

正則局所環上の加群の整閉包

早坂 太 (岡山大環境)*

概要

Zariski は、2次元正則局所環の整閉イデアルの理論を展開し、整閉イデアルの積が再び整閉となることを証明した。本講演では、この古典的定理を出発点に、その高次元版および高階数版について考察し、得られた結果を紹介する。

1. イデアルの整閉包と Zariski の定理

以下、 R は可換環、 I は R のイデアルとする。 R の元 x がイデアル I 上整であるとは、自然数 n と元 $a_i \in I^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が存在して、等式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

をみたすときをいう。 $\bar{I} = \{x \in R \mid x \text{ は } I \text{ 上整}\}$ と定め、 I の整閉包という。イデアル I が整閉とは、等式 $I = \bar{I}$ をみたすときをいう。定義から明らかに、 $I \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}$ である。従って、根基イデアルは整閉である。 R のイデアル J が I の節減であるとは、 $J \subset I$ で、かつ自然数 n が存在して等式 $I^n = JI^{n-1}$ をみたすときをいう。 R の元 x がイデアル I 上整であることと、 I が $I + (x)$ の節減であることは同値である。

イデアル I の Rees 環を $\mathcal{R}(I) := R[t]$ で表す。ここで、 t は不定元である。 R の元 x が I 上整であることと、多項式環 $R[t]$ の元 xt が、部分環 $\mathcal{R}(I)$ 上整であることは同値である。従って、 $\bar{I}$ は R のイデアルで、等式 $\bar{I} = \overline{\bar{I}}$ が成り立つ。一般に、環 $\mathcal{R}(I)$ の $R[t]$ における整閉包 $\overline{\mathcal{R}(I)}^{R[t]}$ は、 $R[t]$ の次数付き部分 R 代数で、その i 次斉次成分は、 $\bar{I}^i t^i$ である。特に、 R が整閉整域のとき、Rees 環 $\mathcal{R}(I)$ の (商体における) 整閉包は、

$$\overline{\mathcal{R}(I)} = \sum_{i \geq 0} \bar{I}^i t^i$$

なる次数付き R 代数である。従って、Rees 環 $\mathcal{R}(I)$ が整閉整域であることと、任意の自然数 n で I^n が整閉であることは同値である。任意のベキ I^n が整閉のとき、イデアル I は正規であるという。

イデアルの整閉包の元は、環準同型で保たれる。よって、 $x \in \bar{I}$ なら、任意の極小素イデアル $P \in \text{Min } R$ について、 $x + P \in \overline{(I + P/P)}$ である。 R がネータ環のとき、この逆も正しい。これにより、ネータ環 R のイデアルの整閉包の問題は、極小素イデアルによる剰余環 R/P を通して整域の場合に帰着されることが多い。次は重要である。

定理 1.1. (Valuative criterion) R はネータ整域、 K は R の商体、 I は R のイデアルとする。このとき、 R の元 x について、 $x \in \bar{I}$ であることと「任意の K の離散付値環 V で R を含むものに対し、 $x \in IV$ である」ことは同値である。

一般に、与えられたイデアルの整閉包を計算することは容易でないが、多項式環の単項式イデアルの場合には次が知られている。

* 〒700-8530 岡山市北区津島中3-1-1 岡山大学環境理工学部環境数理学科
e-mail: hayasaka@okayama-u.ac.jp

命題 1.2. $R = k[X_1, \dots, X_d]$ は体 k 上多項式環とする. R の単項式イデアル I に対し, $\text{NP}(I) = \text{conv}(\{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \mid X_1^{n_1} \cdots X_d^{n_d} \in I\}) \subset \mathbb{R}^d$ とおくと,

$$\bar{I} = (X_1^{n_1} \cdots X_d^{n_d} \mid (n_1, \dots, n_d) \in \text{NP}(I) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d)$$

が成り立つ. 特に, $\bar{I}$ も単項式イデアルである.

この命題 1.2 の主張は, 正則局所環の正則パラメータ系に関する単項式イデアルに対しても成り立つことが知られている ([6, 11]).

例 1.3. $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, x, y をその正則パラメータ系とする.

- (1) a は自然数, $I = (x^a, y^{a+1})$ とすると, $\bar{I} = I + (x^i y^{a+1-i} \mid i = 1, 2, \dots, a-1)$.
- (2) 整閉な (x, y) に関する単項式イデアル I の任意ベキ I^n も整閉 (I は正規) である.

この例 1.3(2) の主張は, Zariski の古典的結果の特別な場合と見なせる. ここで, Zariski の定理および関連する結果を思い出そう.

定理 1.4. $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, I, J は R の $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとする.

- (1) (Zariski [19, 20]) イデアル I, J が整閉ならば, その積 IJ も整閉である. 特に, 整閉イデアルは正規である.
- (2) (Zariski [19, 20]) 整閉イデアル $\bar{I}$ は, 整閉 simple イデアル $I_1, \dots, I_\ell$ の積 $\bar{I} = I_1 \cdots I_\ell$ に (順序の違いを除いて) 一意的に分解する. ここで, イデアルが **simple** とは, (真イデアルであって) 真イデアル 2 つの積で表せないときをいう.
- (3) (Lipman-Tessier [14]) イデアル I について, 等式 $I\bar{I} = \bar{I}^2$ が成り立つ.

I は 2 次元正則局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の整閉 $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとする. 定理 1.4(1) より I は正規故, その Rees 環 $\mathcal{R}(I)$ は整閉整域である. また, I の極小節減 Q をとると, 定理 1.4(1)(3) より等式 $I^2 = QI$ が成り立つことがわかる. この等式成立と, Rees 環 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay は同値 (後藤・下田の定理 [3]) より次が従う.

定理 1.5. (cf. [8]) $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, I は R の整閉 $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとする. このとき, I の Rees 環 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 整閉整域である.

Lipman は, Zariski の整閉イデアルの理論を 2 次元有理特異点と呼ばれる環上で展開し, 定理 1.4(1) の類似が成り立つことを明らかにした ([13]). 定理 1.4(3) の等式も R が 2 次元有理特異点で正しい ([14]). よって, 定理 1.5 も R が 2 次元有理特異点で成り立つ. また, Cutkosky は, Zariski の定理が成り立つ 2 次元正規局所整域の特徴付けを与えた ([1] 参照).

一方, Zariski は, 定理 1.4(1)(2) が 3 次元以上の正則局所環の場合にどのように拡張できるか, という問題を提起した. 本講演では, 定理 1.4(1) 「Product Theorem」の次の 2 方向への拡張について, 最近得られた結果を中心に紹介したい.

- 高次元 (3 次元以上の) 正則局所環における整閉イデアルの正規性 (第 2 節)
- 2 次元正則局所環上の高階数 (階数 2 以上の) 整閉加群の積の整閉性 (第 3 節) と直既約性 (第 4 節)

2. Zariski の定理の高次元版

前節で述べた Zariski の「Product Theorem」は 3 次元正則局所環で成り立たない. Huneke によって与えられた次の具体的反例がある¹.

例 2.1. (Huneke [7]) $R = k[X, Y, Z]_{(X, Y, Z)}$ は体 k 上多項式環の局所環, $I = (X^2 + Y^3, Z) + (X, Y)^4$, $J = (Y^3, Z) + (X, Y)^4$ とすると, I, J は整閉だが, IJ は整閉でない.

また, 体上 3 変数多項式環の整閉単項式イデアル I で, I^2 は整閉でない例もある ([9] 参照). 特に, 3 次元正則局所環のイデアル I が正規 (Rees 環が整閉整域) となるためには, $\bar{I} = I$ では足りない. イデアルが正規となるためには, どのくらいのベキまで整閉であればよいか? 多項式環の単項式イデアルの場合には次が知られている.

定理 2.2. $R = k[X_1, \dots, X_d]$ は体 k 上多項式環, I は R の単項式イデアルとする.

- (1) (Reid-Roberts-Vitulli [16]) イデアル $I, I^2, \dots, I^{d-1}$ が整閉ならば, I は正規である.
- (2) (Singla [18]) $\ell := \lambda(I) = \dim \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ とおく. イデアル $I, I^2, \dots, I^{\ell-1}$ が整閉ならば, I は正規である.

一般に, $\lambda(I) \leq d$ であるから, 定理 2.2(2) は定理 2.2(1) を改善したものとなっている. 単項式イデアルの積の整閉性はどうなっているだろうか? この視点から考察した結果に次がある.

定理 2.3. (Sarkar-Verma [17]) $R = k[X_1, \dots, X_d]$ は体 k 上多項式環, $I_1, \dots, I_r$ は R の $(X_1, \dots, X_d)$ -準素単項式イデアルとする. このとき, $1 \leq |\mathbf{n}| := n_1 + \dots + n_r \leq d-1$ をみたす任意のベクトル $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}} = I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r}$ が整閉ならば, 任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ は整閉である.

これは, Reid-Roberts-Vitulli の結果の拡張である. Reid-Roberts-Vitulli および Singla が用いた手法は, 命題 1.2 を基礎とするものであったのに対し, Sarkar-Verma の手法は, 多重 Rees 環の局所コホモロジーを用いるものであった. この手法を発展させることで次の一般的な結果を得た.

定理 2.4. ([4]) $(R, \mathfrak{m})$ はネータ局所環, $d = \dim R > 0$, $I_1, \dots, I_r$ は R のイデアルで, その多重 Rees 環 $\mathcal{R}(\mathbf{I}) = R[I_1 t_1, \dots, I_r t_r]$ の次元は $d+r$ と仮定する. 多項式環 $R[t_1, \dots, t_r]$ における $\mathcal{R}(\mathbf{I})$ の整閉包を $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{I})}$ で表し, $\ell := \lambda(I_1 \dots I_r)$ とおく. さらに, $\mathcal{R}(\mathbf{I})$ は次の条件 (1)(2) をみたすと仮定する.

- (1) 環拡大 $\mathcal{R}(\mathbf{I}) \subset \overline{\mathcal{R}(\mathbf{I})}$ は有限拡大
- (2) $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{I})}$ は Cohen-Macaulay

このとき, $1 \leq |\mathbf{n}| \leq \ell-1$ をみたす任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ が整閉ならば, 任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ は整閉である.

R が体上多項式環, $I_1, \dots, I_r$ が単項式イデアルなら上記仮定 (1) および (2) もみたす² ので, この系として次が従う. これは, 定理 2.2 を含み, 定理 2.3 を改善したものとなっている.

¹ I, J の片方が極大イデアルの場合も具体的反例がある (Huneke [7]).

² 正規半群環は Cohen-Macaulay である (Hochster の定理).

系 2.5. ([4]) $R = k[X_1, \dots, X_d]$ は体 k 上多項式環, $I_1, \dots, I_r$ は R の単項式イデアルとする. $\ell := \lambda(I_1 \cdots I_r)$ とおく. このとき, $1 \leq |\mathbf{n}| \leq \ell - 1$ をみたす任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ が整閉ならば, 任意の $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ は整閉である.

定理 2.4 の仮定 (1) は, R が正則局所環なら常に成り立つ³ ことから次が従う.

定理 2.6. ([4]) $(R, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim R > 0$, $I_1, \dots, I_r$ は R のイデアルで, その多重 Rees 環 $\mathcal{R}(\mathbf{I})$ の整閉包 $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{I})}$ は Cohen-Macaulay と仮定する. $\ell := \lambda(I_1 \cdots I_r)$ とおく. このとき, $1 \leq |\mathbf{n}| \leq \ell - 1$ をみたす任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ が整閉ならば, 任意の $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ は整閉である.

定理 2.6 の仮定「整閉包 $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{I})}$ が Cohen-Macaulay」は本当に必要だろうか?

問題 2.7. $(R, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim R > 0$, $I_1, \dots, I_r$ は R のイデアルとする. $\ell := \lambda(I_1 \cdots I_r)$ とおく. このとき, $1 \leq |\mathbf{n}| \leq \ell - 1$ をみたす任意のベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ が整閉ならば, 任意の $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ について, イデアル $\mathbf{I}^{\mathbf{n}}$ は整閉か?

イデアル $I_1, \dots, I_r$ に関する何らかの仮定が必要と思われるが, $r = 1$ の場合でも反例を知らない. 3次元正則局所環のイデアル I で I, I^2 は整閉だが正規でない例を与えられないだろうか?

3. 加群の整閉包と Kodiyalam の定理

イデアルの整閉包は, 自然に加群の場合に拡張される. 以下, 簡単のため, R はネータ整域としよう. K は R の商体を表す. 有限生成 torsion-free R 加群 M に対し, $M_K := M \otimes_R K$ とおく. Rees は, 定理 1.1 (Valuative criterion) を基礎に, 加群の整閉包を次で定義した.

定義 3.1. (Rees [15]) M は有限生成 torsion-free R 加群とする. 元 $f \in M_K$ が M 上整とは, 「任意の K の離散付値環 V で R を含むものに対し, $f \in MV$ である」をみたすときをいう. ここで, $MV = \text{Im}(M \otimes_R V \rightarrow M_K)$ は, V で生成される M_K の部分 R 加群である.

$$\overline{M} = \{f \in M_K \mid f \text{ は } M \text{ 上整}\}$$

と定め, M の整閉包という.

命題 3.2. (Rees [15]) M は有限生成 torsion-free R 加群とする.

- (1) $\overline{M}$ は M_K の部分 R 加群で, $M \subset \overline{M} = \overline{\overline{M}} \subset M_K$ をみたす.
- (2) $\overline{M}$ が有限生成 R 加群であることと, 環拡大 $R \subset \overline{R}$ が有限拡大であることは同値である. 一般に, $\overline{M}$ は $\overline{R}$ 加群で, $\overline{M} \subset \overline{M}^{\dagger\dagger}$ をみたす. ここで, $\overline{R}$ は整域 R の整閉包, $M^{\dagger} = \text{Hom}_R(M, \overline{R})$ を表す.
- (3) R が整閉整域なら, $M \subset \overline{M} \subset M^{**}$ である. ここで, $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ を表す.

以下, R はネータ整閉整域としよう. 命題 3.2(3) より, M の整閉包は, M^{**} なる有限生成自由 R 加群の部分加群とみなせる. このとき, 整閉包は次のように表せる.

³ これは, R が解析的不分岐な整閉整域でよい (Rees の定理) .

命題 3.3. F は有限生成自由 R 加群, M はその部分 R 加群とする. このとき, $\overline{M}$ は次の F の部分 R 加群と同一視できる.

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \{f \in F \mid f \in \text{Sym}_R^1(F) \text{ は, 環 } \text{Sym}_R(M) \text{ 上整}\} \\ &= \{f \in F \mid \text{イデアル } \text{Fitt}_0(F/M) \text{ は, } \text{Fitt}_0(F/M + \langle f \rangle) \text{ の節減}\}\end{aligned}$$

ここで, $\text{Sym}_R(*)$ は $*$ の対称代数, $\text{Fitt}_0(*)$ は $*$ の 0 次 Fitting イデアルを表す.

$\mathcal{R}(M) := \text{Im}(\text{Sym}_R(M) \rightarrow \text{Sym}_R(F))$ と定め, 加群 M の **Rees 環** という. $\mathcal{R}(M)$ は R 上多項式環 $\text{Sym}_R(F) = R[t_1, \dots, t_r]$ の次数付き部分 R 代数で, R 代数の同型 $\mathcal{R}(M) \cong \text{Sym}_R(M)/t_R(\text{Sym}_R(M))$ が成り立つ. 従って, $\mathcal{R}(M)$ は, $M \subset F$ なる自由加群 F の取り方によらず, R 代数の同型を除いて一意的に定まる⁴. 整数 n に対し, $M^n := [\mathcal{R}(M)]_n$ とおく. イデアルの場合同様, F の部分 R 加群 N が M の節減であるとは, $N \subset M$ で, かつ自然数 n が存在して等式 $M^n = NM^{n-1}$ をみたすときをいう.

定理 3.4. (Rees [15], Gaffney [2]) F は有限生成自由 R 加群とする. F の部分 R 加群 $N \subset M$ について, 次は同値である⁵.

- (1) N は M の節減である.
- (2) 環拡大 $\mathcal{R}(N) \subset \mathcal{R}(M)$ は有限拡大である.
- (3) イデアル $\text{Fitt}_0(F/N)$ は $\text{Fitt}_0(F/M)$ の節減である.

例 3.5. $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, x, y は正則パラメータ系, $a \geq 2$ は整数とし,

$$M := \left\langle \begin{pmatrix} x^{a-1} & y & 0 \\ 0 & x & y^a \end{pmatrix} \right\rangle \subset F := R^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad I := \text{Fitt}_0(F/M)$$

とおく. $I = (x^a, x^{a-1}y^a, y^{a+1})$ である. $i = 1, 2, \dots, a-1$ に対し, $f_i = {}^t(x^{i-1}y^{a+1-i}, 0)$ とおくと, $\text{Fitt}_0(F/M + \langle f_1, \dots, f_{a-1} \rangle) = \overline{I}$ 故, M は $M + \langle f_1, \dots, f_{a-1} \rangle$ の節減. よって, $M + \langle f_1, \dots, f_{a-1} \rangle \subset \overline{M}$ である. (実際は, $\overline{M} = M + \langle f_1, \dots, f_{a-1} \rangle$ である.)

前節で, Zariski の定理 1.4(1) の高次元版について述べた. Kodiyalam は, これとは別方向の拡張 (高階数版) の可能性を洞察し, 次を明らかにした.

定理 3.6. $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, 剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限体とし, M, N は有限生成 torsion-free R 加群とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) (Kodiyalam [12]) 加群 M, N がともに整閉ならば, その積 MN も整閉である. ここで, $MN := M \otimes_R N / t_R(M \otimes_R N)$ と定義する.
- (2) (Katz-Kodiyalam [10]) 加群 M が整閉ならば, M のある (全ての) 極小節減 N に対し, 等式 $M^2 = NM$ が成り立つ.

これは, Zariski の定理 1.4(1) および Lipman-Tessier の定理 1.4(3) の高階数版とみなせる. さらに, Katz-Kodiyalam は, 上記 (2) の等式成立と, Rees 環 $\mathcal{R}(M)$ が Cohen-Macaulay であることの同値性を示した. これより, 次が従う.

⁴ これは, M が rank をもてば常に正しい.

⁵ R が quasi-unmixed 局所環, $\ell_R(F/N) < \infty$ のとき, 「(4) 等式 $e(F/N) = e(F/M)$ が成立」 とも同値 (Kleiman-Thorup, Kirby-Rees の定理). ここで, $e(F/*)$ は Buchsbaum-Rim 重複度を表す.

定理 3.7. (Katz-Kodiyalam [10]) $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, M は有限生成 torsion-free 整閉 R 加群とする. このとき, M の Rees 環 $\mathcal{R}(M)$ は Cohen-Macaulay 整閉整域である.

これは, 定理 1.5 の高階数版とみなせる. 定理 1.5 は (第 1 節で述べた通り) R が 2 次元有理特異点の場合に拡張されたが, 高階数版でも類似の拡張が可能だろうか? ⁶

4. Kodiyalam の問題と具体的反例の構成

Kodiyalam は, 定理 3.6(1) が「非自明な」拡張であることを強調するため, 任意階数の直既約整閉加群の存在を示した. これを説明するため, 記号を準備する. M は 2 次元正則局所環上の有限生成 torsion-free R 加群とする. M^* で M の R -dual を表す. このとき, M^{**} は有限生成自由 R 加群で, $M \subset M^{**}$ かつ M^{**}/M は長さ有限加群である. $I(M) := \text{Fitt}_0(M^{**}/M)$ とおく.

定理 4.1. (Kodiyalam [12]) $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, 剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限体とし, M は有限生成 torsion-free R 加群とする. このとき,

- (1) イデアルの等式 $I(\overline{M}) = \overline{I(M)}$ が成り立つ. 特に, $I(\overline{M})$ は整閉である.
- (2) さらに, M は自由因子をもたないと仮定する. このとき, イデアル $I(\overline{M})$ が simple ならば, $\overline{M}$ は直既約 R 加群である.

ここで, 整閉単項式イデアルの simple factor に関する事実を思い出そう.

定理 4.2. $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, x, y は R の正則パラメータ系, $\mathfrak{a}$ は R の $\mathfrak{m}$ -準素整閉 $(x, y$ に関する) 単項式イデアルとする. $\mathfrak{a}$ の simple 整閉イデアルへの分解を $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ とすると, 各 $\mathfrak{a}_i$ は,

$$\mathfrak{a}_i = \overline{(x^p, y^q)} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数})$$

の形で表せる.

例 4.3. x, y は R の正則パラメータ系, $a \geq 2$ は整数とする.

- (1) 例 3.5 の加群 $M = \left\langle \begin{pmatrix} x^{a-1} & y & 0 \\ 0 & x & y^a \end{pmatrix} \right\rangle$ について, $I(\overline{M}) = \overline{I(M)} = \overline{(x^a, y^{a+1})}$ は simple. よって, $\overline{M} = M + \langle f_1, \dots, f_{a-1} \rangle$ は階数 2 の直既約整閉加群である.
- (2) $I = \overline{(x^a, y^{a+1})}$ とおく. $0 \rightarrow R^a \xrightarrow{\varphi} R^{a+1} \rightarrow I \rightarrow 0$ は I の極小自由分解とする. φ の R -dual $R^{a+1} \xrightarrow{t\varphi} R^a$ をとって, $M := \text{Im } t\varphi$ とおく. このとき, M は自由因子をもたず, $I(M) = I_a(t\varphi) = I_a(\varphi) = I$ だから, $I(\overline{M}) = \overline{I} = I$ は simple. よって, $\overline{M}$ は階数 a の直既約整閉加群である.

Kodiyalam は次の疑問を提起した.

疑問 4.4. (Kodiyalam [12]) M は 2 次元正則局所環上の階数 2 以上の有限生成 torsion-free R 加群で, 自由因子をもたないものとする. このとき, $\overline{M}$ が直既約ならば, イデアル $I(\overline{M})$ は simple か?

⁶ 2 次元有理特異点上の整閉加群の Rees 環は Cohen-Macaulay 整閉整域か? 最近, この問題 (予想) に肯定的方向での進展があったとの情報がある. もし肯定的なら, ここでもイデアルの場合の類似が成立しているようで興味深い.

この問題は否定的に考えられていたが、これまで反例は知られていなかった。次の結果は、この問題に体系的な反例のクラスを与えるとともに、直既約整閉加群の遍在性を示唆するものである。

定理 4.5. ([5]) $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, x, y は R の正則パラメータ系, I は R の $\mathfrak{m}$ -準素整閉 (x, y に関する) 単項式イデアルとする. $\text{ord}(I) = \max\{n \mid I \subset \mathfrak{m}^n\} \geq 3$ と仮定する. このとき, 階数 2 の有限生成 torsion-free 直既約整閉 R 加群 M で, $I(M) = I$ をみたすものが少なくともひとつ存在する.

定理 4.5 の M は, 与えられた単項式イデアルから具体的に構成できる. 以下, I は R の (x, y に関する) 単項式イデアルで, 整閉かつ $r := \text{ord}(I) \geq 3$ とする.

$$I = (x^{a_0}, x^{a_1}y^{b_1}, \dots, xy^{b_{r-1}}, y^{b_r}), \quad a_0 \leq b_r$$

としてよい. 自然数 $k \leq b_r - 1$ と I に付随する階数 2 の加群 M_k を次で定める.

$$M_k := \left\langle \begin{pmatrix} x^{a_0-1} & \dots & x^{a_i-1}y^{b_i} & \dots & y^{b_{r-1}} & y^k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x & y^{b_r-k} \end{pmatrix} \right\rangle \subset F := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

各 k について, 等式 $I(M_k) = I$ は明らかである. 定理 4.5 は, これら加群 $M_1, \dots, M_{b_r-1}$ の中に少なくともひとつ直既約整閉となる M_k があることを示すことによって証明される. この k は, 単項式イデアル I の simple factor に応じて具体的に与えることができる. 以下, 具体例を通してこれを説明する.

例 4.6. $I = (x^5, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^6, y^7)$ とする. I の simple factor への分解は, $I = \overline{(x^2, y^3)} \cdot \overline{(x^3, y^4)}$ で, order 1 の simple factor をもたない. これより, M_1, M_2, M_3, M_4 は直既約整閉である.

一般に, I が order 1 の simple factor をもたないとき, $M_1, M_2, \dots, M_{r-1}$ は直既約整閉となる.

例 4.7. $I = (x^7, x^5y, x^3y^2, x^2y^3, xy^5, y^9)$ とする. I の simple factor への分解は, $I = (x, y)(x, y^2)(x, y^4)(x^2, y)^2$ で, $(x, y), (x, y^2)$ を simple factor にもつが, (x, y^3) をもたない. これより, M_3 は直既約整閉である.

一般に, ある自然数 $\ell \leq r - 1$ で, I が (x, y^ℓ) を simple factor にもたないとき, ある自然数 $k \leq r - 1$ で M_k は直既約整閉となる. この k は, $r \leq 4$ の場合の数例を除いて, $k = \min\{\ell \mid (x, y^\ell) \text{ は } I \text{ の simple factor でない}\}$ にとれる.

例 4.8. $\mathfrak{a} = (x, y)(x, y^2)(x, y^3)(x, y^4)$ とする.

(1) $I = \mathfrak{a}(x^2, y)$ ならば, M_5 は直既約整閉である.

(2) $I = \mathfrak{a}(x, y^3)$ ならば, M_6 は直既約整閉である.

(3) $I = \mathfrak{a}(x, y^5)$ ならば, M_6 は直既約整閉である.

一般に, $I = (x, y)(x, y^2) \cdots (x, y^{r-1})\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}$ は order 1 単項式イデアル) のとき, $\mathfrak{b} = (x^\alpha, y)$ ($\alpha \geq 1$) の場合は, $r \leq 5$ なら M_{r-1} が, $r \geq 5$ なら M_r が直既約整閉となる. $\mathfrak{b} = (x, y^\beta)$ ($\beta \geq 2$) の場合は, $r = 3$ なら M_2 が, $r \geq 4$ で $\beta \neq r$ なら M_r が, $r \geq 4$ で $\beta = r$ なら M_{r+1} が, 直既約整閉となる.

疑問 4.9. 任意に与えられた (単項式イデアルとは限らない) $\text{ord}(I) \geq 3$ の整閉 $\mathfrak{m}$ -準素イデアル I に対し, $I(M) = I$ なる階数 2 の直既約整閉加群 M が存在するか?

より一般に, 次が成り立つのではないかと予想している.

予想 4.10. 任意に与えられた $r := \text{ord}(I) \geq 3$ の整閉 $\mathfrak{m}$ -準素イデアル I と, 任意の自然数 $e \leq r - 1$ に対し, 階数 e の直既約整閉加群 M で $I(M) = I$ をみたすものが存在する.

参考文献

- [1] S. D. Cutkosky, Complete ideals in algebra and geometry, Commutative Algebra: Syzygies, Multiplicities and Birational Algebra, Contemporary Math. 159, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 27–39
- [2] T. Gaffney, Integral closure of modules and Whitney equisingularity, Invent. Math. 107 (1992), 301–322
- [3] S. Goto, Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68, Dekker, New York, (1982), 201–231
- [4] F. Hayasaka, Asymptotic vanishing of homogeneous components of multigraded modules and its applications, J. Algebra 513 (2018) 1–26
- [5] F. Hayasaka, Constructing indecomposable integrally closed modules over a two-dimensional regular local ring, arXiv:1809.07944 [math.AC]
- [6] R. Hübl, I. Swanson, Adjoints of ideals, Michigan Math. J. 57 (2008) 447–462
- [7] C. Huneke, The primary components of and integral closures of ideals in 3-dimensional regular local rings, Math. Ann. 275 (1986), no. 4, 617–635
- [8] C. Huneke, J. Sally, Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals, J. Algebra 115 (1988), 481–500
- [9] C. Huneke, I. Swanson, Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, 2006
- [10] D. Katz, V. Kodiyalam, Symmetric powers of complete modules over a two-dimensional regular local ring, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 747–762
- [11] K. Kiyek, J. Stückrad, Integral closure of monomial ideals on regular sequences, Rev. Mat. Iberoam. 19 (2003) 483–508
- [12] V. Kodiyalam, Integrally closed modules over two-dimensional regular local rings, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 3551–3573
- [13] J. Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 36 (1969), 195–279
- [14] J. Lipman, B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michigan Math. J. 28 (1981), no. 1, 97–116
- [15] D. Rees, Reductions of modules, Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (1987) 431–449
- [16] L. Reid, L. G. Roberts and M. A. Vitulli, Some results on normal homogeneous ideals, Comm. Algebra 31 (2003), 4485–4506
- [17] P. Sarkar, J. K. Verma, Local cohomology of multi-Rees algebras, joint reduction numbers and product of complete ideals, Nagoya Math. J. 228 (2017), 1–20
- [18] P. Singla, Minimal monomial reductions and the reduced fiber ring of an extremal ideal, Illinois J. Math. Volume 51, Number 4 (2007), 1085–1102
- [19] O. Zariski, Polynomial ideals defined by infinitely near base points, Amer. J. Math. 60 (1938), 151–204
- [20] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra, vol. 2, D. Van Nostrand, New York, 1960