

Time entire solutions of Allen-Cahn equation in the star graph

神保 秀一 (北海道大学・大学院理学研究院)

共同研究者: 森田 善久 (龍谷大学), 高澤佳宏 (北海道大学)

概要: 星型グラフにおけるアレン・カーン型方程式 (または南雲型方程式) の解の挙動および時間全域解の存在や構造を考える.

本講演で扱うのは, ある種の非線型放物型方程式で, 様々な現象の (単純化された) モデル方程式として現れる. この方程式は, 金属等の物質の状態の相転移の問題ではアレン・カーン方程式, 神経科学分野では南雲方程式と呼ばれている¹. その際, 現象において指標となる変量である, 物質の状態や場を表す関数 u の時間発展を規定する方程式とし重要な役割を担っている. 本講演では自然現象等の背景からは離れて数学として方程式解の現象を考えてゆきたい.

§0. アレン・カーン (Allen-Cahn) 方程式と $\mathbb{R}$ における進行波解

上記の方程式の 1 次元空間 $\mathbb{R}$ のケースにおいて解の様子を見る.

以下の半線型放物型方程式を 1 次元空間 $\mathbb{R}$ において考える.

$$(0.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (0 < t < \infty, x \in \mathbb{R})$$

未知関数 $u = u(t, x)$ は時空間上の関数であり, 非線形項 $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ には, 次の双安定型 (Bistable type) の条件を満たしていると仮定する.

$$(F) \quad \begin{cases} \exists a \in (0, 1) & s.t. \quad f(0) = 0, f(a) = 0, f(1) = 0, \\ f(\xi) > 0 & (\xi \in (-\infty, 0) \cup (a, 1)), \quad f(\xi) < 0 \quad (\xi \in (0, a) \cup (1, \infty)) \end{cases}$$

典型例は $f(u) = u(1-u)(u-a)$ である.

方程式 (0.1) に初期条件 $u(0, x) = \Phi(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) を課して, 解の存在 ($t \geq 0$ の範囲で) や $t \rightarrow \infty$ に対する漸近挙動がどうなるか? ということが自然な課題となる. これが詳細に研究されたのは 1970 年代以降と思われるが², 初期の代表的な仕事としては Aronson-Weinberger (1975) ([8]), Fife-MacLeod (1977) ([6]) などが上げられる. その結果の一つを述べるが, その前に用語を準備をする.

¹それ以外にも生態や生命科学でも現れる

[進行波解]

次のような形の解を進行波という. 時間に依らず関数の形状が一定で空間を右または左に移動してゆくためこの名称がついている.

$$u(t, x) = \phi(x - ct)$$

c は移動速度に対応する. 簡単な計算でこの u が (0.1) の解であることは $\phi(z)$ が次の常微分方程式の解であることと同等となること, が言える.

$$(0.2) \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} + c \frac{d\phi}{dz} + f(\phi) = 0 \quad (z \in \mathbb{R})$$

(0.1) の解 u をこの形で求めるに際して c も未知変数となる. (0.2) については次の結果が知られている.

定理. ある $c \in \mathbb{R}$ が一意に存在して (0.2) は次のような条件 (*) を満たす解 $\phi = \phi(z)$ をもつ.

$$(*) \quad \phi'(z) < 0 \quad (z \in \mathbb{R}), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = 0$$

さらに積分値 $\int_0^1 f(\xi) d\xi$ と c の符号は一致する. これは積分値が 0 ゼロと $c = 0$ が同値であることも意味する. 十分大きな時刻で波形が空間的に単調減少であることからフロント解と言われる. 参考文献: 二宮 [10].

さて Fife-McLeod [6] で得られた結果を述べる.

定理. $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 $\Phi(x)$ が

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) < a, \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) > a$$

ならば (0.1) は, この初期条件の下で解 $u = u(t, x)$ を持ち, $t \rightarrow \infty$ に対しては, ある x_0 があって, 次の性質を満たす.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - \phi(x - x_0 - ct)| = 0.$$

この結果が主張することは, 初期条件 Φ に制約はあるが, そこから出発した (0.1) の

解 $u(t, x)$ が長時間の経過によって進行波解に漸近することである. 進行波解はすべての時間帯 $-\infty < t < \infty$ で存在する特殊な解である. 力学系の言葉で言えばアトラクター (もどき?) であり方程式の解の全体を総括する存在と言える. 以下, 全時間帯で存在する解に対して時間全域解 (Time entire solution) と呼ぶことにする. これは力学系で言えば 1 次元不変集合をなしている. もしこれらを全部求めることができれば (0.1) の作る力学系の重要な不変部分集合を十分理解したと大いに喜んで良いと思う. さて近年 $\mathbb{R}$ 上の問題においても時間全域解について進行波解ではないものが知られ, 特に, フロントの合併, 衝突, 消滅などを有する時間全域解の構成などが成されている. それらの内容と文献については, 論説: 二宮-森田, 反応拡散方程式における進行波解と時間全域解, 数学 57 (2007), 225-243 を参照されたい.

§1. 星型グラフとアレン・カーン方程式

筆者の動機は前節で述べた時間全域解を、より一般の非有界領域におけるアレン・カーン方程式に対して考察することである。本講演は一番単純な複雑領域である星形グラフにおいて上の課題を扱う。まず星形グラフを定める。3本の半直線を用意してその3つの端点同士を接合して連結させた集合 Ω を考える。すなわち3つの半無限区間 $(0, \infty)$ の和集合を考え、それぞれの境界 0 を同一視した空間を Ω を定める。

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{O\}$$

Ω において次のアレン・カーン方程式型方程式を考える。

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + f(u) \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega$$

ここで L は Ω におけるラプラス作用素である。

非線型項 $f = f(u)$ は前節と同様で条件 (F) を満たしている (Bistable Nonlinearity)。

[各枝 Ω_i での座標と方程式の表現]

各半直線 Ω_i には座標系 $x_i > 0$ を定める。

$$\Omega_i = \{x_i \in \mathbb{R} \mid x_i > 0\} \quad \text{for } i = 0, 1, 2.$$

これによって端点 $x_i = 0$ が交差点 O に対応する。

さて Ω 上の関数 u を Ω_i に制限したものを u_i と記述する。また、この状況を

$$(1.2) \quad u_i = u|_{\Omega_i} \quad \implies \quad u = [u_0, u_1, u_2]$$

と記述する。これはベクトルではなく各枝における関数の表現を記したもの。さてこの記法を用いることで方程式 (1.1) は以下のように記述される。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + f(u_i) & (t > 0, x_i > 0, i = 0, 1, 2), \\ u_0(t, 0) = u_1(t, 0) = u_2(t, 0) & (t > 0), \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_0}(t, +0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(t, +0) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(t, +0) = 0 & (t > 0). \end{cases}$$

[初期値問題]

時間全域解へのアプローチのため制約の少し強い初期値関数を考える。 $\Phi(x) = [\Phi_0(x_0), \Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)] \in BC(\Omega)$ (有界連続な関数のクラス)。

仮定: Φ は各枝の無限遠で極限值を持つ (無限遠点値確定条件).

$$(1.3) \quad \exists \lim_{x_i \rightarrow \infty} \Phi_i(x_i) \quad (i = 0, 1, 2),$$

初期条件

$$(1.4) \quad u(0, x) = \Phi(x).$$

命題 1. (1.1), (1.4) は解 $u = u(t, x)$ ($(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$) をもつ.

命題 2. 条件 (1.3) の下で, 各 $t > 0$ に対し極限值

$$\lim_{\Omega_i \ni x_i \rightarrow \infty} u_i(t, x_i) =: \sigma_i(t) \quad \text{for } t > 0 \quad (i = 0, 1, 2).$$

が存在して, $\sigma_i(t)$ は

$$\frac{d}{dt} \sigma_i(t) = f(\sigma_i(t)) \quad \text{for } t > 0, \quad \sigma_i(0) = A_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

を満たす. ただし $A_i = \lim_{x_i \rightarrow \infty} \Phi_i(x_i)$ である.

命題 3. 比較原理, 上解 (Upper solution), 下解 (Lower solution) の方法が有効.

(証) 半線型放物型方程式の初期値問題に対する基本的な文献 Sattinger (1976) [2] が適用される. $\square$

[Heat Kernel G の基本性質]

$$G(t, x, y) = G(t, y, x), \quad \int_{\Omega} G(t, x, y) dy = 1$$

ある $c > 0, \gamma > 0$ が存在して

$$0 \leq G(t, x, y) \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-d(x, y)^2}{\gamma t}\right), \quad |\nabla_x G(t, x, y)| \leq c \frac{d(x, y) + 1}{t^{3/2}} \exp\left(\frac{-d(x, y)^2}{\gamma t}\right) \\ (t > 0, x, y \in \Omega)$$

ここで $d(x, y)$ = distance between x and y .

$$\int_{\Omega} |G(t, x, y) - G(s, x, y)| dy \leq \frac{c|t - s|}{\min(t, s)}, \quad (t > 0, s > 0, x \in \Omega).$$

[星型グラフにおける Heat Kernel]

Ω における heat kernel $G = G(t, x, y)$ 次の式で与えられる.

$$t > 0, x = x_i \in \Omega_i, y = y_j \in \Omega_j \quad (0 \leq i, j \leq 2),$$

$$G(t, x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{1/2} \left(\exp\left(\frac{-(x_i - y_i)^2}{4t}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{-(x_i + y_i)^2}{4t}\right) \right) & (0 \leq i = j \leq 2) \\ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{-(x_i + y_j)^2}{4t}\right) & (i \neq j, 0 \leq i, j \leq 2) \end{cases}$$

§2. 星型グラフと時間全域解 (Balanced case)

時間全域解の存在の話始める.

定理 1 (J.-Takazawa). f に対してさらに, 次を仮定する

$$(2.1) \quad \int_0^1 f(\xi) d\xi = 0 \quad (\text{バランス条件})$$

このとき, 次の条件を満たす時間全域解 $u = u(t, x)$ in $(-\infty, \infty) \times \Omega$ が存在する.

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= L[u] + f(u) \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ \lim_{x \in \Omega_0, |x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 1, \quad \lim_{x \in \Omega_i, |x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, x) = 1 \quad (x \in \Omega). \end{aligned}$$

[証明の準備]

($\mathbb{R}$ における静止解) §0 において述べた $\mathbb{R}$ 上の進行波解 u がバランス条件の下では静止する. すなわち ϕ 自身になってしまう. すなわち $\phi = \phi(z)$ ($-\infty < z < \infty$)

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + f(\phi) = 0 \quad (-\infty < z < \infty), \quad \phi(-\infty) = 1, \quad \phi(+\infty) = 0$$

が成立する. さてバランス条件の下では定常解はあるであろうか.

命題 5. 仮定 (2.1) の下で

$$L[u] + f(u) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad u(\infty_0) = 1, \quad u(\infty_1) = u(\infty_2) = 0.$$

となる u は存在しない.

(証) 相平面解析が適用される.

定理 1 の証明の流れ

(近似解) パラメータ $\tau > 0$ を考え, 関数

$$w^{(\tau)}(x) = \begin{cases} \phi(-x_0 - \tau) & (x_0 \in \Omega_0) \\ \phi(x_i - \tau) & (x_i \in \Omega_i), \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

を考える. 命題 1 を適用して, 初期条件

$$u(0, x) = w^{(\tau)}(x) \quad (x \in \Omega)$$

を与えた (1.1) の解を得て $u^{(\tau)}(t, x)$ と記述する.

補題 6. $\lim_{t \rightarrow \infty} u^{(\tau)}(t, x) = 0$ ($\forall x \in \Omega$). また $\tau_1 < \tau_2$ ならば,

$$u^{(\tau_1)}(t, x) < u^{(\tau_2)}(t, x) \quad ((t, x) \in (0, \infty) \times \Omega).$$

この補題を適用することで一意の時刻 $s = s(\tau)$ があって

$$(2.2) \quad u^{(\tau)}(s(\tau), O) = a.$$

となる.

補題 7. もし $\tau_1 < \tau_2$ ならば $s(\tau_1) < s(\tau_2)$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} s(\tau) = \infty$.

さて時間をずらして近似解を作る. $\hat{u}^{(\tau)}(t, x)$ (for $\tau > 0$) を次のように定める.

$$(2.3) \quad \hat{u}^{(\tau)}(t, x) = u^{(\tau)}(t + s(\tau), x) \quad \text{for } (t, x) \in (-s(\tau), \infty) \times \Omega.$$

補題 8. 任意の $T > 0$ に対して $c(T) > 0$ が存在して

$$|\nabla_x \hat{u}^{(\tau)}(t, x)| \leq c(T) \quad \text{for } x \in \Omega, -T \leq t \leq T, s(\tau) \geq T + 1.$$

補題 9. 任意の $T > 0, \epsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ があって

$$|\hat{u}^{(\tau)}(t, x) - \hat{u}^{(\tau)}(s, x)| < \epsilon$$

for

$$s(\tau) \geq T + 1, |t| \leq T, |s| \leq T, |s - t| < \delta, x \in \Omega.$$

これらの評価は $\{\hat{u}^{(\tau)}(t, x)\}_{\tau > 0}$ が $(-\infty, \infty) \times \Omega$ の任意のコンパクト集合で一様同等

連続であることを示している. アスコリ・アルゼラの定理より収束する部分列を得ることができる. すなわち $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < \dots \rightarrow \infty$ かつ $\hat{u}^{(\tau_p)}(t, x) \rightarrow u(t, x)$ $\mathbb{R} \times \Omega$ (広義一様収束) が言える. 一方, 近似列の無限遠点 the end points $\infty_0, \infty_1, \infty_2$ における挙動の評価をエネルギー関数を通じて実行しする.

[Behavior of $\widehat{u}^{(\tau)}$ in far region of Ω]

エネルギー汎関数

$$\mathcal{H}(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + H(w) \right) dx$$

for $w \in L^\infty(\Omega)$ such that $\nabla w \in L^2(\Omega)$, $H(w) \in L^1(\Omega)$ where

$$H(\xi) = - \int_0^\xi f(\eta) d\eta.$$

バランス条件によってこの $\mathcal{H}$ がリアプノフ汎関数として働く.

補題 10. ある $d > 0$ があって $\mathcal{H}(w^{(\tau)}) \leq d$ ($\forall \tau \geq 0$). また

$$\mathcal{H}(\widehat{u}^{(\tau)}(t, \cdot)) \leq \mathcal{H}(w^{(\tau)}) \quad (t \geq -s(\tau), \tau > 0).$$

これによって

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\tau > 0} \sup_{x_0 \geq R} |u_0(t, x_0) - 1| = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\tau > 0} \sup_{x_i \geq R} |u_i(t, x_i)| = 0 \quad (i = 1, 2)$$

for $\forall t \in \mathbb{R}$.

§3. 星型グラフと時間全域解 (Unbalanced case)

もし $\int_0^1 f(\xi) d\xi > 0$ ならどうなるか ?

$$(3.1) \quad \int_0^1 f(\xi) d\xi > 0$$

を仮定する. このとき (1.1) に無限遠点条件

$$(3.2) \quad u(t, \infty_0) = 1, u(t, \infty_1) = u(t, \infty_2) = 0$$

を課した問題に定常解が生じる可能性が出てくることがある. これは相平面解析 (2次元の常微分方程式) に調べることができる. いずれにしても定常解はその解自体が時間全域解と言えるが波が領域を移動するわけではないのでそれだけでは残念なので, 非自明な時間全域解を考えたい.

非自明な時間全域解

定理 2 (J.-Morita JDE '19). (3.1) を仮定する (すなわち $c > 0$ の場合). このとき, 時間後方解 $u = u(t, x)$ ($t \leq 0, x \in \Omega$) が存在する

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= L[u] + f(u) \quad (t, x) \in (-\infty, 0] \times \Omega, \\ \lim_{x \in \Omega_0, |x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 1, \quad \lim_{x \in \Omega_i, |x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (t < 0), \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x_0 \in \Omega_0} |u_0(t, x_0) - \phi(x_0 - z_0 - ct)| &= 0. \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \sup_{x_i \in \Omega_i} |u_i(t, x_i)| &= 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

この定理の証明はさらなる技術的な準備が必要なので省略する.

この解は $(-\infty, 0]$ で存在しているので命題 1 を適用すればプラスの方向には解けるので時間全域解に延長できる. さてそれでは t が増大するときどうなるのであろうか? 定常解に収束するとかやっぱりフロントが交差点を通過して無限遠点に行くのであろうか. そっちの方向に話をすすめる.

[定常解の存在・非存在]

まず次の結果から始める.

命題 11.

- (I) $3F(a) + F(1) < 0 \iff (1.1), (3.2)$ に定常解が 2 つ $w^{(1)}, w^{(2)}$ が存在する.
- (II) $3F(a) + F(1) = 0 \iff (1.1), (3.2)$ にちょうど一つの定常解 $w^{(1)} = w^{(2)}$ が存在する.
- (III) $3F(a) + F(1) > 0 \iff (1.1), (3.2)$ には定常解が存在しない.

定理 2 で存在を示した後方解 $u(t, x)$ ($t \leq 0, x \in \Omega$) について $t = 0$ から出発して $t \geq 0$ 方向に解くとどうなるかということだが上の命題 11 の 3 つの場合で述べると (I), (II) では $w^{(1)}$ に近づいて行く. (III) では近づく先がないため 1 に各点収束する.

(I) の場合について定常解の安定性の結果を述べる.

定常解の安定性とヘテロクリニック軌道

命題 12

- (I) $3F(a) + F(1) < 0$ の場合, $w^{(1)}(x) < w^{(2)}(x)$ であり $w^{(1)}$ は安定, $w^{(2)}$ は不安定となる.
- (II) $3F(a) + F(1) < 0$ の場合は $w^{(1)} = w^{(2)}$ は上方向に不安定となる, すなわち不安定である.

定理 3 (ヘテロクリニック軌道). (I) の場合: 時間全域解 $u^{(1)}, u^{(2)}$ があり

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x) &\longleftarrow u^{(1)}(t, x) \longrightarrow w^{(2)}(x) \\ &(-\infty \longleftarrow t) \quad (t \longrightarrow \infty) \\ w^{(2)}(x) &\longleftarrow u^{(2)}(t, x) \longrightarrow 1 \\ &(-\infty \longleftarrow t) \quad (t \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる.

(II) の場合 :

$$\begin{aligned} w^{(2)}(x) &\longleftarrow u^{(2)}(t, x) \longrightarrow 1 \\ &(-\infty \longleftarrow t) \quad (t \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

(III) の場合 : $u = u(t, x)$ が全部.

文献

- [1] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Math. 840 Springer, 1981.
- [2] D. Sattinger, On the stability of waves of nonlinear parabolic systems, Adv. Math **22** (1976), 312-355.
- [3] 二宮, 森田, 反応拡散方程式における進行波解と全域解, 数学 57 (2007), 225-243.
- [4] Y. Fukao, Y. Morita and H. Ninomiya, Some entire solutions of the Allen-Cahn equation, Taiwanese J. Math. 8 (2004), 15-32.
- [5] H. Yagisita, Backward global solutions characterizing annihilation dynamics of travelling fronts, publ. RIMS 39(2003), 117-164.
- [6] C. Fife, J.B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, Arch. Rat. Mec. Anal. 65 (1977), 335-361.
- [7] D.B.Aronson, H.F.Weinberger, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, nerve propagation, Proc. Tulane Program in Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math. 446 Springer New York, 1975.
- [8] D.B.Aronson, H.F.Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics, 30 (1978), 33-76.
- [9] M. Barlow, T. Coulhon, A. Grigori'yan, Manifolds and graphs with slow heat kernel decay, Inventiones, Math. 144 (2001), 609-649.
- [10] 二宮広和, 侵入伝播と拡散方程式、共立出版, 2014