擬平滑頂点代数とモジュラー線形微分方程式

川節　和哉　(京都大学　数理解析研究所)*

1. はじめに

頂点作用素代数は, 互いに局所可換な量子場のなす代数であり, 二次元共形場理論の代数版だと思える. 頂点作用素代数は重要な無限次元表現を数多く持ち, モジュラー形式の理論と関係した性質が導かれる. 本講演では, モジュラー微分方程式と呼ばれる線形常微分方程式について解説し, 頂点作用素代数の表現論への応用をいくつか説明する.

2. 擬モジュラー形式

モジュラー群

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

を考える. これは元

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成されている.

ウェイト $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の古典的モジュラー形式, または単にモジュラー形式とは, 複素上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の正則関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ であって, $\tau \to i\infty$ で正則であり, $SL_2(\mathbb{Z})$ の右作用 $|_k$ で不変なものである. ここで, $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は,

$$(f|_k\gamma)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma.\tau), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \qquad \gamma.\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

である. f をモジュラー形式とすると, T による作用の不変性より, $f(\tau + 1) = f(\tau)$ が従う. したがって, f はフーリエ展開 $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)q^n$ $(q = e^{2\pi i\tau})$ を持つ. $i\infty$ において正則なので, $q = 0$ で正則, すなわち, $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)q^n$ が従う.

正規化された, ウェイト $k \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ の Eisenstein 級数

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} d^{k-1} \Big) q^n$$

を考える. ただし, B_k は方程式 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n/n! = t/(e^t - 1)$ で定義される (ベルヌーイ数) . $k \geq 4$ のとき, E_k はウェイト k のモジュラー形式である. また, モジュラー形式全体のなす環 $\mathbb{M}$ は, E_4, E_6 の多項式環であることが知られている.

一方, $E_2(\tau)$ はモジュラー形式ではないが, 次で定義する, ウェイト 2, 深さ 1 の擬モジュラー形式である. k を整数, s を非負整数とする.

本研究は科研費 (課題番号:19J01093) の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 17B69, 11F55
キーワード：頂点作用素代数, モジュラー微分方程式, アフィン頂点作用素代数, W 代数, ドリーニュ例外系列.
* e-mail: kawasetu@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義 1. $\mathbb{H}$ 上の正則関数 f がウェイト k, 深さ s の擬モジュラー形式であるとは, $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f_0, \ldots, f_s$ が存在して, $f_s \equiv 0$ ではなく,

$$(f|_k\gamma)(\tau) = \sum_{j=0}^{s} f_j(\tau)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^j, \qquad \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

を満たし, $f_0, \ldots, f_s$ が $\tau \to i\infty$ で正則であることである. $f \equiv 0$ は, 任意ウェイト, 深さ 0 の擬モジュラー形式と約束する.

ウェイト k のモジュラー形式はウェイト k, 深さ 0 の擬モジュラー形式である. さらに, 擬モジュラー形式全体のなす環は, E_2, E_4, E_6 の多項式環であることが知られている.

3. モジュラー微分方程式

微分作用素

$$D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau} = q\frac{d}{dq}$$

を考える.

定義 2. ウェイト k のセール微分とは,

$$\vartheta_k = D - \frac{k}{12}E_2$$

のことであり, セール微分の iteration を,

$$\vartheta_k^{(0)} = 1, \qquad \vartheta_k^{(n+1)} = \vartheta_{k+2n} \circ \vartheta_k^{(n)}, \qquad n \geq 0,$$

と定める.

セール微分と $SL_2(\mathbb{Z})$ の slash 作用は

$$\vartheta_k(f|_k\gamma) = (\vartheta_k f)|_{k+2}\gamma \tag{1}$$

という可換性を満たす.

定義 3. [KZ, M, MMS1] ウェイト k のモジュラー微分方程式とは, 線型常微分方程式

$$Lf = 0, \qquad L = \vartheta_k^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} P_i \vartheta_k^{(i)}, \qquad P_i \in \mathbb{M}_{2n-2i} \tag{2}$$

のことである.

モジュラー微分方程式 (2) は単位円板 $\{|q| < 1\}$ 上, $q = 0$ を確定特異点に持つ確定特異点型微分方程式である. (2) の $\mathbb{H}$ における解全体のなす空間を S_L と書くことにする. すると, (1) より, S_L は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用 $|_k$ で閉じていることがわかる.

4. 頂点作用素代数

ベクトル空間 V を考え, V の元を係数に持つ形式的べき級数の空間を $V[[z,z^{-1}]]=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \,|\, a_n \in V\}$ と書く. ただし z は不定元である. V 上の量子場とは, $a(z)\in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ であって, 任意の $b\in V$ に対して, ある $N>0$ が存在して, $a(z)b\in V[[z]]z^N$ が成り立つものをいう.

V が頂点代数 [B] であるとは, 特別な元 $\mathbf{1}\in V$ (真空元) と $T\in \mathrm{End}(V)$ (平行移動作用素) が定まっており, さらに, V の元 a に対して, V 上の量子場 $Y(a,z)$ が線型に定まっていて, 次の公理を満たすことである：

- (局所可換性) 任意の $a,b\in V$ に対して, $N>0$ が存在して,

$$(z-w)^N Y(a,z)Y(b,w)=(z-w)^N Y(b,w)Y(a,z).$$

- $Y(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_V, \qquad Y(a,z)\mathbf{1}\in a+V[[z]]z, \qquad (a\in V),$
- $T\mathbf{1}=0, \qquad [T,Y(a,z)]=\partial_z Y(a,z), \qquad (a\in V).$

V を頂点代数とする. $\omega\in V$ が中心電荷 $c\in\mathbb{C}$ のヴィラソロ元であるとは, $Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ と書くと,

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{n^3-n}{12}\delta_{n,-m}c, \qquad n,m\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

を満たすことである.

頂点代数 V とヴィラソロ元 $\omega\in V$ の組 (V,ω) は次の公理を満たすとき頂点作用素代数と呼ぶ [FLM]：

- L_0 が V 上, 半単純に作用する
- V 上の L_0-固有値は非負整数である:

$$V=\bigoplus_{\Delta=0}^{\infty} V_\Delta, \qquad V_\Delta := \{v\in V \,|\, L_0 v=\Delta v\},$$

- $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$, $\dim V_\Delta<\infty$, $\forall\Delta$.

(V,ω) を頂点作用素代数とする. 以降, 頂点作用素代数を単に V と書く. V の中心電荷は, ω の中心電荷 c のことである.

頂点作用素代数 V 上の表現 M は, V の元 a に対して M 上の量子場 $Y^M(a,z)\in \mathrm{End}(M)[[z,z^{-1}]]$ が線型に定まっていて, L_0 が半単純に作用しており, いくつかの公理を満たすものをいう. ただし, $Y^M(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とかく. M が既約表現のとき, ある $\Delta\in\mathbb{C}$ が存在して, M の L_0-固有値はすべて $\Delta+\mathbb{Z}$ の元である.

M を V 上の表現とする. M 上の L_0-固有値が次の意味で下に有界のとき, M は正エネルギーであるという：

$$M=\bigoplus_{\Delta\in S, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{\Delta+n}, \qquad \exists S\subset\mathbb{C} \quad \text{such that} \quad \#S<\infty.$$

ただし, $M_\Delta := \{v \in M \mid L_0 v = \Delta v\}$ $(\Delta \in \mathbb{C})$ とかく. 特に, M が既約正エネルギー表現のとき,

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\Delta+n}, \qquad \Delta \in \mathbb{C}$$

という形を持つ.

定義 4. V 上の普通表現とは, 正エネルギー表現 M であって, 各 L_0-固有空間が有限次元であるものをいう.

V 自身は V 上の表現であるが, これを真空表現と呼ぶ. 真空表現は普通表現の例である.

定義 5. 普通表現 M の (形式) 指標とは, 形式的級数

$$\chi_M = \sum_{n \in \mathbb{C}} (\dim M_n) q^{n-c/24}$$

のことである. ただし, q は不定元である.

5. Zhu 理論

中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ の頂点作用素代数 V を考える. 各 $a \in V$ に対して, $Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$ と書く.

定義 6. [Z]

1. 商ベクトル空間 $R_V = V/\langle a_{(-2)}b \mid a, b \in V\rangle_{\mathbb{C}}$ は $a \cdot b = a_{(-1)}b$, $\{a, b\} = a_{(0)}b$ によってポアソン代数 (§6 参照) の構造が誘導される. これを Zhu のポアソン代数と呼ぶ.
2. R_V が有限次元のとき, V は平滑 (lisse) であるという.

平滑は, C_2-余有限, C_2-有限, Zhu の有限性条件とも呼ばれる.

V が有理的であるとは, V の任意の正エネルギー表現が, 既約正エネルギー表現の直和に分解することをいう.

定理 1. [Z] V が平滑かつ有理的とすると, 次が成り立つ.

1. V の既約正エネルギー表現は既約普通表現である.
2. V の既約普通表現は同型を除いて有限個しかない.
3. V の既約普通表現 M の形式指標 $\chi_M(q)$ は $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$, によって複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数に収束する. (これを M の指標とよび, $\chi_M(\tau)$ と書く.)
4. V の既約普通表現の指標全体によって張られるベクトル空間
$$S_V := \mathbb{C}\text{-span}\{\chi_M(\tau) \mid M \text{ は既約普通表現}\}$$
は $SL_2(\mathbb{Z})$ の slash-0 作用 $|_0$ で閉じている.
5. ウェイト 0 のモジュラー微分方程式 $Lf = 0$ が存在して, $S_V \subset S_L$ が成り立つ.

これを頂点作用素代数のモジュラー不変性と呼ぶ. V が平滑だが非有理的なときは, 擬指標という, $\log(q)$ が現れるような関数を含めて考えると, 同様のモジュラー不変性が成り立つ [Miy].

6. 擬平滑な頂点作用素代数

ポアソン代数とは, 二つの積を持つベクトル空間 $(R, \cdot, \{,\})$ であって, $\cdot$ に関して結合的代数, $\{,\}$ に関してリー環となり, $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b$, $\forall a, b, c \in R$, を満たすものである. R をポアソン代数とすると, ポアソン多様体 $X = \mathrm{Specm}(R)$ は, 滑らかな解析的ポアソン多様体 $X_0, \ldots, X_r$ によって分割される (例えば [BG] 参照) :

$$X = \bigsqcup_{k=0}^{r} X_k.$$

$k = 0, \ldots, r$ とし, $x \in X_k$ とする. x を元に持ち, ポアソン構造が非退化になる X_k の極大連結部分多様体 $\mathcal{L}_x$ が一意に定まり, X_k の (および X の) シンプレクティック葉と呼ぶ. このときポアソン構造から $\mathcal{L}_x$ 上のシンプレクティック構造が誘導される. X のシンプレクティック葉全体は X の stratification を与える.

V を頂点作用素代数とする. ポアソン多様体 $X_V = \mathrm{Specm} R_V$ を V の随伴多様体と呼ぶ [A2].

定義 7. [AK] V が擬平滑 (quasi-lisse) であるとは, X_V が高々有限個のシンプレクティック葉を持つことである.

V は平滑ならば擬平滑である. 擬平滑な頂点作用素代数は, 次の意味でのモジュラー不変性を持つ.

定理 2. [AK] V が擬平滑と仮定すると, 定理 1 の 2,3,5 が成り立つ.

Remark 1. 最近, Beem et al [BL+] は任意の四次元 $\mathcal{N} = 2$ ユニタリ超共形場理論 $\mathcal{T}$ に対して, ユニタリとは限らない頂点作用素代数 $V_{\mathcal{T}}$ を構成した. $V_{\mathcal{T}}$ は擬平滑であると予想されている. また, $\mathcal{T}$ のシューア指標と呼ばれる不変量は, $V_{\mathcal{T}}$ の (真空表現の) 指標と思えるとされている.

7. 頂点作用素代数の例

7.1. ヴィラソロ極小模型

ヴィラソロ代数 $\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} L_n \oplus \mathbb{C} C$ は, (3) においてスカラー c を中心元 C で置き換えた関係式を満たすリー環である. カルタン部分代数 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} C \oplus \mathbb{C} L_0$, ボレル部分代数 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} L_n$ を考える.

$c, h \in \mathbb{C}$ とし, 最高ウェイト $(c, h) \in \mathfrak{h}^*$ の Vir 上の最高ウェイト表現を $L(c, h)$ とかく. ここで, $\lambda = (c, h)$ とは, $\lambda(C) = c$, $\lambda(L_0) = h$ を意味する. $L(c, 0)$ は頂点作用素代数の構造を持ち, ヴィラソロ頂点作用素代数と呼ばれる. $L(c, 0)$ が平滑かつ有理的であることと,

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \qquad (p, q) = 1$$

という形を持つことは同値である.

7.2. アフィン頂点作用素代数

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環とし, $\mathfrak{h}$ をカルタン部分代数, $\mathfrak{b}$ をボレル部分代数とする. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ を $\mathfrak{g}$ の単純ルートとし, h, $h^\vee$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ のコクセター数, 双対コク

セター数とする．次のリー積で定義される, $\mathfrak{g}$ のアフィン化 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を考える：

$$[at^n, bt^m] = [a, b]t^{n+m} + n(a|b)\delta_{n,-m}K, \qquad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0, \qquad (a, b \in \mathfrak{g}, n, m \in \mathbb{Z}).$$

ここで, $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の正規化された不変内積である. $\widehat{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数とボレル部分代数を, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$, $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}[t] + \mathfrak{g}[t]t + \mathbb{C}K$ ととる. $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$, $(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_\ell)$ はそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルート, 基本ウェイトを表す.

k を $-h^\vee$ でない複素数とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の一般化 Verma 加群

$$V^k(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K} \mathbb{C}_k$$

は頂点作用素代数の構造を持ち, 普遍アフィン頂点作用素代数と呼ばれる. ただし, $\mathbb{C}_k$ はリー環 $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ 上の一次元表現で, $\mathfrak{g}[t]$ は 0, K は k 倍で作用する. $V^k(\mathfrak{g})$ の単純商代数は (単純) アフィン頂点作用素代数と呼び, $L_k(\mathfrak{g})$ とかく. $L_k(\mathfrak{g})$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群として既約最高ウェイト表現 $L(k\Lambda_0)$ と同型である.

$L_k(\mathfrak{g})$ が平滑かつ有理的であることと, $k = 0, 1, 2, \ldots$ は同値である. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する. $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の支配的整ウェイト全体の集合を $\widehat{P}^+_k \subset \widehat{\mathfrak{h}}^*$ とかくと, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約正エネルギー表現全体は, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の既約表現 $L(\lambda)$, $\lambda \in \widehat{P}^+_k$, の全体と一致する. このような既約表現は, Weyl-Kac 指標公式という, Weyl 指標公式の一般化が適用でき, モジュラー不変性が知られていた [KP].

$\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の許容 (admissible) 表現とは, $L(\lambda)$, $\lambda \in \widehat{P}^+_k$, をある種有理レベルに一般化したものである [KW1]. 許容表現は Kac-Wakimoto 指標公式という, Weyl-Kac 指標公式の一般化を満たす. しかも, 指標が $SL_2(\mathbb{Z})$ のある合同部分群上のウェイト 0 モジュラー関数であるという意味で, モジュラー不変である [KW1].

予想 1. [KW1] $L(\lambda)$ の指標が Kac-Wakimoto の意味でモジュラー不変であることと, $L(\lambda)$ が許容表現であることは同値である.

さて, k が許容的であるとは, $L(k\Lambda_0)$ が許容表現であることをいう. これは,

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \qquad (p, q) = 1, \qquad p \geq \begin{cases} h^\vee & (q, r^\vee) = 1, \\ h & (q, r^\vee) = r^\vee, \end{cases}$$

という形を持つことと同値である. ここで, $r^\vee$ は $\mathfrak{g}$ のディンキン図で一番太いところにおける線の本数である. k が許容的なとき, $L_k(\mathfrak{g})$ は擬平滑である [A1]. したがって, $L_k(\mathfrak{g})$ の指標はウェイト 0 のモジュラー微分方程式を満たす.

8. W 代数

$f \in \mathfrak{g}$ をべき零元とする. f に付随する普遍 W 代数は, 普遍アフィン頂点作用素代数 $V^k(\mathfrak{g})$ に量子化された Drinfeld-Sokolov 還元法 (BRST 還元法) を適用して得られる頂点作用素代数 $V^k(\mathfrak{g}, f)$ である [1] [KRW]. これは Slodowy 横断片の量子アフィン化といえる. $V^k(\mathfrak{g}, f)$ の単純商代数は (単純) W 代数と呼ばれ, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ と書く.

[1] W 代数上 L_0-固有値は一般には半整数 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるため, 正確に言うと本稿における頂点作用素代数の公理は満たしていない. しかし, 簡単のため, 専門家向けに必要に応じて脚注をつけ, 本文では単に頂点作用素代数として扱う. f が主べき零元のときは, L_0-固有値は整数である.

f が主べき零元とすると $W_k(\mathfrak{g}, f)$ は Feigin-Frenkel [FF] の W 代数と一致し, 特に $\mathfrak{g} = A_1$ のときはヴィラソロ頂点作用素代数に, $\mathfrak{g} = A_2$ のときは Zamolodchikov の W_3 代数に一致する.

k を非負整数ではない許容レベルだと仮定すると, k の分母に依存してあるべき零元 $f \in \mathfrak{g}$ が定まり, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ は平滑となる [A1]. 逆に, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ が平滑かつ有理的ならば, k は許容的だと予想され [KW2], 広く信じられていた. 最近, その反例が [K] によって与えられた. $\mathfrak{g}$ はドリーニュ例外系列 [D]

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

に属するリー環だとする.

定理 3. [K] 極小べき零元 $f_{min} \in \mathfrak{g}$ に付随する W 代数 $W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{min})$ は平滑かつ有理的である.

$\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$ のときは, レベル $k = -h^\vee/6$ は許容的ではない数である.

さらに, [AM] において, この例を含む平滑な W 代数の無限系列が得られた: $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ とする. このとき, $W_{-h^\vee/6+n}(\mathfrak{g}, f_{min})$ は平滑である. なお, $n = -1$ のとき, $W_{-h^\vee/6-1}(\mathfrak{g}, f_{min})$ は一次元頂点作用素代数 $\mathbb{C}$ である. さらに, $V^k(\mathfrak{g})$ のある商代数 $\tilde{L}_{-h^\vee/6+n}(\mathfrak{g})$ が定まり, その随伴多様体が極小べき零軌道の閉包 $\overline{\mathbb{O}}_{min}$ であることも示された [AM]. $\overline{\mathbb{O}}_{min}$ のシンプレクティック葉は $\mathbb{O}_{min}$ と $\{0\}$ であるため, $\tilde{L}_{-h^\vee/6+n}(\mathfrak{g})$ は擬平滑であり, したがって $L_{-h^\vee/6+n}(\mathfrak{g})$ も擬平滑である.

9. 2 階のモジュラー微分方程式とアフィン頂点作用素代数

モジュラー微分方程式 (2) を考える. (2) は確定特異点型なので, フロベニウス法により解の様子がわかる.

$$f = q^\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} a_j q^{\alpha+j}, \qquad a_j \in \mathbb{C} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

とし, (2) にこれを代入して q^α の係数を見ると, α に関する n 次方程式 $\Phi_L(\alpha) = 0$ が得られる. これを L の (確定特異点 $q = 0$ における) 決定方程式という. 決定方程式の根は特性べき数という. また, $q^{\alpha+j}$ の係数を見ると, 関係式 $\Phi_{L,j}(\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_j) = 0$ が得られる.

(4) において, $a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\forall j = 1, 2, 3, \ldots)$ と仮定したものは, 真空型と呼ばれる. 真空型の解を持つ微分方程式を見つけたいときには, 関係式 $\Phi_{L,j}(\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_j) = 0$ を $a_1, \ldots, a_j$ に関するディオファンタス方程式だと思うことが有用である.

有理共形場理論 ($\approx$ 平滑かつ有理的な頂点作用素代数) V を考え、その表現の指標が 2 階のウェイト 0 モジュラー微分方程式を満たすと仮定する。[MMS1] において、このときどのような指標が現れ得るかが考察された. (2 階のモジュラー微分方程式は Kaneko-Zagier 方程式 [KZ] とも呼ばれる.) 真空表現の指標 $\chi_V(\tau) = q^{-c/24}(1 + O(q))$ が真空型であることから, 決定方程式とディオファンタス方程式を用いて, 可能性は次で尽くされることがわかる.

定理 4. [MMS1] V の指標はヴィラソロ極小模型 $L(-22/5, 0)$ の指標か, ドリーニュ例外系列に属するリー環 $\mathfrak{g}$ に付随する, レベル 1 アフィン頂点作用素代数 $L_1(\mathfrak{g})$ の指標と一致する.

さらに, [MMS2] においては, 定理 4 の対応が指標のみならず共形場理論 ($\approx$ 頂点作用素代数) として成り立つことが示された. これは最近 [KS, MNS] によって頂点作用素代数の理論によって代数的に見直された.

より一般に, ウェイト 0 の 2 階のモジュラー微分方程式であって, 真空型の解を持つものは, [KNS1] によって分類されている. それを用いて, 次の結果が得られた.

定理 5. [AK] $\mathfrak{g}$ をドリーニュ例外系列に属するリー環とする. $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン頂点作用素代数 $L_{-h^\vee/6-1}(\mathfrak{g})$ の指標は, ウェイト 0 の Kaneko-Zagier 方程式

$$\vartheta_0^{(2)} f - \frac{(h^\vee - 1)(h^\vee + 1)}{144} E_4 f = 0 \tag{5}$$

を満たす.

[KK] で構成された解により, 次の系が得られる.

系 1. $L_{-h^\vee/6-1}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$, の指標はウェイト 1, 深さ 1 の擬モジュラー関数である.

モジュラー微分方程式とアフィン頂点作用素代数の指標の関係は, 他にも [AKNS] 等で調べられている.

10. 4 階のモジュラー微分方程式と W 代数

3 階のモジュラー微分方程式は, [FM, KNS2] 等で重点的に考察されている. 本節では, 次で定義される 4 階のモジュラー微分方程式の族 $\{L_s f = 0\}_{s\in\mathbb{C}}$ を考察する：

$$L_s = \vartheta_0^{(4)} + \alpha_1(s) E_4 \vartheta_0^{(2)} + \alpha_2(s) E_6 \vartheta_0 + \alpha_3(s) E_8, \tag{6}$$

ただし, $\alpha_1 = (-25s^2 + 120s + 1332)/7200$, $\alpha_2 = (5s+6)^2/14400$, $\alpha_3 = (s-18)(s+6)(5s+6)^2/8294400$ とおいた.

[KS] において, (6) が真空型の解を持つような s の候補が与えられ, 候補中の各 s について, $L_s f = 0$ の解空間の基底が与えられた. さらに, 次の W 代数との関係が見いだされた.

定理 6. ([KS]) $\mathfrak{g}$ をドリーニュ例外系列に属するリー環とする. $W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{min})$ の表現[2] の指標は, $s = 6(7h^\vee - 18)/5(h^\vee + 6)$ とおくと, モジュラー微分方程式 $L_s f = 0$ を満たす.

また, ある種の強い条件の下で, 族 $\{L_s f = 0\}_{s\in\mathbb{C}}$ による $W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{min})$ の特徴づけも得られた [KS].

11. モジュラー微分方程式の解の例

11.1. $L_{-2}(D_4)$

アフィン頂点作用素代数 $L_{-2}(D_4)$ の指標は, 2 階のモジュラー微分方程式

$$Lf = 0, \qquad L = \vartheta_0^{(2)} - \frac{35}{144} E_4 \tag{7}$$

[2] 正確には, $W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{min})$ の正エネルギー Ramond ツイスト表現. 任意の既約 Ramond ツイスト表現 M に対して, ある $\Delta \in \mathbb{C}$ が存在して, M の L_0-固有値はすべて $\Delta + \mathbb{Z}$ に属する. 有理数で次数付けられた頂点作用素代数のツイスト表現のモジュラー不変性は, [DLM, E] で証明されている.

を満たす. [KK] より, 次の関数 f, g は $Lf = 0$ の $\mathbb{H}$ 上の解空間の基底をなす.

$$f(\tau) = \frac{E_2(\tau)E_4(\tau) - E_6(\tau)}{720\eta(\tau)^{10}} = q^{7/12}(1 + 28q + 329q^2 + 2632q^3 + \cdots),$$
$$g(\tau) = 2\pi i\tau f(\tau) + \frac{E_4(\tau)}{60\eta(\tau)^{10}}.$$

$V = L_{-2}(D_4)$ の真空表現の指標 $\chi_V(\tau)$ は真空型なので, $\chi_V(\tau) = f(\tau)$ である. 特に, これは擬モジュラー関数である.

11.2. $W_{-1/2}(G_2, f_{min})$

W 代数 $W_{-1/2}(G_2, f_{min})$ の指標は, 4 階のモジュラー微分方程式 $L_{6/5}f = 0$ を満たす. [KS] より, 次の関数 $f_1, \ldots, f_4$ は $L_{6/5}f = 0$ の $\mathbb{H}$ 上の解空間の基底をなす.

$$f_1 = \frac{\psi_1^6 + 2\psi_1\psi_2^5}{\eta^{12/5}} = q^{-1/10}(1 + 8q + 23q^2 + 68q^3 + \cdots),$$
$$f_2 = \frac{2\psi_1^5\psi_2 - \psi_2^6}{2\eta^{12/5}} = q^{1/10}\left(1 + \frac{9}{2}q + 16q^2 + 38q^3 + \cdots\right),$$
$$f_3 = \frac{\psi_1^4\psi_2^2}{\eta^{12/5}} = q^{3/10}\left(1 + 4q + 12q^2 + 30q^3 + \cdots\right),$$
$$f_4 = \frac{\psi_1^2\psi_2^4}{\eta^{12/5}} = q^{7/10}\left(1 + 2q + 7q^2 + 16q^3 + \cdots\right).$$

ただし, ψ_1, ψ_2 は Rogers-Ramanujan 関数 (ウェイト 1/5, レベル 5 の保型形式) である:

$$\psi_1(\tau) = \eta(\tau)^{2/5}\Big\{q^{-1/60} \prod_{n>0\ (n\not\equiv 0,\pm 2 \bmod 5)} (1 - q^n)^{-1}\Big\},$$
$$\psi_2(\tau) = \eta(\tau)^{2/5}\Big\{q^{11/60} \prod_{n>0\ (n\not\equiv 0,\pm 1 \bmod 5)} (1 - q^n)^{-1}\Big\}.$$

参考文献

[A1] T. Arakawa. “Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras.” *Int. Math. Res. Not.*, 2015:11605–11666, 2015.

[A2] T. Arakawa. “A remark on the C_2-cofiniteness condition on vertex algebras.” Mathematische Zeitschrift 270.1-2 (2012): 559-575.

[AK] T. Arakawa and K. Kawasetsu. “Quasi-lisse vertex algebras and modular linear differential equations.” Lie Groups, Geometry, and Representation Theory. Birkhäuser, Cham, 2018. 41-57.

[AM] T. Arakawa and A. Moreau. “Joseph ideals and lisse minimal W-algebras.” Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 17.2 (2018): 397-417.

[AKNS] Y. Arike, M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai. Affine Vertex Operator Algebras and Modular Linear Differential Equations. *Lett. Math. Phys.*, 106(5): 693–718, 2016.

[B] R. Borcherds. “Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster.” Proceedings of the National Academy of Sciences 83.10 (1986): 3068-3071.

[BG] K. Brown and I. Gordon. “Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory.” *J. Reine Angew. Math.*, 559:193–216, 2003.

[BL+] C. Beem, M. Lemos, P. Liendo, W. Peelaers, L. Rastelli and B. van Rees. “Infinite chiral symmetry in four dimensions.” *Comm. Math. Phys.*, 336(3):1359–1433, 2015.

[D] P. Deligne. "La série exceptionnelle de groupes de Lie." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Série I-Mathématique* 322.4 (1996): 321-326.

[DLM] C. Dong, H. Li, and G. Mason. "Modular-Invariance of Trace Functions in Orbifold Theory and Generalized Moonshine." Communications in Mathematical Physics 214.1 (2000): 1-56.

[E] J. van Ekeren. "Modular invariance for twisted modules over a vertex operator superalgebra." Comm. Math. Phys. 322(2) (2013) 333–371.

[FF] B. Feigin and E. Frenkel. "Quantization of the Drinfel'd-Sokolov reduction." *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[FM] C. Franc and G. Mason. "Classification of some three-dimensional vertex operator algebras." arXiv:1905.07500.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman. "Vertex operator algebras and the Monster." Vol. 134. Academic press, 1989.

[KP] V. Kac and D. Peterson. "Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms." Adv. Math. 53 (1984): 125-264.

[KRW] V. Kac, S. Roan and M. Wakimoto. "Quantum reduction for affine superalgebras." *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[KW1] V. Kac and M. Wakimoto. "Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras." *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(14):4956–4960, 1988.

[KW2] V. Kac and M. Wakimoto. "On rationality of W-algebras." *Transform. Groups*, 13(3-4):671–713, 2008.

[KK] M. Kaneko and M. Koike. "On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type." *The Ramanujan J.* 7.1-3: 145-164, 2003.

[KNS1] M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai. "Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras." Letters in Mathematical Physics 103.4 (2013): 439-453.

[KNS2] M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai. "The third order modular linear differential equations." Journal of Algebra 485 (2017): 332-352.

[KZ] M. Kaneko and D. Zagier. "Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials." AMS IP STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS 7 (1998): 97-126.

[K] K. Kawasetsu. "$\mathcal{W}$-algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series." International Mathematics Research Notices 2018.3 (2016): 641-676.

[KS] K. Kawasetsu and Y. Sakai. "Modular linear differential equations of fourth order and minimal W-algebras." Journal of Algebra 506 (2018): 445-488.

[M] G. Mason. "Vector-valued modular forms and linear differential operators." *Int. J. of Number Theory* 3.03: 377–390, 2007.

[MNS] G. Mason, K. Nagatomo and Y. Sakai. "Vertex operator algebras with two simple modules-the Mathur-Mukhi-Sen theorem revisited." arXiv preprint arXiv:1803.11281 (2018).

[MMS1] S. Mathur, S. Mukhi and A. Sen. "On the classification of rational conformal field theories." *Physics Letters B* Vol. 213, Issue. 3, (1988): 303–308.

[MMS2] S. Mathur, S. Mukhi, A. Sen. "Reconstruction of conformal field theories from modular geometry on the torus", Nuclear Phys. B 318(2) (1989) 483–540.

[Miy] M. Miyamoto. "Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness." Duke Mathematical Journal 122.1 (2004): 51-91.

[Z] Y. Zhu. "Modular invariance of characters of vertex operator algebras." Journal of the American Mathematical Society 9.1 (1996): 237-302.