

力学系の平均次元と情報理論

塚本 真輝 (九州大学)

1. 序

Kolmogorov [Ko59] は1950年代後半に, Shannon [Sha48] のエントロピーをエルゴード理論に移植した. これは, エルゴード理論における, それまでの関数解析的な研究スタイルから, 符号理論・情報理論的なスタイルへの転換を促し, エルゴード理論に革命をもたらした. この最初期の研究の一つの到達点は, エントロピーによってベルヌイ過程が測度力学系として完全に分類できることを示した Ornstein [Or70] の定理である. その後も力学系の研究と情報理論との間の相互作用は豊かに発展し続けている.

最近になって, 私と共同研究者たちは, 上記の相互作用にいくつかの新しい要素を付け加えることに成功した. 我々は平均次元と呼ばれる力学系の位相不変量を研究していたのだが, この不変量と情報理論との間の予期せぬ関連を発見した [GT, LT18, LT19]. 平均次元は Gromov [Gro99] が20世紀末に導入したもので, 力学系が単位時間あたりに持つ自由度を表す. 我々が見つけたことは次の二つである.

1. 力学系を「帯域制限された信号 (例えば電話) として送信する」際に, 平均次元は本質的なパラメータになる. これは Shannon [Sha48] による帯域制限されたチャンネルにおける通信の理論の位相力学系への移植である. この発見を利用することで, 我々は Lindenstrauss [Lin99] が1999年に提案した問題を解決した.
2. 平均次元はレート歪み理論 [Sha48, Sha59] の位相力学系版だとみなせる. エントロピーは情報を損失ゼロで符号化する際の情報圧縮の限界値を表すが, これは連続的な信号 (音声や画像) を圧縮する際には意味を持たない. そのような場合 (すなわちエントロピー無限大の信号の符号化) においては情報の損失を許した情報圧縮を考える必要があり, それを研究するのがレート歪み理論である. 我々は, 極小力学系の平均次元がレート歪み次元 [KD94] と呼ばれる量に関するミニマックス問題の解として特徴づけられることを示した. これはエントロピー理論において知られていた変分原理 [Goodw69, Din70, Goodm71] の平均次元理論版になっている.

2. 帯域制限されたチャンネルにおける通信

周波数が $[-W, W]$ に制限された信号 (例えば電話) を用いて情報を送信したいとする. 使える信号のパワーを P とし, ノイズは密度 N の白色ガウシアンであるとしよう. この時, 基本的な問題は,

送信可能な情報量の毎秒あたりの上限値はいくらか?

Shannon [Sha48] はこの問題 (を含む一般のチャンネルにおける通信の問題) に対する答えが, チャンネルの容量 (capacity) という概念で与えられることを発見した. さらに彼は上記の帯域制限されたチャンネルに対して次の美しい公式を示した:

$$\text{容量} = W \log \left(1 + \frac{P}{2NW} \right) \quad \text{ビット/秒.}$$

情報理論の概念になじみがない読者は、(この講演を理解する上で) この公式の細部を理解していただく必要はまったくない。ただここで強調したいのは、帯域制限された通信において、帯域幅 W が決定的に重要なパラメーターになるということである。我々 [GT] はこの Shannon の理論の位相力学系版を発見した。

3. ヒルベルト立方体上のシフトに力学系を埋め込む

前節のテーマと一見無関係の話題から始める。 $(\mathcal{X}, T)$ が力学系であるとは、 $\mathcal{X}$ がコンパクト距離化可能空間¹であって、 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ が同相写像であることとする。基本的な重要性を持つ力学系の例として、次のヒルベルト立方体上のシフトがある。単位区間 $[0, 1]$ の両側無限直積 (位相は直積位相)

$$[0, 1]^{\mathbb{Z}} = \cdots \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots$$

を考えて、その上のシフト写像 $\sigma: [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{Z}}$ を

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

と定める。この時、 $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ は力学系になる。

一般の力学系 $(\mathcal{X}, T)$ が与えられたとして、次の質問を考えよう。

$(\mathcal{X}, T)$ は $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ に埋め込めるか？

ここで、 $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{Z}}$ が力学系の埋め込みであるとは、 f が位相的な埋め込み (つまり単射連続写像) であって、 $f \circ T = \sigma \circ f$ を満たすこととする。注意として、これは力学的 (dynamical) な問題であるということを指摘しておく。すなわち、任意のコンパクト距離化可能空間は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に位相的に埋め込める。従って、単なる空間の埋め込みに関しては埋め込みの障害は存在しない。

力学系の埋め込みに対する明らかな障害として周期点²がある。力学系 $(\mathcal{X}, T)$ が周期点をたくさん持つと $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトには埋め込めない。例えば、正方形 $[0, 1]^2$ の両側無限直積

$$([0, 1]^2)^{\mathbb{Z}} = \cdots \times [0, 1]^2 \times [0, 1]^2 \times [0, 1]^2 \times \cdots$$

とその上のシフトを考えよう。この力学系の不動点集合は自然に $[0, 1]^2$ と同一視されるが、これは $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ の不動点集合 (単位区間 $[0, 1]$ と同一視される) に位相的に埋め込めない。従って、 $([0, 1]^2)^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトは $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ には力学系として埋め込めない。

驚くべきことに、Jaworski [Jaw74] は、有限次元力学系に対しては、周期点だけが埋め込みに対する障害であることを発見した：

定理 1 (Jaworski, 1974). 周期点を持たない有限次元力学系 $(\mathcal{X}, T)$ は、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込める。ここで「有限次元」とは、 $\mathcal{X}$ の位相次元が有限であることとする。

Jaworski の研究の後、「有限次元」という仮定がどれだけ本質的なのが問題となった。Auslander [Aus88, p. 193] は次を問うた：

任意の極小力学系は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込めるか？

¹ この節の話題においては、距離を1つ固定して、 $\mathcal{X}$ をコンパクト距離空間としてもよいが、後の節で変分原理について論じる際には、距離を動かして考えることが本質的な意味を持つ。

² $T^n x = x$ ($n \geq 1$) の時、 x を周期 n の周期点という。

ここで、 $(\mathcal{X}, T)$ が極小であるとは、任意の点 $x \in \mathcal{X}$ の軌道 $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が $\mathcal{X}$ 内で稠密であることとする。極小力学系は、 $\mathcal{X}$ が有限集合でない限り、周期点を持たない。(有限集合の場合は、当然、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込めるので、今の状況では自明なつまらない場合である。) 従って Auslander の質問は、有限次元という仮定を外したうえで周期点を持たない一番単純な状況を考えて、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めるかどうかを問うている。

Auslander の問題の解決には 10 年以上の時間が必要だったが、Lindenstrauss–Weiss [LW00] が見つけた答えは単純であった。平均次元という力学系の不変量があり、これから答えは直ちに「No」であることが分かる。

4. 平均次元と力学系の埋め込み

$(\mathcal{X}, d)$ をコンパクト距離空間とする。位相空間 $\mathcal{Y}$ と連続写像 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が与えられたとする。正数 ε に対して、 f が ε -埋め込みであるとは、任意の点 $y \in \mathcal{Y}$ に対して $\text{diam} f^{-1}(y) < \varepsilon$ が成り立つこととする。 $(\mathcal{X}, d)$ の ε -幅次元 $\text{Widim}_\varepsilon(\mathcal{X}, d)$ を次を満たす整数 $n \geq 0$ の最小値として定める³: n 次元単体複体 P と ε -埋め込み $f: \mathcal{X} \rightarrow P$ が存在する。

同相写像 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ が与えられたとする。各自然数 N に対して、 $\mathcal{X}$ 上の距離 d_N を

$$d_N(x, y) = \max_{0 \leq n < N} d(T^n x, T^n y)$$

で定める。そして平均次元 $\text{mdim}(\mathcal{X}, T)$ を次で定義する [Gro99]。

$$\text{mdim}(\mathcal{X}, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Widim}_\varepsilon(\mathcal{X}, d_N)}{N} \right).$$

ただし、 $\text{Widim}_\varepsilon(\mathcal{X}, d_N)$ は N について劣化法的であり、 ε については単調なので、この極限は存在する。この定義は距離 d を明示的に利用しているが、実際には $\text{mdim}(\mathcal{X}, T)$ は位相不変量である。すなわち、同じ位相を与える別の距離 d' を使用しても、平均次元の値は変わらない。

$[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトの平均次元は 1 である。これは直観的には $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ が毎秒あたり 1 自由度を持つことを意味する。前節の埋め込み問題に対して、平均次元が果たす役割は非常に直接的である。力学系 $(\mathcal{X}, T)$ が別の力学系 $(\mathcal{Y}, S)$ に埋め込めたとすると、定義から直ちに $\text{mdim}(\mathcal{X}, T) \leq \text{mdim}(\mathcal{Y}, S)$ が得られる。特に、 $(\mathcal{X}, T)$ が $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込まれたならば、 $\text{mdim}(\mathcal{X}, T) \leq 1$ となる。対偶を取ると、 $\text{mdim}(\mathcal{X}, T) > 1$ ならば、 $(\mathcal{X}, T)$ は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトには埋め込めない。つまり平均次元は埋め込みに対する障害となる。これを踏まえて、Lindenstrauss–Weiss [LW00] は次を示した。

定理 2 (Lindenstrauss–Weiss, 2000). 任意の実数 $c \geq 0$ に対して、平均次元の値が c に等しい極小力学系が存在する。特に ($c > 1$ とすることで)、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込めない極小力学系が存在する。

すなわち、平均次元という適切な概念が得られた後では、前節に述べた Auslander の問題の答えが「No」であることは、ほとんど当たり前なのであった⁴。一方で、驚くべ

³ $\mathcal{X}$ の位相次元が $\dim \mathcal{X} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Widim}_\varepsilon(\mathcal{X}, d)$ として定まることが知られている。

⁴ だからといって、Lindenstrauss–Weiss の定理の価値を低く見積もるつもりは全くない。例えば、冒頭で述べた Kolmogorov による測度論的エントロピーの導入によって、エントロピーの値が異なるベルヌイ過程は同型でないことが直ちに分かる。特にこれから $(1/2, 1/2)$ -ベルヌイ過程と $(1/3, 1/3, 1/3)$ -ベルヌイ過程は同型でないことが従うが、これは当時の重要な未解決問題に対する解答であった。真に大きな発見はしばしば、自然な視点が得られた後から見れば自明に見えるということであろう。

きことに, Lindenstrauss [Lin99] は部分的な逆が成立することを示した:

定理 3 (Lindenstrauss, 1999). 平均次元が $1/36$ 未満の極小力学系は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込める.

これは素晴らしい定理であるが, 明らかな問題は $1/36$ という数字が人工的に見える点である. 当然, Lindenstrauss 自身も $1/36$ を単に証明の技術的な必要性から生じた数と考えて, 最適な値を求めることを問題とした. 彼の論文 [Lin99, p.229]⁵ から引用する (記号をここでの説明に合わせて変更している):

Another nice question that remains open is what is the largest constant c such that $\text{mdim}(\mathcal{X}, T) < cN$ implies that $(\mathcal{X}, T)$ can be embedded in $\left([0, 1]^N\right)^{\mathbb{Z}}, \text{shift}$? The bound we get is that $c \geq 1/36$.

我々 [GT] は次の定理を示して, この問題を解決した.

定理 4 (Gutman-T.). 平均次元が $1/2$ 未満の極小力学系は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込める.

この定理の主張は最善である. 実際, Lindenstrauss と私の論文 [LT14] において, 平均次元がちょうど $1/2$ であって, $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込めない極小力学系の例が構成されている. 従って, 上記の Lindenstrauss の問題の答えは $c = 1/2$ であることが分かった.

注意 5. 定理 4 は $\mathbb{Z}$ 作用の力学系に関する主張だが, 論文 [GLT16] のテクニックと [GT] のテクニックとを組み合わせることで, 現在では $\mathbb{Z}^k$ 作用の場合にも同様の主張が示されている [GQT19]. 一方で, 非可換群作用の場合に主張を拡張できるかどうかは重要な未解決問題である. 特に, 次節で説明する信号解析 (signal analysis) のテクニックが非可換群の場合にどうなるのかは非常に興味がある.

5. 力学系を電話で送信する

定理 4 の証明は Shannon の通信理論を位相力学系に移植するというアイデアに基づく. ヒルベルト立方体 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ の点 $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は, 単位区間 $[0, 1]$ に値を取る離散信号

$$\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots, \quad (x_n \in [0, 1])$$

だとみなせる. (「離散」というのは時間方向が離散化されているという意味である.) 従って, 力学系を $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に埋め込む問題は, 力学系の軌道を離散信号として符号化する問題であると見ることができる. このような符号化の観点にたてば, 離散信号だけでなく, 別の信号として符号化することも当然考えられる. 以下では, 力学系を帯域制限されたアナログ信号 (例えば電話) として符号化することを考える. すなわち, 我々の定理 4 に対するアプローチは次である:

力学系 $\longrightarrow$ 帯域制限されたアナログ信号 $\longrightarrow$ 離散信号.

まず力学系の軌道を帯域制限されたアナログ信号に符号化する. (つまり, 「力学系を電話で送信する」.) 次にサンプリングによって, アナログ信号を離散信号に変換する. ア

⁵Lindenstrauss のこの質問では, $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ への埋め込みだけでなく, $([0, 1]^N)^{\mathbb{Z}}$ への埋め込みが問題とされている. 実のところ, この節の議論はそのまま $([0, 1]^N)^{\mathbb{Z}}$ の場合にも適用できる. ただ記号の単純化のために, 以下でも $N = 1$ の場合だけ考える.

ナログ信号は離散信号にはない柔軟性を持っているため、力学系を離散信号に直接符号化する時よりも良い結果が得られる。

厳密に説明するために、信号解析の用語を準備する。有界連続関数 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、フーリエ変換を次で定める：

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi\sqrt{-1}t\xi} dt.$$

一般にはこの積分は収束しないので、超関数の意味で $\hat{\varphi}$ を定める。実数 $a < b$ に対して、 $\text{supp } \hat{\varphi} \subset [a, b]$ の時、 φ は $[a, b]$ に帯域制限されているという⁶。例えば、次の関数は $[-1, 1]$ に帯域制限されている：

$$\sin(2\pi t), \quad \cos(2\pi t), \quad \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}. \quad (1)$$

$[a, b]$ に帯域制限された有界連続関数 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ で、 $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$ を満たすものの全体を $\mathcal{B}[a, b]$ とおく。例えば、上記の (1) は $\mathcal{B}[-1, 1]$ の元である。二つの元 $\varphi, \psi \in \mathcal{B}[a, b]$ に対して、距離を

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|\varphi - \psi\|_{L^\infty[-n, n]}$$

と定めると、 $\mathcal{B}[a, b]$ はコンパクト距離空間になる。シフト $\sigma : \mathcal{B}[a, b] \rightarrow \mathcal{B}[a, b]$ を

$$\sigma(\varphi)(t) = \varphi(t+1)$$

とおく。これによって $(\mathcal{B}[a, b], \sigma)$ は力学系になる ($\mathcal{B}[a, b]$ 上のシフトと呼ぶ)。この力学系の平均次元は $2(b-a)$ である。ここで $b-a$ は帯域幅であることに注意しよう。すなわち、帯域制限された信号の成す力学系の大きさ (平均次元) は帯域幅で決まる。

次の定理が、定理 4 のアナログ信号版である。(ここで、極小力学系 $(\mathcal{X}, T)$ が非自明とは、 $\mathcal{X}$ が無限集合であることとする。)

定理 6. 平均次元が $b-a$ 未満の非自明な極小力学系は $\mathcal{B}[a, b]$ 上のシフトに埋め込める。

この定理に、次の古典的なサンプリング定理を組み合わせることで、前節の定理 4 が得られる。

補題 7 (サンプリング定理). $b-a < 1$ なら

$$\mathcal{B}[a, b] \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}), \quad \varphi \mapsto (\varphi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

は埋め込みになる。

定理 6 の証明に、どのようにアナログ信号の持つ長所が活かされているかは、講演時に (時間が許せば) 説明する。

定理 4 と定理 6 は極小力学系に対する主張だが、より一般の力学系の埋め込みに関しては次の予想が指針となる [LT14]。これはまだ未解決である。

予想 8 (Lindenstrauss–T.). 力学系 $(\mathcal{X}, T)$ が

$$\text{mdim}(\mathcal{X}, T) < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 1 : \frac{\dim\{x \in \mathcal{X} \mid T^n x = x\}}{n} < \frac{1}{2}$$

を満たすなら、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ 上のシフトに埋め込める。

埋め込み問題に関する議論はここで終わりにし、次節からは別のテーマを論じる。

⁶ 例えば、日本の標準的な電話の信号は $[-3400\text{Hz}, 3400\text{Hz}]$ に帯域制限されている。

6. エントロピーに対する変分原理

前節において、力学系の埋め込みの問題を経由して、平均次元と通信理論がつながることを見た。次は、二つの理論のより直接的な関係として、

平均次元が情報理論の量を用いて表現できる

ということを説明したい。この節では、その前にまず、力学系のエントロピーに対する変分原理というものを解説する。

$(\mathcal{X}, d)$ をコンパクト距離空間とする。正数 ε に対して、次を満たす自然数 n の最小値を $\#(\mathcal{X}, d, \varepsilon)$ と書くことにする：開被覆 $\mathcal{X} = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ で $\text{diam } U_i < \varepsilon$ ($\forall 1 \leq i \leq n$) を満たすものがある。

同相写像 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ が与えられたとする。平均次元の定義の時と同様に、 $d_N(x, y) = \max_{0 \leq n < N} d(T^n x, T^n y)$ によって、 $\mathcal{X}$ 上の距離の列 d_N ($N \geq 1$) が定まる。力学系 $(\mathcal{X}, T)$ の位相的エントロピーを次で定義する。

$$h_{\text{top}}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \#(\mathcal{X}, d_N, \varepsilon)}{N} \right).$$

これは力学系の位相不変量になる。

今、一般に X が有限集合 A に値を取る確率変数の時、Shannon エントロピーを

$$H(X) = - \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \log \mathbb{P}(X = a) \quad (2)$$

と定める。

力学系 $(\mathcal{X}, T)$ 上に不変ボレル確率測度 μ を一つとる⁷。有限集合に値を取る可測写像 $X: \mathcal{X} \rightarrow A$ に対して、確率過程 $\{X \circ T^n\}_{n=0}^{\infty}$ を考え、そのエントロピーを

$$H(\{X \circ T^n\}_{n=0}^{\infty}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H(X, X \circ T, X \circ T^2, \dots, X \circ T^{N-1})}{N}$$

と定める⁸。 $(\mathcal{X}, T, \mu)$ の測度論的エントロピーを次で定義する。

$$h_{\mu}(T) = \sup_X H(\{X \circ T^n\}_{n=0}^{\infty}).$$

ここで、 X は $\mathcal{X}$ 上で定義された確率変数であって、値域が有限集合のもの全体を動く。

力学系 $(\mathcal{X}, T)$ 上の不変ボレル確率測度全体を $\mathcal{M}^T(\mathcal{X})$ と書こう。70 年代初頭に証明されたエントロピーの変分原理とは、

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} h_{\mu}(T) \quad (3)$$

なる主張である [Goodw69, Din70, Goodm71]。

上記の定義から分かるように、測度論的エントロピー $h_{\mu}(T)$ は直接的に情報理論に基づいて定義されている。従って、変分原理 (3) は位相的エントロピー $h_{\text{top}}(T)$ という力学系の位相不変量を情報理論を用いて表現していると考えられる。以下で我々が目指すのは、同様にして情報理論を用いて平均次元を表現することである。

⁷ 「不変」とは $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ という意味。

⁸ $(X, X \circ T, X \circ T^2, \dots, X \circ T^{N-1})$ は $\mathcal{X}$ 上で定義され、有限集合 A^N に値を取る確率変数である。従って、その Shannon エントロピーが (2) で定まる。

7. レート歪み理論

Shannon エントロピーは情報の損失の無い情報圧縮における圧縮の限界値を表す．すなわち， $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定常確率過程としたとき，これを記述するのに必要な毎秒あたりのビット数の下限はエントロピー

$$H(\{X_n\}_{n=0}^{\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})}{n}$$

によって与えられる．しかし，もし各 X_n が連続的な値を取る確率変数の場合（例：音声や画像），エントロピーは無限大になり，意味のある圧縮は（情報の損失を許さなければ）不可能になる．従ってこの場合，情報の損失を許した情報圧縮⁹を考えなければならない．Shannon [Sha48, Sha59] はこのためにレート歪み理論を導入した．レート歪み理論とは，

情報の損失に伴って生じる「歪み」を制御しながらの情報圧縮

を研究するものである．歪みを ε 未満に抑えたときの情報圧縮の限界値をレート歪み関数と呼ぶ．

レート歪み理論を述べる準備として，まず相互情報量というものを定義する． (Ω, P) を確率空間， $X: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ と $Y: \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ を共に Ω 上で定義された確率変数とする．（ $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ はなんらかの可測空間．）この二つの確率変数が共有する情報の量をはかるものとして相互情報量 $I(X; Y)$ を定義したい．二つの場合に分けて定義する．

- $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が有限集合の場合：この時は

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (4)$$

と定める．

- 一般の場合： $\mathcal{X}$ や $\mathcal{Y}$ が無限集合の場合，式 (4) の右辺の Shannon エントロピーが一般には無限大になるので，このままでは定義が意味を持たない．そこで，以下のようにする． f と g をそれぞれ $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ 上で定義された可測関数で，取り得る値の可能性が有限個のものとする． $f \circ X$ と $g \circ Y$ とは有限個の値しかとらないので，相互情報量 $I(f \circ X; g \circ Y)$ が (4) によって定義できる．そこで f と g が有限個の値しかとらない $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ 上の可測関数全体を動かときの $I(f \circ X; g \circ Y)$ の上限値を $I(X; Y)$ として定める．もし $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が有限集合なら，この定義は (4) の定義と一致することが知られている．

例 9. X と Z を互いに独立なガウシアン確率変数とし，

$$X \sim N(a, v), \quad Z \sim N(b, w)$$

とする． $Y = X + Z \sim N(a + b, v + w)$ とおく時，

$$I(X; Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{v}{w} \right).$$

⁹ 例えば，音声をウェーブレットで展開して，ゼロに近い係数を捨て，残りの係数を量子化する．

以上で相互情報量という概念が定義された．次にレート歪み関数を導入する． $(\mathcal{X}, T)$ を力学系とし， d を $\mathcal{X}$ 上の距離関数， μ を $\mathcal{X}$ 上の T 不変ボレル確率測度とする．正数 ε に対して，レート歪み関数 $R(d, \mu, \varepsilon)$ を

$$R(d, \mu, \varepsilon) = \inf \frac{I(X; Y)}{N}$$

で定める．ただし， N, X, Y は以下の三つの条件を満たすものの全体を動くとする：

1. N は自然数．
2. X はある確率空間 (Ω, P) 上で定義され， μ にしたがって $\mathcal{X}$ に値を取る確率変数．
3. $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ は (Ω, P) 上で定義された確率変数．各 Y_n は $\mathcal{X}$ に値をとり，次を満たす．

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d(T^n X, Y_n) \right) < \varepsilon. \quad (5)$$

条件 (5) は， $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ が確率過程 $(X, TX, \dots, T^{N-1}X)$ を平均的な誤差 ε 未満で近似していることを意味する．レート歪み関数 $R(d, \mu, \varepsilon)$ は確率過程 $\{T^n X\}_{n=0}^{\infty}$ を平均的な誤差を ε 未満に抑えて記述する際に必要な毎秒あたりのビット数の下限値であることが知られている [Gra90, ECG94, LDN79]．

8. 二重変分原理

$(\mathcal{X}, T)$ を力学系とする． $\mathcal{X}$ 上の（位相とコンパティブルな）距離関数全体を $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ と書こう．また， $\mathcal{X}$ 上の T 不変ボレル確率測度全体を $\mathcal{M}^T(\mathcal{X})$ と書いていたことを思いだそう．

距離 $d \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ と測度 $\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})$ を取る．Kawabata–Dembo [KD94] にしたがって，レート歪み次元 $\text{rdim}(\mathcal{X}, T, d, \mu)$ を

$$\text{rdim}(\mathcal{X}, T, d, \mu) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R(d, \mu, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

と定める．ただし， $R(d, \mu, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) は前節で定義したレート歪み関数である．以上の準備のもとで，[LT19] の主結果を述べる：

定理 10 (二重変分原理, Lindenstrauss–T.). 極小力学系 $(\mathcal{X}, T)$ に対して

$$\text{mdim}(\mathcal{X}, T) = \min_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{X})} \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} \text{rdim}(\mathcal{X}, T, d, \mu). \quad (6)$$

ここで， $\min$ は最小値を達成する $d \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ が存在することを意味する．

エントロピーに対する変分原理 (3) と，我々の新しい変分原理 (6) との本質的な違いは，エントロピーの変分原理 $h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} h_{\mu}(T)$ は測度 μ という一つの変数に関する最大化問題であるのに対して，上記の (6) は

二つの変数 d と μ に関するミニマックス問題

であるという点である．変数が二つあるという点を強調して二重変分原理と呼ぶことにした．

定理 10 の証明は幾何学的測度論の力学系版を作るというアイデアに基づく．より詳しくは（時間が許せば）講演時に説明したい．

注意 11. (1) 定理 10 は極小力学系に対してのみの主張だが，実のところ，二重変分原理 (6) は全ての力学系に対して正しいだろうと予想している．定理 10 の証明中で，一方向きの不等式

$$\text{mdim}(\mathcal{X}, T) \leq \inf_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{X})} \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} \text{rdim}(\mathcal{X}, T, d, \mu)$$

は全ての力学系 $(\mathcal{X}, T)$ に対して成立することが示されている．従って残る問題は逆向きの不等式を一般の力学系に対して証明することである．この問題を解こうとする際の主要な困難は，実は予想 8 にアプローチする際に遭遇する困難と非常に近い．

(2) エントロピーに対する変分原理には，その一般化として圧力に対する変分原理が知られている．力学系 $(\mathcal{X}, T)$ 上に連続関数 $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき， $(\mathcal{X}, T)$ と φ の組に対する不変量として圧力 $P_T(\varphi)$ というものが定義される．($\varphi = 0$ の時は位相的エントロピーに一致する．) これに対して，Walter [Wa75] は

$$P_T(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} \left(h_\mu(T) + \int_{\mathcal{X}} \varphi d\mu \right) \quad (7)$$

なる等式が成り立つことを示した．最近，私はこれの平均次元理論版を発見した [Tsu19]．力学系 $(\mathcal{X}, T)$ と連続関数 $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ に対してポテンシャル付き平均次元 $\text{mdim}(\mathcal{X}, T, \varphi)$ というものを定義し ($\varphi = 0$ の時は通常のアverage次元になる)，特に $(\mathcal{X}, T)$ が極小力学系ならば

$$\text{mdim}(\mathcal{X}, T, \varphi) = \min_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{X})} \sup_{\mu \in \mathcal{M}^T(\mathcal{X})} \left(\text{rdim}(\mathcal{X}, T, d, \mu) + \int_{\mathcal{X}} \varphi d\mu \right)$$

が成立することを示した．

圧力に対する変分原理 (7) は双曲力学系の理論において本質的な役割を果たしている [Bow75]．私はポテンシャル付き平均次元も同様に，具体例を解析する際に大きな力を発揮すると期待している．特に，論文 [Gro99, MaT15, Tsu18] 等における幾何学的な例を，ポテンシャル付き平均次元に対する二重変分原理の観点から研究したいと考えている．

参考文献

- [Aus88] J. Auslander, Minimal flows and their extensions, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [Bow75] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lect. Notes in Math. **470** (1975).
- [Din70] E. I. Dinaburg, A correlation between topological entropy and metric entropy, Dokl. Akad. Nauk SSSR **190** (1970) 19-22.
- [ECG94] M. Effros, P. A. Chou, G. M. Gray, Variable-rate source coding theorems for stationary nonergodic sources, IEEE Trans. Inf. Theory vol. 40, pp. 1920-1925, 1994.

- [Goodm71] T. N. T. Goodman, Relating topological entropy and measure entropy, Bull. London Math. Soc. **3** (1971) 176-180.
- [Goodw69] L. W. Goodwyn, Topological entropy bounds measure-theoretic entropy, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969) 679-688.
- [Gra90] R.M. Gray, Entropy and information theory, New York, Springer-Verlag, 1990.
- [Gro99] M. Gromov, Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I, Math. Phys. Anal. Geom. vol. 2 pp. 323-415, 1999.
- [GLT16] Y. Gutman, E. Lindenstrauss, M. Tsukamoto, Mean dimension of $\mathbb{Z}^k$ -actions, Geom. Funct. Anal. **26** Issue 3 (2016) 778-817.
- [GQT19] Y. Gutman, Y. Qiao, M. Tsukamoto, Application of signal analysis to the embedding problem of $\mathbb{Z}^k$ -actions, arXiv:1709.00125, Geom. Funct. Anal. (2019). <https://doi.org/10.1007/s00039-019-00499-z>.
- [GT] Y. Gutman, M. Tsukamoto, Embedding minimal dynamical systems into Hilbert cubes, preprint, arXiv:1511.01802.
- [Jaw74] A. Jaworski, Ph.D. Thesis, University of Maryland (1974).
- [KD94] T. Kawabata and A. Dembo, The rate distortion dimension of sets and measures, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 40, no. 5, pp. 1564-1572, Sep. 1994.
- [Ko59] A. N. Kolmogorov, "A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces," *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, vol. 119, pp. 861-864, 1958.
- [LDN79] A. Leon-Garcia, L. D. Davisson, D. L. Neuhoff, New results on coding of stationary nonergodic sources, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 25, pp. 137-144, 1979.
- [Lin99] E. Lindenstrauss, Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. vol. 89 pp. 227-262, 1999.
- [LT14] E. Lindenstrauss, M. Tsukamoto, Mean dimension and an embedding problem: an example, Israel J. Math. **199** (2014) 573-584.
- [LT18] E. Lindenstrauss, M. Tsukamoto, From rate distortion theory to metric mean dimension: variational principle, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 64, No. 5, pp. 3590-3609, May, 2018.
- [LT19] E. Lindenstrauss, M. Tsukamoto, Double variational principle for mean dimension, arXiv:1901.05623, Geom. Funct. Anal. (2019). <https://doi.org/10.1007/s00039-019-00501-8>.
- [LW00] E. Lindenstrauss, B. Weiss, Mean topological dimension, Israel J. Math. vol. 115 pp. 1-24, 2000.
- [MaT15] S. Matsuo, M. Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015) 159-182.
- [Or70] D. Ornstein, Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, *Advances in Math.*, vol. 4, pp. 337-352, 1970.
- [Sha48] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J. **27** (1948) 379-423, 623-656.
- [Sha59] C. E. Shannon, Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion, IRE Nat. Conv. Rec., Pt. 4, pp. 142-163, 1959.
- [Tsu18] M. Tsukamoto, Mean dimension of the dynamical system of Brody curves, Invent. math. **211** (2018) 935-968.
- [Tsu19] M. Tsukamoto, Double variational principle for mean dimension with potential, preprint, arXiv:1901.05628.
- [Wa75] P. Walter, A variational principle for the pressure of continuous transformations, Amer. J. Math. **17** (1975) 937-971.