Categorifications and Quiver Hecke algebras

Masaki Kashiwara (Kyoto University)*

2019年9月18日

1. 圏化

この講演では、箙ヘッケ環を用いた、量子群の圏化とその応用をお話ししたいと思います。

圏化(categorification)というのは、ある代数的構造をもつ加群Vと、(アーベル) 圏$\mathcal{C}$に対して、そのグロタンディーク群$\mathrm{K}(\mathcal{C})$との間の同型

$$V \simeq \mathrm{K}(\mathcal{C})$$

を与えることです。

これにより、$\mathcal{C}$の性質を用いて、Vについての知見を得ることができます。或は、逆に、Vを用いて、$\mathcal{C}$の知見を得ることができる場合もあるでしょう。

2. LLTA 理論

この、最も成功した例が、LLTA(Lascoux-Leclerc-Thibon-有木) 理論です。

対称群S_nの群環$\mathbb{C}[S_n]$のq-変形としてA型のヘッケ環H_nというパラメータqをもつ環があります。qが1の冪根でなければ、ヘッケ環の既約表現は、対称群の(標数0の体上の) 既約表現と同様な振る舞いをして、良く分かっています。しかし、qが1の冪根の時は、その振る舞いは複雑であり、既約表現がどうなるかは全く知られていませんでした。Lascoux-Leclerc-Thibon ([8]) は、1996年に、次の予想を提出しました。

(1) qが1の原始ℓ乗根なら、ヘッケ環の既約表現は、$A^{(1)}_{\ell-1}$型のアフィン量子群の既約最高重み基本表現の上大域基底によって記述される。

これは、有木([1])によって圏化をもちいて証明されました。彼は、A型のヘッケ環をさらに一般化したアフィンヘッケ環$\mathrm{H}^{\mathrm{aff}}_n$を考えました。これは$\mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$の$q$変形となっています。又、$\mathrm{H}_n$は、$\mathrm{H}^{\mathrm{aff}}_n$の商環となっています。$\mathrm{H}^{\mathrm{aff}}_n$-modを$\mathrm{H}^{\mathrm{aff}}_n$の有限次元表現のつくるアーベル圏とし、$\mathcal{C} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{H}^{\mathrm{aff}}_n\text{-mod}$とおきます。そのグロタンディーク群$\mathrm{K}(\mathcal{C})$が$U(\mathfrak{n})$と一致することを示しました。但し、$\mathfrak{n}$はアフィンリー環$A^{(1)}_{\ell-1}$の極大冪零部分リー環です。一方、$\mathcal{C}$の単純な対象の同型類の全体が$K(\mathcal{C})$の基底をつくります。有木は、さらに、この基底が、$U(\mathfrak{n})$の上大域基底と対応することを示しました。こうして、LLT予想は、圏化をうまく用いることにより解かれました。このLLTA理論の場合は、$\mathcal{C}$の単純な対象という良く分からないものを、$U(\mathfrak{n})$の上大域基底と言う比較的良く分かっているものを圏化をもちいて説明するという向きになっています。

キーワード: quantum groups, crystal bases, quiver Hecke algebras, cluster algabras, categorification
*e-mail: masaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

3. 箙ヘッケ環

ただ、この証明には、一カ所不満な部分がありました。元来、上大域基底は、$U(\mathfrak{n})$のq変形であるアフィン量子群(の半分)$U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})$をもちいて定義されています。従って、$\mathcal{C}$を別のものに置き換えて、$K(\mathcal{C})$が$U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})$と同型になるようにできるのではないか?と予想されていました。この「$\mathcal{C}$を別のものに置き換えて」というのは、さらに精密には次のようにいえます。アフィンヘッケ環$\mathrm{H}_n^{\mathrm{aff}}$を別の次数つき環に置き換え、その次数つき有限次元表現のつくるアーベル圏$\mathcal{C}$を考えると、そのグロタンディーク群$\mathrm{K}(\mathcal{C})$には次数ずらしによってqが作用します。これが$U_q^-(A_{\ell-1}^{(1)})$に一致するのではないかと予想されたのです。

これを、実現したのがRouquierです([9, 10])。彼は、箙ヘッケ環という次数つき環を導入し、それが、ある意味で、アフィンヘッケ環$\mathrm{H}_n^{\mathrm{aff}}$を次数つき環に持ち上げたものになることを示して、上の、予想を実現しました。

同時期にKhovanov-Laudaが全く別の動機から、箙ヘッケ環の理論を展開したので、箙ヘッケ環は3人の頭文字をとって「KLR代数」とも呼ばれています。

箙ヘッケ環は、LLTA理論に現れるアフィンヘッケ環の性質を(それを大幅に拡張した形で)持っています。

箙ヘッケ環の有限次元表現のつくるアーベル圏$\mathcal{C}$を用いて、任意の量子環(の半分)$U_q^-(\mathfrak{g})$を圏化することができます。(Khovanov-Lauda, Rouquier [6, 7, 10])。即ち、

$$\mathrm{K}(\mathcal{C}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g}) \tag{2}$$

となります。さらに、Rouquier, Varagnolo-Vassero ([10, 11]) は、箙多様体を用いる幾何学的方法によって、$\mathcal{C}$の既約な対象のつくる$\mathrm{K}(\mathcal{C})$の基底が、(2)の対応によって、$U_q^-(\mathfrak{g})$の上大域基底に対応することをしめしました。このように、箙ヘッケ環は、量子環の圏化をおこなう絶好の手段となっています。

4. 団代数

元来、上大域基底は、量子群$U_q(\mathfrak{g})$の半分$U_q^-(\mathfrak{g})$のパラメータ$q=0$における基底である結晶基底をq全体にもちあげて得れれた本当の基底です。この持ち上げ方には二通りの方法があって、下大域基底と上大域基底の二つの基底(互いに双対基底)にもちあがります。

$q=1$において、下大域基底は冪零部分$\mathfrak{n}$の包絡環$.U(\mathfrak{n})$の基底となります。一方、上大域基底は、$q=1$において、$\mathfrak{n}$の座標環$\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$の基底となります。$\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$が可換環となることから想像できるように、上大域基底は、大変良い乗法的な性質を持っています。これが、Fomin, Zelevinsky ([2]) が団代数(cluster algebra)を導入したときの動機の一つであったと思われます。彼らは、量子座標環が団代数の構造を持つことを特別の場合に示しました。一般の場合は、Geiß-Leclerc-Schröer([3, 4])が示しています。団代数には、団単項式という一次独立な要素の族があります。これが、上大域基底の一部となるであろうというのが、Geiß, Leclerc, Schröerの予想です。この予想を、箙 Hecke 環によって量子座標環を圏化することにより証明することができました([5])。

この講演では、箙 Hecke 環をもちいた量子座標環を圏化とその団代数へ応用をお話しします。

この講演は、 Seok-Jin Kang, Myungho Kim, Se-jin Oh, Euiyong Park との共同研究に基づいています。

参考文献

[1] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of* $G(M,1,n)$, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 789–808.

[2] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529.

[3] C. Geiß, B. Leclerc and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 2, 193–253.

[4] ———, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, Selecta Math. (N.S.) **19** (2013), no. 2, 337–397.

[5] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Monoidal categorification of cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 349–426.

[6] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[7] ———, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 2685–2700.

[8] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys.**181** (1996), 205–263.

[9] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023v1.

[10] ———, *Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras*, Algebra Colloq. **19** (2012), no. 2, 359–410.

[11] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and KLR algebras*, J. reine angew. Math. **659** (2011), 67–100.