

Jacquet 加群と局所 Langlands 対応

跡部 発 (北海道大学)*

概 要

Jacquet 関手とは p -進群の表現論において、最も基本的かつ重要な関手の一つである。これは Siegel モジュラー形式における、カスプ形式を定義するときに使う Siegel の Φ 作用素の局所類似である。この講演では、シンプレクティック群の既約緩増加表現の Jacquet 関手を計算する。そのためには、この群の既約表現の分類が必要となるが、それには Arthur により証明された局所 Langlands 対応を使う。

1. モジュラー形式と表現論

この説では、Siegel モジュラー形式の理論を振り返り、表現論と対比する。Siegel モジュラー形式の文献としては、[3]などを参照すると良い。

複素上半平面 $\mathfrak{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ 上の正則関数 $f: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ が重さ $2k$ の楕円モジュラー形式とは、次の2つの条件を満たすときに言う。

1. 全ての $z \in \mathfrak{H}_1$ と $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{-2k} f(z)$$

が成り立つ。

2. f は次の形の Fourier 展開を持つ。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi\sqrt{-1}nz}.$$

重さ $2k$ の楕円モジュラー形式全体のなすベクトル空間を $M_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ で表す。また、 $a_0(f) = 0$ となるモジュラー形式 f をカスプ形式といい、それらのなす部分空間を $S_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ と書く。具体例としては、 $k \geq 2$ の時、Eisenstein 級数

$$\begin{aligned} E_{2k}(z) &= \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \\ &= 1 + \frac{2}{\zeta(1-2k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|n} d^{2k-1} \right) e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \in M_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) \end{aligned}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50, 11S37

キーワード: Jacquet 加群; 局所 Langlands 対応

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学 大学院理学研究院数学部門
e-mail: atobe@math.sci.hokudai.ac.jp

が挙げられる. 特に, 直和分解 $M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{C}E_{2k}$ がある. 定数項を見
ることによって, 射影 $M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{C}E_{2k}$ が得られる.

Siegel モジュラー形式とは, 楕円モジュラー形式の一般化の一つであり, ある複素構
造を持つ領域 $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数であって, シンプレクティック群

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する対称性と, 増大度に関する条件を満たすものである. 重さ $2k$ の Siegel モジュ
ラー形式全体のなすベクトル空間を $M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ で表す. $n = 1$ の場合の定数項を見
ることによって得られる射影 $M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{C}E_{2k}$ は, Φ 作用素と呼ばれる線形写像

$$\Phi: M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \rightarrow M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2(n-1)}(\mathbb{Z}))$$

に一般化される. モジュラー形式 $F \in M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ がカスプ形式であるとは, $\Phi(F) = 0$
を満たす時に言い, それらのなす部分空間を $S_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ で表す. $k > n$ の時には, Φ は
全射, つまり,

$$1 \longrightarrow S_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \longrightarrow M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \xrightarrow{\Phi} M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2(n-1)}(\mathbb{Z})) \longrightarrow 1$$

は完全列となる. 実際, この時には Φ は切断 $E_{n,n-1,2k}: M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2(n-1)}(\mathbb{Z})) \rightarrow M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$
を持つ. $E_{n,n-1,2k}(f)$ を Klingen Eisenstein 級数という.

モジュラー形式の局所版として, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ の表現論が考えられる.

モジュラー形式	表現論
$M_{2k}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$	$\mathrm{Rep}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p))$
Hecke 同時固有形式	既約表現
Eisenstein 級数	放物型誘導表現
カスプ形式	超カスプ表現
Siegel の Φ 作用素	Jacquet 加群

本講演の目的は, 既約緩増加表現に関する Jacquet 加群を計算することである.

2. シンプレクティック群の表現論

$G_n = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ とおく. これは完全不連結な局所コンパクト群である. 即ち, コンパ
クト開部分群から成る単位元の基本近傍系を持つ. 一つのコンパクト開部分群として,
 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ が挙げられる.

G_n のスムーズ表現とは, $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 V と準同型 $\pi: G_n \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ の組み $\pi =$
 (π, V) であって, 任意の $v \in V$ の固定化部分群 $\mathrm{Stab}_{G_n}(v) = \{g \in G_n \mid \pi(g)v = v\}$ が G_n
の開部分群になるものを言う. スmooth 表現のなす圏を $\mathrm{Rep}(G_n)$ で表す. また, G_n の
既約スムーズ表現のなす集合を $\mathrm{Irr}(G_n)$ により表す.

表現論において, どのように (既約) 表現を構成するか, という重大な問題がある. 一つ
の重要な方法として, 放物型誘導が挙げられる. 標準的な極大放物型部分群 $P_m = M_m N_m$

であって, Levi 部分群が $M_m = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p) \times G_{n-m}$ となるものにとる. つまり,

$$P_m = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & * & * & * \\ 0 & A & * & B \\ \hline 0 & 0 & {}^t a^{-1} & 0 \\ 0 & C & * & D \end{array} \right) \middle| a \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_{n-m} \right\}.$$

そのモジュラス指標を δ_{P_m} で表す. この時, $\sigma = (\sigma, W) \in \mathrm{Rep}(M_m)$ に対して, G_n は空間

$$\mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}(\sigma) = \{f: G_n \rightarrow W \text{ 局所定数関数} \mid f(mng) = \delta_{P_m}^{\frac{1}{2}}(m)\sigma(m)f(g)\}$$

へ右移動で作用する. これは完全関手

$$\mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}: \mathrm{Rep}(M_m) \rightarrow \mathrm{Rep}(G_n)$$

を与える. これを放物型誘導関手といい, $\mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}(\sigma)$ を放物型誘導表現という.

一方で, $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(G_n)$ に対して, $V(N_m)$ により, $\{\pi(n)v - v \mid v \in V, n \in N_m\}$ で張られる部分空間を表し, $V_{N_m} = V/V(N_m)$ と書く. M_m の V_{N_m} への作用

$$m \cdot (v \bmod V(N_m)) := \delta_{P_m}^{-\frac{1}{2}}(m)\pi(m)v \bmod V(N_m)$$

を $\mathrm{Jac}_{P_m}(\pi)$ と書くと, これは完全関手

$$\mathrm{Jac}_{P_m}: \mathrm{Rep}(G_n) \rightarrow \mathrm{Rep}(M_m)$$

を与える. これを Jacquet 関手といい, $\mathrm{Jac}_{P_m}(\pi)$ を π の Jacquet 加群という.

放物型誘導関手と Jacquet 関手は Frobenius 相互律

$$\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}(\sigma)) \cong \mathrm{Hom}_{M_m}(\mathrm{Jac}_{P_m}(\pi), \sigma), \quad \pi \in \mathrm{Rep}(G_n), \sigma \in \mathrm{Rep}(M_m)$$

で結ばれる. 特に, 与えられた G_n の既約表現がどのような放物型誘導表現の部分表現となっているかは, その Jacquet 加群を計算できれば分かることになる. 既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ が超カスプ表現とは, $\mathrm{Jac}_{P_m}(\pi) = 0$ が全ての $1 \leq m \leq n$ について成り立つ時にいう. 言い換えれば, 超カスプ表現とは, どんな $1 \leq m \leq n$ に対しても, 放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}(\sigma)$ の部分表現にはならないような既約表現である.

$M_m \cong \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p) \times G_{n-m}$ なので, その既約表現はテンソル積 $\tau \otimes \pi_0$ という形で書けるが, その放物型誘導を $\tau \rtimes \pi_0 = \mathrm{Ind}_{P_m}^{G_n}(\tau \otimes \pi_0)$ と表すことにする. Tadić の公式 [4] により, $\tau \rtimes \pi_0$ の Jacquet 加群 $\mathrm{Jac}_{P_m'}(\tau \rtimes \pi_0)$ の半単純化の計算は, π_0 のそれに帰着される.

G_n の既約表現はパラメトライズは局所 Langlands 対応で与えられる. G_n の L -パラメーターとは, Weil–Deligne 群の直交表現

$$\phi: W_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

の (同型類の) ことである. これらのなす集合を $\Phi(G_n)$ で表す. Arthur [1, Theorem 1.5.1] は, 自然な有限対 1 の全射

$$\mathrm{Irr}(G_n) \rightarrow \Phi(G_n)$$

があることを示した. $\phi \in \Phi(G_n)$ のファイバーを Π_ϕ と書き, ϕ に伴う L -パケットという. さらに, Π_ϕ はある基本アーベル 2-群 $\mathcal{S}_\phi$ の双対群でパラメトライズされる. 対応 $\pi \leftrightarrow (\phi, \eta)$, $\phi \in \Phi(G_n)$, $\eta \in \widehat{\mathcal{S}_\phi}$ を局所 Langlands 対応という.

本講演では, $\phi|W_{\mathbb{Q}_p}$ が自明であり,

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^t S_{2x_i+1}, \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

という形の L -パラメーターのみを考える. 但し, S_d で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の唯一の代数的な d -次元既約表現を表すことにする. このような L -パラメーターの集合を $\Phi_{1,\mathrm{gp}}(G_n)$ と書く. ϕ が上のような分解を持つ時,

$$\mathcal{A}_\phi = \bigoplus_{i=1}^t (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\alpha_i$$

とおく. つまり, $\mathcal{A}_\phi$ は基本アーベル 2-群であって, α_i は S_{2x_i+1} に付随する基底である. この時, $\mathcal{S}_\phi$ は $\mathcal{A}_\phi$ の商であり, 故に, 双対群 $\widehat{\mathcal{S}_\phi}$ は $\widehat{\mathcal{A}_\phi}$ の部分群とみなせる. この考察の下, $\eta \in \widehat{\mathcal{A}_\phi}$ に対して, $\pi(\phi, \eta) \in \mathrm{Rep}(G_n)$ を次のように定める. $\eta \in \widehat{\mathcal{S}_\phi}$ であれば, $\pi(\phi, \eta)$ は Π_ϕ に属する既約表現で η に対応するものとし, そうでなければ, $\pi(\phi, \eta) = 0$ とする. この時, $\pi(\phi, \eta) \neq 0$ であるための必要十分条件は, $\eta(\alpha_1 + \cdots + \alpha_t) = 1$ かつ $x_i = x_j \implies \eta(\alpha_i) = \eta(\alpha_j)$ である. また,

$$\pi(\phi, \eta) = \pi((2x_1 + 1)^{\eta(\alpha_1)}, \dots, (2x_t + 1)^{\eta(\alpha_t)})$$

とも書く.

3. 主定理と具体例

表現 Π の半単純化を s.s. Π で表す. 実数 $x \in \mathbb{R}$ と G_n の既約表現 π について, $\mathrm{s.s. Jac}_{P_1}(\pi) = \bigoplus_{i \in I} \chi_i \boxtimes \pi_i$ という形の時,

$$\mathrm{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi) = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ \chi_i = |\cdot|^x}} \pi_i$$

とおき, これを π の部分 Jacquet 加群という. ここで, $|\cdot|$ は $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times$ の p -進絶対値である.

補題 3.1 ([2, Lemma 4.1]). $\phi \in \Phi_{1,\mathrm{gp}}(G_n)$ とし, ある $\eta \in \widehat{\mathcal{A}_\phi}$ について, $\mathrm{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) \neq 0$ とする. この時, $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり, $S_{2x+1} \subset \phi$ が成り立つ.

最初の主定理は, 部分 Jacquet 加群の計算である.

定理 3.2 ([2, Theorem 4.2]). $\phi \in \Phi_{1,\mathrm{gp}}(G_n)$ とし, ϕ における S_{2x+1} の重複度が $m \geq 1$ であると仮定する. $\phi_0 = \phi - S_{2x+1}^{\oplus m}$ とおく. また, $\eta \in \widehat{\mathcal{A}_\phi}$ であって, $\pi(\phi, \eta) \neq 0$ となるものを取る.

1. $m \geq 3$ の時, $\delta \in \{1, 2\}$ で $m \equiv \delta \pmod{2}$ となるものを取ると,

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) &= (m - \delta) \cdot \langle x, x - 1, \dots, -(x - 1) \rangle \rtimes \pi(\phi - S_{2x+1}^{\oplus 2}, \eta) \\ &\quad + \underbrace{\mathrm{St}_{2x+1} \times \cdots \times \mathrm{St}_{2x+1}}_{(m-\delta)/2} \rtimes \pi(\phi_0 \oplus S_{2x+1}^{\oplus \delta}, \eta). \end{aligned}$$

但し, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \geq y$ に対して, $\langle x, \dots, y \rangle$ で, 上三角行列から成る *Borel* 部分群からの放物型誘導表現

$$|\cdot|^x \times \cdots \times |\cdot|^y \in \text{Rep}(\text{GL}_{x-y+1}(\mathbb{Q}_p))$$

の唯一の既約部分表現を表し, $\text{St}_{2x+1} = \langle x, \dots, -x \rangle \in \text{Irr}(\text{GL}_{2x+1}(\mathbb{Q}_p))$ とおいた.

2. $x > 0$ かつ $m = 1$ の時,

$$\phi' = \phi - S_{2x+1} + S_{2x-1}$$

とおく. この時, 自然な全単射 $\widehat{\mathcal{A}}_{\phi'} \ni \eta' \leftrightarrow \eta \in \widehat{\mathcal{A}}_{\phi}$ があり,

$$\text{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) = \pi(\phi', \eta')$$

が成り立つ. 特に, $\text{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta))$ は既約または 0 である.

3. $x > 0$ かつ $m = 2$ の時, $\eta_+ = \eta$ とおき,

$$\pi(\phi, \eta_+) \oplus \pi(\phi, \eta_-) = \text{St}_{2x+1} \rtimes \pi(\phi_0, \eta|_{\mathcal{A}_{\phi_0}})$$

となる唯一の $\eta_- \in \widehat{\mathcal{A}}_{\phi}$ を取る. また, 上と同じ ϕ' を取り, η_{ϵ} に対応する指標 $\eta'_{\epsilon} \in \widehat{\mathcal{A}}_{\phi'}$ を考える. この時,

$$\text{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) = \langle x, x-1, \dots, -(x-1) \rangle \rtimes \pi(\phi_0, \eta|_{\mathcal{A}_{\phi_0}}) + \pi(\phi', \eta'_+) - \pi(\phi', \eta'_-)$$

が成り立つ. これは, 長さが 3 または 1 である.

4. $x = 0$ かつ $m = 1$ の時, $\text{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) = 0$ である. また, $x = 0$ かつ $m = 2$ の時, $\text{Jac}_{|\cdot|^x}(\pi(\phi, \eta)) = \pi(\phi_0, \eta|_{\mathcal{A}_{\phi_0}})$ である.

第二の主定理により, Jacquet 加群 (の半単純化) が計算できる.

定理 3.3 ([2, Theorem 4.3]). $\phi = \bigoplus_{i=1}^t S_{2x_i+1} \in \Phi_{1, \text{gp}}(G_n)$, $x_1 \leq \cdots \leq x_t$ とする. $K_{\phi}^{(m)}$ を整数の組み $\underline{k} = (k_1, \dots, k_t) \in \mathbb{Z}^t$ であって, 次を満たすものなす有限集合とする.

- $0 \leq k_i \leq 2x_i + 1$ for $i = 1, \dots, t$;
- $x_{i-1} = x_i \implies k_{i-1} \geq k_i$;
- $k_1 + \cdots + k_t = m$.

$\underline{k}, \underline{l} \in K_{\phi}^{(m)}$ に対して,

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{k}} &= \langle x_1, \dots, x_1 - k_1 + 1 \rangle \times \cdots \times \langle x_t, \dots, x_t - k_t + 1 \rangle \in \text{Rep}(\text{GL}_m(\mathbb{Q}_p)), \\ J_{\underline{l}}(\pi) &= (\text{Jac}_{|\cdot|^{x_t-l_t+1}} \circ \cdots \circ \text{Jac}_{|\cdot|^{x_1}}) \circ \cdots \circ (\text{Jac}_{|\cdot|^{x_1-l_1+1}} \circ \cdots \circ \text{Jac}_{|\cdot|^{x_1}})(\pi) \in \text{Rep}(G_{n-m}), \\ m_{\underline{k}, \underline{l}} &= \dim_{\mathbb{C}} J_{\underline{k}}(\Delta_{\underline{l}}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

とおく. 形式的に, $(\Delta_{\underline{k}})_{\underline{k} \in K_{\phi}^{(m)}}$ と $(\otimes J_{\underline{l}}(\pi))_{\underline{l} \in K_{\phi}^{(m)}}$ を縦ベクトルとみなし, $(m_{\underline{k}, \underline{l}})_{\underline{k}, \underline{l} \in K_{\phi}^{(m)}}$ を行列と見る. この時, 任意の $\pi \in \Pi_{\phi}$ に対して,

$$\text{s.s. Jac}_{P_m}(\pi) = {}^t(\Delta_{\underline{k}}) \cdot (m_{\underline{k}, \underline{l}})^{-1} \cdot (\otimes J_{\underline{l}}(\pi))$$

が成り立つ.

注 3.4. 1. $K_\phi^{(m)}$ に辞書式順序を入れると, 行列 $(m_{\underline{k}, \underline{l}})$ は正則な下三角行列になる. また, この成分の計算は容易である.

2. 定理 3.2, 3.3 は共に, 係数体を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体に取り替えても良い. また, これらは任意の緩増加な表現に延長できる.

3. Xu [5] は, 定理 3.2 を離散系列表現に対して示し, それを用いて, 離散系列表現の超カスプ台を局所 *Langlands* 対応の言葉で記述した. 定理 3.2 を緩増加表現に拡張するためには, *Mœglin* による緩増加 L -パケットの構成 ([6] 参照) を用いる. 定理 3.3 は形式的な議論から従う.

最後に具体例を与える.

例 3.5. $\phi = S_3 \oplus S_3 \oplus S_5 \in \Phi(\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Q}_p))$ を考える. この時, $\Pi_\phi = \{\pi_+, \pi_-\}$ であり, これら 2 つの既約表現は,

$$\pi_+ \oplus \pi_- = \mathrm{St}_3 \rtimes \pi(5^+)$$

かつ, $\pi_+ = \pi(3^+, 3^+, 5^+)$ が *generic* で, $\pi_- = \pi(3^-, 3^-, 5^+)$ が *non-generic* である, という性質で特徴付けられる. ここで, $m = 4$, 即ち, $\mathrm{s.s.}\mathrm{Jac}_{P_4}(\pi_\epsilon)$ を計算しよう. 今,

$$K_\phi^{(4)} = \{(3, 1, 0) > (3, 0, 1) > (2, 2, 0) > (2, 1, 1) > (2, 0, 2) > (1, 1, 2) > (1, 0, 3) > (0, 0, 4)\}$$

である. よって,

$$(\Delta_{\underline{k}}) = \begin{pmatrix} \langle 1, 0, -1 \rangle \times |\cdot|^1 \\ \langle 1, 0, -1 \rangle \times |\cdot|^2 \\ \langle 1, 0 \rangle \times \langle 1, 0 \rangle \\ \langle 1, 0 \rangle \times |\cdot|^1 \times |\cdot|^2 \\ \langle 1, 0 \rangle \times \langle 2, 1 \rangle \\ |\cdot|^1 \times |\cdot|^1 \times \langle 2, 1 \rangle \\ |\cdot|^1 \times \langle 2, 1, 0 \rangle \\ \langle 2, 1, 0, -1 \rangle \end{pmatrix}, \quad (J_{\underline{l}}(\pi_\epsilon)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi(3^+) \\ 0 \\ \pi(3^+) \\ \pi(3^+) + |\cdot|^1 \rtimes \pi(1^+) \\ (1 + \epsilon)\pi(1^+, 1^+, 1^+) \\ (1 + \epsilon)|\cdot|^1 \rtimes \pi(1^+) + (2 + \epsilon)\pi(3^+) \\ (1 + \epsilon)\pi(3^+) \end{pmatrix},$$

$$(m_{\underline{k}, \underline{l}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

従って,

$$\mathrm{s.s.}\mathrm{Jac}_{P_4}(\pi_\epsilon) = \begin{pmatrix} L(\langle 1, 0, -1 \rangle \times |\cdot|^2) \\ \langle 1, 0 \rangle \times |\det_2|^{\frac{3}{2}} \\ L(\langle 1, 0 \rangle \times \langle 2, 1 \rangle) \\ |\cdot|^1 \times |\cdot|^1 \times \langle 2, 1 \rangle \\ |\cdot|^1 \times \langle 2, 1, 0 \rangle \\ \langle 2, 1, 0, -1 \rangle \end{pmatrix}^t \otimes \begin{pmatrix} \pi(3^+) \\ \pi(3^+) \\ \pi(3^+) + |\cdot|^1 \rtimes \pi(1^+) \\ \frac{1+\epsilon}{2}\pi(1^+, 1^+, 1^+) \\ (1 + \epsilon)(|\cdot|^1 \rtimes \pi(1^+) + \pi(3^+)) \\ (1 + \epsilon)\pi(3^+) \end{pmatrix}$$

を得る. 但し, $L(\langle 1, 0, -1 \rangle \times |\cdot|^2)$ と $L(\langle 1, 0 \rangle \times \langle 2, 1 \rangle)$ はそれぞれ, $\langle 1, 0, -1 \rangle \times |\cdot|^2$ と $\langle 1, 0 \rangle \times \langle 2, 1 \rangle$ の唯一の既約部分表現である. また, $\det_2$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の行列式である.

参考文献

- [1] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. xviii+590 pp.
- [2] H. Atobe, *Jacquet modules and local Langlands correspondence*. arXiv:1812.06607v1.
- [3] G. van der Geer, *Siegel Modular Forms and Their Applications. The 1-2-3 of modular forms*, 181–245, Universitext, Springer, Berlin, 2008.
- [4] M. Tadić, *Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p -adic groups*. *J. Algebra* **177** (1995), no. 1, 1–33.
- [5] B. Xu, *On the cuspidal support of discrete series for p -adic quasisplit $\mathrm{Sp}(N)$ and $\mathrm{SO}(N)$* . *Manuscripta Math.* **154** (2017), no. 3-4, 441–502.
- [6] B. Xu, *On Mœglin’s parametrization of Arthur packets for p -adic quasisplit $\mathrm{Sp}(N)$ and $\mathrm{SO}(N)$* . *Canad. J. Math.* **69** (2017), no. 4, 890–960.