Caloric morphism — 熱方程式の解を保つ変換

下村勝孝　(茨城大学理学部 *)†

序. Kelvin変換とAppell変換

Kelvin変換 (1847)

n を自然数, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ を n 次元 Euclid 空間とし, 内積とノルムを $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ で, n 次直交行列全体を $\mathrm{O}(n)$ で表す.

$n \geq 2$ の時, $\mathbb{R}^n$ の領域 D 上の調和関数 $u(x)$

$$\Delta_n u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u = 0$$

に対して, その Kelvin 変換

$$Ku(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u(\frac{x}{|x|^2}),$$

は $D^* = \{x/|x|^2; x \in D\}$ で調和になり, 調和関数を保つ変換になっている.

平面上の調和関数 $u(x,y)$ に正則関数 $f(z)$ $(z = x+iy)$ を平面写像として合成した $u \circ f$ は再び調和関数になることは良く知られているが, 3次元以上の場合は事情が異なり, n 変数調和関数 $u(x)$ に合成して再び調和関数になる写像は, 相似変換（拡大縮小 $u(x) \mapsto u(\lambda x)$, $\lambda > 0$, 直交変換 $u(x) \mapsto u(Rx)$, $R \in \mathrm{O}(n)$, 平行移動 $u(x) \mapsto u(x+a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, の合成）しか存在しない. しかし, 写像の合成に関数をかけた Kelvin 変換が調和関数を保ち, 重要な役割を果たす. ここまでで現れた変換は次の形になっている:

$$Tu(x) = \varphi(x)(u \circ f)(x), \quad \varphi > 0,\ f: \text{写像}.$$

$n \geq 3$ ならば, 調和関数を保つこの形の変換は, Kelvin 変換と相似変換の合成に限る.

Appell変換 (1892 [1])

$u(t,x)$ が領域 $D \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}^1$ で熱方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ の解ならば,

$$Au(t,x) := \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} u(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t})$$

は $D^* = \{(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}); (t,x) \in D\} \subset (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^n$ で熱方程式の解となり, この変換は熱方程式の解を保つ変換になっている. この変換を **Appell変換** という.

Kelvin 変換が 0 と ∞ を入れ替えるのに対応し, Appell 変換は t について 0 と ∞ を入れ替えるが, t の向きを保つため, 上半平面を下半平面に, $+0$ を $-\infty$ に, ∞ を -0 に写す.

$$(t,x) \longmapsto (-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}), \quad \{t > 0\} \longrightarrow \{t < 0\}, \quad +0 \longrightarrow -\infty, \quad \infty \longrightarrow -0.$$

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35K99, Secondary 31B99, 35A30
キーワード：caloric morphism, heat equation, Appell transformation, Schwarzian derivative, fractional linear function, semi-riemannian manifold
* 310-8512 水戸市文京 2-1-1 茨城大学理学部数学教室
† e-mail: katsunori.shimomura.sci@vc.ibaraki.ac.jp

1. 熱方程式の解を保つ変換 – caloric morphism

$\mathbb{R}^{1+n} := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\}$ を $n+1$ 次元 Euclid 空間とする. t を x_0 とも書く.
熱方程式 $H_n u(t,x) := \Big(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_n\Big) u(t,x) = 0$ の解を **caloric function** と呼ぶ.

次の 2 種類の変換は, $\mathbb{R}^{1+n}$ で熱方程式の解を保つ.

例 1 (n 次元 Appell 変換)**.**

$$u(t,x) \mapsto \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} u(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

例 2 (放物型相似変換)**.** $(b,v) \in \mathbb{R}^{1+n}, \lambda > 0, R \in \mathrm{O}(n)$

$$u(t,x) \mapsto u(\lambda^2 t + b, \lambda R x + v), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

この放物型相似変換は, 放物型拡大縮小 : $u(t,x) \mapsto u(\lambda^2 t, \lambda x)$, 平行移動 : $u(t,x) \mapsto u(t+b, x+v)$, x に関する直交変換 : $u(t,x) \mapsto u(t, Rx)$, の合成.

これらの変換も, $f : D \subset \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$ を C^2-写像, $\varphi > 0$ を D 上の C^2-関数として,

$$Tu(t,x) = \varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$$

の形であり, u が領域 E で熱方程式の解ならば $\varphi \cdot (u \circ f)$ は $f^{-1}(E)$ で熱方程式の解, という意味で熱方程式の解を保つ変換である.

熱方程式の解を保つこの形の変換 caloric morphism は, 上記 4 種の変換 – Appell 変換, 平行移動, 拡大縮小, 直交変換 – の合成に限る (Leutwiler [7]). 具体的な形は

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \left(\frac{at+b}{ct+d}, \frac{Rx+vt+w}{ct+d} \right), \\ \varphi(t,x) &= \begin{cases} \dfrac{C}{|ct+d|^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|cRx+cw-dv|^2}{4c(ct+d)} \right) & c \neq 0, \\ C \exp\left(\dfrac{|v|^2}{4} t + \dfrac{1}{2}(v, Rx) \right) & c = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

但し $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, $v, w \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathrm{O}(n)$, $C > 0$.

この Leutwiler の結果は, $\mathbb{R}^{1+n}$ から $\mathbb{R}^{1+n}$ という次元が等しい場合だが, 次元が等しくない場合はどうなるか？ 一般に caloric morphism を次のように定義する.

定義 1. $f(t,x) : D \subset \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}^{1+n}$ を C^2-写像, $\varphi > 0$ を D 上の C^2-関数とする.
組 (f, φ) が **caloric morphism** であるとは, f と φ が次の条件を満たすことをいう.
(1) $f(D)$ は $\mathbb{R}^{1+n}$ 内の領域である.
(2) $\mathbb{R}^{1+n}$ の開集合 E で定義された任意の caloric function u に対して, 関数 $\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ は $f^{-1}(E)$ 上の caloric function.

例 3 ($\mathbb{R}^4$ の軸対称化)**.** $m = 4$, $n = 2$, $x = (x_1, \ldots, x_4)$ に対し, $x' = (x_1, x_2, x_3, 0)$ とし

$$f(t,x) = \Big(-\frac{1}{t}, \frac{|x'|}{t}, \frac{x_4}{t} \Big), \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{|x'||t|^{\frac{m-2}{2}}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t} \Big)$$

とすると, (f, φ) は $D = \{(t,x); t > 0, |x'| > 0\} \subset \mathbb{R}^{1+4}$ から $\mathbb{R}^{1+2}$ への caloric morphism で, $f(D) = \{(\tau, y); \tau < 0, y_1 > 0\}$.

2. Caloric morphism の特徴付け

定理 1 (Caloric morphism の特徴付け)**.** $f=(f_0,f_1,\dots,f_n):D\subset\mathbb{R}^{1+m}\to\mathbb{R}^{1+n}$ を C^2-写像, $f(D)$ は領域, $\varphi>0$ を D 上の C^2-関数とすると, 以下は同値である

(i) (f,φ) は caloric morphism.

(ii) 4 次以下の任意の caloric な多項式 P に対して, $\varphi\cdot(P\circ f)$ は D 上で caloric.

(iii) f と φ は次の各式を満たす :

$$H\varphi=0, \tag{E-1}$$
$$\varphi Hf_i=2(\mathrm{grad}_x\varphi,\mathrm{grad}_x f_i)\quad(1\le i\le n), \tag{E-2}$$
$$\mathrm{grad}_x f_0=0, \tag{E-3}$$
$$(\mathrm{grad}_x f_i(t,x),\mathrm{grad}_x f_j(t,x))=\delta_{ij}f_0'(t)\quad(1\le i,j\le n). \tag{E-4}$$

(iv) D 上の連続関数 $\lambda(t)\ge 0$ が存在して, 任意の $u\in C^2(f(D))$ に対し次が成り立つ :

$$H\bigl(\varphi\cdot(u\circ f)\bigr)(t,x)=\lambda(t)\varphi(t,x)\bigl((Hu)\circ f\bigr)(t,x).$$

注意 1. (1) (E-3) から, f_0 は t のみの関数 (x によらない). $f_0(t)$ は「時間」同士の変換なので時間変換と呼ぶことにする.

(2) (E-4) から, $|\mathrm{grad}_x f_i|$ も x によらない, $|\mathrm{grad}_x f_i|^2=f_0'(t)$.

(3) $f_0'=|\mathrm{grad}_x f_i|^2>0$ なので f は時間の向きを保つ.

(4) (E-4) から, 各 $\mathrm{grad}_x f_1,\dots,\mathrm{grad}_x f_n\in\mathbb{R}^m$ は互いに直交して長さが等しい.

Corollary 1. $n>m$ *のときは*, caloric morphism *は存在しない.*

3. 新しい caloric morphism の構成

(合成) $m,n,k\in\mathbb{N}$, $D\subset\mathbb{R}^{1+m}$, $E\subset\mathbb{R}^{1+n}$ 領域, $(g,\psi):D\to\mathbb{R}^{1+n}$, $(f,\varphi):E\to\mathbb{R}^{1+k}$ は caloric morphisms で $g(D)\subset E$ とすると, 合成 $(f\circ g,\psi\cdot(\varphi\circ g)):D\to\mathbb{R}^{1+k}$ は caloric morphism,

例 4 (x に関する射影との合成)**.** (f,φ) を $D\subset\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}^{1+n}$ の caloric morphism, $h(t,x_1,\dots,x_{m-n})>0$ を $I\times V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-n}$ 上の任意の caloric function とし,

$$g(t,x)=(t,x_1,\dots,x_n),\quad \psi(t,x)=h(t,x_{n+1},\dots,x_m)$$

とすると, (g,ψ) は $I\times\mathbb{R}^n\times V\subset\mathbb{R}^{1+m}\to\mathbb{R}^{1+n}$ の caloric morphism で, (f,φ) との合成

$$h(t,x_{n+1},\dots,x_m)\bigl(\varphi\cdot(u\circ f)\bigr)(t,x_1,\dots,x_n)$$

は, $I\times D\times V\subset\mathbb{R}^{1+m}$ から $\mathbb{R}^{1+n}$ への caloric morphism.

次の直積と直和が caloric morphism になることは定理 1 による.

(直積) $I\subset\mathbb{R}$ 開区間, $m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $m_i\ge n_i$, $V_i\subset\mathbb{R}^{m_i}$ $(i=1,2)$ を領域, $(f,\varphi):I\times V_1\to\mathbb{R}^{1+n_1}$, $(g,\psi):I\times V_2\to\mathbb{R}^{1+n_2}$ は時間変換が等しい ($f_0=g_0$) caloric morphism とする. その時, $(t,x,y)\in I\times V_1\times V_2$ に対して F, Φ を次で定義した

$$F(t,x,y)=\bigl(f_0(t),f_1(t,x),\dots,f_{n_1}(t,x),g_1(t,y),\dots,g_{n_2}(t,y)\bigr),$$
$$\Phi(t,x,y)=\varphi(t,x)\psi(t,y),$$

直積 (F,Φ) は $I\times V_1\times V_2\subset\mathbb{R}^{1+m_1+m_2}$ から $\mathbb{R}^{1+n_1+n_2}$ への caloric morphism.

(直和) $I\subset\mathbb{R}$ 開区間, $m_1,m_2,n\in\mathbb{N}$, $m_1,m_2\geq n$, $V_i\subset\mathbb{R}^{m_i}$ $(i=1,2)$ を領域, $(f,\varphi):I\times V_1\to\mathbb{R}^{1+n}$, $(g,\psi):I\times V_2\to\mathbb{R}^{1+n}$ を caloric morphism とする．その時, $(t,x,y)\in I\times V_1\times V_2$ に対して

$$\begin{aligned}&F(t,x,y)=\big(f_0(t)+g_0(t),f_1(t,x)+g_1(t,y),\dots,f_n(t,x)+g_n(t,y)\big),\\&\Phi(t,x,y)=\varphi(t,x)\psi(t,y),\end{aligned}$$

と定義した直和 (F,Φ) は $I\times V_1\times V_2\subset\mathbb{R}^{1+m_1+m_2}$ から $\mathbb{R}^{1+n}$ への caloric morphism.

例 5. $m_1=m_2=n=1$, $I=(0,1)$, $V_1=V_2=\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&f(t,x)=\Big(-\frac{1}{t},\frac{x}{t}\Big), &&\varphi(t,x)=\frac{1}{t^{\frac12}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\\&g(t,x)=\Big(\frac{1}{1-t},\frac{x}{1-t}\Big), &&\psi(t,x)=\frac{1}{(1-t)^{\frac12}}e^{\frac{x^2}{4(1-t)}},\\&F(t,x,y)=\Big(-\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t},\frac{x}{t}+\frac{y}{1-t}\Big), &&\Phi(t,x,y)=\frac{1}{t^{\frac12}(1-t)^{\frac12}}e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{y^2}{4(1-t)}}.\end{aligned}$$

4. Caloric morphism の形の決定：$m>n$ の場合

少し条件を付けると, $m>n$ の場合の caloric morphism の形が決定できる.

$D\subset\mathbb{R}^{1+m}$ から $\mathbb{R}^{1+n}$ への caloric morphism (f,φ) で, 各 t に対して $f_i(t,x)$ $(1\leq i\leq n)$ が x の多項式になっているものを, 一般 Appell 変換と呼ぶことにする.

定理 2. (f,φ) は $D\subset\mathbb{R}^{1+m}$ から $\mathbb{R}^{1+n}$ への一般 Appell 変換で, かつ $f_0(t)$ が実解析的, とする．その時, $k\in\mathbb{N}$ $(k\leq\dfrac{m}{n})$ と $\mathbb{R}^m$ の直交座標 $(x_1,\dots,x_m)$ が存在して,

$$\text{(I)}\ \begin{cases}f_0(t)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j^2}{\beta_j-t}+d_0,\quad f_i(t,x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j(x_{(j-1)n+i}+c_{ij})}{\beta_j-t}+d_i,\ (1\leq i\leq n)\\ \varphi(t,x)=h(t,x_{kn+1},\dots,x_m)\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{|\beta_j-t|^{1/2}}\exp\frac{(x_{(j-1)n+i}+c_j)^2}{4(\beta_j-t)},\end{cases}$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases}f_0(t)=\alpha_1^2t+\displaystyle\sum_{1<j\leqq k}\frac{\alpha_j^2}{\beta_j-t}+d_0,\\ f_i(t,x)=\alpha_1(x_i+c_{i1}t)+\displaystyle\sum_{1<j\leqq k}\frac{\alpha_j(x_{(j-1)n+i}+c_{ij})}{\beta_j-t}+d_i,\ (1\leq i\leq n)\\ \varphi(t,x)=h(t,x_{kn+1},\dots,x_m)\exp\Big[\dfrac{c_{i1}^2}{4}t+\dfrac{c_{i1}}{2}x_i\Big]\displaystyle\prod_{1<j\leqq k}\frac{1}{|\beta_j-t|^{1/2}}\exp\frac{(x_{(j-1)n+i}+c_j)^2}{4(\beta_j-t)},\end{cases}$$

但し $\alpha_j>0$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $\beta_j\neq\beta_k$ $(j\neq k)$, $c_j,c_{ij}\in\mathbb{R}$.

(f,φ) は $\mathbb{R}^{1+n}$ 上の k 個の caloric morphism の直和に，射影を合成して得られる. 特に, $f_0(t)$ として, 一次分数関数の和が現れる.

$$\begin{aligned}&f_0(t)=\frac{\alpha_1^2}{\beta_1-t}+\cdots+\frac{\alpha_k^2}{\beta_k-t}+c,\\&f_0(t)=\alpha_1^2t+\frac{\alpha_2^2}{\beta_2-t}+\cdots+\frac{\alpha_k^2}{\beta_k-t}+c.\end{aligned}\tag{2}$$

5. 一次分数関数の和と一般 Appell 変換の時間変換と Schwarz 微分

一般 Appell 変換の時間変換 f_0 は (2) の形だが, これは k 個の一次分数関数の和

$$f_0(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j t + b_j}{c_j t + d_j}, \quad \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),\ j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

（但し $(c_1, d_1), \ldots, (c_k, d_k)$ は一次独立）にすれば同じ形に表される. 定理 2 により, 一般 Appell 変換の時間変換は, 方向を保つ一次分数関数の和である. 逆に, 方向を保つ任意の一次分数関数は (1) により $\mathbb{R}^{1+n}$ の一般 Appell 変換の時間変換だから, 直和を取ることにより, 方向を保つ一次分数関数の和は全て一般 Appell 変換の時間変換になる. 即ち一般 Appell 変換の時間変換全体と, 方向を保つ一次分数関数の和全体とが一致する.

一方, 定理 2 の証明には, 時間変換 f_0 の導関数列が現れ, 重要な役割を果たす. その導関数列を利用して, (3) の形の f_0 に関する次の微分方程式を得る [15].

$$\begin{cases} s_0 = f_0', \\ p_1 = \dfrac{f_0''}{2f_0'}, \\ s_1 = p_1' - p_1^2, \\ p_j = \dfrac{s_{j-1}'}{2j s_{j-1}} + \dfrac{j-2}{j} p_{j-1}, & (2 \le j \le k), \\ s_j = p_j' - p_j^2 + \dfrac{2j-3}{2j-1} s_{j-1}, & (2 \le j \le k), \\ s_k = 0,\ s_0 > 0, \ldots, s_{k-1} > 0. \end{cases}$$

特に, この方程式には Schwarz 微分 S_{f_0} が現れる. 実際

$$s_1 = \frac{1}{2}\left\{ \frac{f_0'''}{f_0'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_0''}{f_0'}\right)^2 \right\} = \frac{1}{2} S_{f_0}$$

となっている.

6. リーマン多様体への拡張

caloric morphism を多様体へ拡張することを考える. 調和の場合には harmonic morphism の概念があり (但し写像の合成のみで, 関数との積はない), それを参考にする. harmonic morphism は [4], [6] から始まって多くの研究がある.

(M, g) を n 次元（$n \ge 2$）リーマン多様体とする. (M, g) の Laplace-Beltrami operator を Δ_g で表す. u を C^∞-関数, $(x_i)_{i=1}^n$ を局所座標系とすれば

$$\Delta_g u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

ここで (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列. また, 勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}_g u$ および $\mathrm{grad}_g v$ との内積は

$$\mathrm{grad}_g u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad g(\mathrm{grad}_g u, \mathrm{grad}_g v) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

と表される.

リーマン多様体上の熱方程式を考える.

定義 2. 領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ 上の C^∞-関数 $u(t,x)$ が D 上で熱方程式

$$H_g u := \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_g\Big) u = 0$$

を満たす時, D 上で caloric であるといい, H_g を $\mathbb{R} \times M$ 上の熱作用素と呼ぶ.

次に, 熱方程式の解を保つ変換 caloric morphism を定義する.

定義 3. M と N をリーマン多様体, f を 領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞-写像, $\varphi > 0$ を D 上の C^∞-関数とする. 組 (f, φ) が caloric morphism であるとは, f と φ が次の条件を満たすことをいう:

(1) $f(D)$ は $\mathbb{R} \times N$ 内の領域である.

(2) $\mathbb{R} \times N$ の開集合 E で定義された任意の caloric function u に対して, 関数 $\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ は $f^{-1}(E)$ 上の caloric function.

リーマン多様体の間の caloric morphism は, 次の定理で特徴付けられる.

定理 3 (Nishio-S.[8, Theorem 2.1])**.** (M, g) と (N, h) をそれぞれ m 次元と n 次元のリーマン多様体とする. 領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞-写像 f と, D 上の正値 C^∞-関数 φ の組 (f, φ) に対して, 以下の3条件は同値である:

(1) (f, φ) は caloric morphism.

(2) (N, h) の局所座標 $(y_\alpha)_{\alpha=1}^n$ による f の成分表示を $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ とすると, 以下の等式が全ての $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ に対して成立する.

$$H_g \varphi = 0, \tag{e-1}$$

$$H_g f_\alpha = 2g(\mathrm{grad}_g \log \varphi, \mathrm{grad}_g f_\alpha) + \sum_{\beta,\gamma=1}^n g(\mathrm{grad}_g f_\beta, \mathrm{grad}_g f_\gamma)({}^h\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \circ f), \tag{e-2}$$

$$\mathrm{grad}_g f_0 = 0, \tag{e-3}$$

$$g(\mathrm{grad}_g f_\alpha, \mathrm{grad}_g f_\beta) = f_0'(t)(h^{\alpha\beta} \circ f), \tag{e-4}$$

ここで

$${}^h\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} h^{\alpha l}\Big(\frac{\partial h_{\gamma l}}{\partial y_\beta} + \frac{\partial h_{\beta l}}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial y_l}\Big), \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n)$$

は (N, h) の Christoffel 記号である.

(3) D 上の C^∞-関数 $\lambda > 0$ で, $f(D)$ の任意の部分領域上の任意の C^2-関数 u に対して

$$H_g(\varphi \cdot u \circ f)(t,x) = \lambda(t,x)\varphi(t,x)((H_h u) \circ f)(t,x),$$

が成り立つものが存在する.

注意 2. 定理の (e-3) から, f_0 は t のみの関数になる. そこで, 写像 f を

$$f(t,x) = (f_0(t), f^t(x)), \quad f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^t : M \to N.$$

と書き, f_0 を時間変換, f^t を空間写像と呼ぶ. 実は更に $\lambda(x,t) = f_0'(t)$ が成り立って, λ も t のみの関数になる

定義と特徴付け定理から，以下の方法により既知の caloric morphism から新たな caloric morphism を作ることができる．

(合成) M, N, L は半リーマン多様体, D, E をそれぞれ $\mathbb{R}\times M$, $\mathbb{R}\times N$ 内の領域とする．(f,φ) が D から $\mathbb{R}\times N$ への, (h,ψ) が E から $\mathbb{R}\times L$ への caloric morphism で $f(D)\subset E$ を満たせば, **合成**

$$\big(h\circ f,\ \varphi\cdot(\psi\circ f)\big)$$

は D から $\mathbb{R}\times L$ への caloric morphism である．

(直積) I を開区間, D_j $(j=1,2)$ をリーマン多様体 M_j 内の領域とする．(f,φ) は $I\times D_1$ から $\mathbb{R}\times N_1$ への, (h,ψ) は $I\times D_2$ から $\mathbb{R}\times N_2$ への, それぞれ caloric morphism で, $f_0=h_0$ を満たすとする．その時, $f(t,x)=(f_0(t),f^t(x))$, $h(t,y)=(f_0(t),h^t(y))$ とおくと, **直積**

$$\big((f_0(t),f^t(x),h^t(y)),\ \varphi(t,x)\psi(t,y)\big)$$

は $I\times D_1\times D_2$ から $\mathbb{R}\times N_1\times N_2$ への caloric morphism となる．

(等長変換による共役) $\iota : M\to N$ を半リーマン多様体 M から N への等長変換とする．(f,φ) が $\mathbb{R}\times N$ 上の caloric morphism ならば, $f(t,x)=(f_0(t),f^t(x))$ とおくと

$$f^*(t,x)=\big(f_0(t),\ (\iota^{-1}\circ f^t\circ\iota)(x)\big),\quad \varphi^*(t,x)=\varphi(t,\iota(x))$$

の組 (f^*,φ^*) は $\mathbb{R}\times M$ 上の caloric morphism になる．

(時間伸縮による共役) (f,φ) を, 計量 g に関する caloric morphism とする．$p>0$ に対して時間変数 (f,φ) の t を $1/p$ 倍した

$$A_pf(t,x):=(pf_0(t/p),f^{t/p}(x)),\quad A_p\varphi(t,x):=\varphi(t/p,x).$$

の組 $(A_pf,A_p\varphi)$ は, 計量 pg に関する caloric morphism になる．

ここで, 調和写像と caloric morphism との関連について述べる．後述の半リーマン多様体の場合にも, 同じことが言える．(M,g) と (N,h) をリーマン多様体とする．写像 $f:M\to N$ のテンション場 $\tau(f)$ は, 局所座標を使えば次で定義される:

$$\tau^\alpha(f)=\Delta_g f_\alpha+\sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g(\mathrm{grad}_g f_\beta,\mathrm{grad}_g f_\gamma)\cdot({}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ f),\quad \alpha=1,\dots,n.$$

次の方程式の解が調和写像である．

$$\tau(f)=0. \tag{4}$$

テンション場を使うと, (e-2) は次の形に書ける．

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=\tau^\alpha(f)+2g(\mathrm{grad}_g\log\varphi,\mathrm{grad}_g f_\alpha),\quad \alpha=1,\dots,n.$$

そこで新しいベクトル場 $\tau_\varphi(f)$ を次で定義すれば,

$$\tau^\alpha_\varphi(f):=\tau^\alpha(f)+2g(\mathrm{grad}_g\log\varphi,\mathrm{grad}_g f_\alpha),\quad \alpha=1,\dots,n.$$

(e-2) が次の形になる

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\tau_\varphi(f).$$

調和写像の方程式 (4) がエネルギー汎関数

$$E_D(f) = \int_D e(f) d\mu_g,$$

（但し $e(f) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g(\mathrm{grad}_g f_\alpha, \mathrm{grad}_g f_\beta) \cdot (h_{\alpha\beta} \circ f)$, $d\mu_g(x) = \sqrt{|g|}dx$, $D \subset M$:相対コンパクト）の Euler-Lagrange 方程式であったように, 方程式

$$\tau_\varphi(f) = 0$$

は重み付きのエネルギー汎関数

$$E_{D,\varphi}(f) = \int_D e(f)\varphi^2 d\mu_g,$$

の Euler-Lagrange 方程式である.

7. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の回転不変計量

リーマン多様体の例として, ユークリッド空間に回転不変計量を入れたリーマン多様体を考え, その上の caloric morphism について調べる.

$M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とし, g_0 をユークリッド計量, g を M 上の回転不変計量, すなわち, 任意の $R \in \mathrm{O}(n)$ に対して $y = Rx$ とおくと

$$\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(y) dy_k dy_l = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

が成り立つ計量とする.

計量 g が回転不変であることと, $(0,\infty)$ の部分区間上の正値 C^∞-関数 $\rho_0(r)$, $\rho_1(r)$ で

$$g = \rho_0(r)^2\sigma + \rho_1(r)^2(dr)^2$$

（σ は単位超球面の標準計量）を満たすものが存在することとは同値である. さらに, ある関数 $\rho(r)$ があって $g = \rho(r)g_0$ と書ける時, (ここでは) radial metric と呼ぶ.

変数変換 $s(r) = \exp\int_1^r \rho_1(\tau)/\rho_0(\tau)d\tau$ により, 回転不変計量 $g = \rho_0(r)^2\sigma+\rho_1(r)^2(dr)^2$ は radial metric $\dfrac{\rho_0(r(s))^2}{s^2}(s^2\sigma + (ds)^2) = \rho(s)g_0$ と等長であるから, g は始めから radial metric

$$g = \rho(r)g_0$$

であると仮定して良いことになる.

g が回転不変ならば, 明らかに Laplacian Δ_g も回転不変になる. よって任意の $C > 0, t_0 \in \mathbb{R}$ と $R_0 \in \mathrm{O}(n)$ に対して,

$$f(t,x) = (t + t_0, R_0 x), \quad \varphi(t,x) = C$$

とすると (f,φ) は全ての回転不変計量に関する caloric morphism になる. これらを自明な caloric morphism と呼ぶことにする.

以下では $n \geq 3$ と仮定する. 定理7の (e-4)

$$g(\mathrm{grad}_g f_\alpha, \mathrm{grad}_g f_\beta) = f_0'(t)(g^{\alpha\beta} \circ f)$$

により (f, φ) が caloric morphism ならば, 各 t に対して空間写像

$$f^t(x) = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$$

がユークリッド計量に関する等角写像であることがわかる. 等角写像に関する Liouville の定理を適用すると, f^t は相似変換か, 相似変換と反転の合成, すなわち

$$f^t(x) = \nu R(x-a), \qquad \lambda^t(x) = \nu, \tag{5}$$

$$f^t(x) = \nu R\Big(\frac{x-a}{|x-a|^2} + b\Big), \qquad \lambda^t(x) = \frac{\nu}{|x-a|^2}, \tag{6}$$

$(\nu = \nu(t) > 0,\ R = R(t) \in \mathrm{O}(n),\ a = a(t) \in \mathbb{R}^n,\ b = b(t) \in \mathbb{R}^n)$ になることがわかるが, 計量が回転不変であることと, 特徴付け定理から, $f^t(x)$ の形がかなり制限される. f^t だけでなく, 同時に計量 ρ の形もかなり制限され, 次の命題を得る.

定理 4 ([9])**.** $n \geq 3$ とし, $g = \rho(r) g_0$ は $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の radial metric で $\rho' \not\equiv 0$ を満たすとする. (f, φ) が M の領域 D 上の自明でない caloric morphism ならば, $\rho(r)$ と $f(x)$ は以下の (a), (b), (c) いずれかを満たす. 但し $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $\nu(t) > 0$ と $R(t) \in \mathrm{O}(n)$ は C^∞-関数.

$$\rho(\nu(t) r) = \frac{f_0'(t)}{\nu(t)^2} \rho(r), \qquad f^t(x) = \nu(t) R(t) x, \tag{a}$$

$$\rho\Big(\frac{\nu(t)}{r}\Big) = \frac{f_0'(t) r^4}{\nu(t)^2} \rho(r), \qquad f^t(x) = \nu(t) R(t) \frac{x}{|x|^2}, \tag{b}$$

$$\rho(r) = \frac{p}{(r^2+q)^2}, \qquad f^t \text{ は各 } t \text{ で等長変換 } (q \neq 0 \text{ の場合}), \tag{c}$$

3個の場合の内, (a) と (b) の場合は [6] で詳しく調べられている. (c) の場合は, $q > 0$ なら n 次元球面と, $q < 0$ なら n 次元双曲面と, $q = 0$ なら $\mathbb{R}^n$ と等長になる.

8. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ の回転不変計量に関する caloric morphism の決定

以上のことから $n \geq 3$ の場合は, 回転不変計量に関する caloric morphism の形が最終的に次の様に決定される. 簡単のため, (f, φ) は等長変換で写した先での形で与える.

定理 5 ([9])**.** $n \geq 3$ とし, g を $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の回転不変計量とする. (f, φ) が $\mathbb{R} \times M$ 内の領域上の caloric morphism ならば, 以下のいずれかが成り立つ:

(a-1). (Appell 型変換) g は $p r^q g_0$ $(p, q \in \mathbb{R},\ p > 0,\ q \neq -2, 0)$ と等長.

$$f(t,x) = \Big(\frac{at+b}{ct+d}, \frac{R_0 x}{|ct+d|^{2/(q+2)}}\Big), \quad \varphi(t,x) = \frac{C}{|ct+d|^{n/2}} \exp\Big[-\frac{p|x|^{q+2}}{(q+2)^2(t+c^{-1}d)}\Big]$$

$(a, b, c, d, C \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1,\ C > 0,\ R_0 \in \mathrm{O}(n))$ の形.

(b-1). g は $\dfrac{p}{r^2} g_0$ $(p > 0)$ と等長.

$$f(t,x) = (t+b, c e^{at} R_0 x), \quad \varphi(t,x) = C|x|^{ap/2} e^{\frac{1}{4}pa^2 t}$$

または

$$f(t,x)=(t+d,ce^{at}\frac{R_0x}{|x|^2}),\quad \varphi(t,x)=C\frac{1}{|x|^{ap/2}}e^{\frac{1}{4}pa^2t}$$

$(a,c,d,C\in\mathbb{R},\ c,C>0,\ R_0\in\mathrm{O}(n))$ の形.

(c-1). g は pg_0 $(p>0)$ と等長.

$$f(t,x)=\Big(\frac{at+b}{ct+d},\frac{R_0(x+tv+w)}{ct+d}\Big),$$
$$\varphi(t,x)=\begin{cases}\dfrac{C}{|ct+d|^{n/2}}\exp\Big[-\dfrac{p|x+w-c^{-1}dv|^2}{4(t+c^{-1}d)}\Big], & c\neq 0,\\ C\exp\Big[p(\dfrac{|v|^2}{4}t+\dfrac{1}{2}(v,x))\Big], & c=0\end{cases}$$

$(a,b,c,d,C\in\mathbb{R},\ ad-bc=1,\ C>0,\ R_0\in\mathrm{O}(n))$ の形.

(a-2). g は $\rho(r)g_0$ と等長で, ある $\lambda,\nu>0,\ \nu\neq 1$ が存在し $\rho(\nu r)=\lambda\rho(r)$ が成立.

$$f(t,x)=(\lambda\nu^2t+d,\nu R_0x),\quad \varphi(t,x)=C$$

$(C>0,\ d\in\mathbb{R},\ R_0\in\mathrm{O}(n))$ の形.

(b-2). g は $\rho(r)g_0$ と等長で, ある $\lambda,\nu>0$ が存在し $\rho(\frac{\nu}{r})=\lambda r^4\rho(r)$ が成立.

$$f(t,x)=(\lambda\nu^2t+d,\frac{\nu R_0x}{|x|^2}),\quad \varphi(t,x)=C$$

$(C>0,\ d\in\mathbb{R},\ R_0\in\mathrm{O}(n))$ の形.

(c-2). g は n 次元球面 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=r_0^2$ の標準計量と等長.

$$f(t,x)=(t+d,R_0x),\quad \varphi(t,x)=C$$

$(C>0,\ d\in\mathbb{R},\ R_0\in\mathrm{O}(n+1))$ の形.

(c-3). g は n 次元双曲面 $-x_1^2-\cdots-x_n^2+x_{n+1}^2=r_0^2,\ (x_{n+1}>0)$ の標準計量と等長.

$$f(t,x)=(t+d,R_0x),\quad \varphi(t,x)=C$$

$(C>0,\ d\in\mathbb{R},\ R_0\in\mathrm{O}(n,1))$ の形.

自明でない caloric morphism が存在するのは, 上記の場合のみ.

9. 半リーマン多様体への拡張

caloric morphism を半リーマン多様体 (正定値とは限らない非退化計量の多様体) へ拡張する. やはり調和の場合には harmonic morphism の概念 [5] があり, それを参考にする. caloric morphism の性質の, どれが Laplace-Beltrami 作用素の正値性, 言い換えれば計量の正定値性に由来するのかを調べたい.

(M,g) を n 次元 $(n\geq 2)$ 半リーマン多様体とする. (M,g) の Laplace-Beltrami operator を Δ_g で表す. u を C^∞-関数, $(x_i)_{i=1}^n$ を局所座標系とすれば

$$\Delta_g u=\sum_{i,j=1}^n\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sqrt{|\det g|}\,g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),$$

ここで (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列, また, 勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}_g u$ および $\mathrm{grad}_g v$ との内積は

$$\mathrm{grad}_g u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad g(\mathrm{grad}_g u, \mathrm{grad}_g v) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

と表される.

半リーマン多様体上の熱方程式と caloric morphism を考える. 熱作用素, 熱方程式の定義は, リーマン多様体の場合と全く同じ.

定義 4. M と N を半リーマン多様体, f を 領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞-写像, $\varphi > 0$ を D 上の C^∞-関数とする. 組 (f, φ) が caloric morphism であるとは, f と φ が次の条件を満たすことをいう:

(1) $f(D)$ は $\mathbb{R} \times N$ 内の領域である.

(2) $\mathbb{R} \times N$ の開集合 E で定義された任意の caloric function u に対して, 関数 $\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ は $f^{-1}(E)$ 上の caloric function.

定理 6 (Nishio-S.[8, Theorem 2.2])**.** (M,g) を m 次元, (N,h) を n 次元の半リーマン多様体とする. 領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞-写像 f と, D 上の C^∞-関数 $\varphi > 0$ の組 (f, φ) に対して, 以下の3条件は同値である:

(1) (f, φ) は caloric morphism.

(2) (N,h) の局所座標 $(y_\alpha)_{\alpha=1}^n$ による f の成分表示を $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ とすると, 以下の等式が全ての $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$ に対して成立する :

$$H_g \varphi = 0, \tag{e-1}$$

$$H_g f_\alpha = 2g(\mathrm{grad}_g \log\varphi, \mathrm{grad}_g f_\alpha) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g(\mathrm{grad}_g f_\beta, \mathrm{grad}_g f_\gamma)({}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \circ f), \tag{e-2}$$

$$g(\mathrm{grad}_g f_0, \mathrm{grad}_g f_\nu) = 0, \tag{e-3'}$$

$$g(\mathrm{grad}_g f_\alpha, \mathrm{grad}_g f_\beta) = \lambda \cdot (h^{\alpha\beta} \circ f), \tag{e-4'}$$

ここで ${}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は (N,h) の Christoffel 記号で, λ は

$$\lambda = H_g f_0 - 2\, g(\mathrm{grad}_g \log\varphi, \mathrm{grad}_g f_0).$$

(3) D 上の正値 C^∞-関数 λ で, $f(D)$ の任意の部分領域及びその上の任意の C^2-関数 u に対して

$$H_g(\varphi \cdot u \circ f)(t,x) = \lambda(t,x)\varphi(t,x)((H_h u) \circ f)(t,x)$$

が成り立つものが存在する.

注意 3. この定理から, f_0 が t のみの関数になるのは, 定値計量の場合の caloric morphism の特徴であることがわかる. 実際, 計量が非定値かつ, 定義域と値域の次元が異なる場合には, (e-3') から (e-3) は従わず, f_0 が x にも依存する反例がある（例 6）.

次元が等しい半リーマン多様体の間の caloric morphism は, リーマン多様体の場合と同じ形の, 次の定理で特徴付けられる.

定理 7 (Nishio-S.[8, Theorem 2.2])**.** (M,g) と (N,h) を n 次元半リーマン多様体とする．領域 $D \subset \mathbb{R}\times M$ から $\mathbb{R}\times N$ への C^∞-写像 f と, D 上の正値 C^∞-関数 φ の組 (f,φ) に対して, 以下の3条件は同値である:

(1) (f,φ) は caloric morphism.

(2) (N,h) の局所座標 $(y_\alpha)_{\alpha=1}^n$ による f の成分表示を $f=(f_0,f_1,\dots,f_n)$ とすると, 以下の等式が全ての $\alpha,\beta=1,\dots,n$ に対して成立する：

$$H_g\varphi = 0, \tag{e-1}$$

$$H_g f_\alpha = 2g(\mathrm{grad}_g \log\varphi, \mathrm{grad}_g f_\alpha) + \sum_{\beta,\gamma=1}^n g(\mathrm{grad}_g f_\beta, \mathrm{grad}_g f_\gamma)({}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\circ f), \tag{e-2}$$

$$\mathrm{grad}_g f_0 = 0, \tag{e-3}$$

$$g(\mathrm{grad}_g f_\alpha, \mathrm{grad}_g f_\beta) = f_0'(t)(h^{\alpha\beta}\circ f), \tag{e-4}$$

ここで ${}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は (N,h) の Christoffel 記号.

(3) D 上の C^∞-関数 $\lambda>0$ で, $f(D)$ の任意の部分領域上の任意の C^2-関数 u に対して

$$H_g(\varphi\cdot u\circ f)(t,x) = \lambda(t,x)\varphi(t,x)((H_h u)\circ f)(t,x),$$

が成り立つものが存在する.

注意 4. (1) リーマン多様体の時と同じく, (e-3) から f_0 は t のみの関数になり, $\lambda(x,t)=f_0'(t)$ となって, λ も t のみの関数になる.

(2) 定理の (e-4) から, g と h が正定値ならば $f_0'(t)>0$ でなければならない.

(3) 定理の (e-4) から, g の符号数と h の符号数は同じか, 反対でなければならない.
同じ場合は $f_0'(t)>0$, 反対の場合は $f_0'(t)<0$ となる.

半リーマン多様体の場合にもリーマン多様体の時と同じく, 直積, 合成, 等長変換による共役, 時間伸縮による共役, により既知の caloric morphism から新たな caloric morphism を作ることが出来る．半ユークリッド空間の場合には, 直和もできる.

半リーマン多様体の場合は, $(M,-g)$ も半リーマン多様体になる．(M,g) から $(M,-g)$ への caloric morphism は, 時間の向きが反転する.

(時間反転) (f,φ) を, 計量 g に関する caloric morphism とし,

$$\check{f}(t,x) := (-f_0(t), f^t(x))$$

とすると, $(\check{f},\varphi)$ は, 計量 g から $-g$ への caloric morphism になる.

例 6. $M=\mathbb{R}^3$ に計量 $g=(dx_1)^2+(dx_2)^2-(dx_3)^2$ を入れ, $N=\mathbb{R}^1$ はユークリッド空間とする．すると,

$$f(t,x) = (t+x_2+x_3, x_1), \quad \varphi(t,x)=1$$

は (e-1),(e-2),(e-3'),(e-4') を満たす．これは $\lambda(t,x)=1$ だが, Appell 変換と合成すれば, $D=\{t+x_2+x_3>0\}$ から $\mathbb{R}^{1+1}$ への caloric morphism

$$f(t,x) = \Big(-\frac{1}{t+x_2+x_3}, \frac{x_1}{t+x_2+x_3}\Big), \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{(t+x_2+x_3)^{\frac12}} e^{-\frac{x_1^2}{4(t+x_2+x_3)}}$$

で, $\lambda(t,x)=\dfrac{1}{(t+x_2+x_3)^2}$ が t と x の両方に依存する例を得る.

例 **7.** $M=\mathbb{R}^4$ に計量 $g=(dx_1)^2-(dx_2)^2+(dx_3)^2-(dx_4)^2$ を，$N=\mathbb{R}^2$ に計量 $h=(dx_1)^2-(dx_2)^2$ を入れる．すると, $(0,1)\times M$ から $\mathbb{R}\times N$ への caloric morphism

$$f(t,x)=\Big(\frac{1}{t(t-1)},\frac{x_1}{t}+\frac{x_4}{t-1},\frac{x_2}{t}+\frac{x_3}{t-1}\Big),$$
$$\varphi(t,x)=\frac{1}{t(t-1)}\exp\Big[-\frac{x_1^2-x_2^2}{4t}-\frac{x_3^2-x_4^2}{4(t-1)}\Big]$$

は (e-1),(e-2),(e-3'),(e-4') を満たし，$f_0'(t)=\lambda(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{(t-1)^2}$ は $t=\dfrac{1}{2}$ で符号が変わる．

参考文献

[1] P. Appell, *Sur l'équation $\partial^2 z/\partial x^2-\partial z/\partial y$ et la théorie de la chaleur.*, J. Math. Pures Appl., **8**, (1892), 186–216.

[2] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds., Oxford University Press, Oxford, 2003.

[3] H. Bateman, *The conformal transformations of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics.*, Proc. London Math. Soc., **7** (1909) 70 – 89.

[4] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds.*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 107–144.

[5] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between semi-riemannian manifolds.*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **21** (1996), 31–50.

[6] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions.*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), no. 2, 215–229.

[7] H. Leutwiler, *On Appell transformation.*, Potential theory, J. Král, J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý eds., Plenum, New York, 1988, 215–222.

[8] M. Nishio, K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds.*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 111–122.

[9] M. Nishio, K. Shimomura, *Caloric morphisms for rotation invariant metrics.*, Hiroshima Math. J., **40** (2010), 31 – 331.

[10] M. Nishio, N.Suzuki, *Minimal thickness and uniqueness of kernel functions for the heat equation in several variables.*, Osaka J. Math., **31** (1994), 331 – 339.

[11] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry., Academic Press, 1983.

[12] K. Shimomura, *The determination of caloric morphisms on Euclidean domains.*, Nagoya Math J., **158** (2000), 133–166.

[13] K. Shimomura, *Caloric morphisms between different radial metrics on semi-euclidean spaces of same dimension.*, Math. J. Ibaraki Univ., **43** (2011), 13 – 41.

[14] K. Shimomura, *Generalizations of Bateman's transformation for general indefinite metrics.*, Math. J. Ibaraki Univ., **45** (2013), 7 – 13.

[15] K. Shimomura, *Sums of fractional linear functions and time transformations of caloric morphisms on Euclidean spaces.*, preprint.