完全性定理再訪

The completeness theorem revisited

黒川英徳　(金沢大学)*

1. 序論

本講演では，主に一階述語論理の完全性定理の持つ哲学的（また歴史的）意義について，Kreisel による「圧搾論法」(the squeezing argument) の観点から考える．その際の目的の一つは，完全性定理の意義は普通考えられているほど自明なものではないということを示すことである．

完全性定理ということで我々が意味しているのは次の定理である.（ここでは健全性定理と狭義の完全性定理を合わせて完全性定理と呼ぶことにする.）

強完全性定理：　$\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \models \varphi$
弱完全性定理：　$\vdash \varphi$ iff $\models \varphi$

自由変項に関する問題には特に触れないため，ここで φ は一階述語論理の言語の文（閉じた式）とし，Γ は一階述語論理の文の集合とする．$\Gamma \models \varphi$ とは φ は Γ の意味論的（モデル論的）帰結であるということであり（Γ が 空集合のときは $\models \varphi$ と書く），$\Gamma \vdash \varphi$ は φ は Γ の（特定の証明体系における）証明論的帰結であるということを意味する．

以下での議論は強完全性に依存しない．そのため以下ではしばしば，意味論的帰結関係の特殊な場合である「論理的妥当性」「論理的真理」に基づいて議論する（同様に，証明論的帰結についても「証明可能性」を使う）．このときの「論理的妥当性」は,「構造における真」（truth in a structure,「モデルにおける真」）という集合論的概念に基づき,「全ての構造において真」と定義される．これは「論理的妥当性」の標準的なモデル論的定義である．これらの用語法に従って言えば，完全性定理とは要するに，一階述語論理においては証明可能性とモデル論的妥当性は一致するという定理である．

以下，２節で完全性定理の持つ概念的な問題と，その問題に関連する完全性定理の歴史について議論する．３節では Kreisel による「圧搾論法」を紹介し，その結論が当の概念的問題に答えることを示す．またその論法の基礎となる方法論的概念「非形式的厳密さ」（informal rigour）について議論する．４節では「非形式的厳密さ」を他の方法論的概念と比較し，５節ではその概念（と圧搾論法）の可能性と限界を検討する．

2. 概念的問題

完全性定理が我々の推論実践 (inference practice) とはどのようなものかを何らかの意味で明らかにしたというのは概ね常識的な理解であろう．しかし完全性定理は一体我々の論理的推論に関するどのような洞察をもたらしたのであろうか？　以下ではまず完全性定理に関する通常の理解について議論し，その通常の理解がいかなる概念的前提に支えられているかを，またその概念的前提が提起する潜在的問題を議論する．

キーワード：soundness, completeness, informal rigour, Kreisel's squeezing argument
*920-1192 石川県金沢市角間町　金沢大学
e-mail: hidenori.kurokawa@gmail.com

完全性定理についての通常の理解では，論理的妥当性と証明可能性のうち，論理的妥当性の方が概念的に優位に立つ．これは「モデル論的な帰結の定義は，証明論的な帰結の定義とは異なり，大体において帰結関係の**直接的な分析**を与えており，そのためその外延的十全性 (extensional adequatecy)，つまり「完全性」と「健全性」は直観的あるいは概念的なレベルで保証される ([9], p.4.[1])」からである．こうした意味論の優位性は例えば次のように表現される.「健全性あるいは完全性が成立しないときには，勿論（可能であれば）構文論的あるいは意味論的な帰結のどちらかにおいて改善が試みられなければならない，... 構文論的な帰結関係の定義が意味論的な帰結関係に適合していなければならないのであってその逆ではない.」(Dummett, [8], p.290.)

この概念的設定の下では，上述の定理の意義はしばしば次のように考えられている．

(1) 健全性定理とは一階述語論理における証明可能性に対してそれが論理的に妥当であるという形で正当化を与えるものである．

(2) 完全性定理とはある意味で論理的妥当性の証明可能性への還元である．論理的妥当性は（集合論の言語で）Π_1 の形になるが，証明可能性は Σ_1 で書けるためである．

しかしながら，こうした形でこの定理の意義を考えると幾つかの概念的問題が生じる．例えば (1) の場合，いかなる意味で健全性定理が証明論的帰結を正当化しているのだろうか？　慎重に検討すればここにはある種の循環が存在することが分かる．Prawitz によれば「この [意味論的帰結の] 定義によれば，$\neg\exists P(x)$ が $\exists\neg P(x)$ から帰結するかどうかは $\neg\forall x P(x)$ を真にする全てのモデル (D,S) において $\exists\neg P(x)$ が真になるかどうかに依存する．これは再び，D の中の全ての e が S 属するということがない場合に，D の中に S に属さない要素 e が存在するかどうかを問うことになり，我々は本質的には $\neg\exists P(x)$ が $\exists\neg P(x)$ から帰結するかどうかという問題に引き戻される」（Prawitz, [21], p.66）．

この循環は被定義項の中で定義項を使うという伝統的な意味での循環ではないが，証明論的帰結の正当化としては正当化する方とされる方があまりにも近い形になり過ぎている．こうした循環に鑑み，証明論的帰結は「ある推論が妥当なことを示すため」，意味論的帰結は「ある推論が妥当でないことを証明するため」に使われるのであり，健全性定理，完全性定理には技術的な意義しかないと考える哲学者も多い（[8], p.290）．これに対し Dummett は説得と説明という区別を導入して，こうした循環の存在が演繹的推論の正当化を決定的に否定するわけではないと論じている．ここではその議論を詳しく紹介する余裕はないが，これに関連する Dummett の議論については後に振り返る．

2.1. 妥当性の集合論的定義の十全性

上述の (1) に関する循環の問題も重要だが，ここでの主要な論点ではない．(2) に含まれている問題に議論を移そう．ここではまず，(2) の「還元」が我々の直観的な意味での論理的な正しさ（「直観的妥当性」と呼ぼう）について何事かを明らかにしうるのは，「モデル論的（集合論的な）妥当性」がその「直観的妥当性」を正確に捉えているときのみ，言い換えると「意味論的（帰結）関係の定義が論理定項の意図された意味を与えることに成功している」（[8], p.290）ときのみであるという主張を提示しておく．

実際，直観的妥当性と「全ての構造で真」という論理的妥当性を同一視することは，決して些細な事柄ではない．むしろ (2) のような観点が意味を持つのは，それ自体集合論に基づく「構造」の概念によって定義される論理的妥当性に関する，特定の立場を前提するときのみなのである．その立場は次の提唱により表現される (cf. [20], p.273).

[1] 強調は著者による．またこの原稿における欧文引用の翻訳はすべて著者によるものである．

Tarski's thesis: ある形式言語のある文が（直観的な意味で）妥当であるのはそれが全ての構造（モデル）で真になるときかつのそのときのみである．

ここで「提唱」と呼んでいるものはChurch-Turing's thesisというときに使う「thesis」と同じ意味での「提唱」である．つまり，これは非形式的あるいは直観的であって数学的に厳密に定義されていない概念と数学的に厳密に定義された概念が（少なくとも）外延的に一致するという主張のことである．一方の概念は厳密に定義されたものでないため，これは定理になることはあり得ず,「提唱」と呼ばれる．

実は証明論的帰結についても，それを直観的な意味での演繹的推論の概念に対応すべく構成された理論的構成物と考える観点が存在する．必ずしも形式的でない演繹的推論と一階述語論理上の推論を同一視することはHilbert's thesisと言われることがある．

全ての数学的（論理外の）仮定を明示するように促された場合，その公理は常に一階論理の上で表現され得，かつ数学において使用される，**証明可能**という非形式的な概念は一階論理において**証明可能**という形式的な概念によって正確なものにされるという意味で，多くの論理学者は一階論理を超える論理は存在しないと主張するだろう．我々はこの観点をMartin Davisに倣ってHilbert's thesisと呼ぶ．(Barwise, [2], p. 41)

Barwiseは更に,「Hilbert's thesisの第二の部分は，初めの部分とゲーデルの完全性定理から帰結するように思われる (ibid.)」と言うが，この主張は実はTarski's thesisによって補われなければならない．というのも，完全性定理が援用されていることからBarwiseの言う「非形式的な証明可能性」は意味論的なものと理解されていると思われるが，上述の観点からはモデル論的妥当性と直観的妥当性はTarski's thesisによって媒介されねばならないからである．

ここからは，なぜこうした提唱を考慮する必要があるのかを見る．上の考察から考え直すと,「通常の理解」はモデル論的妥当性を我々の直観的妥当性とあたかも自明であるかのように直接同一視していることがわかる．この同一視のため，完全性定理により我々の直観的妥当性の概念が一階述語論理による証明可能性に還元されたと通常は理解される．だがこの同一視は実はTarski's thesisによって初めて可能になる．また後述する理由からTarski's thesisは問題を含むため，自明のものとするのは適切ではないのである[2].

また，先述の提唱に関する考察は我々の直観的妥当性概念の基礎となる推論実践というものが本来どのようなものであるかという問題を考えることを促す．直観的妥当性の基礎となる，数学における推論実践において，我々は意味を欠いた純粋に構文論的な式，あるいはそれらについての構造による解釈（とその変更）によって推論を行なっているわけではない．この意味で我々の推論実践というのはそもそも純粋に構文論的なものでもモデル論的という意味で意味論的なものでもない．構文的，意味論という区別は我々の推論実践を理論化した結果に過ぎない．

今こうした観点に立って，完全性定理の本来の理解がどのようなものであるべきかを考えてみる．まず我々の推論実践についての上の主張に同意するならば，我々の推論実践について何らかの洞察を得ることができるのは,（推論実践に直接関わる概念は

[2] 実はこの理解の背景にはHilbert's thesisによる非形式的な証明可能性と一階述語論理における証明可能性の同一視も存在するのだが，この講演では以下Tarski's thesisのみに焦点を当てて議論する．

ここではそれらのみなので）直観的妥当性についての認識を得るときのみである．ところが，完全性定理は単にモデル論的妥当性と形式的証明可能性というテクニカルな二つの概念の間の関係について述べているに過ぎない．極端な言い方をすれば，それらの概念が直観的な概念と全く関係がないことが判明したとすると，そのときには完全性定理は我々の推論実践と何の関係もない定理ということになる．従って我々の推論実践についての洞察を完全性定理によって獲得することは，先述の提唱を通じてのみ可能である．それ故，完全性定理の意義に関する考察は上の提唱に媒介されたものであり，かつその意義を考えることは比較的洗練された観点を必要とする．

この点を踏まえた上で，完全性定理の意義を認識する仕方について整理してみよう．一つの考え方は，Tarski’s thesis は無視し，完全性定理は単に技術的な意義があるのみとするものである．しかしこれは上の「通常の理解」に反する理解であるため，ここでは議論するに値しないものと考える．もう一つの可能性は，Tarski’s thesis を受け入れた上で，完全性定理はそうした提唱と合わせて使用されることで我々の推論実践に満足の行く説明を与えることができるという考え方である．ただし，この考え方はなぜモデル論的妥当性が直観的妥当性の分析を与えるのかということについては全くの論点先取である．それだけでなく，これはモデル論的妥当性が持つ後述する概念的な問題をそのまま引き受けてしまうという問題点を持つ．さらにもう一つの可能性は，Tarski’s thesis を単に受け入れるのではなく，その根拠をもう少し細かく吟味するということである．Kreisel が圧搾論法で行なっているのはまさにこうした吟味であると考えられる．

ではここで，モデル論的（集合論的）に定義された妥当性の概念が含む，先ほど言及した問題について述べる．(2.2 では関連した歴史的な論点を整理する．) Tarski’s thesis についての問題の一つは我々のモデル論的妥当性の概念が集合論（ZF 等の公理的集合論）に基づいているということである．そのことの帰結の一つは，モデル論的な妥当性を定義する際に使用される「構造」はどれも「集合」であるということである．しかしながら，公理的集合論の観点から見たときに「全ての集合の集まり」が集合にならないことはよく知られている．では直観的妥当性の概念とモデル論的な妥当性を同一視する際に，いわゆる「クラス」のサイズを持つ「構造」（実はこれは構造ではない）を問題にしなくてよいだろうか？ 我々の直観的妥当性の概念をモデル論的な妥当性で理解しようとする際，不一致が発生する可能性はないのか？　言い換えると，集合というのはこの文脈では我々の直観的妥当性を理解するための「人工的な道具」（artifacts）なのだが，それは我々の直観的妥当性を理解するために十全な（adequate）ものなのか?

この問いは一般的だが自然なものであり，この文脈での集合概念の使用の十全性に疑いを挟ませるのに十分である．しかしこの問題は実はこれよりもう少し具体的な帰結を持つ．例えば Bernays は「これは集合論のアンチノミーの教訓だが，数学の全体それ自体は構造（つまり数学的対象）ではないだけではなく，構造に同型的でもない」（Bernays, [3], p.12) と言う. この言明から帰結し得る論点を整理すると次のようになる．我々の数学の世界の総体について，数学的な「真理」(truth simpliciter)，即ち「構造に相対化されていない（現実世界の）真理」を考えるのは自然である．しかしこうした真理を成立させているものは「集合」や「構造」ではない．とすると，モデル論的な意味で妥当な文は真であることを含意しない[3]．これはいかにも奇妙であろう．集合に基づく妥当性の不十全性についての上の議論が一般的なものだったのと比べ，この論

[3] この論点は多くの論文で問題にされている．例えば [5], p.83.

点は具体的にモデル論的な妥当性に潜む概念的な問題を明らかにしていると言えよう．

2.2. 完全性定理の歴史に関する論点

ここでは完全性定理に関わる概念の十全性の問題の背景として，完全性定理の歴史を簡単に考察する.「完全性」は概念も定理も決して自明のものではなかったのである．

完全性定理の歴史については，Herbrand と Skolem が完全性定理を証明する直前まで行きながら，証明論的帰結（構成的な概念）とモデル論的妥当性（非構成的な概念）の両方を見る観点を欠いていたため，完全性定理を証明し得なかったと言われることがある．この論点に異論はないが，上述の概念的な問題との関連で考える場合，完全性定理の定式化及び完全性定理の意味での完全性という概念の形成から考察すべきである．

完全性という概念 (Vollständigkeit) は当初「論理」とは直接関係のない文脈で現れ．次第に論理に関して使われる概念へと変容した.「数学」と「論理」の区別がなされた初期の段階において,「完全」という言葉は次のような形で用いられた.「ここで最も重要な問題は，完全性の問題である．というのも記号論理の目標は形式化された前提条件から通常の論理を展開することにあるからである」(Hilbert, [13], p.136). ここで言われる「完全性」とは我々の「通常の論理」を含む，論理の形式体系を構築するという意味である．ここで「通常の論理」という言葉で意味されていることを厳密に定めることは不可能なため，この完全性は「準-経験的 (quasi-empirical)」な概念であり[4]，この意味での完全性を定理として証明することはできない．

しかし論理体系の整備，メタ数学の発展により，やがて完全性定理の意味での「完全性」の概念が形成され完全性定理が定式化される．完全性定理の明確な定式化には少なくとも次の前提条件が不可欠であった．1) 証明体系の整備，2) 一階の言語の定式化，3) 数学と論理の区別，4) 構文論と意味論の区別，5) 対象言語とメタ言語の区別，6) 意味論的帰結の概念（特に domain variations）の定式化，7) 構造概念の定式化である．

さらに「完全性」の概念そのものが論理に特化した形で適切に形成される必要があった.「完全性」という言葉には様々な概念が対応する．それらを現代的な観点から述べると次のようになる (Awodey & Reck, [1], pp.14)[5]．i) 幾何学的空間の直線完備性 (the line completeness) の公理: 他の公理により規定される，元の点のもつ順序，合同という性質を保ちながら，直線上の点の集合を拡張することは不可能である．ii) 範疇性：理論 T のどの二つのモデルも同型になる．ii′) 意味論的完全性：$T \models \varphi$ あるいは $T \models \neg\varphi$.（これは T の範疇性から帰結する.）iii) ポスト完全性： 論理 L について，L の言語の任意の式 φ について，φ が $\nvdash_L \varphi$ ならば，φ を L に付加すると矛盾する．iv)（構文論的）演繹的完全性：T の言語のどの文 φ についても，$T \vdash \varphi$ あるいは $T \vdash \neg\varphi$. v) 意味論的-演繹的完全性[6]：L の言語のどの文 φ についても，$\vdash_L \varphi$ iff $\models_L \varphi$（冒頭の弱完全性定理）．

「完全性」はもともと幾何学における空間の性質であり，その後幾何学的空間の完備性と公理系の意味論的完全性の混同から，理論の範疇性という概念が生まれた．範疇性は意味論的完全性を含意し，後者はポスト完全性と類似の性質と同値なため[7]，ポスト完全性と深い関係を持つ．実際，上の i), v) 以外の完全性の諸概念は相互に近い関係にあり，特に ii), ii′), iv) の区別をするには時間がかかった (cf. [1], [10]).

---

[4] cf. [1], p.4. この用語は Sieg によるものとされている．

[5] 以下で使われる「モデル」,「$\models$」,「$\vdash$」などの概念は，歴史的にはここでの扱いより非形式的であった．

[6] 他の用語との混乱を避けるため，導入したここでのみ通用する用語法であることを断っておく．

[7] これは $T \models \varphi$ あるいは $T \cup \{\varphi\}$ が充足不可能というものである．ただし，これはポスト完全性と異なり,「論理」ではなく「理論」の性質，しかも意味論的性質である．

それに対し v) の意味論的-演繹的完全性は他とは異なる．しかしこの概念は，その定式化のために 1)-6) が必要だった等の理由から，前段落とは別の意味で他の完全性と区別して定式化することが困難だったと考えられる[8]．iii), iv) は $\models, \vdash$ を使っているが，歴史的には「論理」が必ずしも明示的に取り出されていたわけではない．また，これらの区別も明確でないのに，これらの間の関係を考えるのが困難なのは当然だろう．

おそらくはその困難と命題論理の意味論の単純さのため，意味論的-演繹的完全性及びその他のメタ論理的概念（ポスト完全性，決定可能性，公理の独立性，等）は命題論理についてまず定式化された ([4]).「完全性」概念に関する上の事情を考慮すると，その中ではポスト完全性の方が意味論的-演繹的な完全性より先に定式化されたと考えるのが自然だが，実際歴史はそうなっており，Hilbert の講義 ([13], p.157) で「完全性」と呼ばれているものはポスト完全性である[9]．上の流れで「完全性」の概念が理解されたすると，命題論理においてさえ「意味論的-演繹的完全性」の定式化は自明でなく，一階述語論理上の「意味論的-演繹的完全性」の定式化が更に遅れたのも不思議ではない[10]．

意味論的-演繹的完全性定理は結局 Hilbert 学派によって定式化されるが，彼らがそれに成功した要因としては次のものが挙げられる ([22])．a)「幾何学の基礎」以来の研究により i)-iv) の概念に通じ，上述の 3), 4) などを行う準備が整っていた，b) 1917-18 年に彼らは Principia Mathematica を研究し，1) を可能にした， c) また同じ時期に Hilbert 学派は，6) あるいは現在のモデル論的（集合論的）妥当性の基礎になる,「個体領域における正しさ」 という概念を採用した（この概念は Schröder らの代数的論理の伝統に遡るが，彼らとは違い，ここでは純粋に構文論的に特定された形式言語の解釈に使われている）[11]．だが意味論的-演繹的完全性定理の定式化自体はその時期の Hilbert の講義には存在しない (cf. [13], p. 45)．その後,「全ての個体領域における正しさ」という，現在のものに近い妥当性の意味論的な定式化に基づく一階述語論理の完全性が [14] の中で予想され，Gödel が [11] でその予想を解くことになる．なお，6) の意味論的帰結の概念の起源とされる Tarski の [24] では,「個体領域の変化」も「構造における真」も明示されず，特に後者は 1950 年代に漸く現れる ([15]).

意味論的-演繹的完全性の概念の意義を考えるのは容易ではないが，その一因はこの概念がこうした長期に亘る概念的洗練の結果得られた（それ故直観的概念から比較的隔たっている）という歴史的経緯にもあるように思われる．また我々の問題との直接の関連で言えば，この歴史的過程の中に「個体領域」が「集合」でなければならないという制約が直観的妥当性の概念そのものに由来するという議論を見つけることは（パラドックスの回避という集合論内部の事情を除けば）困難である．

3. Kreisel の「圧搾論法」

2.1 節で提起された問題に関して，その問題の解決になり，かつより広い射程を持つ巧妙な論法を Kreisel は提示した．その論法は（集合論的）構造のみを考える場合でも，

[8] Hilbert の 1928 年の Bologna lecture では算術版のポスト完全性が問題として挙げられたが，論文ではそれが一階述語論理の完全性に置き換えられている ([7], p.58.). それはこの前後に Hilbert がその問題を定式化したからと推測できる．以下の [14] についての記述を参照せよ．

[9] 編者達は序文でポスト完全性と i) の意味での完全性との類比に注意を促している ([13], p.45).

[10] 一階述語論理はポスト完全でないことに注意.

[11] [14] は，序文で現代論理学の Frege，Russell らと Boole, Schröder らの二つの伝統に言及しているが，代数的論理の伝統からの具体的な影響を特定することは困難である．また「個体領域における正しさ」という概念は現代的な「構造における真」という概念とは微妙に異なる (cf. [12])

狭義の完全性定理が成り立つならば，モデル論的妥当性が「真理」を含意しないという可能性は（外延的には）ないということを「証明」することができる．

3.1. Kreiselの「圧搾論法」とは何か？

ここではKreiselの「圧搾論法」の説明をする.[12]　以下では一階述語論理の言語$\mathscr{L}$と証明論的な導出規則の体系を考える．Kreiselの議論の目的は，直観的妥当性がa) モデル論的妥当性，b) 導出規則の体系における証明可能性と一致することを示すことにある．

ここで幾つかの用語を導入しておく．まず$Val(\varphi)$という（メタ言語上の）述語を導入する．これは「φは直観的に妥当である」を意味する．また，[19] では$I(\varphi,\psi,\sigma)$という三項述語も導入される．これは「σはφとψの与えられた規則による直接的な帰結である」を意味する．そうすると我々は次の原理をもつことになる．

$$原理 1: Val(\varphi)\,\&\,Val(\psi)\,\&\,I(\varphi,\psi,\sigma)\rightarrow Val(\sigma)$$

これはValは何らかの意味で演繹的な推論について閉じている（deductively closed）であるということである．Kreiselはここで「「$\rightarrow$」は含意の或る直観的な概念と受け取ってよく，必ずしも通常の真理関数と考える必要はない ([19], p. 253) 」とコメントしており，$\rightarrow$の解釈には幅がある．[19] は [16] と同様に，$Val(\varphi)$を公理的に特徴付ける傾向が強い.（Kreiselは [16] では$Val(\varphi)$の扱いを「妥当性の公理的理論」と呼ぶ.）

それに対し [18] では，Kreiselは$Val(\varphi)$の意図された解釈は「φはすべての「構造」において真である (p.153)」というものであると明示的に述べている（ここでの含みは文脈から明らかに，必ずしも集合論的なものではないということである）．このようにKreiselの議論にはある程度幅があるが，次の点に関してはどの解釈でも変わらない．一つは$Val(\varphi)$が以下で提示するいつかの原理を満たすこと，もう一つは（少なくとも内包的，概念的，意味的には）Valは導出規則の体系における証明可能性ともモデル論的（集合論的な）妥当性とも同一視されないとKreiselは考えているということである[13].

また,「φは（与えられた規則の体系において）形式的に導出可能である」という述語を$D(\varphi)$と書く．形式的証明に関する帰納法を適用することで，次の原理が得られる．

$$原理 1': D(\varphi)\rightarrow Val(\varphi)$$

さらに，$V(\varphi)$によって,「φは全ての集合論的な構造において真である」ということを意味するとする．そのとき，我々は次の式を得る．

$$(*)\quad V(\varphi)\rightarrow D(\varphi)$$

これはゲーデルの（狭義の）完全性定理である．$Val(\varphi)$と$V(\varphi)$の間の関係に関しては，次のような原理を我々は当然のものとして受け入れる．

$$原理 2 : Val(\varphi)\rightarrow V(\varphi)$$

[18] では，これを受け入れる理由は，直観的に論理的に妥当であれば全ての集合論的構造において真と言えるからである．[19] での理由づけは多少異なり，全ての「構造」において真であるならば，特に全ての集合論的構造において真であるというものである．いづれにせよ原理２の受容の根拠になるならば，ここでの目的には十分である．

[12] この論法には強調点の異なった４つのヴァージョンが存在する．ここではその一つ [19] を基礎テキストとして採用し，他の議論についてのコメントを適宜加える．

[13] Kreiselは直観的な推論とこれらを同一視する立場を二つの「代替的立場」と呼んで議論している．

原理 $1'$, 2, $(*)$ によって，容易に次の命題の「証明」を与えることができる[14].

定理 1. $Val(\varphi) \leftrightarrow D(\varphi) \leftrightarrow V(\varphi)$

つまり，完全性定理（及びその他の直観的に正しい原理）が成り立つ規則の体系及びモデル論的な意味論については，直観的妥当性はモデル論的（集合論的）妥当性と共外延的（co-extensive）になるということが「証明」されるのである．Val が D と V に挟まれて押しつぶされることになるため，この議論は現在「Kreisel の圧搾論法」(Kreisel's squeezing argument) と呼ばれている．Tarski's thesis というのは言わば Val と V が一致するという提唱であると考えられるが，Kreisel の圧搾論法によれば，完全性定理の成り立つ一階述語論理に関する限り，直観的に受け入れ可能な原理と完全性定理によって，その提唱は「証明」することが可能であり，従って論理的真理が真理を含意しないかも知れないという可能性は排除される．Kreisel の観点からは，こうした証明を可能にすることこそが完全性定理の意義の一つということになろう．

Kreisel 自身はこの議論に関し次のように述べる．現在支配的な見方では,「任意の構造そして直観的な論理的妥当性は極めて曖昧なため，そうした直観的な妥当性を V や D のような正確な概念に関係づける証明を求めることは馬鹿げており」([18], p.152), もっともらしさに訴える議論（plausibility argument）の余地があるに過ぎない．しかし我々は実際に $\mathscr{L}$ 上の $Val(\varphi)$ の外延を決定することができる.「Val の V や D との関係を確立した後で Val について我々はより多くのことを知っているということを否定するものはいないだろうが，しかしそれは Val がそれ以前には曖昧なものであったということを意味しない」（[18], p.154). Kreisel はここで直観的な概念でもある種の定理の厳密な証明に使用することができるという考え方を実例をもって示したと言えよう．

3.2. Kreisel の圧搾論法と「非形式な厳密性」

Kreisel の「圧搾論法」はこの節で紹介する「非形式的な厳密さ」という概念の一例として有名である．ところが，Kreisel が「圧搾論法」を与えた元来の動機は,「直観的な概念」をめぐる方法論的な問題というよりは，集合論によって論理の意味論を与えることに伴う一般的な問題[15]及び集合論的な概念と論理的な概念の違いにあった ([16]). 実際，[16] の関連箇所には「非形式的厳密さ」という語は全く出て来ない．Kreisel は集合概念に関していわゆる「累積的タイプ構造」（the cumulative type structure) に基づく立場を採るが，論理的な概念はこの構造の中に収まらない，つまり言わば type-free であると考えていた[16]．こうした違いにもかかわらず，[16] における Kreisel の圧搾論法の当初の眼目は「論理的妥当性」（[16] では「直観的」の入らないこの語が使用されている）の概念と集合論的な構造概念に基づくモデル論的妥当性が外延的に一致することを示すことにあった．しかしその目的は後に「直観的な論理的妥当性」とモデル論的妥当性の共外延性を示すという目的に変化する．その変化は Kreisel の哲学的・方法論的な議論における「非形式的厳密性」(informal rigour) という概念の登場を伴い，圧搾論法は [18] では非形式的厳密さに基づく幾つかの議論のうちの一つとして提示される．

では「非形式的厳密さ」とは何か？　それは数学の基礎の研究において，ある概念

---

[14] 定理 1 を証明するために必要な → の性質は極めて限られたものであり，Kreisel 自身が注意しているようにここで → が実質含意であると仮定する必要はない．

[15] [16] の関連した節は「意味論と集合論（論理の集合論的基礎における自己適用)」という題をもつ．

[16] これは Kreisel が当時構想していた直観主義論理の基礎理論である,（type-free な)「構成の理論」に通じる論点である．

の直観的理解を尊重することを要求する方法論的な「概念」である．Kreiselは「直観を分析し，その性質を書き出すことで規則や定義が得られるというのは「古風な」考え方である」が,「この「古風な」考え方が仮定しているのは端的に直観的な概念は重要だということである」([18], p.138)と言い，この「概念」を次のように説明する．

> 非形式的厳密さは，次のことを要求する．(i)この分析を（入手可能な手段によって）可能な限り正確なものにすること，特にその性質に関する結論を導く際には直観的概念の疑わしい性質を排除すること，(ii)そうした分析を拡張し，特にそうした直観的概念の明証的(evident)な性質を十分に活用することによって決定し得る問題が決定されないままに残されることがないようにすること([18], pp.138-139).

この条件によれば「（規則の）完全性の問題は，少なくとも直観的な帰結関係に関する完全性を決定(decide)しようとする際には([18], p.139)」，次の意味で確かに非形式的厳密さの例になっている．全ての構造における真という概念を定式化する際に（素朴な集合概念の使用等の）疑わしい性質を排除し，*Val*という直観的な概念の外延を決定し，*Val*の外延を決定するという仕方で伝統的な分析を拡張するということである．

一般に概念の特徴を考察する場合には，他の概念との比較が役に立つ．この非形式的厳密さという概念はまず何よりも「形式的厳密さ」と対比されるべきである．Kreiselによれば「形式的厳密さ」とは,「形式的規則を設定し，ある与えられた導出(derivation)がその規則に従っているということを確かめる([18], p. 138)」ことであり，その典型はTuringによる形式的規則の分析であるとされる．言うまでもなく，この場合には直観的な概念との対応は問題とされない．我々は4節でまた別の概念との比較に立ち戻る．

さらに圧搾論法を非形式的厳密さという文脈の中において考えてみる．[18]において，一階述語論理の直観的妥当性に関する圧搾論法は非形式的厳密さの幾つかの例のうちの一つ（二番目の例）として提示されている．残りの二つは，1)二階の公理化と独立性証明，3) Brouwerの「創造主体」(creating subject)である．

ここではKreiselが一階述語論理に関する圧搾論法をなぜこの文脈においたのかを理解するため，1)に論点を絞り，圧搾論法と1)の場合を比較する．まず一階述語論理に関する圧搾論法を提示した後Kreiselは直ちに，完全性定理が成立しないため，この議論が（成立することが期待されるにもかかわらず）二階論理には適用できないことを指摘する([18], p.157)．この他にKreiselは二階論理に関して少なくとも次のことを指摘している．i) Peano算術(PA)の公理化における一階の公理図式の正しさの根拠(evidence)は，PAの２階の公理化に由来する．ii)（意味論的に定式化された）二階論理($\models_2$)の上で連続体仮説(CH)は決定される，つまり

$$Z_2 \models_2 CH \quad \text{あるいは} \quad Z_2 \models_2 \neg CH.$$

i), ii)について見て行こう．まず，これらは非形式的厳密さの例ではあるが，圧搾論法のような具体的な「定理」を導くものではなく定理の持つ意味の考察である．初めの論点は二階算術の範疇性に基づき，二階論理の概念的優位を主張する．二番目の論点も二階論理におけるCHの決定性に言及することによって[17]，一階論理の上に定式化

[17] Kreiselはまた幾何学における平行線公準の独立性には後者のような二階論理における決定性はないとし，CHの場合と比較している．

された集合論に基づいてCHの（ZFなど特定の集合論の理論を超えた意味での）「決定不可能性」を安易に主張する人々を暗に批判している議論であるように思われる．なお，この議論は二階集合論の「準範疇性」(quasi-categoricity) に基づいている．これらは両方とも二階論理のある種の優位を含意するが，後者の場合にはさらに，Gödel による巨大基数による集合論の拡張プログラムとは異なった，CH を決定するための独自のプログラムを Kreisel が構想していたことを示唆する．

> CH の２階論理上での決定可能性は ... 次のことを示唆する：新しい原始概念，例えば自然数の性質（それも集合論の言語で定義できないもの）がCHを決定するためには真面目に受け取られねばならないかも知れない，ということである ([18], p. 152).

興味深いことに，Kreisel による脚注では（例えば算術の言語に関する）真理述語は通常の一階の言語で定義できないが，無限連言を許す言語においては定義可能であるという例が挙げられ，Kreisel が考える原始概念の例はこうしたものであることが示唆されている．一階の場合と二階の場合では非形式的厳密さの概念が直観を尊重する仕方において大きな違いがある．Kreisel はこうした対比によって，非形式的厳密さという概念の持つ多様な潜在的可能性を示そうとしているように思われる．

4. 方法論的な考察

この節ではKreisel による，非形式的厳密さの概念と他の方法論的概念との比較に注目することで，非形式的厳密さとは何かを検討する．Kreisel の非形式厳密さの概念は知的な空白の中で突然提唱された概念ではない．1960 年代に力を持っていたと思われる，数学の基礎に関する研究において直観の概念を尊重しない態度に Kreisel は一般に否定的であり，それらに対して「形式主義」,「実証主義」,「プラグマティズム」などの用語を用いて批判している．しかしながら，Kreisel の批判の具体的な対象を同定することは，文献への参照が少ないため一つの例外を除いて困難である．その例外とはCarnap の「解明」(explication) という概念である．これが例外なのは [18] に，Carnap の「解明」に概念に言及した Bar-Hillel の Kreisel へのコメントとそれに対する Kreisel の応答が収録されているためである．そこでまず Kreisel の非形式的厳密さという概念の特徴を，Carnap の解明概念との比較を通して明らかにする．また Tarski の「実質的十全性」(material adequacy) という概念と Kreisel の非形式的厳密さを手短かに比較する．

Carnap の「解明」という概念は次のように特徴づけられている.「解明の課題とは多かれ少なかれ不正確な概念を正確なものに変換することのうちに，あるいはむしろ不正確な概念を正確なもので**置き換える** (replacing) ことのうちに存する ([6], p.3).」　ここでは，与えられた（不正確な）概念あるいはそれを表す用語を「解明されるもの」(explicandum)，これを置き換えるべき概念を「解明するもの」(explicatum) と呼ぶ.

ここでの問題の核心は次の違いにある.「解明」という Carnap の概念では，正確な概念が不正確な概念を「置き換える」．しかし次の引用では，Kreisel は直観的な概念とテクニカルな概念の間の関係を「置き換え」の問題とは考えていないということである．

> Carnap は勿論非形式的な**厳密さ**あるいは**証明**の可能性を否定する．Carnap は**正しい** (correct)「解明するもの」を見つけ，その正しさを証明するという問題を受け容れず，前科学的な「解明されるもの」を「十全な」(adequate)「解明するもの」に「置き換える」ことについて語る ([18], p,176)

Carnap の解明と Kreisel の非形式的厳密さの違いはこれらの発言から明らかだろう．Carnap は解明により不正確な概念が正確な概念に置き換えられると主張しており，置き換わる前の概念は不正確でしかあり得ないため，置き換える概念が置き換わる前の概念に忠実であるかどうかという問題はそもそも意味をもたず，不正確な概念に基づいて何かが証明されるということはあり得ない．それに対し Kreisel の非形式的厳密さの概念においては，もともとの直観的概念はかならずしも曖昧ではない．直観的な概念に動機付けられて形成されたとはいえ，それ自体は厳密に定義されている概念が元の直観的な概念に忠実なものであるかどうかは意味のある形で問題にすることができ，またさらに圧搾論法の場合のように直観的な概念が厳密な概念と共外延的であるということを「証明」することもできる．Kreisel の議論の眼目は我々のもつ直観的概念は数学の基礎の研究において尊重されるべきであるということである．

次に Kreisel の概念を Tarski の概念と比較してみよう．Tarski は真理述語の定義不可能性定理について述べる際，我々の直観的な概念と厳密に定義された概念を結びつけるための方法論的な議論を提示している．そこで鍵となる概念は「実質的十全性」(material adequacy) と呼ばれている [18]．真理述語の定義不可能性を数学的に「証明」するためにはそもそもどのような性質を満たす述語が真理述語と言えるのかということが数学的議論に先立って厳密に特徴づけられていなければならない．そのため Tarski は「規約 T」という条件を真理述語の満たすべき条件とした．これは対象言語のすべての文 S について，「「S」が真である iff S」という文を真理定義を行う理論において導出することができるという条件である．この条件が我々のもつ直観的な真理の概念と形式化された言語における真理の概念を結びつけるという意図をもつことは容易に理解できよう [19]

ここで Tarski と Kreisel の各々の概念について，それらの概念とそれらの概念が議論されている文脈で問題にされている定理との関係という観点から考えてみる．Kreisel の非形式的厳密さという概念の例には共通のパターンが存在する．直観的概念の分析は既に証明されている重要な定理に訴えることによって行われる．圧搾論法のように「定理」が証明される場合も，連続体仮説の場合のように何らかの研究プログラムが引き出されることもあるが，定理が先行する（完全性定理，準範疇性，等）ことは共通であり，どの場合にも回顧的な反省が行われ，無視されていた直観的概念の意義が明るみに出されることを特徴とする．これに対し，Tarski の実質的十全性の概念は定理の証明に先立って与えられていなければならない．また後から回顧的に見た場合，実質的十全性の概念が真理の定義不可能性定理に関してどのような哲学的反省をもたらすのかは明らかでない．Carnap の解明の場合とは異なり，Kreisel と Tarski の概念は両方とも「定理」の証明に関わるが，証明への関わり方は顕著に異なっていると言えよう．

5. 圧搾論法を超えて

この講演で，我々は完全性定理の背景に存在する概念的な問題を提起し，その問題が Kreisel の圧搾論法によって解決されるばかりでなく，Kreisel がその論法の方法論的基礎として発案した「非形式的厳密さ」の概念がこの問題の解決以外にも適用されることを見た．しかし完全性定理，圧搾論法，非形式的厳密さのどれにも，まだ概念的問題は残されているように思われるし，まだ見出されていない適用例もあるだろう．こ

[18] [24] もモデル論的妥当性に「実質的十全性」の概念を適用するが，独訳，旧英訳からは脱落している．
[19] なお Tarski が要請したもう一つの条件は「形式的に正しい」(formally correct) という条件であった，これは嘘つきのパラドックスなどの矛盾が起こらないという条件である．

こでは結論の代わりに，こうした事柄を見て行こう．

非形式的厳密さという概念の立場から見ると，一階述語論理を対象にした圧搾論法というのは非形式的厳密さについて幾つかの例の一つに過ぎない．ここからは，非形式的厳密さの例として，古典一階述語論理以外の論理体系に（しかも上で示された特定の圧搾論法と同じ形でないものも含めて）圧搾論法を応用する可能性が見て取れる．実際 Kreisel は [19] において，広義の非形式的厳密さの観点から幾つかの話題を扱っているが，これよりも圧搾論法に近い形で議論を展開する可能性があるように思われる．具体的に有望であるように思われるのは，直観主義論理である．Kreisel は「創造的主体」の話を非形式的厳密さの一例として挙げているが，ここでは我々はさしあたり別の概念を念頭においている．直観主義論理の論理定項の意図された解釈は BHK 解釈によって与えられるとされる．しかしながら，よく知られているようにこの解釈は非形式的である．この解釈について何らかの形で圧搾論法を適用することができれば，それは興味深いものとなろう．実は Kreisel 自身が 1960 年代に「構成の理論」と呼ばれる直観主義論理についての形式的理論を構想していた．その理論に直接圧搾論法がすぐに適用できるのであれば，Kreisel がすでに適用しているであろうから，この路線は必ずしも容易ではないと予想される．しかし BHK 解釈に関して説得的な形式的理論が与えられれば，直観主義論理の理解を深めることになろう．

圧搾論法には限界も存在する．直観的妥当性の概念は内包的 (intensional) な側面を持つ．例えば，直観的妥当性の概念は我々が論理定項の意味をどのように理解するかに本質的に依存している．ところが圧搾論法の目的は直観的妥当性概念の外延を決定することであり，この概念についてそれより細かい認識を得ることは望めない．勿論，外延を決定するだけでも重要な成果ではあるが，論理定項の意味という観点から論理的妥当性についてより深い洞察を得るには「意味」を直接取り扱う方法が必要となる．

またこうした意味（内包）の観点から，冒頭で提起された完全性定理の意義に関する問題を再検討する可能性もある．例えば，Dummett は完全性定理の意義を「意味の理論」の観点から次のように説明する．「意味の理論」とは一般に「我々が言語という手段によって実在を表現する仕方を説明することを試みる ([8], p.309) 」理論である．演繹的推論は我々の言語実践の重要な例なので，満足の行く意味の理論はそうした言語実践を論理的意味論によって意味のモデルに関係づけねばならない．このとき，

> 健全性と完全性の証明というのは，証明がなされる論理に関する理論 (the logical theory) のではなく，意味論の基底にある意味の理論の試金石なのである．... 論理に関する理論が我々の現実の実践を具体的に表現する限り，即ち我々が実際に妥当なものとして扱う基本的な推論規則 (primitive rules of inference) をもつ限り，意味の理論というものは，それが我々の実践のモデルを与えるべきならば，そうした推論規則が意味論的に妥当であることを明らかにせねばならず，また我々が受け入れる気にならないどの規則も意味論的に妥当であることを明らかにしてはならないのである ([8], p.310).

この観点では，論理体系は**意味**に関する考察によって，しかも体系全体よりもむしろ個々の論理定項に関する推論規則に関して，我々の推論実践と関係させられなければならない．Kreisel の圧搾論法が妥当性概念の外延について論じ，しかも具体的な「証明」方法を与えていたのと比べると,「意味」に関する議論はいかにも具体性を欠く．とはいえ，これは Kreisel が示した研究の方向性をさらに深化させる可能性の一つだろう．

参考文献

[1] Awodey, S. & E. Reck, Completeness and categoricity. Part I: Nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic, *Hist. & Phil. of Logic*, 23, 1–30, 2002.

[2] Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[3] Bernays, P., Schematic Korrespondenz und die idealisierten Strukturen, *Dialectica*, 24, 53–66, 1970. (English translation: Schematic correspondence and idealized structures, Bernays Project, www.phil.cmu.edu/projects/bernays/)

[4] Bernays, P., *Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalküls*, Habilitationsschrift, Göttingen, 1918 In Hilbert, D., W. Ewald & W. Sieg (eds.), *Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic: 1917 –1933*, Springer, 2013.

[5] Boolos, G., Nominalist Platonism. In *Logic, Logic, and Logic*, Harvard U. P., 1998.

[6] Carnap, R., *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, 1950.

[7] Dreben, B. & J. Heijenoort, Introduction to 1929, 1930, and 1930a, In *Gödel Collected Work*, Oxford U, P., 1995

[8] Dummett, M., Justification of deduction. In *Truth and Other Enigmas*, Harvard U. P., 1978.

[9] Etchemendy, J., *The Concept of Logical Consequence*, HUP, 1990.

[10] Fraenkel, A., *Einleitung in die Mengenlehre*, 3rd, ed., Springer, 1928.

[11] Gödel, K., Über die Vollständigkeit des Logikkalküls In *Gödel Collected Papers*, O. U. P., 1995.

[12] Goldfarb, W., Logic in the twenties: the nature of the quantifier, *The Journal of Symbolic Logic*, 44(3), 351–368, 1979.

[13] Hilbert, D., W. Ewald & W. Sieg (eds.), *Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic: 1917 –1933*, Springer, 2013.

[14] Hilbert, D. & W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (1st ed.), Springer, 1985.

[15] Hodges, W., Truth in a structure. In *Proceedings of the Aristotelian Society, New Series*, 86 (85/86),135-151,

[16] Kreisel, G., Mathematical logic. in T. L. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics*, 3, John Wiley & Sons, Inc., 95–195, 1965.

[17] Kreisel, G. & J.L. Krivine, *Elements of Mathematical Logic: Model Theory*. North Holland Pub. Co., 1967.

[18] Kreisel, G., Informal Rigour and Completeness Proofs. In I. Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, 138–157,1967.

[19] Kreisel, G., Mathematical logic: What has it done for the philosophy of mathematics? In R. Schoenman (ed.), *Bertrand Russell: Philosopher of the Century*, 273–303, 1967.

[20] McGee, V. Two problems with *Tarski's theory of consequence, Proceedings of the Aristotelian Society*, 92, 273–292, 1992.

[21] Prawitz, D., On the idea of general proof theory, *Synthese*, 27 (1/2), 63–77, 1974.

[22] Sieg, W., Hilbert's Programs:1917-1922, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5 (1), 1-44, 1999.

[23] Tarski, A., The concept of truth in formalized languages (Translation of 'Der Wharheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.') In J. Cocoran (ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford University Press, 152–278, 1983.

[24] Tarski, A. On the Concept of Following Logically. (Translation of 'O pojęciu wynikania logicznego,' Przegląd Filozoficzny,' 39, pp. 58–68, 1936) *History and Philosophy of Logic* 23 (3):155-196, 2002.