

非線形発展方程式の臨界正則性と特異極限

小川卓克

(東北大学・数理科学連携研究センター/大学院 理学研究科)¹

1. 臨界型非線形発展方程式

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Banach 空間 $X(\mathbb{R}^n)$ で, 未知関数 $u = u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ の満たす半線形発展方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0, & t = 0. \end{cases} \quad (\text{AE})$$

ここで, 作用素 $\mathcal{L}$ を空間変数 $x \in \mathbb{R}^n$ に対する Laplace 作用素 $-\Delta = -\sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2$, 非線形項 F を u の単項式 $F(u) = \lambda|u|^{p-1}u$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) としたとき (AE) は次の非線形熱方程式 (以下 NLH と略す) となる:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{NLH})$$

また $\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\Delta$, $F(u) = -i\lambda|u|^{p-1}u$ としたとき非線形 Schrödinger 方程式 (NLS と略される) となる:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

非線形項 $F(u)$ に解の一階微分 ∇u を含む場合, ベクトル値解 u の発散が零という制約の下で, 流体力学の基礎方程式として著名な非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (以下 NS) もこの形となる:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

同様に渦度 Navier-Stokes 方程式, 半導体のキャリアー移動を説明する移流拡散方程式, 超伝導モデルである Ginzburg-Landau 方程式, 液晶モデルである調和写像熱流, 生物同士や生化学物質の相互作用をモデル化した反応拡散方程式, さらに物性問題で議論される Allen-Cahn 方程式など, 広範な問題がこうした形式で記述される.

初期値問題 (AE) における基本的な問題として, 「適切性の問題」がある. これは関数クラス $X = X(\mathbb{R}^n)$ に置いて問題 (AE) の解を安定に得ることができるか? を問う問題で, 解の一意存在性や初期値に対する安定性 (連続性) を問題に

¹ e-mail:ogawa@math.tohoku.ac.jp
<http://www.racmas.tohoku.ac.jp/about.html>

する. 空間 X を $1 \leq p \leq \infty$ に対する p 乗可積分関数の空間 (Lebesgue 空間) $L^p(\mathbb{R}^n)$ とした場合に, $L^p(\mathbb{R}^n)$ のスケール変換不変性に起因して, 方程式と解空間の norm を同時に不変にするスケール変換が存在する. 例えば問題² (NLH) の解 $u = u(t, x); \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ はパラメータ $\beta > 0$ に対するスケール変換

$$u_\beta(t, x) \equiv \beta^{\frac{2}{p-1}} u(\beta^2 t, \beta x), \quad \beta > 0 \quad (1.1)$$

が (NLH) の方程式を満たすことから, これを不変スケールと呼ぶ. こうした変換で不変な関数のクラスで問題を考えることが, スケール変換不変性を持つ問題の焦点であることは Caffereli-Korn-Nirenberg らにより指摘されているが, そのもっとも初期の考えは Fujita-Kato [11] による, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS) の初期値境界値問題の可解性にさかのぼる. このためこうした問題設定を **Fujita-Kato の原理** と呼ぶ. $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上の Fourier 変換と逆変換, $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq \infty$ に対して基礎空間 X を斉次 Sobolev(-Riesz) 空間 $\dot{H}^{s,q}(\mathbb{R}^n)$;

$$\dot{H}^{s,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); |\nabla|^s f = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \widehat{f}] \in L^q(\mathbb{R}^n) \right\}$$

とし, その上での Bochner 空間を $L^\theta(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,q}(\mathbb{R}^n))$ としたとき

$$u \in L^\theta(\mathbb{R}_+; \dot{H}^{s,q}(\mathbb{R}^n))$$

に対して, (1.1) で与えた変換が不変となる条件は

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = \frac{2}{p-1} + s \quad (1.2)$$

となる. このクラスは問題の強解 (方程式を函数として満たす解・安定な解) を得る際, あるいはより弱い解 (方程式を超函数として満たす解) を得たときに達成すべき, 解の正則性の指標 (安定化指標) であることがわかる. 後者の視点で, ほぼ同時期に Serrin [40] らによりこうした特性が指摘されている. 非線形熱方程式 (NLH) に対する適切性の研究は, その後 Weissler [48], [49] により, 時間局所的に安定となる限界が $\theta = \infty$, $s = 0$ のときに解明された (時間局所適切性). すなわち以下に示す各条件の下での $C([0, T]; L^q(\mathbb{R}^n))$ の強解の適切性が知られている:

$$\begin{cases} q > \frac{n}{2}(p-1), & p > 1 + \frac{2}{n}, \\ q > 1, & p = 1 + \frac{2}{n}, \\ q \geq 1, & 1 < p < 1 + \frac{2}{n}. \end{cases}$$

非線形項のべきが $p = 1 + \frac{2}{n}$ のときスケール臨界指数 $\theta = \infty$, $s = 0$, $q = 1$ では時間局所的に非適切となる (Brezis-Cazenave [5]). ここで $p = 1 + \frac{2}{n}$ は Fujita [10] により得られた, (NLH) の正値解が有限時刻で爆発して解がその後に延長できなくなる臨界指数 (いわゆる Fujita 臨界指数) である. この指数は同時にゲージ不変型非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ に対する非線形散乱の成立限界である Barabu-Ozawa 臨界指数ともなる (Ozawa [36]). こうした Fujita 臨界指数あるいは Sobolev 臨界指数は, 問題のスケール不変性による普遍性が, 時間大域的可解

² 数学的に初めて取り扱った Fujita [10] にちなんで Fujita 型方程式と呼ばれる.

性や時間局所的安定性のみならず、方程式の型を超えた臨界を同時に与えることを示唆している (cf. [18]). 一方、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS) では、臨界指数 $p = 1 + \frac{2}{n}$ は、空間 2 次元 ($n = 2, p = 2$) に相当し、その場合 $q = 1$ は「適切」の範囲に含まれることが知られている (Giga [12]).

類似の問題はスケール臨界性を持つ他の非線形偏微分方程式にも現れる. とりわけ、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間大域的可解性は、ミレミアム問題として取り上げられたため注目度が高い. u に対する不変スケールが $u_\beta(t, x) = \beta u(\beta^2 t, \beta x)$ であることから (1.2) に相当する関係は

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = 1 + s$$

で与えられ $\theta = \infty$ のとき, (NS) の時間局所適切性を分類すると以下のようになる: $I = (0, T)$ としてある $T > 0$ に対して

$$\begin{cases} C(I; \dot{H}^{-1+\frac{n}{q}, q}(\mathbb{R}^n)), & \text{特に } q = n \quad C(I; L^n(\mathbb{R}^n)), \\ C(I; \dot{B}_{q, \sigma}^{-1+\frac{n}{q}}(\mathbb{R}^n)), & 1 \leq q < \infty, 1 \leq \sigma \leq \infty, \\ C(I; VMO(\mathbb{R}^n)) \end{cases}$$

で時間局所適切となる. ここで斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{p, \sigma}^s(\mathbb{R}^n)$ は $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を Littlewood-Paley の 2 進周波数単位分解, $1 \leq p, \sigma \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ として

$$\|f\|_{\dot{B}_{p, \sigma}^s} \equiv \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sj} \|\phi_j * f\|_p^\sigma \right)^{1/\sigma} < \infty$$

を満たすものとする (cf. [45]). これらの設定はいずれもスケール不変空間となっているので、小さい初期値に対して時間大域的適切性も成立する³. 一方、もっとも広い Besov 空間を基礎空間とした端点指数のクラス $C(I; \dot{B}_{\infty, \sigma}^{-1}(\mathbb{R}^n))$ ($1 \leq \sigma \leq \infty$) では問題 (NS) は非適切となることが知られている ([4], [46], [50]).

近年、こうした状況が、より複雑でスケール臨界性を持たない非線形偏微分方程式にも現れることが認識されるようになった. 特に等温条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対しては Danchin [7] による先駆的な結果が知られる. さらに、半導体モデル方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.3)$$

は単極型モデルと呼ばれるが、接合型トランジスタの動作モデルである双極型では電荷密度が二種類 (u_+, u_-) に分割され、それに応じて非線形干渉の対称性が低下するために、解ける限界空間が狭くなり斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{q, \sigma}^{-2+\frac{q}{n}}$ に対して $q < 2n$ に制限される (Iwabuchi [16], Iwabuchi-Ogawa [19]). この事情はちょうど非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS) と圧縮性 Navier-Stokes 方程式のそれぞれの局所可解性の限界空間とほぼ一致する ([6], [20]).

³ VMO = vanishing mean oscillation = C_0 の BMO に依る完備化.

表 1: Navier-Stokes 方程式 (NS) と移流拡散方程式 (DD) の時間局所適切臨界

問題	非圧縮性 (NS)	等温圧縮性 (NS)	単極型 (DD)	双極型 (DD)
適切	$1 \leq q < \infty$	$1 \leq q < 2n$	$1 \leq q < \infty$	$1 \leq q < 2n$
非適切	$q = \infty$	$2n < q \leq \infty$	$q = \infty, \sigma > 2$	$2n < q \leq \infty$

これらの結果は、主に非線形構造の解析学的な対称性に起因し、圧縮性と非圧縮性の Navier-Stokes 方程式では、非圧縮条件 $\operatorname{div} u = 0$ の有無による、非線形項の発散形式の可否に大いに影響され、発散零-回転零積構造 (div-curl 構造) による特殊構造が解析的な積評価に影響を及ぼすことによる。

2. 移流拡散方程式

関連する結果を述べるために、次の具体的な問題を挙げる。 $\alpha \geq 1, \kappa = \pm 1$ として次の移流拡散方程式 (drift-diffusion equation) の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{DD})$$

ここで $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ は物質や生物の密度、 $\psi = \psi(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ は重力や電気ポテンシャル、あるいは化学的誘引物質の濃度 (あるいはポテンシャル) を表す未知関数で、 κ は結合定数である。この問題は、 $\alpha = 1, \kappa = -1$ のときに、半導体内の電荷キャリア移動の現象モデルとして Mock [25] により取り上げられ、 $\alpha = 1, \kappa = 1$ の場合に重力下の空間物質の質量を平均的に表す Chandrasekhar モデルとして知られる。後者の場合、 u は天体や星間ガスの平均的密度であり、 ψ は重力ポテンシャルを表す。さらに、方程式 (DD) は $\alpha = 1$ のとき走化性粘菌の挙動を表す反応拡散方程式である (Patlak-) Keller-Segel 方程式系 ([23], [37]) の初期値問題：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{\tau} \partial_t \psi - \Delta \psi + \lambda \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0, \psi(0, x) = \psi_0(x), & t = 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

の $\lambda = 0$ のときの緩和時間係数 $\tau \rightarrow \infty$ の極限と考えられ、走化性粘菌の胞子形成挙動を説明する簡易モデルとして Jäger-Luckhaus [21], Nagai [26], Bilar [2], Nagai-Senba-Yoshida [28] らによって取り上げられた。その後、爆発的な研究の進展を迎え解の質的な記述にいたる研究が知られる (Giga-Mizoguchi-Senba [13], Naito-Senba [29], Senba [39], Suzuki [43])。移流拡散方程式にもいくつかの臨界指数が存在し、その指数を境目にして解の挙動が大きく変化する (Kimijima-Nakagawa-Ogawa [15], [31], Sugiyama [42])。冒頭に述べた Fujita 型問題 (NLH) とは変分構造を介した双対構造 (Toland 双対性) を持っており、以下のような臨界指数の対応関係がある⁴。

⁴ 大塚 浩史氏 (金沢大・理工) の指摘による。Toland [44], Suzuki [43] を参照

表 2: (NLH) と (DD) に対する Toland 双対性

問題/臨界性	変分指数	Sobolev 臨界	質量臨界	Fujita 臨界
NLH	$p + 1$	$p + 1 = 2 + \frac{4}{n-2}$	—	$p + 1 = 2 + \frac{2}{n}$
NLS	$p + 1$	$p + 1 = 2 + \frac{4}{n-2}$	$p + 1 = 2 + \frac{4}{n}$	$p + 1 = 2 + \frac{2}{n}$
移流拡散 (DD)	α	$\alpha = 2 - \frac{4}{n+2}$	$\alpha = 2 - \frac{2}{n}$	$\alpha = 2 - \frac{2}{n}$
2次元移流拡散	α	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$

問題 (DD) で $\alpha = 1$, $\lambda = 0$ の場合に適切性の議論を適用すると渦度 Navier-Stokes 方程式と同一のスケール不変性を持つために、ほぼ同様な時間局所適切性が成立する。他方時間大域的には、Fujita 臨界と質量臨界が重なって現れ $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ がその境目となって解が有限時刻で爆発する。特に空間 2 次元の場合、すべての臨界指数が $\alpha = 1$ で重なる多重臨界となり、またスケール臨界空間 $L^1(\mathbb{R}^2)$ が質量保存則が成立する空間となって、解の大域挙動が初期値の総質量 $\|u_0\|_1$ の閾値 8π により分類できるという著しい特性がある (cf. Nagai [26], Nagai-Ogawa [27], Naito-Senba [29], Suzuki [43]).

3. 端点最大正則性

一般に準線形問題に有効な手法のひとつとして、解の最高階の微分を制御できる先見評価をあらかじめ得ておくことが挙げられるが、これは半線形の問題でも、後述の特異摂動などで有効な道具となる。楕円型偏微分方程式に対するいわゆる楕円型評価に対応する、放物型方程式の以下のような評価を**最大正則性** (maximal regularity) と呼ぶ。前述同様、 X を Banach 空間とし、 $1 < \theta < \infty$ に対して $L^\theta(I; X)$ を $I = (0, T) \rightarrow X$ 上の Lebesgue-Bochner 空間とする。初期条件 $u_0 \in X$ に対して抽象発展方程式 (AE) を考える。作用素 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L} = -\Delta$ や Stokes 作用素などの一様楕円型作用素などを想定する。このとき初期問題 (AE) が最大正則性評価を満たすとは解 u に依らない定数 $C_M > 0$ が存在して

$$\|\partial_t u\|_{L^\theta(I; X)} + \|\mathcal{L}u\|_{L^\theta(I; X)} \leq C_M (\|u_0\|_{(X, D(\mathcal{L}))_{1-1/\theta, \theta}} + \|f\|_{L^\theta(I; X)}) \quad (\text{MR})$$

を満たすときをいう。 $X = L^q(\mathbb{R}^n)$ のとき $\mathcal{L} = -\Delta$ の定義域は Sobolev 空間と限定され $D(\mathcal{L}) = W^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ から初期値のクラスは実補間空間 $B_{q,\theta}^{2-\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$ と同定される。 X が UMD (unconditional martingale difference) であるとき、最大正則性 (MR) の成立のための必要十分条件が Weis [47] により与えられている。この定理に立脚して主に流体方程式の初期値境界値問題に応用したのが Shibata-Shimizu [41] らの一連の研究で、準線形問題を含む流体方程式の初期値境界値問題の可解性について $X = L^q$ の枠組みで示すことに成功している。

他方、流体の密度と流速が連立する圧縮性 Navier-Stokes 方程式に Fujita-Kato の原理を適用する場合、指数が端点 $\theta = 1$ となる臨界空間を導入することが必然となる。一般に X が UMD のとき、 X は回帰的となるので (Amann [1, p.142]), $L^1(\mathbb{R}^n)$ や Besov 空間 $B_{p,\sigma}^s$ などで指数 p, σ が 1 または ∞ などの端点指数の場合には、UMD とならず一般論からは最大正則性が得られない。このためこうした場合に最大正則性を得ることは、各論に拠るところとなる。例えば非回帰的 Besov 空間を含む熱方程式の初期値問題に対しては [33] で、さらに Hardy class $\mathcal{H}^1$ に対しては [32] での結果が得られている。他方、 $X = L^1(\mathbb{R}^n)$ や、一般の Banach 空間 X に対する時間可積分指数の端点 $\theta = 1$ に対して、 $L^1(I; X)$ の設定では、単純な熱方程式ですらも

最大正則性が破綻する (cf. [32]). この場合, X を幾分限定した, Fourier-Radon 測度 $\mathcal{FM}(\mathbb{R}^n) \subset BUC(\mathbb{R}^n)$ における Giga-Saal [14] の流麗な結果や, Iwabuchi [17] による Modulation 空間 $M_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ における評価, さらに圧縮性 Navier-Stokes 方程式の適切性に応用された斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{p,1}^0$ における最大正則性が Danchin [8] により知られている. 最終的には時間 L^1 -最大正則性は $X = \dot{B}_{p,1}^0$ に制限されることがわかる (Ogawa-Shimizu [34], 実際 $\mathcal{FR}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$, $M_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \dot{B}_{p,1}^0(\mathbb{R}^n)$ である). 以下でこれを一般化した主張を述べる: 簡単のため熱方程式の初期値問題を考える: $\mu > 0$, $T \leq \infty$ に対して

$$\begin{cases} \partial_t v - \mu \Delta v = f, & t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.2)$$

定理 1 (一般化 端点最大正則性 [24], [34]) $\mu > 0$, $1 \leq \nu \leq \rho \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, 時間区間を $T \leq \infty$ に対して $I = (0, T) \subset \mathbb{R}_+$ とする. 与えられた初期条件 $v_0 \in \dot{B}_{p,\rho}^{s+2-2/\rho}(\mathbb{R}^n)$ と外力条件 $f \in L^\nu(I; \dot{B}_{p,\sigma}^{s+2/\nu-2/\rho}(\mathbb{R}^n))$, (3.2) の解 u は以下の不等式を満たす:

- (1) $f \equiv 0$ のとき T と u に依存しないある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $1 \leq \sigma \leq \infty$ に対して

$$\|\partial_t v\|_{L^\rho(I; \dot{B}_{p,\sigma}^s)} + \mu \|\nabla^2 v\|_{L^\rho(I; \dot{B}_{p,\sigma}^s)} \leq C \|v_0\|_{\dot{B}_{p,\rho}^{s+2-2/\rho}}, \quad (3.3)$$

が成り立つ. ここで $\nabla^2 = \partial_{x_i} \partial_{x_j}$.

- (2) $v_0 \equiv 0$ とする. $\nu \leq \sigma \leq \rho$ に対して T と v に依存しないある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\|\partial_t v\|_{L^\rho(I; \dot{B}_{p,\sigma}^s)} + \mu \|\nabla^2 v\|_{L^\rho(I; \dot{B}_{p,\sigma}^s)} \leq C \|f\|_{L^\nu(I; \dot{B}_{p,\sigma}^{s+2/\nu-2/\rho})}. \quad (3.4)$$

これらの不等式は端点指数 $p, \sigma, \rho = 1, \infty$ を許容し, かつ斉次 Besov 空間の補間指数 σ に余裕があたえられる部分に利点がある. Danchin らは $\theta = 1$ に対する評価 (3.4) を部分積分と Chmin-Lerners 空間を用いて証明したが, [34] では Littlewood-Paley 分解と基本解の概直交性を用いて示された. この方法は他の局面でも有効である.

他方, 有界平均振動のクラス ($BMO(\mathbb{R}^n)$) における最大正則性は部分積分の手法が有効である ([35]).

定義: $T \geq \infty$ として $I = (0, T)$ と置く. f が $\widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}$ に属すとは

$$\begin{aligned} & \|f\|_{\widetilde{L^2(I; BMO^2(\mathbb{R}^n))}} \\ & \equiv \sup_{x_0, R > 0} \left(\int_{I \cap (0, R^2)} \frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R \times B_R(x_0)} |f(t, x) - f(t, y)|^2 dx dy dt \right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

のとき.

定理 2 (BMO における最大正則性 [35]) $\mu > 0, T \leq \infty$ に対して $I = (0, T) \subset \mathbb{R}_+$ とする. (1) 熱方程式の初期値問題 (3.2) の解 v が

$$\partial_t v, \Delta v \in \widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}$$

を満たし, 定数差を除いて一意的に存在する必要十分条件は初期条件 v_0 と外力 f が $\nabla v_0 \in BMO(\mathbb{R}^n)$ と $f \in \widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}$ を満たすことである.

(2) このとき T と v に依存しないある定数 $C > 0$ が存在して, (3.2) の解 v は以下を満たす:

$$\|\partial_t v\|_{\widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}} + \mu \|\nabla^2 v\|_{\widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}} \leq C \left(\|\nabla v_0\|_{BMO} + \|f\|_{\widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}} \right).$$

4. 特異摂動問題への応用

移流拡散方程式の初期値問題は, そのモデルごとに, より複雑な原理的問題から発見的に導入されたものと理解できる.

モデル	物理スケール	元々の問題
半導体シミュレーション	$10^{-9} \sim 10^{-7}$	消散型非線形 Schrödinger 方程式 [30]
走化性粘菌モデル	$10^{-4} \sim 10^{-2}$	(Patlak-)Keller-Segel 方程式 [23], [37]
星の生成モデル	$10^9 \sim 10^{13}$	圧縮性 NS-Poisson 方程式 [9], [22]

上記のごとく原理的問題 (constitutional problem) から単純な構造の移流拡散方程式が「その極限として帰結されるか? そして単純化されたモデルにおける臨界性が, 元の問題にも現れるのか?」を考える上で問題を数学的な特異極限ととらえて厳密に示す必要がある. 以下, もっとも特異極限が単純な, Keller-Segel 系から移流拡散方程式が導出される結果を述べる (Kurokiba-Ogawa [24]).

$\tau > 0$ として $\alpha = 1, \kappa = 1, \lambda = 0$ としたときの初期値問題 (2.1) を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau + \nabla \cdot (u_\tau \nabla \psi_\tau) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{1}{\tau} \partial_t \psi_\tau - \Delta \psi_\tau = u_\tau, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u_\tau(0, x) = u_0(x), \psi_\tau(0, x) = \psi_0(x), & t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで $\lambda \geq 0$ は 0 を許すパラメータで, $\lambda = 0$ のときに系はスケール変換不変性を維持する. 系は次の変換で不変である:

$$\begin{cases} u_\beta(t, x) = \beta^2 u(\beta^2 t, \beta x), \\ \psi_\beta(t, x) = \psi(\beta^2 t, \beta x). \end{cases} \quad \beta > 0. \quad (4.1)$$

前述のようにこの不変スケーリングで次の空間が不変となるが, ここでは若干狭めた範囲の指数を許容指数と呼ぶ:

$$\begin{cases} u_\tau \in L^\theta(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n)), & \frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = 2, \quad \left(\frac{n}{2} < q < 2 < \theta\right) \\ \nabla \psi_\tau \in L^\sigma(\mathbb{R}_+; L^r(\mathbb{R}^n)), & \frac{2}{\sigma} + \frac{n}{r} = 1, \quad (n < r < \sigma) \end{cases} \quad (4.2)$$

このとき $\tau \rightarrow \infty$ で極限方程式は $\alpha = 1$ での移流拡散方程式 (DD) に近づくと見込まれる. これを特異極限と見なして, 解を積分方程式でとらえて, その差の収束を考える.

$$\begin{aligned}
u_\tau(t) - u(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot ((u_\tau(s) - u(s)) \nabla \psi_\tau(s)) ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u(s) (\nabla \psi_\tau(s) - \nabla \psi(s))) ds, \quad t \in I, \\
\psi_\tau(t) - \psi(t) &= e^{\tau t \Delta} \psi_0 + \int_0^{\tau t} e^{s\Delta} (u_\tau(t - \tau^{-1}s) - u(t - \tau^{-1}s)) ds \\
&\quad + \int_0^{\tau t} e^{s\Delta} (u(t - \tau^{-1}s) - u(t)) ds - \int_{\tau t}^\infty e^{s\Delta} u(t) ds, \quad t \in I.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

を考えることになる.

定理 3 (特異極限 [24]) $n \geq 2, \tau > 0, T \leq \infty$ とし, $I = (0, T)$ と置く. 初期値を $(u_0, \psi_0) \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{W}^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ とし $n = 2$ のときには $u_0 \in \dot{B}_{1,4}^0(\mathbb{R}^n)$ を仮定する. $T = \infty$ のときにはある $\varepsilon_0 > 0$ に対して $\|u_0\|_{\frac{n}{2}} \leq \varepsilon_0$ も仮定する. (u_τ, ψ_τ) を (2.1) の $C(I; L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta(I; L^q(\mathbb{R}^n)) \times C(I; VMO(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta(I; \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n))$ での一意解として,

(1) 同じ初期値 u_0 に対して (DD) の解 (u, ψ) が

$$(C(I; L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta(I; L^q(\mathbb{R}^n))) \times (C(I; VMO(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta(I; \dot{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)))$$

に存在して,

(2) (4.2) の許容指数 (θ, q) と (θ, r) に対して

$$\|u_\tau(t) - u(t)\|_{L^\theta(I; L^q(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla \psi_\tau(t) - \nabla \psi(t)\|_{L^\theta(I; L^r(\mathbb{R}^n))} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

(3) 任意の $\eta_0 > 0$ に対して

$$\sup_{t \in [\eta_0, T)} \|u_\tau(t) - u(t)\|_{L^{\frac{n}{2}}} + \sup_{t \in [\eta_0, T)} \|\nabla \psi_\tau(t) - \nabla \psi(t)\|_n \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

$n = 2, \lambda = 0$ の場合に Raczyński [38], Biler-Brandolese [3] による特異極限の結果が得られているが, $n = 2$ で質量保存則と重なる臨界空間 $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^2)$ での大きなデータに対する収束は得られていなかった. 収束を直接評価する場合に例えば時間各点評価を用いると積分方程式の差 (4.3) から

$$\begin{aligned}
\|u_\tau(t) - u(t)\|_{\frac{n}{2}} &\leq \left\| \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)(\Delta-\lambda)} (u_\tau \cdot \nabla \psi_\tau(s) - u \cdot \nabla \psi_\tau(s)) ds \right\|_{\frac{n}{2}} \\
&\quad + \left\| \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)(\Delta-\lambda)} (u \cdot \nabla \psi_\tau(s) - u \cdot \nabla \psi(s)) ds \right\|_{\frac{n}{2}} \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{3}{n}-\frac{2}{n})-\frac{1}{2}} \|(u_\tau - u) \cdot \nabla \psi_\tau(s)\|_{\frac{n}{3}} ds
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{3}{n}-\frac{2}{n})-\frac{1}{2}} \left\| u \cdot \nabla(\psi_\tau(s) - \psi(s)) \right\|_{\frac{n}{3}} ds$$

といった評価が現れ, 積分核に可積分でない指数が発生して証明を困難にする. これは収束の位相を臨界空間に設定しているためであるが, こうした評価に一般化された最大正則性が適用できる: $q \leq 2 \leq \theta$ を用いた実補間空間の埋め込み:

$$L^{\frac{qr}{q+r}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{-1+\frac{2}{\theta},q}(\mathbb{R}^n) \simeq \dot{F}_{q,2}^{-1+\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{F}_{q,\theta}^{-1+\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_{q,\theta}^{-1+\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R}^n).$$

から必要な以下の評価を得ることができる:

$$\begin{aligned} & \|u_\tau - u\|_{L^\theta(I;L^q)} \\ & \leq C \|(u_\tau - u) \nabla \psi_\tau\|_{L^{\frac{\theta}{2}}(I; \dot{B}_{q,\theta}^{-1+\frac{2}{\theta}})} + C \|u \nabla(\psi_\tau - \psi)\|_{L^{\frac{\theta}{2}}(I; \dot{B}_{q,\theta}^{-1+\frac{2}{\theta}})} \\ & \leq C \|(u_\tau - u) \nabla \psi_\tau\|_{L^{\frac{\theta}{2}}(I; L^{\frac{rq}{r+q}})} + C \|u \nabla(\psi_\tau - \psi)\|_{L^{\frac{\theta}{2}}(I; L^{\frac{rq}{r+q}})} \\ & \leq C \|u_\tau - u\|_{L^\theta(I;L^q)} \|\nabla \psi_\tau\|_{L^\theta(I;L^r)} + C \|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q)} \|\nabla(\psi_\tau - \psi)\|_{L^\theta(I;L^r)}. \end{aligned}$$

これより特異極限の結果を得ることができる.

参考文献

- [1] Amann, H., “*Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol I Abstract Linear Theory*”, Monographs in Math. Vol **89**, Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin, 1995.
- [2] Biler, P., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles*, **III**, Colloq. Math., **68** (1995), 229–239.
- [3] Biler, P., Brandolese, L., *On the parabolic-elliptic limit of the doubly parabolic Keller-Segel system modeling chemotaxis*, Studia Math. **193** (2009), 241–261.
- [4] Bourgain, J., Pavlović, N., *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D*, J. Funct. Anal., **255** (2008), 2233–2247.
- [5] Brezis, H., Cazenave, T., *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math. **68** (1996), 277–304.
- [6] Chen, Q., Miao, C., Zhang, Z., *Well-posedness in critical spaces for the compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities*, Rev. Mat. Iberoamericana, **26**, no.3 (2010) 915–946.
- [7] Danchin, R., *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations*, Invent. Math. **141** (3) (2000) 579–614.
- [8] Danchin, R., *A survey on Fourier analysis methods for solving the compressible Navier-Stokes equations*, Sci. China Math. **55** (2012), no. 2, 245–275.
- [9] Feireisl, E., Laurençot, P., *Non-isothermal Smoluchowski-Poisson equations as a singular limit of the Navier-Stokes-Fourier-Poisson system.*, J. Math. Pures Appl. **88** (2007), 325–349.
- [10] Fujita, H., *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser I **13** (1966), 109–124.
- [11] Fujita, H., Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem. I.*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

- [12] Giga, Y., *Solutions for semilinear Parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **61** (1986), 186-212
- [13] Giga, Y., Mizoguchi, N., Senba, T., *Asymptotic behavior of type I blowup solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type*, Arch. Rat. Mech. Anal. **201** (2011), 549-573.
- [14] Giga, Y., Saal, J., *L^1 maximal regularity for the Laplacian and applications*, Discrete Conti. Dyn. Syst. **I** (2011) 495-504.
- [15] Kimijima, A., Nakagawa, K., Ogawa, T., *Threshold of global behavior of solutions to a degenerate drift-diffusion system in between two critical exponents*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **53** (2015), 441-472.
- [16] Iwabuchi, T., *Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces*, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011), 930-948.
- [17] Iwabuchi, T., *Maximal regularity for parabolic equation in the modulation spaces*, private communication.
- [18] Iwabuchi, T., Ogawa, T., *Ill-posedness issue for nonlinear Schrödinger equation with the quadratic nonlinearity for low dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc., **367** (2015), 2613-2630.
- [19] Iwabuchi, T., Ogawa, T., *Ill-posedness issue for the drift-diffusion system in the homogeneous Besov spaces*, Osaka J. Math. **53** (2016), 919-939.
- [20] Iwabuchi, T., Ogawa, T., *Ill-posedness issue for the compressible Navier-Stokes system in the critical Besov space*, preprint (2018)
- [21] Jäger, W., Luckhaus, S., *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modeling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc., **329** (1992), 819-824.
- [22] Kobayashi, T., Ogawa, T., *Fluid mechanical approximation to the drift-diffusion system from the compressible Navier-Stokes-Poisson system*, Indiana U. Math. J. **62** (2013), 1-34.
- [23] Keller, E. F., Segel, L.A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.
- [24] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Singular limit problem for the Keller-Segel system and drift-diffusion system in scaling critical spaces*, J. Evol. Equations (2019), to appear.
- [25] Mock, M.S., *An initial value problem from semiconductor device theory*, SIAM, J. Math. **5** no 4 (1974), 597-612.
- [26] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl., **5** (1995), 581-601.
- [27] Nagai, T., Ogawa, T., *Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$* , Funkcial. Ekvac. **59**, No. 2 (2016), 67-112.
- [28] Nagai, T., Senba, T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), no. 3, 411-433.
- [29] Naito, Y., Senba, T., *Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional space*, Comm. Pure Appl. Anal. **12** (2013), 1861-1880.
- [30] Nishibata, S., Shigeta, N., Suzuki, M., *Asymptotic behaviors and classical limit of solutions to a quantum drift-diffusion model for semiconductors*, Mathe. Model

Method Appl.Sci. **20** (2010), 909-936.

- [31] Ogawa, T., *The degenerate drift-diffusion system with the Sobolev critical exponent*. Disc. Contin. Dynamical System, Ser S, **4** (2011), 875-886.
- [32] Ogawa, T., Shimizu, S., *The drift diffusion system in two-dimensional critical Hardy space*, J. Funct. Anal., **255** (2008) 1107-1138.
- [33] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal regularity and wellposedness of the two dimensional Keller-Segel system in a critical Besov space*, Math. Z., **264** (2010), 601-628.
- [34] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal L^1 -regularity for a Cauchy problem to parabolic equations with variable coefficient*, Math. Ann. **365** (2016), 661-705.
- [35] Ogawa, T., Shimizu, S., *Maximal regularity for the Cauchy problem of the heat equation in BMO*, preprint (2019).
- [36] Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479-493.
- [37] Patlak, C.S., *Random walk with persistence and external bias*, Bull. Math. Biophys., **15** (1953), 311-338.
- [38] Raczyński, A., *Stability property of the two-dimensional Keller-Segel model*, Asymptotic Anal., **61** (2009), 35-59.
- [39] Senba, T., *Blowup behavior of radial solutions to Jäger-Luckhaus system in high dimensional domain*, Funkcilaj Ekvac. **48** (2005), 247-271.
- [40] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **9** (1962), 187-185.
- [41] Shibata, Y., Shimizu, S., *On the L_p - L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain*, J. reine angew. Math. **615** (2008), 157-209.
- [42] Sugiyama, Y., *Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel system*, Diff. Integral Equations, **19** (2006), 841-876.
- [43] Suzuki, T., *"Free Energy and Self-Interacting Particles"*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 62, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005.
- [44] Toland, J. F., *A duality principle for non-convex optimization and the calculus of variation*, Arch. Rat. Mach. Anal. (1979), 41-61.
- [45] Triebel, H., *"Theory of Function Spaces"*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [46] Wang, B., *Ill-posedness for the Navier-Stokes equations in critical Besov spaces $\dot{B}_{\infty,q}^{-1}$* , Adv. Math., **268** (2015) 350-372.
- [47] Weis, L., *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, Math. Ann., **319** (2001) 735-758.
- [48] Weissler, F., *Local existence and non-existence for semilinear parabolic equations in L^p* , Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 79-102.
- [49] Weissler, F., *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), 29-40.
- [50] Yoneda, T., *Ill-posedness of the 3D Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near BMO^{-1}* , J. Funct. Anal., **258** (2010), 3376-3387.