シンプレクティック容量と Hamilton 系の周期軌道

入江　慶　(東大数理)

1. 問題設定と背景

シンプレクティック容量は、シンプレクティック多様体の（二次元的な）「幅」を表す不変量の総称であり、Gromov [15] による圧縮不能性定理を契機とし Ekeland-Hofer [8] により導入された概念である。Gromov による容量の構成は擬正則曲線の理論を用いるものだが、Ekeland-Hofer は Hamilton 系の周期軌道に対応する min-max 値を用いても容量が構成できることを示した。このアイデアを（擬正則曲線の理論の延長にある）Floer ホモロジーを用いて再定式化したのが Floer-Hofer [11] に始まるシンプレクティック・ホモロジーの理論である。以上はシンプレクティック・トポロジーの黎明期（1990 年代前半まで）の話であるが、本稿では、これに関わる最近の進展と、講演者なりの展望について説明したい。

まず問題設定を説明する。n を正整数、Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の座標を $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ とし、$\omega_n := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ とおく。本稿で述べることの大半は、より一般的な枠組 [1] で定式化可能であるが、本稿では基本的に $\mathbb{R}^{2n}$ 上の領域 [2] のみを考察の対象とする。以降、$(q_1, \ldots, q_n)$ を q, $(p_1, \ldots, p_n)$ を p と略記することがある。

$\mathbb{R}^{2n}$ 上の領域 U と V に対して、（C^∞ 級の）埋込 $e : U \to V$ で $e^*\omega_n \equiv \omega_n$ を満たすものをシンプレクティック埋込という。このような e が存在すれば $\mathrm{vol}\,(U) \le \mathrm{vol}\,(V)$ となる（ただし $\mathrm{vol}\,(U) := \int_U \frac{\omega^n}{n!}$）ことは容易にわかる。すなわち、体積はシンプレクティック埋込の存在に制約を与える。一方、Gromov [15] は擬正則曲線の理論を用いて次の定理を示し、非自明な（体積以外の）制約があることを明らかにした：

定理 1.1 (Gromov [15] の圧縮不能性定理) 正実数 r について

$$B^{2n}(r) := \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |q|^2 + |p|^2 < r^2\}, \quad Z^{2n}(r) := \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_1^2 + p_1^2 < r^2\}$$

とおく。$B^{2n}(r_1)$ から $Z^{2n}(r_2)$ へのシンプレクティック埋込が存在するならば $r_1 \le r_2$.

定理 1.1 の逆は明らかに正しい。そこで、少し状況を一般化して

$$E(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2 + p_i^2}{a_i} < \frac{1}{\pi} \right\} \qquad (0 < a_1 \le \cdots \le a_n)$$

という形の領域（シンプレクティック楕円体という）を考えよう。例えば

$$E(a, \ldots, a) = B^{2n}(\sqrt{a/\pi}), \qquad E(a, \infty, \ldots, \infty) = Z^{2n}(\sqrt{a/\pi})$$

である。$E(a_1, \ldots, a_n)$ が $E(b_1, \ldots, b_n)$ にシンプレクティック埋込可能ならば、体積を考えることで $a_1 \cdots a_n \le b_1 \cdots b_n$ であり、また定理 1.1 より $a_1 \le b_1$ である。しかし、これらは十分条件ではない。

本研究は科研費若手 B(課題番号:18K13407) の助成を受けている。

[1] 例えば、Liouville Domain という対象がよく考察される。

[2] 連結な開集合のこと

$n = 2$の場合は、次のような必要十分条件が知られている。正実数$a_1 \leq a_2$に対して、

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 \qquad (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, m_1 + m_2 \geq 1)$$

の形の数を重複を許して下から並べてできる数列を$(c_k(a_1, a_2))_{k \geq 1}$とおく。例えば$(c_k(1,1))_k$のはじめの方は$1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$となる。この時、次が成り立つ：

定理 1.2 (McDuff [27]) $E(a_1, a_2)$から$E(b_1, b_2)$へのシンプレクティック埋込が存在することと、任意の正整数kについて$c_k(a_1, a_2) \leq c_k(b_1, b_2)$が成り立つことは同値。

定理1.2 の主張は、シンプレクティック埋込の存在という微妙な問題が（4次元の楕円体の場合は）初等的な条件で完全に特徴付けられるという驚くべきものである。$(c_k)_{k \geq 1}$は、Hutchingsにより導入されたEmbedded Contact Homology (ECH) を使って定義されるシンプレクティック容量（ECH容量）である。ECHは、3次元閉接触多様体に対して定義される一種のFloerホモロジーである（荒くいうと、Reebベクトル場の周期軌道を生成元とし、接触多様体のsymplectizationの中の（ほぼ）埋め込まれた擬正則曲線を数えて定義される境界作用素を持つ複体のホモロジー）。楕円体以外の領域に対しても、$n = 2$の場合はECHを応用してシンプレクティック埋込について多くのことが分かっている。ECHについてはHutchingsの講義録[20]を参照されたい。

一方$n \geq 3$の場合は、楕円体についても完全な理解からはほど遠い。ECHはきわめて強力な理論であるが、3次元・4次元に特有の事情を本質的に使うため、そのままでは高次元化できない。（閉）接触多様体の不変量を擬正則曲線を使って構成する一般的な枠組みとしてEliashberg-Givental-Hofer [10] にはじまるSymplectic Field Theory (SFT)があり、これを用いて接触多様体を境界に持つシンプレクティック多様体の容量を定義し、シンプレクティック埋込への制約を調べることは魅力的な問題である。この方向の研究はまだ少ないが、K. Siegelによる最近の論文[32]は興味深い（注意2.1参照）。

次に、Hamilton 系の周期軌道について説明する。$H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対して、そのHamiltonベクトル場$X_H := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ が（非自明な）周期軌道を持つか考える。$dH(X_H) \equiv 0$なので、X_Hの軌道上Hの値は一定である。cをHの正則値とし、超曲面$\{H = c\}$をSとおくと、$X_H|_S$が生成する一次元葉層はSだけで決まる（$\omega_n|_S$の核として特徴付けられる）。これをSの特性葉層という。明らかに、$X_H|_S$の周期軌道は、Sの特性葉層の葉でS^1と同相なものに対応している。用語の濫用で、以降このような葉をS上の周期軌道といい、S上の周期軌道のなす集合を$\mathcal{P}(S)$と書く。

$n \geq 3$のとき、周期軌道を持たないC^∞級のコンパクト超曲面$S \subset \mathbb{R}^{2n}$が存在することが知られている[3]。一方$S$がコンパクトかつ接触型（$S$の近傍で定義されたベクトル場$X$で、$S$に横断的かつ$L_X\omega_n = \omega_n$を満たすものが存在する）のときは周期軌道が存在すること[4]がViterbo [33] により80年代に証明されている。しかし、周期軌道が「どのくらい」存在するのか、については分かっていないことが多い。例えば、Sをコンパクトかつ接触型の超曲面として

[3] V. Ginzburg[13] による。$n = 2$の時はC^1級の例がGinzburg-Gurel [14] により構成されているが C^2級以上の例が存在するかは未解決である。

[4] $\mathbb{R}^{2n}$ の超曲面に対する Weinstein 予想。なお Weinsetein の原論文では $H^1(S : \mathbb{R}) = 0$という仮定がされている。一般化された Weinstein 予想（任意のコンパクト接触多様体上の Reeb ベクトル場は周期軌道を持つという主張）は、3次元では Taubes により解決されたが5次元以上では一般には未解決である。

(a): Sの上に存在しうる周期軌道の個数の最小値は何か？

(b): 生成的（generic）なSは「たくさん」周期軌道を持つか？

という問題を考えよう。(a)については、「Sが凸領域の境界ならば少なくともn個の周期軌道を持つ」という予想が有名である。$E(a_1,\ldots,a_n)$の境界は、任意の$i \neq j$について$a_i/a_j \notin \mathbb{Q}$なら丁度$n$個の周期軌道を持つので、この予想は正しければ最良評価である。$n=2$の場合は（一般の3次元コンパクト接触多様体に対して）予想が正しいことがCristofaro-Gardiner, Hutchings [5]によりECHを使って証明されている。$n \geq 3$の場合は多くの仕事があるが一般には未解決である。(b)については、C^∞-生成的な強凸領域の境界には無限個の周期軌道が存在するという結果（Ekeland [7]）、C^2-生成的なコンパクト超曲面の上には周期軌道が稠密に存在するという結果[5]（Pugh-Robinson [29]）が有名である。後者の結果がC^2級より強い位相で成り立つか否かは、いわゆる閉補題と関係して重要であるが、$n=2$の場合は[22]でECHを使うことにより（一般の3次元コンパクト接触多様体に対して）最も強いC^∞級位相について肯定的に解決した。$n \geq 3$の場合は何も知られていない。Hamilton系の周期軌道については他にも色々な問題があるが、詳しくは[25] などを参照されたい。

注意 1.3 [22]の証明において鍵になるのは、ECH容量の漸近挙動から接触多様体の体積が復元されるというCristofaro-Gardiner, Hutchings, Ramos [6]の結果（一種のWeylの法則）である。興味深いことに、極小超曲面の研究で現れるVolume Spectrumという不変量も一種のWeylの法則を満たし、それを用いると（次元が3以上7以下の閉多様体において）生成的なRiemann計量について極小超曲面が稠密に存在すること分かる（[26]参照)。

まとめると、$n=2$の時はECHを用いていくつかのきわめて強力な結果が得られているのに対して、$n \geq 3$の時はまだこれからという感じである。現時点で主に研究されているのは（一般のSFTよりはずっと易しい）シンプレクティック・ホモロジーを用いたアプローチである。そこで、2節ではシンプレクティック・ホモロジーを用いて定義される容量について概説し、3節でこれに関わる講演者の最近の結果[24]と若干の展望を述べる。

2. シンプレクティック・ホモロジーから定義される容量

2.1. シンプレクティック・ホモロジー

シンプレクティック・ホモロジーの定義にはいくつかのバリエーションがあるが、ここでは、$\mathbb{R}^{2n}$のコンパクト部分集合Kと実数$a<b$に対して定義される$\mathbb{Z}$-次数付き$\mathbb{Z}/2$-ベクトル空間$\mathrm{SH}_*^{[a,b)}(K)$を考える。これはFloer-Hofer [11]の定義とほぼ同じものである[6]。まず$S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$とし$H \in C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n})$で次の条件を満たすものを考える：

(i): $A \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \pi\mathbb{Z}$と$B \in \mathbb{R}$が存在して、$S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$上の関数

$$H(t,q,p) - A(|q|^2+|p|^2) - B$$

の台はコンパクト。

[5] この結果では、超曲面は接触型でなくても良い

[6] [11]では$\mathbb{R}^{2n}$の開集合を考えている。

(ii): $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^{2n}$ に対する Hamilton 方程式

$$\dot{\gamma}(t) = X_{H_t}(\gamma(t)) \qquad (\forall t \in S^1) \tag{1}$$

の解は全て非退化（つまり、γ における線形化方程式の解は 0 のみ)。ただし、任意の $t \in S^1$ に対して $H_t(q,p) := H(t,q,p)$ と定義する。

方程式 (1) の解の集合 $\mathcal{P}(H)$ は、自由ループ空間上の汎関数

$$\mathcal{A}_H : C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}; \quad \gamma \mapsto \int_{S^1} \gamma^*\left(\sum_i p_i dq_i\right) - H_t(\gamma(t))\,dt$$

の臨界点として特徴付けられる。実数 $a < b$ に対して $\{\gamma \in \mathcal{P}(H) \mid \mathcal{A}_H(\gamma) \in [a,b)\}$ で生成される $\mathbb{Z}/2$ ベクトル空間を考え（仮定 (i), (ii) より有限次元である）、生成元 γ_-, γ_+ に対して Floer 方程式の解空間[7]

$$\{u : \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbb{R}^{2n} \mid \partial_s u - J(\partial_t u - X_{H_t}(u)) = 0,\ \lim_{s \to \pm\infty} u(s,t) = \gamma_\pm(t)\}$$

の元の個数を数えることで境界作用素を定義する（形式的には、Floer 方程式は $\mathcal{A}_H$ の勾配ベクトル場の積分曲線とみなせる）。ただし J は $J(\partial/\partial p_i) = \partial/\partial q_i$, $J(\partial/\partial q_i) = -\partial/\partial p_i$ で定義される $\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造である。

こうして得られる複体のホモロジーを $\mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H)$ と書き Hamiltonian Floer ホモロジーという。Hamiltonian Floer ホモロジーには以下の自然な写像が定義される：

(iii): $a \leq a'$, $b \leq b'$ に対して $\mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H) \to \mathrm{HF}_*^{[a',b')}(H)$ が定まる。

(iv): $H, H' \in C^\infty(S^1 \times T^*\mathbb{R}^n)$ が $H(t,q,p) \leq H'(t,q,p)\,(\forall (t,q,p) \in S^1 \times T^*\mathbb{R}^n)$ を満たすとき $\mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H) \to \mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H')$ が定まる。

(iii) は Hamiltonian Floer ホモロジーの定義から自然に従う。(iv) は monotonicity map といい、H と H' をつなぐ $C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n})$ の元の 1-パラメータ族を使って定義される。さて $\mathbb{R}^{2n}$ のコンパクト部分集合 K に対して、$H(t,q,p) < 0\,(\forall (t,q,p) \in S^1 \times K)$ を満たす H 全体の集合を $\mathcal{H}_K$ とおき、シンプレクティック・ホモロジー $\mathrm{SH}_*^{[a,b)}(K)$ を

$$\mathrm{SH}_*^{[a,b)}(K) := \varinjlim_{H \in \mathcal{H}_K} \mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H)$$

で定義する（右辺は monotonicity map による直極限)。シンプレクティック・ホモロジーに対しては以下のような自然な写像が定義される：

(v): $a \leq a'$, $b \leq b'$ に対して $\mathrm{SH}_*^{[a,b)}(K) \to \mathrm{SH}_*^{[a',b')}(K)$ が定まる。

(vi): $K \subset K'$ に対して $\mathrm{SH}_*^{[a,b)}(K') \to \mathrm{SH}^{[a,b)}(K)$ が定まる。

[7] 正確には、何らかの方法で Floer 方程式を摂動する必要がある

2.2. 容量の定義（Floer-Hofer-Wysocki）

Floer-Hofer-Wysocki [12] は、シンプレクティック・ホモロジーを用いて、$\mathbb{R}^{2n}$ の任意の（開）部分集合に対する容量を定義した。restricted contact type（RC 型と略記する）という条件を満たす部分集合 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対しては比較的簡単な定義がある（Hermann [18] による）ので、ここではそれを説明する。定義される容量を c_{SH} と書く。まず（[18] の定義とは微妙に違うが）$K \subset \mathbb{R}^{2n}$ が次の条件を満たすとき RC 型ということにする：

- K はコンパクト、連結かつ ∂K は C^∞ 級。
- $\mathbb{R}^{2n}$ 上のベクトル場 X で、$L_X\omega_n \equiv \omega_n$ を満たし ∂K と横断的かつ外向きに交わるものが存在する。

$\mathbb{R}^{2n}$ の星型領域や、1 を正則値とする固有 C^∞ 関数 $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて

$$\{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid U(q) + |p|^2/2 \leq 1\}$$

と表示できる領域は RC 型である。$K \subset \mathbb{R}^{2n}$ が RC 型ならば自然な同形 $H_*(K, \partial K) \cong \varprojlim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{SH}_*^{[0,\varepsilon)}(K)$ が存在する (Hermann [18])。そこで任意の正実数 a に対して線形写像

$$i_K^a : H_{*+n}(K, \partial K) \cong \varprojlim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{SH}_*^{[0,\varepsilon)}(K) \to \mathrm{SH}_*^{[0,a)}(K) \tag{2}$$

を考え、容量 c_{SH} を次の式で定義する：

$$c_{\mathrm{SH}}(K) := \inf\{a \mid i_K^a([K, \partial K]) = 0\}.$$

容量 c_{SH} は以下の性質を満たす：

(i): 任意の正実数 c について $c_{\mathrm{SH}}(cK) = c^2 c_{\mathrm{SH}}(K)$.

(ii): $K \subset K'$ なら $c_{\mathrm{SH}}(K) \leq c_{\mathrm{SH}}(K')$.

(iii): $\gamma \in \mathcal{P}(\partial K)$ で $\mathcal{A}(\gamma) := \int_\gamma \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i \right) = c_{\mathrm{SH}}(K)$ を満たすものが存在する。

(i) を共形性 (conformality), (ii) を単調性 (monotonicity), (iii) をスペクトル性 (spectrality) ということにする。(iii) における $\mathcal{A}(\gamma)$ を周期軌道 γ の作用 (action) という。

c_{SH} は、シンプレクティック･ホモロジーを用いて定義される容量の中で最も基本的なものである。一般には c_{SH} を計算することは容易ではないが、例えば $c_{\mathrm{SH}}(\bar{E}(a_1, \ldots, a_n)) = a_1$ は比較的容易にわかる [8]。これと単調性から、任意の RC 型コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ について $0 < c_{\mathrm{SH}}(K) < \infty$ が成り立つことが分かる。また、Gromov の圧縮不能性定理の別証明も得られる。

---

[8] 一般に性質 (iii) における周期軌道 γ は、Conley-Zehnder 指数が $n+1$ であることが証明でき、一方で任意の $i \neq j$ について $a_i/a_j \notin \mathbb{Q}$ であるとき $\partial E(a_1, \ldots, a_n)$ 上にある指数 $n+1$ の軌道は一つだけでその作用は a_1 であることが直接わかる。

2.3. S^1 同変シンプレクティック・ホモロジーから定義される容量

前節の話の S^1 同変版を考えることで、無限個の容量を定義できるということを説明する。まず $H \in C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n})$ が $t \in S^1$ によらない形なら汎関数 $\mathcal{A}_H$ は $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ への自然な S^1 作用で不変である。このような H で 2.1 節の条件 (i) を満たすものと実数 $a < b$ に対して S^1 同変 Hamiltonian Floer ホモロジー $\mathrm{HF}_*^{S^1,[a,b)}(H)$ が定義され、その極限を取ることで、任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対して S^1 同変シンプレクティック・ホモロジー $\mathrm{SH}_*^{S^1,[a,b)}(K)$ が定義される。K が RC 型ならば写像 (2) の S^1 同変版

$$(i_K^a)_{S^1} : H_{*+n}^{S^1}(K, \partial K) \to \mathrm{SH}_*^{S^1,[0,a)}(K) \tag{3}$$

が定義できる。ここで $H_*^{S^1}(K, \partial K)$ は $(K, \partial K)$ への自明な S^1 作用に関する S^1 同変ホモロジーであり、従って $H_*(K, \partial K) \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ と同形である。そこで両者を同一視し、任意の正整数 k について

$$c_{\mathrm{SH}^{S^1}}^k(K) := \inf\{a \mid i_K^a([K, \partial K] \otimes [\mathbb{C}P^{2(k-1)}]) = 0\}$$

とおくことで容量の列 $(c_{\mathrm{SH}^{S^1}}^k)_{k\ge 1}$ が定義できる。各 k について、$c_{\mathrm{SH}^{S^1}}^k$ は前節で述べた三つの性質（共形性、単調性、スペクトル性）を満たす。

自由ループ空間の S^1 対称性を用いて無限個の容量を定義するアイデアは Ekeland-Hofer [9] に遡る。その Floer ホモロジー版は Viterbo [35] で既に考察されている。Gutt-Hutchings [16] はその基本的な性質（上の三つを含む）を厳密に確立し、凸および凹トーリック領域に対して $c_{\mathrm{SH}^{S^1}}^k$ を初等的に計算する公式を与え、シンプレクティック埋込の問題に応用した（ただし [16] は $\mathbb{Q}$ 係数で考えている。一般には、この容量は係数によって変わる可能性がある）。

[16] で計算されている凸および凹トーリック領域の場合、極限 $\lim_{k\to\infty} c_{\mathrm{SH}^{S^1}}^k/k$ が存在する[9]。この現象が（トーリックとは限らない）一般の領域に対して成立するのか、またその極限値にどんな意味があるかは非常に興味深い問題である。しかし現時点では、トーリック領域以外で容量を計算する手立てがない。これに対する一つの試みを 3 節で議論する。

注意 2.1 一般に、$\mathbb{C}P^1 \setminus \{3\,点\}$ の上で定義される Floer 方程式の解を数えることで、シンプレクティック・ホモロジー上の自然な積構造

$$\mathrm{SH}_{d_1}^{(-\infty,a_1)}(K) \otimes \mathrm{SH}_{d_2}^{(-\infty,a_2)}(K) \to \mathrm{SH}_{d_1+d_2}^{(-\infty,a_1+a_2)}(K)$$

が定義される。これと、自然な写像 $\mathrm{SH}_* \to \mathrm{SH}_*^{S^1}$ および $\mathrm{SH}_*^{S^1} \to \mathrm{SH}_{*+1}$ を合わせて定義される写像

$$l_{a_1,a_2} : \mathrm{SH}_{d_1+n-3}^{S^1,(-\infty,a_1)}(K) \otimes \mathrm{SH}_{d_2+n-3}^{S^1,(-\infty,a_2)}(K) \to \mathrm{SH}_{d_1+d_2+n-4}^{S^1,(-\infty,a_1+a_2)}(K) \tag{4}$$

は（次数付）Lie 代数の関係式を満たし、また一般の $m \ge 2$ に対して $\mathbb{C}P^1 \setminus \{m+1\,点\}$ の上で Floer 方程式を考えることで写像

$$l_{a_1,\ldots,a_m} : \mathrm{SH}_{d_1+n-3}^{S^1,(-\infty,a_1)}(K) \otimes \cdots \otimes \mathrm{SH}_{d_m+n-3}^{S^1,(-\infty,a_m)}(K) \to \mathrm{SH}_{d_1+\cdots+d_m+n-4}^{S^1,(-\infty,a_1+\cdots+a_m)}(K) \tag{5}$$

[9] さらに極限値にはシンプレクティック幾何的な意味があり、$\{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \max_{1\le i\le n} q_i^2 + p_i^2 < a/\pi\}$ がシンプレクティック埋込できるような a の上限と一致する。

が定義され L_∞ 代数の関係式を満たすと期待される。Siegel [32] は、この L_∞ 構造を用いることで、上で述べた容量の列 $(c^k_{\mathrm{SH}\,S^1})_k$ を含む容量の族を定義するアイデアを出した [10]。[32] では主にシンプレクティック埋込への応用について調べているが、周期軌道への応用も含め、今後の発展が期待されるアイデアであると思う。

3. ループ空間の幾何との関係

本節を通じて $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ を RC 型のコンパクト部分集合とする。$\mathrm{pr} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ を $\mathrm{pr}\,(q,p) := q$ で定義する。任意の $q \in \mathbb{R}^n$ に対して $K_q := K \cap \mathrm{pr}^{-1}(q)$ が凸であるとき K は fiberwise に凸であるという。3.1 節では、この時に容量 c_{SH} がループ空間の幾何を使って記述できることを示し、3.2 節でその応用を説明する。3.3, 3.4 節では、S^1 同変シンプレクティック・ホモロジーおよびその上の（期待される）L_∞ 代数構造により定義される容量が、ループ空間の幾何を使ってどのように記述されるかの推測を述べる。

3.1. 容量 c_{SH} とループ空間のホモロジー

S^1 から $\mathbb{R}^{2n}$ への $L^{1,2}$-級写像（絶対連続かつ、一回微分が 2 乗可積分）全体のなす集合を Λ とおく。位相は $L^{1,2}$-位相を考える。$\mathrm{len}_K : \Lambda \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$\mathrm{len}_K(\gamma) := \begin{cases} \int_{S^1} \left(\max_{p \in K_{\gamma(t)}} p \cdot \dot{\gamma}(t) \right) dt & (\gamma(S^1) \subset \mathrm{pr}\,(K)) \\ -\infty & (\gamma(S^1) \not\subset \mathrm{pr}\,(K)) \end{cases}$$

で定義する。任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{len}_K^{-1}(\mathbb{R}_{<a})$ が Λ の（$L^{1,2}$-位相に関する）開集合であることは容易にわかる。これを Λ^a_K と書く。このとき次が成り立つ：

定理 3.1 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ が fiberwise に凸かつ RC 型であるとき、次が成り立つ：

(i): 任意の実数 $a < b$ について同形

$$\mathrm{SH}^{[a,b)}_*(K) \cong H_*(\Lambda^b_K, \Lambda^a_K)$$

が成り立つ。

(ii): 任意の正実数 a に対して、写像 j^a_K を次で定義する：

$$j^a_K : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pr}\,(K)) \to (\Lambda^a_K, \Lambda^0_K); \quad q \mapsto q \text{ への定値ループ} \tag{6}$$

$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pr}\,(K)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元を $\nu_{\mathrm{pr}\,(K)}$ とおくと次が成り立つ：

$$c_{\mathrm{SH}}(K) = \inf\{a \mid H_*(j^a_K)(\nu_{\mathrm{pr}\,(K)}) = 0\}. \tag{7}$$

注意 3.2 [24] では K は凸と仮定しているが、もう少し議論すると fiberwise に凸の場合に証明できる。K が単位余接束の場合（つまり、C^∞ 級の境界を持つコンパクト集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を用いて $K = \{(q,p) \mid q \in \Omega, |p| \le 1\}$ とかける場合）は [21] で証明されている。[21] の証明を定理 3.1 に一般化することは難しくないが 3.2 節で説明するようにこれにより新しい応用が得られる。

[10] 実際は、このような L_∞ 代数構造はまだ厳密に定義されていないため、[32] ではそれと等価と期待される不変量を SFT の一種を用いて定義している。

定理3.1の証明の方針は以下の通り。まず(ii)は、(i)および(i)の同形が満たすいくつかの性質から従う。(i)を示すために、$H \in C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n})$ であって Hamiltonian Floer ホモロジーを定義するための条件（2.1節の条件(i), (ii)）を満たし、fiberwise に強凸なもの（任意の $t \in S^1$ と $q \in \mathbb{R}^n$ について $H_t|_{\mathrm{pr}^{-1}(q)}$ が強凸関数）をとる。この時、H の Legendre 変換 $L_H \in C^\infty(S^1 \times \mathbb{R}^{2n})$ が

$$L_H(t,q,v) := \max_{p \in \mathbb{R}^n} (p \cdot v - H(t,q,p))$$

で定義され、Λ 上の汎関数

$$\mathcal{S}_{L_H} : \Lambda \to \mathbb{R}; \quad \gamma \mapsto \int_{S^1} L_H(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

が定まる。ここで同形

$$\mathrm{HF}_*^{[a,b)}(H) \cong H_*(\mathcal{S}_{L_H}^{-1}(\mathbb{R}_{<b}), \mathcal{S}_{L_H}^{-1}(\mathbb{R}_{<a})) \tag{8}$$

が成り立つ。これはAbbondandolo-Schwarz [2] による余接束のFloerホモロジーとループ空間のホモロジーの同形の変種である。証明も [2] とほぼ同じであるが、Floer 方程式の解のアプリオリ評価は [2] より少し面倒である。あとはfiberwiseに凸なHamiltonianの列を適切にとって極限をとれば定理3.1が証明できる。

3.2. 応用

定理3.1の応用を二つ説明する。証明は、いずれも定理3.1 (ii) を用いてループ空間上の（初等）幾何的な議論に帰着することで行われる。一つ目の応用は次の定理3.3である。

定理 3.3 (Abbondandolo-Kang [1], I [24]) C^∞ 級の境界を持つ凸集合 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ について次が成立する：

$$c_{\mathrm{SH}}(K) = \min\{\mathcal{A}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{P}(\partial K)\}. \tag{9}$$

注意 3.4 [24] とほぼ同時期に出た Abbondandolo-Kang [1] は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の2次の増大度を持ち凸な関数 H について、H の Hamiltonian Floer ホモロジーと H の Clarke 双対の定める Morse ホモロジーの間の同形を証明し、それを応用して定理3.3の証明を与えた。

(9)の右辺をEkeland-Hofer-Zehnder (EHZ)容量といい c_{EHZ} と書く。c_{SH} も c_{EHZ} も共形性と単調性を満たすため境界が C^∞ 級とは限らない一般の凸体[11]に対しても定義することができ、その場合も(9)は成立する。定理3.3の背景にあるのは次の予想である：

予想 3.5 $\mathbb{R}^{2n}$ の任意の部分集合 S に $c(S) \in [0, \infty]$ を与える写像 c が

- 任意の正実数 a について $c(aS) = a^2 c(S)$
- $S \subset T$ なら $c(S) \le c(T)$
- 任意の正実数 r に対して $c(B^{2n}(r)) = c(Z^{2n}(r)) = \pi r^2$

を満たすなら、任意の凸体 $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ について $c(K) = c_{\mathrm{EHZ}}(K)$ が成り立つ。

[11] 凸体とは、内部が空でないコンパクト凸集合を指す

予想3.5は、大まかには、全てのシンプレクティック容量が凸体についてはEHZ容量と一致すると主張している。これは非常に強い主張で、その特別な場合から凸幾何の有名な未解決問題であるMahler予想が従う（[28] 参照）。予想3.5は解決からほど遠く、今のところ、いくつかの個別の容量について確かめられているだけである。Hofer-Zehnder容量とEkeland-Hofer容量については昔から知られていたが（それぞれ[19], [34] による）定理3.3が三つ目の例を与えている。

二つ目の応用はHaim-Kislev [17] による次の定理の別証明である：

定理 3.6 (Haim-Kislev [17]) Kを$\mathbb{R}^{2n}$の凸体、Hを$\mathbb{R}^{2n}$の超平面とし、KはHによりK_1とK_2の二つの部分に分かれているならば$c_{\mathrm{EHZ}}(K) \leq c_{\mathrm{EHZ}}(K_1) + c_{\mathrm{EHZ}}(K_2)$.

[17]の証明は凸多面体のEHZ容量を与える公式（[17]の主定理）をうまく使うものである。一般に、$\mathbb{R}^{2n}$の凸体Kが凸体$K_1, \dots, K_l$で覆われている時$c_{\mathrm{EHZ}}(K) \leq \sum_{i=1}^{l} c_{\mathrm{EHZ}}(K_i)$が成り立つという予想（Akopyan-Karasev-Petrov [3]）があり、定理3.6はその部分解になっている。

3.3. S^1同変版

len_KはΛへの自然なS^1作用について不変なので、任意の$a \in \mathbb{R}_{>0}$について$(\Lambda_K^a, \Lambda_K^0)$は自然な$S^1$作用を持つ。一方$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pr}(K))$に自明な$S^1$作用を考えると(6)で定義された写像$j_K^a$は$S^1$同変である。同形$H_*^{S^1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pr}(K)) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pr}(K)) \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty)$を用いて両辺を同一視し、定理3.1 (ii)の$S^1$同変版を予想として述べることができる：

予想 3.7 任意の正整数kについて次が成り立つ：

$$c^k_{\mathrm{SH}\,S^1}(K) = \inf\{a \mid H_*^{S^1}(j_K^a)(\nu_K \otimes [\mathbb{C}P^{2(k-1)}]) = 0\}. \tag{10}$$

$\mathbb{R}^n$上のコンパクト集合Ωを用いて$K = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q \in \Omega,\, |p| \leq 1\}$とかけるとき（つまり、$K$が$\Omega$の単位余接束のとき）は(10)の右辺を$c^k_{S^1}(\Omega)$と書くことにする。この量は$\Omega$上のビリヤード力学系と関係がある。実際、$\partial\Omega$が$C^\infty$級なら任意の$k$について$\Omega$上の周期ビリヤード軌道で長さが$c^k_{S^1}(\Omega)$と等しいものが存在することを証明できる。$c^k_{S^1}$の定義は初等的であるが、それは必ずしも簡単に計算できることを意味しない。現時点で計算できているのは次の例[12]だけである：

予想 3.8 正実数$a_1 \leq \cdots \leq a_n$に対して$R_{a_1,\dots,a_n} := [0,a_1] \times \cdots \times [0,a_n]$とおくと任意の正整数$k$について次が成り立つ：

$$c_k^{S^1}(R_{a_1,\dots,a_n} : \mathbb{Q}) = 2 \cdot \min\left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n (k_i a_i)^2} \,\middle|\, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, k_1 + \cdots + k_n = k \right\}. \tag{11}$$

Kが$R_{a_1,\dots,a_n}$の単位余接束の場合は、Ramos-Sepe [31] とGutt-Hutchingsの公式を使うと$c^k_{\mathrm{SH}\,S^1}(K)$を直接計算することができ、その結果は確かに(11)と一致している。上の例の他は、$D^n := \{q \in \mathbb{R}^n \mid |q| \leq 1\}$の場合すら分かっていない。Ramos [30] とGutt-Hutchingsの公式を使うと任意の正整数kについて

$$c^k_{S^1}(D^2 : \mathbb{Q}) = 2(k+1) \cdot \max_{1 \leq j \leq k} \sin\left(\frac{\pi j}{k+1}\right)$$

[12] 証明が詰めきれていないので予想と書く。また(11)の左辺は$\mathbb{Q}$係数で定義されていることに注意。

が予想されるが証明できていない。$n \geq 3$ の場合、また2次元でも楕円体の場合は興味深いが予想すら立っていない。より難しい問題であるが、Ω が多面体の場合も興味深い。

3.4. ストリング括弧積とSiegel容量

Chas-Sullivan [4] は、一般に閉多様体の自由ループ空間の S^1 同変ホモロジー上にストリング括弧積（String bracket）による次数付Lie代数の構造を定義した。今の場合、ストリング括弧積の構成を真似ることで次の線形写像を得る：

$$\{\ ,\ \}: H^{S^1}_{d_1}(\Lambda^{a_1}, \Lambda^{-\infty}) \otimes H^{S^1}_{d_2}(\Lambda^{a_2}, \Lambda^{-\infty}) \to H^{S^1}_{d_1+d_2+2-n}(\Lambda^{a_1+a_2}, \Lambda^{-\infty}) \qquad (12)$$

ただし a_1, a_2 は正実数であり $\Lambda^{-\infty} := \{\gamma \in \Lambda \mid \mathrm{len}_K(\gamma) = -\infty\}$ である。注意2.1で述べたように、一般に S^1 同変シンプレクティック・ホモロジーは自然な L_∞ 代数の構造を持ち、そこからシンプレクティック容量の族（Siegel容量）が定まると期待される。今の状況では、$\mathrm{SH}^{S^1,(-\infty,a)}_*(K) \cong H^{S^1}_*(\Lambda^a, \Lambda^{-\infty})$ を介して括弧積(4)はストリング括弧積(12)に対応し、高次の括弧積(5) は高次のストリング括弧積に対応すると考えられる。このような高次の積を定義するにはストリング括弧積を（適切な）鎖複体上で定義する必要があり、そのためにストリング・トポロジーの演算を鎖複体レベルで定義する手法[23] の同変版[13]が使えると思われる。

参考文献

[1] A. Abbondandolo, J. Kang, *Symplectic homology of convex domains and Clarke's duality*, arXIv: 1907.07779.

[2] A. Abbondandolo, M. Schwarz, *On the Floer homology of cotangent bundles*, Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 2, 254–316.

[3] A. Akopyan, R. Karasev, F. Petrov, *Bang's problem and symplectic invariants*, arXiv: 1404.0871.

[4] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:9911159.

[5] D. Cristofaro-Gardiner, M. Hutchings, *From one Reeb orbit to two*, J. Differential Geom. 102 (2016), 25–36.

[6] D. Cristofaro-Gardiner, M. Hutchings, V. Ramos, *The asymptotics of ECH capacities*, Invent. Math. 199 (2015), 187–214.

[7] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 19. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[8] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. 200 (1989), 355–378.

[9] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II*, Math. Z. 203 (1990), 553–567.

[10] Y. Eliashberg, A. Givental, H. Hofer, *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.

[11] A. Floer, H. Hofer, *Symplectic Homology I, Open sets in* $\mathbb{C}^n$, Math. Z. 215 (1994), 37–88.

[12] A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, *Application of Symplectic Homology I*, Math. Z. 217 (1994), 577–606.

[13] V. Ginzburg, *A smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in* $\mathbb{R}^6$, Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 13, 641–650.

[13] まだ構成されていない

[14] V. Ginzburg, B. Gurel, *C^2-smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in $\mathbb{R}^4$*, Ann. of Math. (2) 158 (2003), 953–976.

[15] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.

[16] J. Gutt, M. Hutchings, *Symplectic capacities from positive S^1-equivariant symplectic homology*, Algebr. Geom. Topol 18 (2018), 3537–3600.

[17] P. Haim-Kislev, *On the symplectic size of convex polytopes*, Geom. Funct. Anal. 29 (2019), 440–463.

[18] D. Hermann, *Holomorphic curves and Hamiltonian systems in an open set with restricted contact-type boundary*, Duke Math. 103 (2000), 335–374.

[19] H. Hofer, E. Zehnder, *A new capacity for symplectic manifolds*, Analysis, et cetera, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 405–427.

[20] M. Hutchings, *Lecture notes on embedded contact homology*, Contact and symplectic topology, 389–484, Bolyai Soc. Math. Stud., 26, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2014.

[21] K. Irie, *Symplectic homology of disk cotangent bundles of domains in Euclidean spaces*, J. Symplectic Geom. 12 (2014), 511–552.

[22] K. Irie, *Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants* J. Mod. Dyn. 9 (2015), 357–363.

[23] K, Irie, *A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, 4602–4674.

[24] K. Irie, *Symplectic homology capacity of convex bodies and loop space homology*, arXiv: 1907.09749.

[25] Y. Long, *Index theory for symplectic paths with applications*, Progress in Mathematics, 207. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[26] F. C. Marques, *Abundance of minimal surfaces*, Japan. J. Math, DOI: 10.1007/s11537-019-1839-x.

[27] D. McDuff, *The Hofer conjecture on embedding symplectic ellipsoids*, J. Differential Geom. 88 (2011), 519–532.

[28] Y. Ostrover, *When symplectic topology meets Banach space geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians–Seoul 2014. Vol. II, 959–981, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[29] C. Pugh, C. Robinson, *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians*, Ergodic Theory Dynam. Systems 3 (1983), 261–313.

[30] V. Ramos, *Symplectic embeddings and the Lagrangian bidisk*, Duke Math. J. 166 (2017), 1703–1738.

[31] V. Ramos, D. Sepe, *On the rigidity of Lagrangian products*, arXiv: 1710.01753.

[32] K. Siegel, *Higher symplectic capacities*, arXiv: 1901.01490.

[33] C. Viterbo, *A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 4 (1987), 337–356.

[34] C. Viterbo, *Capacité symplectiques et applications*, Séminaire Bourbaki, Vol.1988/98, Astérisque, 177–178 (1989), 345–362.

[35] C. Viterbo, *Functors and computations in Floer homology with applications, I*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), 985–1033.