Gauss map of real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor space of complex 2-plane Grassmannian

木村真琴 (茨城大学) *

日本数学会秋季総合分科会特別講演

1 Introduction

幾何学において、様々な **Gauss 写像**がある。本講演では、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ および複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ 内の実超曲面 M^{2n-1} に対して、$\mathbb{C}^{n+1}$ (あるいは $\mathbb{C}_1^{n+1}$) 内の (不定値)2 次元複素部分空間のなす複素 Grassmann 多様体への Gauss 写像 γ を定義し、特に $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面**とよばれる実超曲面については、(1) その Gauss image である Kähler 多様体 $\gamma(M)$ 上の $\mathbb{S}^1$-束の全空間とみなせること、(2) 逆に $\gamma(M)$ から、四元数 Kähler 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の **twistor 空間**を用いて $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 (の平行族) を構成できること、(3) 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面についても同様の結果が成り立つことを述べる。

2 Gauss map of hypersurfaces in sphere to compex quadric

まず単位球面 $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ 内の向き付けられた超曲面 M^n に対して、B. Palmer [27] は次のように Gauss 写像を定義した: M の各点 $p \in M^n$ に対して、$x(p)$ を $\mathbb{R}^{n+2}$ における位置ベクトル、N_p を $\mathbb{S}^{n+1}$ 内の M^n の $p \in M$ における単位法ベクトルとする。このとき、

$$\gamma(p) := x(p) \wedge N_p \tag{1}$$

を $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の $x(p)$ と N_p で張られる**向き付けられた** 2 次元部分空間とすると、M^n から ($\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向きつけられた 2 次元線形部分空間全体がつくる) 実 Grassmann 多様体への写像 $\gamma : M^n \to \widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ が定義される。γ を $\mathbb{S}^{n+1}$ の超曲面 M^n の **Gauss 写像**という。$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \in \widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$) に対して、$\pi(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ ($\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ は Hopf fibration) を対応させると、$\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ は $\mathbb{CP}^n$ 内の $z_1^2 + \cdots + z_{n+2}^2 = 0$ で定義される**複素 2 次曲面** $\mathbb{Q}^n$ と同一視できる。

* 本研究は JSPS 科研費 JP 16K05119 の助成を受けたものです。

Theorem 2.1 (B. Palmer [27]) $\mathbb{S}^{n+1}$ 内の向き付けられた超曲面 M^n に対して、Gauss 写像の像 $\gamma(M^n)$ は $\mathbb{Q}^n$ の **Lagrange 部分多様体**である。さらに、M^n が $\mathbb{S}^{n+1}$ の**等径** (§3) あるいは **austere** 超曲面 (cf. [16]) ならば、$\gamma(M^n)$ は $\mathbb{Q}^n$ の**極小** Lagrange 部分多様体である。

Remark 2.2 $\mathbb{S}^{n+1}$ の超曲面 M^n に対する Gauss 写像の像 $\gamma(M^n)$ と、M^n の**平行超曲面** $M_r^n := \{\cos rx(p) + \sin rN_p |\ p \in M^n\}$ $(r \in \mathbb{R})$ に対する Gauss 写像の像 $\gamma(M_r^n)$ は**一致する**: $\gamma(M) = \gamma(M_r)$. ゆえに、この Gauss 写像は (向きつけられた) 超曲面の**平行族** $[M] = \{M_r |\ r \in \mathbb{R}\}$ に対して定義されていると考えられる。

Remark 2.3 実双曲空間 $\mathbb{H}^n$ および不定値の擬 Riemann 実空間型内の超曲面に対しても、同様の結果が Anciaux [4] によって得られている。

逆に、$\mathbb{Q}^n$ の Lagrange 部分多様体 Σ^n に対して、$\mathbb{S}^{n+1}$ の「超曲面の平行族」$[M] = \{M_r\}$ が以下のように (局所的に) 構成できる: 実 Stiefel 多様体

$$V_2(\mathbb{R}^{n+2}) = \{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} |\ \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1,\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0\}$$

は実 $2n+1$ 次元接触多様体であって、射影 $\pi : V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \to \widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mapsto \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ について $\mathbb{Q}^n$ 上の $\mathbb{S}^1$-bundle の全空間である。このとき、Lagrangian immersion $x : \Sigma^n \to \mathbb{Q}^n$ に対して、Σ^n から $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ への (local) Legendrian lift が構成できて、第一成分への射影 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mapsto \mathbf{e}_1$ を合成すると、Σ^n の regular points のなす開集合においては $\mathbb{S}^{n+1}$ への immersion を与えて、求める「超曲面の平行族」が得られる。

3 Isoparametric hypersurfaces in sphere

実空間形 $\widetilde{M}$ 内の超曲面 M について、以下の 3 条件は同値である: (a) M は $\widetilde{M}$ 上のある等径函数 F の level set, (b) M の平行超曲面の族 M_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ はすべて平均曲率が一定, (c) M の主曲率が一定。ここで、$\widetilde{M}$ 上の定数でない実数値可微分函数 F は、$|\operatorname{grad} F|^2$ と ΔF が F の各 level set において一定であるとき**等径**であるという。一般の Riemann 多様体内の超曲面についても (a) と (b) の同値性は成り立つが、その場合でも (c) が成り立つとは限らない。

等径超曲面は 100 年前に Somigliana [29] が研究を初め、Segre や Levi-Civita が続いたが、Élie Cartan は断面曲率が定数 c である実空間形 $\widetilde{M}(c)$ の等径超曲面 M について、「Cartan の恒等式」を見出した: $\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ を異なる (一定の) 主曲率、$m_1, \cdots, m_g$ をそれらの重複度で、g を異なる主曲率の個数で $g > 1$ とするとき、$\displaystyle\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$. これを用いて、実空間形が Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ (および実双曲空間 H^{n+1}) のとき、$g \leq 2$ であって M は超平面 $\mathbf{R}^n$, 超球面 S^n か $S^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ の一部であることが示される (H^{n+1} の場合も同様)。しかしながら、実空間形が球面 S^{n+1} の場合には Cartan の恒等式から $g \leq 2$ は結論されず、Cartan は $g = 1, 2, 3, 4$ の例を構成し、$g \leq 3$ の場合の等径超曲面を分類した: $g = 1$ のときは超球面 S^n, $g = 2$ のときは球面の積 $S^p \times S^{n-p}$, $1 \leq p \leq n-1$ であって、$g = 3$ のときは斜体 $\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$ に関する射影平面

$\mathbf{FP}^2$ を球面 S^{n+1} $(n = 3, 6, 12, 24)$ に標準的に埋め込んだ部分多様体上の tube である (Cartan 超曲面ともよばれる)。また、$g = 4$ のときに、Cartan はすべての主曲率の重複度が 1 と 2 である S^5 と S^9 の等径超曲面も構成した。さらに Cartan は、自身が得た等径超曲面の例はすべて等質であって、$SO(n+2)$ の閉部分群の軌道になっていることも述べている。

球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 M^n の研究は、70 年台に入って野水が M^n の focal 部分多様体は極小であることなど示した後、 Münzner [25] によって大きく進展した。(i) M^n を S^{n+1} 内の連結等径超曲面で g 個の主曲率 $\lambda_i = \cot\theta_i$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_g < \pi$, を持ち、それらの重複度を m_i とすると、

$$\theta_i = \theta_1 + (i-1)\frac{\pi}{g} \quad (1 \le i \le g), \quad m_i \equiv m_{i+2} \pmod g. \tag{2}$$

(ii) 球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 M^n は $\mathbf{R}^{n+2}$ 上の次数 g の斉次多項式 F (Cartan-Münzner 多項式という) で、以下の微分方程式をみたすものを S^{n+1} に制限した函数の level set (の open subset) である:

$$|\operatorname{grad} F|^2 = g^2 r^{2g-2}, \quad \Delta F = c r^{g-2}, \tag{3}$$

ここで $r = |x|$, $c = g^2(m_2 - m_1)/2$。(iii) さらに、S^{n+1} 内の compact 等径超曲面 M^n について、S^{n+1} がその 2 つの focal 部分多様体 M_+ と M_- 上の ball bundle に分解することから、微分トポロジーを用いて、g の取りうる値は $1, 2, 3, 4$ または 6 であることを示した。

一方で S^{n+1} 内の等質超曲面はすべて等径超曲面であるが、それらはすべて階数 2 の Riemann 対称空間の isotropy 表現の軌道として得られることが Hsiang-Lawson および高木-高橋によって示された。そして、驚くべきことに S^{n+1} の「非等質」な $g = 4$ の等径超曲面が、Münzner の結果を用いて尾関-竹内 [26] によって構成された。これらは、後に Ferus-Karcher-Münzner [14] によって Clifford 代数の表現を用いて一般化されていて、「FKM-type」の等径超曲面とよばれているが、最近では先駆者にちなんで「OT-FKM type」とよばれるようになっている。その後、Abresch, Stolz, Dorfmeister-Neher に加えて、Chi-Cecil-Jensen [8] や Immervoll, 宮岡礼子氏達によって $g = 4, 6$ の等径超曲面の研究が進み、Q.-S. Chi によって球面内の等径超曲面の分類:

S^{n+1}内の等径超曲面は等質超曲面か OT-FKM type の非等質超曲面に限る

が完成した旨の announce がなされた. 微分幾何に加えて微分トポロジー、K-理論、表現論、可換環論、代数幾何などを駆使して研究されてきた球面内の等径超曲面は、極めて興味深い研究対象と言えよう。

2019 年 6 月に北京師範大学で「Workshop on the isoparametric theory」が開催された：

`http://math0.bnu.edu.cn/~yanwenjiao/wit/`

そこでは「異種球面」への応用など、様々な結果が報告された。一部講演のスライドもダウンロードできるようなので、参考にされたい。

4 Hopf hypersurfaces in complex projective space

本講演の結果において重要な役割を果たしている、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面**について述べる。まず $\widetilde{M}^n$ を複素 n 次元の Kähler 多様体、J をその複素構造とする。M^{2n-1} を $\widetilde{M}$ の (実余次元 1 の) 実超曲面、N を $\widetilde{M}$ における M の (局所的に定義された) 単位法ベクトル場とする。このとき、$\xi := -JN$ は M の各点で単位接ベクトルである。ξ を実超曲面 M の**構造ベクトル場**という。そして、ξ が M の各点で shape operator A (実超曲面 M の各点の接空間における対称線形変換) の固有ベクトルであるとき、すなわち $A\xi = \mu\xi$ をみたすとき、M を $\widetilde{M}$ の **Hopf 超曲面**という (このとき μ を Hopf 主曲率という)。

Remark 4.1　特に外の Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ が「非平坦複素空間型」、すなわち複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ または複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ のとき、Hopf 曲率 μ は M 上定数である [19],[23], さらに $\mu = 0$ のとき、ξ の積分曲線は $\widetilde{M}$ の測地線であり、$\widetilde{M} = \mathbb{CP}^n$ かつ $\mu \neq 0$ のとき、ξ の積分曲線は $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的複素射影直線 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$ 上の「小円」である。

Example 4.2　**$\mathbb{CP}^n$ の等質実超曲面**　$\mathbb{CP}^n$ の等長変換群 $PU(n+1)$ の部分群の軌道となっている**等質実超曲面**は、高木 [30] によって分類されていて、階数が 2 の Hermite 対称空間の isotropy 表現から得られることが分かっている。そして [31] において、それらは全て Hopf 超曲面であることが知られている。一方 [20] において、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} が主曲率一定であることと、等質実超曲面 (の一部) であることが同値であることが示されている。それらは**等径超曲面**でもあって、以下の $\mathbb{CP}^n$ 内の Kähler 部分多様体上の半径 r の tube であることがわかっている (g は M の異なる (一定な) 主曲率の個数)：

(i)　($g = 2$, 測地的超球面) 1 点、および全測地的複素射影超平面 $\mathbb{CP}^{n-1}$ $(0 < r < \pi/2)$,
(ii)　($g = 3$) 全測地的複素射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ $(1 \leq k \leq n-2)$ $(0 < r < \pi/2)$,
(iii)　($g = 3$) 複素 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^{n-1}$ $(0 < r < \pi/4)$,
(iv)　($g = 5$) Segre 埋め込み $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^k$, $n = 2k+1$, $(0 < r < \pi/4)$,
(v)　($g = 5$) Plücker 埋め込み $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^5)$, $n = 9$, $(0 < r < \pi/4)$,
(vi)　($g = 5$) Half spin 埋め込み $SO(10)/U(5)$, $n = 15$, $(0 < r < \pi/4)$.

Remark 4.3　$\mathbb{CP}^n$ において、**等径**であるが、**非 Hopf** かつ**主曲率が一定でない**実超曲面が存在する [13], [34]。

以下、特に注意しない限り $\mathbb{CP}^n$ は正則断面曲率が 4 である Fubini-Study 計量をもつものとする。

Theorem 4.4　(Cecil-Ryan [9])

(i)　$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} が、ある複素部分多様体 Σ 上の半径一定の tube の一部であると

き、M は $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面**である。

(ii) 逆に、M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ 内の Hopf 超曲面とする。Hopf 主曲率を $\mu = 2\cot 2r$ $(0 < r < \pi/2)$ と表した時に、focal map $\phi_r : M \to \mathbb{CP}^n$, $\phi_r(p) = \exp_p^{\mathbb{CP}^n}(rN_p)$ の**階数が** M **上一定**ならば、$\phi_r(M)$ は $\mathbb{CP}^n$ の**複素部分多様体**であって、M は $\phi_r(M)$ 上半径 r の tube (の一部) である。

(iii) また、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の「平行超曲面」は Hopf 超曲面である。

Remark 4.5 $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面について、focal map の階数に関する仮定を省くと Cecil-Ryan の定理は一般に成り立たない。Borisenko [7] はその場合の結果をいくつか得ている。その一つとして: $\mathbb{CP}^n$ 内の compact embedded Hopf 超曲面は、$\mathbb{CP}^n$ 内のある algebraic variery 上の半径一定の tube である。

次節で "Gauss 写像" を用いて、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の特徴づけを与える。

5 Gauss map of real hypersurfaces in complex projective space to compex 2-plane Grassmannian

$\mathbb{S}^{n+1}$ 内の超曲面 M^n に関する Palmer の Gauss map にならって、$\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} に対して、Gauss 写像を定義する。

$x : M^{2n-1} \to \mathbb{CP}^n$ を immersion とし、$p \in M$ における $\mathbb{CP}^n$ 内の M の単位法ベクトルを N_p とする。このとき、$x(p) \in \mathbb{CP}^n$ が定める $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素直線と、N_p が定める $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素直線の直和を $\gamma(p)$ とすると、γ は M^{2n-1} から複素 2-平面 Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ への (well-defined な) 写像である。$\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} の **Gauss 写像**という。この Gauss 写像も、実超曲面の「平行族」に対して定義される。

最初の結果を述べるために、四元数 Kähler 多様体の全複素部分多様体について述べる。$(\widetilde{M}^{4m}, g, Q)$ を実 $4m$ 次元四元数 Kähler 多様体とする。すなわち、(M, g) は Riemann 多様体で、Q は $\mathrm{End}\,TM$ の階数 3 の部分束で、以下の条件をみたす: (i) M の各点 p に対して M 内の近傍 U と U 上定義された Q の切断 I_1, I_2, I_3 が存在して $I_j^2 = -1$ $(j = 1, 2, 3)$, $I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3$, $I_2I_3 = -I_3I_2 = I_1$, $I_3I_1 = -I_1I_3 = I_2$ が成り立つ。(ii) 任意の $L \in Q_p$ について g_p は L で不変である。(iii) ベクトル束 Q は g から定まる Levi-Civita 接続に関して、$\mathrm{End}\,TM$ 内で平行である。$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素 2-平面のなす複素 Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は、Hermite 対称空間であって、かつ四元数 Kähler 多様体の構造ももっている (cf. [35])。

$\widetilde{M}$ の部分多様体 Σ^{2m} は、$Q|_\Sigma$ の切断 I が存在して (1) $I^2 = -1$, (2) $IT\Sigma = T\Sigma$ をみたすとき *almost Hermitian* であるという。I から誘導される Σ 上の概複素構造を I_Σ と書くことにすると、(Σ, I_Σ) は誘導計量 g_Σ について almost Hermitian 多様体になる。さらに $(\Sigma, g_\Sigma, I_\Sigma)$ が Kähler のとき、Σ は四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の **Kähler 部分多様体**であるという。また、$\widetilde{M}$ の almost Hermitian 部分多様体 (Σ, I_Σ) は、任意の $p \in \Sigma$ と $I_pL + LI_p = 0$ をみたす任意の

$L \in Q_p$ について $LT_p\Sigma \perp T_p\Sigma$ が成り立つとき**全複素部分多様体**であるという。$\widetilde{M}$ の almost hermitian 部分多様体について、Kähler であることと全複素部分多様体であることは同値である [2]. また、全複素部分多様体は極小になる [15].

Theorem 5.1 [21] M^{2n-1} を複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面、$\gamma : M \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。(i) M が**非 Hopf** のとき、γ は **immersion** である。(ii) M が **Hopf** のとき、$\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の**半分次元の全複素部分多様体**である。さらに、Gauss 写像 $\gamma : M \to \gamma(M)$ によって、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} は Kähler 多様体 $\gamma(M)$ 上の $\mathbb{S}^1$**-束の全空間**になっている。

Example 5.2 M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的複素射影部分空間 $\mathbb{CP}^k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ 上の半径 r $(0 < r < \pi/2)$ の等質実超曲面とすると、その Gauss image $\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ 内の全複素全測地的部分多様体 $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^{n-k-1}$ である (cf. [10], [32]).

Example 5.3 M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ 内の複素 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^n$ 上の半径 r $(0 < r < \pi/4)$ の等質実超曲面とすると、その Gauss image $\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ 内の全複素全測地的部分多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+1})$ である (cf. [10], [32]).

次節で、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間を用いた、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の逆構成を与える。

6 Twistor space of $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ and converse construction of Hopf hypersurfaces in $\mathbb{CP}^n$

四元数 Kähler 多様体 $(\widetilde{M}^{4m}, g, Q)$ について、$\widetilde{M}$ 上の単位球面束 $\mathcal{Z} = \{\tilde{I} \in Q |\ \tilde{I}^2 = -1\}$ を $\widetilde{M}$ の **twistor 空間**という (cf. [28], [35]) このとき、次が成り立つ：(i) $\widetilde{M}$ の Ricci 曲率が 0 でないならば、$\mathcal{Z}$ は複素接触構造をもつ。(ii) $\widetilde{M}$ の Ricci 曲率が正ならば、$\mathcal{Z}$ は twistor fibration $\pi : \mathcal{Z} \to \widetilde{M}$ が全測地的 fiber をもつ Riemannian submersion となるような、Ricci 正の Einstein-Kähler 計量をもつ。

塚田 [33] は、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間は $\mathbb{CP}^n$ の射影余接束 $P(T^*\mathbb{CP}^n)$ であることと、複素等質空間として $U(n+1)/U(n-1) \times U(1) \times U(1)$ と表示されることを示した。一方で、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は $\mathbb{CP}^n$ 内の複素射影直線 $\mathbb{CP}^1$ の集合 $\{\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^n\}$ と同一視できて、$\mathbb{CP}^n$ 内の測地線 $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^n$ と $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ の切断 I $(I^2 = -1)$ が対応することがわかる。さらに、$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$ 内の測地線を一つ与えると、その同心円の族も一つ定まることに注意する。

$\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を複素 $n-1$ 次元 Kähler 多様体から $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 2-平面のなす Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。このとき、Σ の各点 p に対して、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の (四元数 Kähler 構造に関する) 概複素構造 $\tilde{I}_p \in Q_{\varphi(p)}$ を対応させると、twistor 空間 $\mathcal{Z}$ の部分多様体 $\tilde{I}(\Sigma)$ が得られる (natural lift という)。そして、Σ が $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素部分多様体であることから、$\tilde{I}(\Sigma)$ は $\mathcal{Z}$ の複素接触構造に関して**複素 Legendre 部分多様体**であることがわかる

[3]. E を $\mathcal{Z}$ 上の $\mathbb{S}^1$-束で、その各 fiber が base point に対応する $\mathbb{CP}^n$ 内の測地線であるものとする。このとき、次の図式:

$$\begin{tikzcd} \tilde{I}^*E \arrow[r, "\eta"'] \arrow[d] & E \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & \mathbb{CP}^n \\ \Sigma^{n-1} \arrow[r, "\tilde{I}"'] & \mathcal{Z} & \end{tikzcd},$$

(ψ は「射影」、η は $\tilde{I}$ から誘導される束写像で $\tilde{I}^*E$ は引き戻し束) に関して、写像 $\Phi := \psi \circ \eta : \tilde{I}^*E \to \mathbb{CP}^n$ は ($M = \tilde{I}^*E$ の正則点において) $A\xi = 0$ をみたす Hopf 超曲面を与えて、その平行超曲面の族も、すべて Hopf である [22]。

7 Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space

M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面とし、μ (定数) をその Hopf 主曲率 ($A\xi = \mu\xi$) とする。(i) $|\mu| > 2$ のとき: 定理 4.4 と同様に $\mathbb{CH}^n$ の複素部分多様体と関連付けられることが Montiel [24] によって示されている。(ii) $|\mu| < 2$ のとき: $\mathbb{S}^{2n-1}$ 内の 2 つの Legendre 部分多様体の組から、この場合の Hopf 超曲面が構成できることが、微分式系の議論を用いて Ivey [18] によって示された。(iii) $|\mu| = 2$ のときの Hopf 超曲面の構成法はわかっていなかった。

Example 7.1 $\mathbb{CH}^n$ 内の主曲率が一定な Hopf 超曲面は Montiel [24] によって構成され、Berndt [5] によって分類されている:

(i) ($g = 2$, $|\mu| > 2$) 測地的超球面,
(ii) ($g = 2$, $|\mu| > 2$) 全測地的複素双曲超平面 $\mathbb{CH}^{n-1}$ 上の tube,
(iii) ($g = 3$, $|\mu| > 2$) 全測地的複素双曲部分空間 $\mathbb{CH}^k$ ($1 \leq k \leq n-2$) 上の tube,
(iv) ($g = 2$, $|\mu| = 2$) ホロ球面,
(v) ($g = 2, 3$, $|\mu| < 2$) 全測地的 Lagrange 実双曲空間 $\mathbb{RH}^n$ 上の tube.

Remark 7.2 $\mathbb{CH}^n$ の等質超曲面は Berndt-Tamaru [6] によって分類されていて、$\mathbb{CP}^n$ の場合とは異なり**非 Hopf** であるものが存在する。また、$\mathbb{CP}^n$ および $\mathbb{CH}^n$ の実超曲面で (誘導計量が) Einstein であるものは存在しないが、$\mathbb{CH}^n$ のホロ球面は **Ricci soliton** である [17] (cf. [11]).

8 Gauss map of real hypersurfaces in complex hyperbolic space to indefinite compex 2-plane Grassmannian

複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の一つのモデルとして、指数 1 の不定値複素数空間 $\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の (実 2 次超曲面として定義される) anti de-Sitter 空間 $\mathbb{H}_1^{2n+1}$ を単位複素数 $\mathbb{S}^1$ の作用で割った空間を考える。このとき、$\mathbb{CH}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} に対して、§5 と同様に Gauss 写像が定義できる:

$x : M^{2n-1} \to \mathbb{CH}^n$ を immersion とし、$p \in M$ における $\mathbb{CH}^n$ 内の M の単位法ベクトルを N_p とする。このとき、$x(p) \in \mathbb{CH}^n$ が定める $\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の**時間的**複素直線と、N_p が定める $\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の**空間的**複素直線の直和を $\gamma(p)$ とすると、γ は M^{2n-1} から**不定値複素 2-平面**のなす複素 Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ への (well-defined な) 写像である。$\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ を $\mathbb{CH}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} の **Gauss 写像**という。

$\widetilde{M} := \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ は、四元数 Kähler 構造の「dual」と考えられる**パラ四元数 Kähler 構造**をもつ: すなわち、$(\widetilde{M}, g)$ は **neutral 計量をもった**擬 Riemann 多様体で、Q は $\mathrm{End}\, T\widetilde{M}$ の階数 3 の部分束で、以下の条件をみたす: (i) $\widetilde{M}$ の各点 p に対して $\widetilde{M}$ 内の近傍 U と U 上定義された Q の切断 I_1, I_2, I_3 が存在して $I_1^2 = -1$, $I_j^2 = 1$ $(j = 2, 3)$, $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = -I_3$, $I_2 I_3 = -I_3 I_2 = I_1$, $I_3 I_1 = -I_1 I_3 = -I_2$ が成り立つ。(ii) 任意の $L \in Q_p$ について g_p は L で不変である。(iii) ベクトル束 Q は g から定まる Levi-Civita 接続に関して、$\mathrm{End}\, T\widetilde{M}$ 内で平行である。

このとき、Q_p $(p \in \widetilde{M})$ は自然に Lie 代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ および Minkowski 空間 $\mathbb{R}_1^3$ と同一視できる:

$$\tilde{Q}_p = \{aI_1 + bI_2 + cI_3 |\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathbb{R}_1^3.$$

さらに、$\tilde{Q}_p$ の 3 種類の切断 $\tilde{I}^2 = 1$, $\tilde{I}^2 = -1$, $\tilde{I}^2 = 0$ の集合はそれぞれ $\mathbb{R}_1^3$ の部分集合として以下のようにみなせる:

$$(S_+)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = 1\} \cong S_1^2 : \text{ (de-Sitter 2-space)}, \tag{4}$$

$$(S_-)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = -1\} \cong H^2 : \text{ (hyperbolic 2-space)}, \tag{5}$$

$$(S_0)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = 0\} \cong L^2 : \text{ (light cone)}. \tag{6}$$

このとき、Theorem 5.1 と同様の結果が得られる:

Theorem 8.1 [12] M^{2n-1} を複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n(-4)$ の Hopf 超曲面とし、μ をその Hopf 主曲率とする。このとき、(i) Gauss 写像 $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{CH}^n$ に関して $\gamma(M)$ は $\mathbb{CH}^n$ の半分次元の部分多様体である。(ii) $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} は $|\mu| > 2$ (resp. $|\mu| \leq 2$) のとき、$\gamma(M)$ 上の $\mathbb{S}^1$-束 (resp. $\mathbb{R}$-束) の全空間になっている。(iii) $\gamma(M)$ の $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ からの誘導計量の符号は、M の $\{\xi\}^\perp$ における主曲率の値から定まる。(iv) 特に $|\mu| > 2$ (resp. $|\mu| < 2$) で、M の $\{\xi\}^\perp$ における主曲率の値が ± 1 でないとき、$\gamma(M)$ の誘導計量は非退化で **擬 Kähler** (resp. **パラ Kähler**) となる。

Remark 8.2 この定理で、$|\mu| = 2$ のとき M がホロ球面 $\Leftrightarrow$ $\gamma(M)$ が lightlike もわかる。

さらに、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の切断 $\tilde{I}$ の集合で、それぞれ (4), (5), (6) をみたす **twistor 空間** を、それぞれ $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Z}_-$, $\mathcal{Z}_0$ (cf. [1]) とすると、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ への fibration について水平な twistor 空間 $\mathcal{Z}_+$ (resp. $\mathcal{Z}_-$, $\mathcal{Z}_0$) の $2n-2$ 次元部分多様体 Σ^{2n-2} に対して、§6 と同様に $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} で $|\mu| < 2$ (resp. $|\mu| > 2$, $|\mu| = 2$) をみたすものを構成できる (準備中)。

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky and V. Cortés, *The twistor spaces of a para-quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. **45** (2008), no. 1, 215–251.

[2] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *Hermitian and Kahler submanifolds of a quaternionic Kahler manifold*, Osaka J. Math. **38** (2001), no. 4, 869–904.

[3] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Ann. Mat. Pura Appl. **184** (2005), no. 1, 53-74.

[4] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **366** (2014), no. 5, 2699–2718.

[5] J. Berndt, *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 132–141.

[6] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one* Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), no. 7, 3425–3438.

[7] A. A. Borisenko, *On the global structure of Hopf hypersurfaces in a complex space form*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 265–277.

[8] T. E. Cecil, Q-S. Chi and G. R. Jensen, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. Ann. of Math. (2) **166** (2007), 1–76.

[9] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), no. 2, 481–499.

[10] B. Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 2, 405–425.

[11] J. T. Cho and M. Kimura, *Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form*, Tohoku Math. J., **61** (2009), no. 2, 205-212.

[12] J. T. Cho and M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex* 2*-plane Grassmannians I*, Topol. Appl., **196** (2015), 594–607.

[13] M. Dominguez-Vázquezm *Isoparametric foliations on complex projective spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 2, 1211–1249.

[14] D. Ferus, H. Karcher and H.-F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, Math. Z. **177** (1981), 479–502.

[15] S. Funabashi, *Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold*, Kodai Math. J. **2** (1979), no. 3, 314–336.

[16] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta. Math. **148** (1982), 47-157.

[17] T. Hashinaga, A. Kubo and H. Tamaru, *Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces*, Tohoku Math. J., **68** (2016), no. 4, 559-568.

[18] T. E. Ivey, *A d'Alembert formula for Hopf hypersurfaces*, Results Math. **60** (2011), no.

1-4, 293–309.

[19] U.-H. Ki and Y. J. Suh, *On real hypersurfaces of a complex space form*, Math. J. Okayama Univ. **32** (1990), 207–221.

[20] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., **296** (1986), 137–149.

[21] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians I*, Diff. Geom. Appl., **35** (2014), suppl, 156–163.

[22] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians II*, Diff. Geom. Appl., **54** (2017), part A, 44–52.

[23] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 529–540.

[24] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), no. 3, 515–535.

[25] H.-F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphähren, I. Math. Ann. **251** (1980), 57–71, II. Math. Ann. **256** (1981), 215–232.

[26] H. Ozeki, M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I. Tôhoku Math. J. **27** (1975), 515–559, II. Tôhoku Math. J. **28** (1976), 7–55.

[27] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*, Diff. Geom. Appl. **7** (1997), no. 1, 51–58.

[28] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 143–171.

[29] C. Somigliana, Sulle relazione fra il principio di Huygens e l'ottica geometria, Atti. Accad. Sci. Torino **54** (1918-1919), 974–949.

[30] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.

[31] R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), no. 1, 43–53.

[32] M. Takeuchi, *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan. J. Math. (N.S.) **12** (1986), no. 1, 161–189.

[33] K. Tsukada, *Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of* 2*-planes*, (English summary) Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 30–51.

[34] Q. M. Wang, Isoparametric hypersurfaces in a complex projective space, Proc. 1980 Beijing Sympos. on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, Gordon and Breach, New York, 1982, pp. 1509-1523.

[35] J. A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech., **14** (1965), 1033-1047.