは同値である.

$$x, y \text{ が } \Omega \text{ に関して比較可能} \iff x^*, y^* \text{ が } \Omega^* \text{ に関して比較可能}.$$

さらに, $z \in \text{Sym}(r, \mathbb{C})$ とするとき, 次が成り立つ.

$$\text{Re } z \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R}) \iff \exists z^{-1} \text{ and } \text{Re } z^{-1} \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R}).$$

$r = 1$ ならば $\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ より明らかであるが, 行列の場合もほぼ同様である.

すなわち, $x \in \mathcal{P}(r, \mathbb{R})$ のとき, $y_1 := x^{-1/2} y x^{-1/2}$ とおくと $x + iy = x^{1/2} (e + iy_1) x^{1/2}$ であり, $(e + iy_1)^{-1} = (e + y_1^2)^{-1} (e - iy_1)$ ゆえ,

$$\text{Re } (x + iy)^{-1} = x^{-1/2} (\text{Re } (e + iy_1)^{-1}) x^{-1/2} = x^{-1/2} (e + y_1^2)^{-1} x^{-1/2}.$$

これを対称錐 Ω の場合に一般化するのは容易であり, 次が成り立つ.

$$(\Omega + iV)^{-1} = \Omega + iV \quad (\text{複素化された Jordan 代数 } V_{\mathbb{C}} \text{ における逆元写像による像}).$$

しかしながら, 以上を等質開凸錐 Ω と Vinberg の $*$ 写像の解析接続に対する一般化はできない. 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2 (甲斐-N [10])

$$(\Omega + iV)^* = \Omega^* + iV^* \iff \Omega \text{ は対称錐}.$$

等質開凸錐が対称錐であることの要求は, ある内積での V^* と V の同一視による $\Omega^* = \Omega$ であった. 一般に任意の開凸錐 Ω に対して $\Omega^{**} = \Omega$ であることから, 双対錐と線型同型であるが自己双対でない等質開凸錐ということなら, $\Omega \oplus \Omega^*$ を考えることで直ちに例を得る. 既約 な等質開凸錐で双対錐と線型同型であるが自己双対でないもの (階数 r は任意で $r \geq 3$) の例は伊師氏との共著論文 [8] で与えている. 下記の例はそれを少し簡単にして, 2010 年度の表現論シンポジウムで報告したものである. $m = 1, 2, \dots$ として, 次のようなベクトル空間 $V \subset \text{Sym}(m+3, \mathbb{R})$ を考える:

$$V := \left\{ x := \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & {}^t \mathbf{x}' & \xi_1 \\ 0 & \lambda_1 & {}^t \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \mathbf{x}' & \mathbf{0} & X & \mathbf{x}'' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t \mathbf{x}'' & \lambda_{m+2} \end{array} \right); \quad \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_{m+2} \in \mathbb{R}, X \in \text{Sym}(m, \mathbb{R}) \\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}. \quad (4.1)$$

このとき, $\Omega := V \cap \mathcal{P}(m+3, \mathbb{R})$ は Ω^* に線型同型であるが, 自己双対ではない等質開凸錐である.

³ もちろん, Hilbert 空間上の正定値自己共役作用素でもよい.

5. 等質開凸錐の最小サイズの行列による実現

ここでいう等質開凸錐 Ω の**行列実現**とは、前ページ最後の部分の記述のように、あるサイズ N の $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の部分空間 V によって $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ を slice して、

$$\Omega \cong V \cap \mathcal{P}(N, \mathbb{R})$$

と表すことをいう。その礎となるのは、伊師氏の研究 [4] に基づく次のブロック行列表示である (Graczyk–Ishi [2] と Ishi [6] も参照)。正整数 N の分割 $N = n_1 + \cdots + n_r$ を固定して、次の (V1)~(V3) をみたす部分空間の系 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_{lk}\}$, $\mathcal{V}_{lk} \subset \text{Mat}(n_l \times n_k; \mathbb{R})$, を考える。

$$(V1) \quad v \in \mathcal{V}_{lk}, v' \in \mathcal{V}_{kj} \implies vv' \in \mathcal{V}_{lj} \quad (1 \leq j < k < l \leq r),$$

$$(V2) \quad v \in \mathcal{V}_{lj}, v' \in \mathcal{V}_{kj} \implies v^t v' \in \mathcal{V}_{lk} \quad (1 \leq j < k < l \leq r),$$

$$(V3) \quad v \in \mathcal{V}_{lk} \implies v^t v \in \mathbb{R} I_{n_l} \quad (1 \leq k < l \leq r).$$

このとき、 $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の次の部分空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ を考える。

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} := \left\{ z = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & {}^t z_{21} & \cdots & {}^t z_{r1} \\ z_{21} & \lambda_2 I_{n_2} & & {}^t z_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{r1} & z_{r2} & \cdots & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ z_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \quad (1 \leq k < l \leq r) \end{array} \right\}. \quad (5.1)$$

そして、部分空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ による $\mathcal{P}(N, \mathbb{R})$ の slice $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ を考える。

$$\mathcal{P}_{\mathcal{V}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{P}(N, \mathbb{R}). \quad (5.2)$$

このとき、 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ は例 2.3 のように積を定義する Koszul–Vinberg 代数 $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の部分代数であり、 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ における正則開凸錐である。さらに、

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ T = \begin{pmatrix} t_1 I_{n_1} & & 0 \\ T_{21} & t_2 I_{n_2} & \\ \vdots & & \ddots \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & t_r I_{n_r} \end{pmatrix}; \begin{array}{l} t_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \quad (1 \leq k < l \leq r) \end{array} \right\}$$

とおくと、 $H_{\mathcal{V}}$ は群であり、開凸錐 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ に $z \mapsto Tz^t T$ によって単純推移的に作用する。伊師氏の論文 [4] により、任意の等質開凸錐はこのようにして得られる。

さて、逆に等質開凸錐 Ω が与えられたとき、 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ の形で表す Ω の実現はたくさんある。たとえば論文 [7, Section 5] の一般的手法に従うと、 $\mathcal{P}(3, \mathbb{R})$ の次の実現を得る。

$$\mathcal{P}(3, \mathbb{R}) \cong \left\{ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & x_{21} & 0 & x_{31} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & x_{21} & 0 \\ \hline 0 & x_{21} & 0 & \lambda_2 & 0 & x_{32} \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & x_{31} & 0 & x_{32} & 0 & \lambda_3 \end{array} \right) \gg 0 \right\} \subset \text{Sym}(6, \mathbb{R}). \quad (5.3)$$

もちろん 1 行目と 1 列目は不要であるから 5×5 行列に移るのは容易であるが、式 (5.3) における 3 行目と 3 列目、5 行目と 5 列目も不要である。すなわち、 $\mathcal{P}(3, \mathbb{R})$ 等、既約対称錐に対しては実質的に何もしないことになる一般的な行列実現の手法がほしいのである。それが**最小サイズの行列による等質開凸錐の実現**である。

そのためにまず、与えられた階数 r の等質開凸錐 Ω に付随する Koszul–Vinberg 代数 V (式 (2.2) 参照) からグラフを描く。すなわち、各 $j > i$ に対して $d_{ji} := \dim V_{ji}$ とおき、

$\mathcal{V} := \{1, \dots, r\}$ (頂点集合), $\mathcal{A} := \{[j \rightarrow i]; i < j \text{ かつ } d_{ji} > 0\}$ (弧集合)

とする. ここで, $[j \rightarrow i]$ は頂点 j を出て頂点 i に入る弧を表す. したがって, $d_{ji} > 0$ のとき, 次のように描く.

$$\begin{array}{ccc} j & d_{ji} & i \\ \circ & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

$d_{ji} = 0$ なら j と i は弧で結ばない. こうしてできる重み付き有向 (directed) グラフ $\Gamma = \Gamma(V) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ は向き付け (oriented) グラフである. すなわち, $[j \rightarrow i]$ と $[i \rightarrow j]$ は共存しないし, $[i \rightarrow i]$ もない. 入ってくる弧のない頂点を源点 (ソース) という. グラフ Γ の源点すべての集合を $\mathcal{S}$ で表す. 必ず $r \in \mathcal{S}$ ゆえ, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である. 各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して, その出先隣接点 (out-neighbors), すなわち, $[\omega \rightarrow k] \in \mathcal{A}$ となる頂点 k を全部集めてその集合を $\mathcal{N}^{\text{out}}(\omega)$ とし, $\mathcal{N}^{\text{out}}[\omega] := \mathcal{N}^{\text{out}}(\omega) \cup \{\omega\}$ とおく. $\mathcal{N}^{\text{out}}[\omega]$ から誘導される Γ の重み付き向き付け部分グラフを $\Gamma_{[\omega]}$ とする. 各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して,

$$V_{[\omega]} := \bigoplus_{\substack{i \leq j \\ i, j \in \mathcal{N}^{\text{out}}[\omega]}} V_{ji}, \quad E_{[\omega]} := \bigoplus_{i \in \mathcal{N}^{\text{out}}[\omega]} V_{\omega i} \quad (V_{[\omega]} \text{ のエッジという})$$

とおく. このとき, $V_{[\omega]}$ は V の部分代数であり, $e_{[\omega]} := \sum_{i \in \mathcal{N}^{\text{out}}[\omega]} c_i$ が $V_{[\omega]}$ の単位元である. また, $E_{[\omega]}$ は $V_{[\omega]}$ の両側 ideal である. ここで次のようにおく (式 (2.1) 参照).

$$\mathfrak{h}_{[\omega]} := \{V_{[\omega]} \text{ の左かけ算作用素}\}, \quad H_{[\omega]} := \exp \mathfrak{h}_{[\omega]}, \quad \Omega_{[\omega]} := H_{[\omega]} e_{[\omega]}.$$

$V_{[\omega]}$ の等質開凸錐 $\Omega_{[\omega]}$ を, $\omega \in \mathcal{S}$ に対応する Ω の成分錐 (component cone) と呼ぶ.

各 $x \in V_{[\omega]}$ に対して, $E_{[\omega]}$ 上の線型作用素 $\varphi_{[\omega]}(x)$ を右乗法作用素によって定義する:

$$\varphi_{[\omega]}(x)\eta := \eta \triangle x \quad (\eta \in E_{[\omega]}).$$

$V_{[\omega]}$ の部分空間としての $E_{[\omega]}$ の内積の軽微な変更⁴ 後, 各 $\varphi_{[\omega]}(x)$ は自己共役作用素になる. $\varphi_{[\omega]}(x)$ を行列表示するために, $\mathcal{N}^{\text{out}}[\omega] = \{i_1 < \dots < i_t = \omega\}$ とする. このとき, $\{\varphi(c_{i_j}); j = 1, \dots, t\}$ は $E_{[\omega]}$ 上の直交射影作用素の完全系であるから, $E_{[\omega]}$ の正規直交基底を, まず $\text{Range } \varphi_{[\omega]}(c_{i_1})$ から, 次に $\text{Range } \varphi_{[\omega]}(c_{i_2})$ からというように順にとって定める. この正規直交基底に関する $\varphi_{[\omega]}(x)$ の実対称行列による表示を $\varphi_{[\omega]}^0(x)$ とする. $N_{[\omega]} := \dim E_{[\omega]}$ とおくと, $\varphi_{[\omega]}^0(x) \in \text{Sym}(N_{[\omega]}, \mathbb{R})$ である.

命題 5.1 (山崎-N[22])

(1) $\varphi_{[\omega]}^0 : V_{[\omega]} \rightarrow \text{Sym}(N_{[\omega]}, \mathbb{R})$ は左対称代数の単射準同型である:

$$\varphi_{[\omega]}^0(x \triangle y) = \varphi_{[\omega]}^0(x) \triangle \varphi_{[\omega]}^0(y) \quad \text{かつ} \quad \varphi_{[\omega]}^0(x) = 0 \implies x = 0.$$

(2) $\varphi_{[\omega]}^0$ は次の意味で最小である:

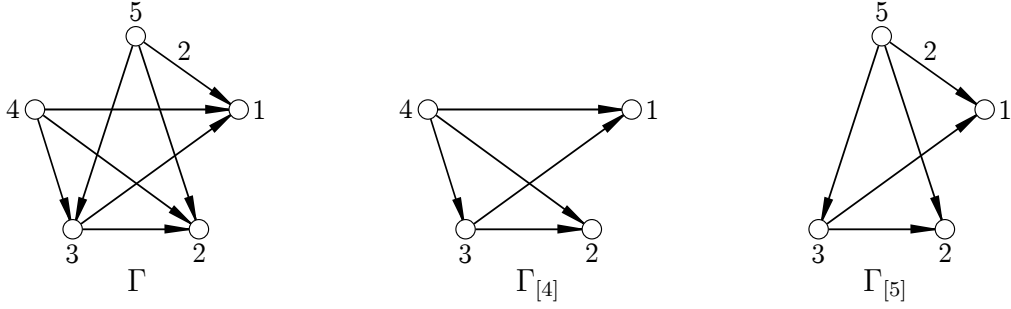
$\Phi : V_{[\omega]} \rightarrow \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ が左対称代数の単射準同型ならば, $N \geq N_{[\omega]}$ である.

(3) $\varphi_{[\omega]}^0(\Omega_{[\omega]}) = \varphi_{[\omega]}^0(V_{[\omega]}) \cap \mathcal{P}(N_{[\omega]}, \mathbb{R})$.

さらに, $\Omega_{[\omega]}^0 := \varphi_{[\omega]}^0(\Omega_{[\omega]})$ とおくと, $\varphi_{[\omega]}^0$ は

$H_{[\omega]}$ の $\Omega_{[\omega]}$ への単純推移的作用 と gx^tg の制限による $\Omega_{[\omega]}^0$ への単純推移的作用の間の共変関係を与える.

⁴ 必要な変更は $\|c_\omega\|_{E_{[\omega]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|c_\omega\|_{V_{[\omega]}}$ だけ.



例 5.2 ある Koszul–Vinberg 代数から描かれる重み付き向き付けグラフは上図左の Γ になっている。ただし、簡単のため、 $d_{ji} = 1$ のときは弧の上部には数字 1 を書いていない。 $\mathcal{S} = \{4, 5\}$ であり、各成分錐 $\Omega_{[\omega]}$ ($\omega = 4, 5$) の最小行列実現 $\Omega_{[\omega]}^0$ は

$$\Omega_{[4]}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & x_{31} & x_{41} \\ 0 & \lambda_2 & x_{32} & x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & \lambda_3 & x_{43} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & \lambda_4 \end{pmatrix} \gg 0 \right\}, \quad \Omega_{[5]}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & x_{31} \mathbf{e}_1 & x_{51} \\ {}^t \mathbf{0}_2 & \lambda_2 & x_{32} & x_{52} \\ x_{31} {}^t \mathbf{e}_1 & x_{32} & \lambda_3 & x_{53} \\ {}^t x_{51} & x_{52} & x_{53} & \lambda_5 \end{pmatrix} \gg 0 \right\}.$$

網かけ部分はどちらも双対 Vinberg 錐 Ω_{Vin}^* の実現である。 $\Omega_{[4]}^0$ では網かけ部分は Ω_{Vin}^* の最小サイズの行列実現であるが、 $\Omega_{[5]}^0$ ではそうでない。 また、 $\Omega_{[\omega]}^0$ ($\omega = 4, 5$) に単純推移的に働く下三角群は、いずれも対角成分 t_j がすべて正である次の $H_{[\omega]}^0$ である。

$$H_{[4]}^0 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & t_3 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & t_4 \end{pmatrix} \right\}, \quad H_{[5]}^0 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ {}^t \mathbf{0}_2 & t_2 & 0 & 0 \\ x_{31} {}^t \mathbf{e}_1 & x_{32} & t_3 & 0 \\ {}^t x_{51} & x_{52} & x_{53} & t_5 \end{pmatrix} \right\}. \quad \square$$

さて、各 $\omega \in \mathcal{S}$ に対して、 $\pi_{[\omega]} : V \rightarrow V_{[\omega]}$ を直交射影作用素とする。 $\pi_{[\omega]}$ は左対称代数の準同型である。 $\Omega_{[\omega]}^0$ ($\omega \in \mathcal{S}$) が揃ったところで、次の定理を述べておく。

定理 5.3 (山崎–N [22])

$$\Omega = \{x \in V; \varphi_{[\omega]}^0(\pi_{[\omega]}(x)) \gg 0 \ (\forall \omega \in \mathcal{S})\}.$$

次に $\mathcal{S} = \{\omega_1 < \dots < \omega_s\}$ とし、各 $\Omega_{[\omega_j]}^0$ ($j = 1, \dots, s$) をブロック対角形に並べて、

$$\Omega_{[\omega_1]}^0 \oplus \dots \oplus \Omega_{[\omega_s]}^0 \subset \mathcal{P}(N^0, \mathbb{R}) \quad (N^0 := N_{[\omega_1]} + \dots + N_{[\omega_s]}) \quad (5.4)$$

とする。 $\varphi^0 := (\varphi_{[\omega_1]}^0 \circ \pi_{[\omega_1]}) \oplus \dots \oplus (\varphi_{[\omega_s]}^0 \circ \pi_{[\omega_s]})$ は左対称代数の単射準同型 $V \rightarrow \text{Sym}(N^0, \mathbb{R})$ を与えるから、次の伊師氏による命題を像空間 $\varphi^0(V) \subset \text{Sym}(N^0, \mathbb{R})$ に適用すると（すなわち、行交換と列交換を行うと）、式 (5.1) の $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ の形になる。

命題 5.4 (伊師 [6])

$\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の部分空間 $\mathcal{W}$ が例 2.3 における左対称代数の積で閉じているなら、 N 次の置換行列 T が存在して、 $T \mathcal{W} {}^t T$ は式 (5.1) の $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ の形になる。

したがって、式 (5.2) の形の $\mathcal{P}_{\mathcal{V}} \subset \text{Sym}(N^0, \mathbb{R})$ によって Ω が実現される。この実現における λ_j ($j = 1, \dots, r$) の反復回数 n_j^0 は、式 (5.4) の各 $\Omega_{[\omega_k]}^0$ における λ_j の反復回数の $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathcal{S}$ にわたる和である。よって、 Ω から描かれるグラフの用語で書き直す

と、次のようになる．まず，頂点 j に対して，その**入元隣接点** (in-neighbors) の全体を $\mathcal{N}^{\text{in}}(j)$ で表す．すなわち， $\mathcal{N}^{\text{in}}(j) := \{k; [k \rightarrow j] \in \mathcal{A}\}$ ， $\mathcal{N}^{\text{in}}[j] := \mathcal{N}^{\text{in}}(j) \cup \{j\}$ とおくと， n_j^0 は次式で表され， $N^0 = n_1^0 + \cdots + n_r^0$ が成り立つ．

$$n_j^0 = \sum_{\omega \in \mathcal{S} \cap \mathcal{N}^{\text{in}}[j]} \dim V_{\omega j}.$$

$\omega \in \mathcal{S}$ に対してはつねに $n_\omega^0 = 1$ であることに注意．とくに， $n_r^0 = 1$ である．以上による Ω の実現が最小サイズの行列実現を与える．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 5.5 (N [18])

あるベクトル空間の系 $\mathcal{V}'$ による $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}'}$ ($N' = n'_1 + n'_2 + \cdots + n'_r$) によって， Ω が式 (5.2) の $\mathcal{P}_{\mathcal{V}'} = \mathcal{Z}_{\mathcal{V}'} \cap \mathcal{P}(N', \mathbb{R})$ として実現されているとする．このとき， $N^0 \leq N'$ が成立する．

例 5.6 例 5.2 におけるグラフ Γ を持つ Ω の最小サイズの行列実現は

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & 0 & x_{41} & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & 0 & x_{51}^{(1)} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{51}^{(1)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & x_{32} & 0 & x_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & x_{32} & 0 & x_{52} \\ \hline x_{31} & 0 & 0 & x_{32} & 0 & \lambda_3 & 0 & x_{43} & 0 \\ 0 & x_{31} & 0 & 0 & x_{32} & 0 & \lambda_3 & 0 & x_{53} \\ \hline x_{41} & 0 & 0 & x_{42} & 0 & x_{43} & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & x_{51}^{(1)} & x_{52}^{(2)} & 0 & x_{52} & 0 & x_{53} & 0 & \lambda_5 \end{array} \right) \gg 0 \right\}. \quad \square$$

以上では，グラフを補助手段にして等質開凸錐の実現を得たのであるが，対応

$$\Omega \mapsto \Gamma(V) : \text{等質開凸錐} \mapsto \text{重み付き向き付けグラフ}$$

について，講演では次の (1)～(5) にも触れる予定である．

- (1) この対応は全射ではない．
- (2) 互いに線型同型ではない等質開凸錐が連続無限個存在して，同じ重み付き向き付けグラフを与える．
- (3) 19 次元の互いに線型同型ではない二つの等質開凸錐で，その成分錐がすべて線型同型であるものが存在する (山崎氏による：[22] 参照)．
- (4) 重み付き向き付けグラフですべての重み d_{ji} が $d_{ji} \leq 1$ をみたすとき，それが等質開凸錐から来るための必要十分条件が知られている (Letac–Massam [12], Ishi [5])．
- (5) $\dim \Omega \leq 10$ のときは，**金行–辻条件**をみたす重み付き向き付けグラフによって既約な等質開凸錐を分類できる ([11] による)．線型同型を除くとその個数は 135 個あって，その内で対称錐は $\mathbb{R}_{>0}$ ， k 次元 Lorentz 錐 Λ_k ($k = 3, \dots, 10$)， $\mathcal{P}(3, \mathbb{R})$ ， $\mathcal{P}(4, \mathbb{R})$ ， $\mathcal{P}(3, \mathbb{C})$ の 12 個である． Λ_3 は $\mathcal{P}(2, \mathbb{R})$ に， Λ_4 は $\mathcal{P}(2, \mathbb{C})$ に， Λ_6 は $\mathcal{P}(2, \mathbb{H})$ に， Λ_{10} は $\mathcal{P}(2, \mathbb{O})$ にそれぞれ線型同型であることに注意．

本年 3 月に亡くなられた吉澤尚明先生に本稿を献じて，先生のご冥福を心静かにお祈りします．

参考文献

- [1] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, 1994.
- [2] P. Graczyk and H. Ishi, Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps, *J. Math. Soc. Japan*, **66** (2014), 317–348.
- [3] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, *J. Lie Theory*, **11** (2001), 155–171.
- [4] H. Ishi, On symplectic representations of normal j -algebras and their application to Xu’s realizations of Siegel domains, *Diff. Geom. Appl.*, **24** (2006), 588–612.
- [5] H. Ishi, On a class of homogeneous cones consisting of real symmetric matrices, *Josai Math. Monographs*, **6** (2013), 71–80.
- [6] H. Ishi, Matrix realization of a homogeneous cone, *Lecture Notes Comput. Sci.*, **9389** (2015), 248–256, Springer, Cham.
- [7] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, *Math. Z.*, **259** (2008), 697–711.
- [8] H. Ishi and T. Nomura, An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone, In “Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV”, 129–134, World Scientific, Singapore, 2009.
- [9] C. Kai, A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps, *J. Math. Soc. Japan*, **60** (2008), 1107–1134.
- [10] C. Kai and T. Nomura, A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps, *J. Math. Soc. Japan*, **57** (2005), 195–215.
- [11] S. Kaneyuki and T. Tsuji, Classification of homogeneous bounded domains of lower dimensions, *Nagoya Math. J.*, **53** (1974), 1–46.
- [12] G. Letac and H. Massam, Wishart distributions for decomposable graphs, *Ann. Statistics*, **35** (2007), 1278–1323.
- [13] H. Nakashima, Basic relative invariants of homogeneous cones, *J. Lie Theory*, **24** (2014), 1013–1032.
- [14] H. Nakashima, Characterizations of symmetric cones by means of the basic relative invariants of homogeneous cones, *Adv. Pure Appl. Math.*, **7** (2016), 143–153.
- [15] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, *Kyushu J. Math.*, **67** (2013), 163–202.
- [16] H. Nakashima and T. Nomura, Basic relative invariants on the dual clans obtained by representations of Euclidean Jordan algebras, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **59** (2014), 443–451.
- [17] T. Nomura, Focusing on symmetry characterization theorems on homogeneous Siegel domains, *Sugaku Expositions*, **23** (2010), 47–67 (等質 Siegel 領域の対称性条件をめぐって, *数学*, **57** (2005), 350–368 の拡大英語版).
- [18] T. Nomura, Minimum size matrix realization of a homogeneous cone, to appear.
- [19] T. Nomura, Supplement to Vinberg’s paper on convex homogeneous cones, to appear.
- [20] I. Piatetski-Shapiro, On a problem proposed by E. Cartan, In “Selected works of Ilya Piatetski-Shapiro, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 193–195.
- [21] È. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 340–403.
- [22] T. Yamasaki and T. Nomura, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, *Kyushu J. Math.*, **69** (2015), 11–48.
- [23] T. Yamasaki and T. Nomura, A characterization of symmetric cones by the degrees of basic relative invariants, *Kyushu J. Math.*, **70** (2016), 237–257.