多変数関数論におけるニュートン多面体とその応用

神本　丈　(九州大学)*

概　　要

この講演では，$\mathbb{C}^n$ 内のなめらかな実超曲面に関して「ニュートン多面体」という概念を導入し，多変数関数論のいくつかの問題に応用する．ニュートン多面体は，特異点論などの分野において，有用な道具として重要な役割を果たしている．さらに，近年，実解析の分野においても，この概念を用いることにより非常に多くの成果が得られている．それに倣って多変数関数論においても，有用な概念となることを期待して，具体的に，D'Angeloの特異型の定量的な決定とベルグマン核の境界挙動に関する問題に関して，ニュートン多面体を用いて解析を行う．そのおかげで，現在までに得られているこれらの問題に関する多くの成果が，統一的に理解され，さらに新しい成果ももたらされる．この2つの研究対象は，特異点論の分野で盛んに研究されてきた，Łojasiewicz指数の決定と振動積分の漸近挙動に関する問題とそれぞれ類似するものであり，ニュートン多面体を用いた解析が自然なアプローチであることがわかる．

1. 序

1900年前後に発見された同時解析接続という現象は，多変数関数論という新しい研究分野において，まず考えるべき問題を明確にした．すなわち，正則領域，それ以上真に大きな領域に解析接続されないような正則関数が存在するような領域，の幾何学的な特徴付けである．この問題に関して，E. E. Leviにより十分条件が与えられたわけであるが，それは擬凸という局所的に表される性質である．境界が滑らかであることを仮定すると，任意の境界点pについて，以下が成り立つとき，その領域は擬凸であるという．

$$L_p(r;w) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) w_j \bar{w}_k \geq 0 \quad \text{if} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_j}(p) w_j = 0. \tag{1.1}$$

ここで，rは領域の定義関数とし，$L_p(r;w)$をレビ形式と呼ぶ．Leviの結果の逆：擬凸領域が正則領域か，といういわゆる「レビ問題」は長い間，多変数関数論の中心的な問題であったが，ご存知のとおり，1950年前後に岡潔らにより肯定的に示された．その後，1960年代に入ると，偏微分方程式論と多変数関数論の深い関係性が見出され，L. HörmanderによるL^{2}理論と，J. J. Kohnによる$\bar{\partial}$-ノイマン問題の研究は，その後多変数関数論の多くの問題と関連して，それ自体が発展して，非常に重要な研究テーマとなった．この講演ではこの方向性の発展の一部分を垣間見ることになる．

後でもう少し詳しく述べるが，$\bar{\partial}$-ノイマン問題に関する多くの問題は，まず強擬凸の場合（レビ形式が正定値の場合）に多くの成果が得られた．それは，ベルグマン核の研究が典型的であるように，境界が局所的に非常にきれいに表示されることに拠る．

本研究は科研費 (課題番号: JP15K04932, JP15H02057.) の助成を受けたものである。
キーワード：ニュートン多面体，D'Angeloのタイプ，ベルグマン核
* 〒819-0395 福岡市西区元岡744　九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: joe@math.kyushu-u.ac.jp

すなわち，よい正則座標をとると局所的に領域が次のように表される：

$$\mathrm{Re}(z_n) + |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 + (\text{剰余項}) < 0. \tag{1.2}$$

1970 年代からレビ形式が退化した場合，すなわち「弱擬凸な場合」についても，強擬凸の場合の結果を拡張するような研究がはじめられた．一般に，擬凸領域は，内側から強擬凸領域で近似されるので，当初は，弱擬凸の場合の研究は，自然な一般化となるような形で研究がすすんでいくであろうと思われていたに違いない．しかしながら，強擬凸の場合の研究からは想像もできないような現象が次々に見出されることになる．たとえば，(1.2) による近似が可能ということであるから，上手に座標をとれば，局所的に擬凸性は凸状に表すことができるだろうと想像される．しかし，そうはならないことが，1973 年に Kohn-Nirenberg [29] により示された．実際に，彼らは，$\mathbb{C}^2$ 内の領域：

$$\mathrm{Re}(z_2) + |z_1|^8 + \frac{15}{7}|z_1|^2\mathrm{Re}(z_1^6) < 0 \tag{1.3}$$

の原点の近くの部分は，どのように双正則写像で写しても，凸状にならないことを示した．この例の他にも様々な面白い現象が見つけられ，擬凸性という性質は想像以上に扱うのが難しく，多くの解析的な問題に，弱擬凸の場合特有の難しさがあることが理解されるようになった．正則領域の幾何学的な理解という視点からみると，弱擬凸という形状を理解することこそが，多変数関数論の重要な課題とも言える．

このようにして，弱擬凸に関する研究は，新たな研究テーマと正式に認識され，1970 年台後半から 1980 年台に特に盛んに研究が行われた．その後もそれらの研究は発展してきたわけであるが，まだ多くの重要な問題が手付かずのままであるにもかかわらず，残念ながら，その時代ほどの勢いが感じられないまま，現在に至っているような気がする．

その理由としては，強擬凸の場合の研究のインパクトが強くて，それにとらわれ，退化している境界の性質を解析する道具を十分に開発してこなかったことがあるのかもしれない．もちろん，そのような道具の必要性は誰もが感じていたので，多くの論文の中で，不変量や領域のクラスなどが次々に導入され，それらを使った仮定の上で成り立つ結果が得られたわけであるが，それらの中には，結果を得るために必要な条件を後で考えたものも多かったような気がする．

私の関係している問題においては，スケーリング・メソッドと呼ばれる方法が適用できるかどうかが，鍵となっていて，それに適用する領域はある種の強い斉次性をもっていなければならない．従って，このような方法では，強擬凸な場合に類似する結論が得られるだけで，弱擬凸の場合に現れる特有の面白さはあまり感じられない．

このような反省？を踏まえて，原点に戻って，解析的な問題を考える以上，一般に領域を局所的にどのような形に表示することが望ましいか，という問題をまず考えたい．この問題は，次のようにも表される．

問題 1 領域の境界を表示するために最も適切な（局所）正則座標系を決定せよ．

強擬凸な場合には，非常に扱いやすい形の局所的な表示 (1.2) があることは先に述べている．もちろん考える問題に依存して，とるべき座標系を変えないといけないこともあるであろうが，できる限り不変な形の応用上便利な座標が存在すれば，とても望ましいことである．この観点から，最近 Zaitsev や Kolář らにより盛んに行われている Normal formの研究は注目すべきである．これらの研究は，強擬凸の場合のChern-Moser理論の一般化を目標としており，深いものであるが，応用面に関してはまだ十分とは言えない．この講演では，もう少し応用に意識を強くした形でこの問題を考えたい．

そこで用いるのが,「ニュートン多面体」という概念である．この概念は，特異点論などで有用な存在であり，すでに解析の問題に関しても様々な応用がある．この講演では，領域の境界である実超曲面に関して，ニュートン多面体というものを定義し, 多変数関数論における2つの問題：「D'Angeloの特異型の定量的な決定」と「ベルグマン核の境界挙動」に応用しながら，とるべき座標について考察する．ニュートン多面体の形状は，座標変換に関して非常に大きく依存してしまうので，具体的な解析の中で，重要となるのは，ニュートン多面体がよい性質をもつような座標を探すことである． 2つの具体的な問題を考えながら，問題1に対して我々が出したひとつの答えが，定義関数が「ニュートン非退化」という性質をもつように座標をとる，ということである.（強擬凸の場合の表示(1.2)は，ニュートン非退化である.）この性質は，二つの問題を考える際に，非常に有効に働く．実際に，その性質は，すでに得られている多くの成果に対して，統一的な理解をもたらしてくれるだけでなく，いくつかの新しい結果ももたらしてくれる．

「ニュートン非退化」はとても自然で有用な性質であるが，残念ながら，どんなに座標変換してもそうならない場合もある．従って，弱擬凸の場合には，一般にどのような座標系が適切かは，その候補すら，まだ得られていない．このことは，逆に，座標系をどうとるべきかという問題そのものが，弱擬凸な場合の本質的に深刻な問題であることを示している．

この講演では，考える領域の境界はすべてC^∞級になめらかと仮定する．この制限は，積極的なものではないが，上で述べてきた説明からある意味必然であることは理解してもらえるであろう．

この講演で考える関数や写像の性質については，すべて局所的なものに関心を持つため，その定義域に注意を払わない．すなわち，その都度言及しないが，それらの「芽」(germs)として考える．たとえば，$F \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$は,「$F$は$\mathbb{C}^n$内の原点における$C^\infty$関数の芽である」という意味である．

以下は，このアブストラクトで用いる記号である．

- $\mathbb{Z}_+ := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- 多重指数に関しては，よく使われているものを採用する．$z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n), \in \mathbb{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して，次を定義する：

$$
\begin{aligned}
&z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},\ \bar{z}^\beta := \bar{z}_1^{\beta_1} \ldots \bar{z}_n^{\beta_n}, \\
&|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad 0! := 1, \\
&D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}, \quad \bar{D}^\beta := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1^{\beta_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\beta_n}}.
\end{aligned}
$$

2. ニュートン多面体

まず,「ニュートン多面体」の概念を説明する．ニュートン多面体の名前は，あの有名な Isaac Newton の特異点解消に関する考察に由来する．彼はこれを使って，2変数関数 $F(X,Y)=0$ の解となる曲線のパラメータ付け（特異点解消）を行った．その後，ご存知のとおり，ニュートン多面体は，代数幾何学や特異点論などで非常に重要な概念となり，多くの応用がなされてきた ([1], [36])．最近では，実解析の分野においてニュートン多面体の応用は目覚ましい発展をもたらしている．特にプリンストンの E. M. Stein スクールの研究はすばらしい．例えば，振動積分の挙動の研究などは，実解析的な道具とニュートン多面体の幾何学が美しく融合していて，それ自体が興味深い存在である．この講演でお話しする研究の成果は，これらの影響をかなり受けていることを言及しておく．

2.1. C^∞ 関数に関するニュートン多面体

まず，$F\in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ の原点におけるテーラー展開：

$$F(z,\bar{z})\sim\sum_{\alpha,\,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}C_{\alpha\beta}z^\alpha\bar{z}^\beta\quad\text{with } C_{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha!\beta!}D^\alpha\bar{D}^\beta F(0,0)\tag{2.1}$$

を考える．単に C^∞ 級という仮定であるので，一般には変数として，z と $\bar{z}$ が混じっている（混合型の）場合を扱う．f の**台**を $S(F)=\{\alpha+\beta\in\mathbb{Z}_+^n : C_{\alpha\beta}\neq 0\}$ のように定義するとき，F の**ニュートン多面体**を次のように定義する．

$$\mathcal{N}_+(F)=\left(\bigcup_{\alpha+\beta\in S(F)}(\alpha+\beta+\mathbb{R}_+^n)\right)\text{ の }\mathbb{R}^n\text{ における凸包.}$$

F の **ニュートン図形** $\mathcal{N}(F)$ は $\mathcal{N}_+(F)$ のコンパクトな面の和集合を表す．$F(0,0)\neq 0$ の場合は自明であるので ($\mathcal{N}_+(F)=\mathbb{R}_+^n$ and $\mathcal{N}(F)=\{0\}$)，この講演では，常に $F(0,0)=0$ であることを仮定しておく．ニュートン多面体が存在する空間の座標は，$(\xi)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ で表すこととする．

$\mathcal{N}_+(F)$ のコンパクトな面 κ に対して，

$$F_\kappa(z,\bar{z})=\sum_{\alpha+\beta\in\kappa}C_{\alpha\beta}z^\alpha\bar{z}^\beta\tag{2.2}$$

を F の κ-**部分多項式**と呼ぶ．n 個の数の組 $\rho(F)=(\rho_1(F),\ldots,\rho_n(F))$ を以下で定める．

$$\rho_j(F)=\min\{\xi_j>0:(0,\ldots,0,\xi_j,0,\ldots,0)\in\mathcal{N}_+(F)\}.\tag{2.3}$$

ただし，$\mathcal{N}_+(F)$ が ξ_j-軸と交わらないときは，$\rho_j(F):=\infty$ と定める．また，$\mathcal{N}_+(F)\neq\emptyset$ のとき，**ニュートン距離**という数を次で定める：

$$d(F):=\min\{\xi>0:(\xi,\ldots,\xi)\in\mathcal{N}_+(F)\}.\tag{2.4}$$

点 $(d(F),\ldots,d(F))$ は $\mathcal{N}_+(F)$ の境界上にあるが，この点を含む最小の面を，$\mathcal{N}_+(F)$ の**主要面**と呼びそれを $\kappa_0(F)$ と書く．主要面の余次元を $m(F)$ と書く．すなわち，

$$m(F):=n-\dim(\kappa_0(F)).\tag{2.5}$$

ニュートン多面体を用いて特徴付けられる次の関数のクラスは，以後よく現れる．

(i) $\mathcal{N}_+(F)=\emptyset$であるとき，$F$ は**平坦**(flat) であるという.

(ii) $\mathcal{N}_+(F)$がどの座標軸と交点をもつとき，F は**利便**(convenient) であるという.

2.2. ニュートン非退化

$F\in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$とする．次のような複素曲線（の芽）の集合を定義する．κ は $\mathcal{N}_+(F)$のひとつのコンパクトな面とする.

$$\begin{aligned}
&\Gamma := \{\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n):\gamma_j\in\mathcal{O}_0(\mathbb{C}),\gamma_j(0)=0 \text{ for } j=1,\ldots,n\}\setminus\{0\},\\
&\Gamma^* := \{\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Gamma:\gamma_j\not\equiv 0 \text{ for } j=1,\ldots,n\},\\
&\widetilde{\Gamma}^* := \{(c_1t^{a_1},\ldots,c_nt^{a_n})\in\Gamma^*:c\in(\mathbb{C}^*)^n,a\in\mathbb{N}^n,t\in\mathbb{C}\},\\
&\widetilde{\Gamma}^*_\kappa := \{(c_1t^{a_1},\ldots,c_nt^{a_n})\in\widetilde{\Gamma}^*:\ \text{面}\,\kappa\,\text{は}\,a\,\text{により定まる}\}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，$c=(c_1,\ldots,c_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$，$a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n$とする．“面$\kappa$は$a$により定まる” とは，$\{\xi\in\mathbb{R}^n:\sum_{j=1}^n a_j\xi_j=l\}\cap\mathcal{N}_+(F)=\kappa$となるような$l\in\mathbb{N}$ が存在することである．もちろん，$\Gamma\supset\Gamma^*\supset\widetilde{\Gamma}^*\supset\widetilde{\Gamma}^*_\kappa$ が成り立つ.

定義 2.1 κ を$\mathcal{N}_+(F)$のコンパクトな面とするとき，Fのκ-部分多項式 F_κ が**ニュートン非退化**であるとは次を満たすことである：

$$F_\kappa\circ\gamma\not\equiv 0 \quad \text{for any } \gamma\in\widetilde{\Gamma}^*_\kappa. \tag{2.7}$$

$\mathcal{N}_+(F)$のすべてのコンパクトな面κに対して，F_κ がニュートン非退化であるとき，F はニュートン非退化であるという.

注意 2.2 上で定義した非退化は，特異点論で有用な条件である，Kouchnirenko [30] により導入された「ニュートン非退化」の類似物である．その非退化の定義を思い出しておこう．原点の近くで定義された正則関数Fが（Kouchnirenkoの意味で）ニュートン非退化であるとは，以下が成り立つことをいう．任意の$\mathcal{N}_+(F)$のコンパクトな面κに対して，

$$\left(\frac{\partial F_\kappa}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial F_\kappa}{\partial z_n}\right)\neq 0 \ \text{ on } \ (\mathbb{C}^*)^n. \tag{2.8}$$

定義 2.1 でのニュートン非退化は，正則関数に関しても適応できるものであるが，その非退化は，Kouchnirenkoによる非退化よりもかなり強い条件である．さらに，ほとんどすべての正則関数は定義 2.1 の意味で非退化ではない．定義 2.1 の非退化は，$z,\bar{z}$ という混合の変数の関数に関して初めて意味をもつものであると考えてよい．例えば，Kohn-Nirenbergの例 (1.3) の中の関数$F(z)=|z|^8+\frac{15}{7}|z|^2\mathrm{Re}(z^6)$は原点以外に零となる集合が存在するが，その集合は複素構造をもつわけではないので，ニュートン非退化である．すなわち，定義2.1の非退化は，零点の存在もある程度許している概念である.

2.3. 実超曲面に関するニュートン多面体

ニュートン多面体の形状は，考える座標系に非常に依存するので，この点に注意して，$\mathbb{C}^n$ 内の実超曲面に関するニュートン多面体を定義しよう.

実超曲面Mとその上の点p，及びpの周りでの正則座標(z)が与えられ，その座標上の実超曲面の定義関数rをひとつとってくる．このとき，組$(M,p;(z))$に関するニュートン多面体を，

$$\mathcal{N}_+(M,p;(z))=\mathcal{N}_+(r) \tag{2.9}$$

と定める．ニュートン多面体の形状は，定義関数の取り方に依らないことは容易にわかるので，上の定義はwell-definedである．$(M, p; (z))$に関するニュートン図形$\mathcal{N}(M, p; (z))$と組 $\rho(M, p; (z)) = (\rho_1(M, p; (z)), \dots, \rho_n(M, p; (z)))$ についても同様に定義される．以下，必要なら，次のように大小関係が成り立つように座標 (z) を取ることにする: $\rho_1(M, p; (z)) \geq \cdots \geq \rho_n(M, p; (z))$.

定義 2.3 点pにおける正則座標(z) (s.t. $p = 0$) が実超曲面Mに関して，**正準** (canonical) であるとは，座標系(z)上で表されたMのひとつの定義関数がニュートン非退化となることである．

上の定義における注意として，正準座標系の上では，すべてのMの定義関数がニュートン非退化となることが示される．正準座標系をもつような超曲面の簡単な例として，$\mathbb{C}^2$内のすべての平坦でない超曲面がある．また，序で述べた表示(1.2)はニュートン非退化であるから，強擬凸領域の境界は必ず正準座標をもつ．さらに次の節で，正準座標系が存在するような超曲面を具体的に調べる．残念ながら，この座標系をもたないような超曲面もたくさん存在する．例えば，次の定義関数で表される実超曲面は原点において正準座標系を持たない．

$$\begin{aligned} r_1(z, \bar{z}) &= 2\mathrm{Re}(z_3) + |z_1^3 - z_2^2|^2, \\ r_2(z, \bar{z}) &= 2\mathrm{Re}(z_3) + |z_1|^2|z_2|^2|z_1 - z_2|^2 + |z_1|^{10} + |z_2|^{10}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

以上，この講演の内容を理解してもらうための，必要最小限のニュートン多面体に関連する概念などを，大雑把に説明したが，実際には非常に繊細に扱わないといけない事柄が多い．このあたりのことは，[22]を参照のこと．

3. D'Angeloの特異型 (singular type)

3.1. 背景と考える問題

$\bar{\partial}$-ノイマン問題に関するある重要な局所的なレギュラリティーに関する問題は,「劣楕円評価」(subelliptic estimate) と呼ばれる，不等式の成立により決まることが知られている．まず，1960年代に，J. J. Kohnにより（有界）強擬凸領域に関してその評価が成立することが示された．弱擬凸領域の場合においては，一般にその評価は常に成立するわけではない．そこで，劣楕円評価が成立する領域の幾何学的な性質を調べることが大きな問題となった．Kohn自身により2次元の場合には,「型」(type)という境界の不変量が導入され，それが有限であるときに，劣楕円評価が成立することが示された．一般次元の場合にも，その型は自然に一般化されるが，それは求める条件ではないことが解る．その後，様々な不変量が導入されその方向で研究がすすんだわけであるが，最終的に，Kohnの弟子である，J. P. D'Angelo [6], [7] の定義した特異型という型が，求める不変量となることが示されることになる．実際に，D. Catlin（彼もKohnの弟子）は，特異型が有限であることが，劣楕円評価が成立するための必要十分条件であることを示した([4], [5])．

まず，D'Angeloの定義した特異型の定義を述べる．Mは$\mathbb{C}^n$内の滑らかな実超曲面$\mathbb{C}^n$とし，点pはM上にあるとする．rをMの点pにおける（局所）定義関数$(\nabla r \neq 0$

when $r=0$ near p) とする．M の 点 p における**特異型** (singular type) は

$$\Delta_1(M,p) := \sup_{\gamma\in\Gamma} \frac{\mathrm{ord}(r\circ\gamma)}{\mathrm{ord}(\gamma-p)} \tag{3.1}$$

で定義される．ただし，Γ は (2.6) にある複素曲線の集合である（ただし，$0=p$）．原点の近くで定義された C^∞ 関数 h について，$\mathrm{ord}(h)$ は h の原点における消滅度を表す．また，h が写像の場合 $h=(h_1,\ldots,h_n)$ には，$\mathrm{ord}(h) := \min\{\mathrm{ord}(h_j) : j=1,\ldots,n\}$ と定める．$\Delta_1(M,p)<\infty$ となるとき，$p\in M$ は**有限型**であるという．

特異型が，$\bar\partial$-ノイマン問題において本質的に重要な不変量であることは，すでに説明しているが，そこで次の問題を考えることはいろいろな意味で重要である．

問題 2 与えられた実超局面 M とその上の点 p に対して，$\Delta_1(M,p)$ の値を M の解りやすい情報で定量的に表せ．特に，点 p が有限型であることの判別条件を与えよ．

D'Angelo の定義の優れた点は，特異な複素曲線まで考えて上限をとっているところである．それまでに定義された様々な「型」に関しては，ある意味で非特異な複素曲線のみを考えていたために，本質的な意味での「有限性」が得られなかった．そこで，当然起こる疑問として，特異型と，上の定義の曲線の集合を非特異な複素曲線に制限してできる型とどのくらい違うのかということである．この問題を考えることは，有限型をいう概念を深く理解するために有用であろう．この辺りを正確に説明する．

M の p における**非特異型** (regular type) は，

$$\Delta_1^{\mathrm{reg}}(M,p) := \sup_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{reg}}} \{\mathrm{ord}(r\circ\gamma)\}, \tag{3.2}$$

で与えられる．ただし，

$$\Gamma_{\mathrm{reg}} := \{\gamma\in\Gamma : \mathrm{ord}(\gamma)=1\}.$$

次の問題を考えるよう．

問題 3 次の等式が成立するための実超曲面 M に関する条件を調べよ．

$$\Delta_1(M,p) = \Delta_1^{\mathrm{reg}}(M,p). \tag{3.3}$$

この問題は，特異型が非特異な複素曲線だけで考えるときと同じになる場合を探そう，というわけであるから，ある意味で，退化が単純な形をしている場合を探すということになる．実際に，この問題に対しては，すでに D'Angelo が本 [7] の中である程度調べており，例えば，2 次元の場合には，その等号が成立することが示されている．すなわち，2 次元の場合の有限型の定義は，(3.2) を使えば十分である．また，先の述べた Kohn の定義した型も特異型と同じになる．その後，さらに一般に，以下の領域の境界の場合に，等式 (3.3) が成り立つことが示された．

(i) 凸領域　(McNeal [32] 1992 年, Boas-Straube [2] 1992 年);

(ii) ラインハルト擬凸領域　(Fu-Isaev-Krantz [14] 1996 年);

(iii) $\Delta_1^{\mathrm{reg}}(M,p)=4$ となるような擬凸領域　(McNeal-Mernik[33] 2018 年, D'Angelo[8] 2018 年).

上で述べた結果は，様々な方法で示されている．そのこと自体もとても興味深いことではあるが，逆に等式が成立するために必要な共通する性質が解かりにくい．

3.2. ニュートン多面体の応用

そこでニュートン多面体を用いると，等式 (3.3) に関して容易に同値な条件がわかる．

定理 3.1 ([22]) 次の二つの条件は同値である．

(i) $\Delta_1(M,p) = \Delta_1^{\rm reg}(M,p)$;

(ii) 次を満たすような p における正則座標系 (z) が存在する：$\Delta_1(M,p) = \rho_1(M,p;(z))$.

上の定理における条件 (ii) は，等式 (3.3) が成立することと大きく違わないし，その欲しい座標系としてどのようなものがふさわしいかが解りにくいため，等式 (3.3) が成り立つときの状況がみえにくい．次の定理は，定義 2.3 にある正準座標系が，その条件を満たすことを示している．

定理 3.2 ([22]) 実超曲面 M に関して点 $p \in M$ において正準座標系 (z) が存在するとき，次が成り立つ．

$$\Delta_1(M,p) = \Delta_1^{\rm reg}(M,p) = \rho_1(M,p;(z)). \tag{3.4}$$

定理 3.2 には擬凸性の仮定は必要ないことを言及しておく．定理 3.2 の証明は，実超曲面と複素曲線の関係を，ニュートン多面体の世界に翻訳するだけでごく自然に得られる．証明を読んで頂くと，非退化の場合には，ニュートン多面体と D'Angelo の特異型の相性がすばらしくよいことがわかる．

定理 3.2 の重要なところは，この正準座標系の存在という十分条件の下では，問題 2 に関しても十分な結果が得られているところである．実際に，M に関するニュートン多面体が正準座標系に関して正確に表示されているとき，ふたつの型の値が容易に解る。すなわち，それらの値は最大の切片 $\rho_1(M,p;(z))$ となる．特に，有限型かどうかは，定義関数が「利便」であるかどうかを調べれば十分である．

ここで，正準座標系が存在しない例 (2.10) について調べておく，定義関数 r_1, r_2 で表される実超曲面をそれぞれ M_1, M_2 とすると，次が成り立つ．

$$\Delta_1(M_1,0) = \infty, \quad \Delta_1^{\rm reg}(M_1,0) = 6; \tag{3.5}$$

$$\Delta_1(M_2,0) = 10, \quad \Delta_1^{\rm reg}(M_2,0) = 10. \tag{3.6}$$

(3.6) により，正準座標系の存在は，等式 (3.3) が成立するための必要条件ではないことがわかる．

さて，正準座標系をもつような，実超曲面は具体的にどのようなものであろうか，また，それを調べる際に，正準座標系を具体的にどのように構成するか，という問題は，別の問題として考えなくてはならない．ニュートン非退化という条件は，少し強すぎるように思われるが，先ほど述べた先行研究の場合には，正準座標系の存在を示す（構成する）ことができる．次の定理は，先行研究の場合を含む形でその存在を示している．

定理 3.3 ([22]) 実超曲面 M とその上の点 p が次の条件のいずれかを満たすとき，M は p において正準座標系をもつ．

(i) M は p においてセミレギュラーである．

(ii) M はラインハルト擬凸領域の境界である (p は任意).

(iii) M は，p において性質 **PS** をもち，$\Delta_1^{\mathrm{reg}}(M,p)=4$ を満たす．

(i) にある「セミレギュラー」という性質は，Diederich-Herbort [11] と Yu [37] により独立に定義されたものである（Yu は h-extendible と呼んでいる）．その定義は，少々複雑であるが，ニュートン多面体の言葉で説明すると明解である．境界点 p がセミレギュラーとは，次が成り立つような p における正準座標系が存在することである．

$$\mathcal{N}_+(M,p;(z))=\left\{\xi\in\mathbb{R}_+^n:\xi_n+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\xi_j}{2m_j}\geq 1\right\}.$$

（特異点論の言葉では，semi-quasihomogeneous と呼ばれる性質である．）この性質をもつ場合は，有限型領域の重要なクラスを含んでいる．例えば，強擬凸，2 次元，凸，decoupled な場合などである．

(ii) にある「性質 **PS**」というものは，擬凸性を含むものであり，ある種の正値性を示すものである．D'Angelo により導入されている．

定理 3.2 の仮定に擬凸性は必要ないことは言及したが，実際に，正準座標系を構成するという作業においては，擬凸性が重要な役割を果たす．先行研究の証明に関して，ニュートン非退化という視点から眺めてみると，自明に見えてくる場合も多い．

3.3. 考察

この講演では，問題 3 に関するニュートン多面体を用いた成果を紹介した．ニュートン非退化という条件そのものが，その問題 3 の十分条件を与えているということであった．先にも述べたように，等式 (3.3) が成り立つという場合は，ある意味単純な退化を持つ場合であるから，結果として，問題 2 に関しても非常に解りやすい結果が得られたことになる．

序で述べた問題 1 の視点から考えた場合，定義 2.3 の正準座標系こそが候補としてふさわしいと思われる．しかし，残念ながらこの座標系は，いつも存在するわけではない．さらに，問題 2 をもっと踏み込んで考えると，ここで説明した結果はある意味，簡単な場合を考えただけであり，本質的に特異曲線を用いて調べなければならない退化を調べることこそが，難しく重要である．すなわち，ニュートン非退化でない場合をどのように考えるかが，今後の重要な課題であり，この場合にどのような座標系をとるべきかは，まだわからない．その問題を考える際にも，ニュートン多面体が有用となることを期待したい．

最後に，D'Angelo の特異型は，特異点論の研究で有名な Łojasiewicz 指数と非常に似ている．そのふたつの本質的な相違点は，Łojasiewicz の場合は，実変数または z の pure な変数で考えていることに対して，D'Angelo の特異型は，変数が $z,\bar{z}$ の混合型になっているところである．D'Angelo の特異型は，「混合型 Łojasiewicz 指数」と呼んで差し支えないかもしれない．Łojasiewicz 指数に関する仕事は [31], [15] などたくさんあるが，それらに見られる結果も，定理 3.2 にあるものと非常に似ている．

4. Bergman核の境界挙動

4.1. 背景と考える問題

S. Bergmanの名前のついた積分核，ベルグマン核の研究は，少なくとも1960年以降の多変数関数論において，常に中心に近いところにあり，この分野の発展がベルグマン核の研究に大きな影響を与え，その逆の関係も成立してきた．すなわちベルグマン核の性質の理解は，多変数関数論という分野の成熟度を示すバロメータのような存在である．ベルグマン核の研究の魅力は，関数論の手法だけを用いて得られるものではなく，様々な数学が非常に面白い形で応用されるところであり，このベルグマン核の研究を通して，様々な数学が多変数関数論という分野に刺激を与えてくれる．「ニュートン多面体」の応用についても，そのひとつの例となってくれることを期待したい．この講演では，境界挙動についてのみ考察することになるが，大沢先生の書かれた本 [34] の Chapter 4 には，ベルグマン核の様々な研究に関する含蓄の深い解説がなされているので，是非ご参照のこと．

領域$\Omega \subset \mathbb{C}^n$上の関数空間：

$$A^2(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f(z)|^2 dV(z) < \infty \right\} \tag{4.1}$$

は$L^2(\Omega)$内で閉部分空間となる．領域Ωの**ベルグマン核**B_Ωは，関数空間$A^2(\Omega)$の再生核として定義される．ベルグマン核は，次のようにも表される．

$$B_\Omega(z,w) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(z)\overline{\varphi_\alpha(w)}. \tag{4.2}$$

ただし，$\{\varphi_\alpha\}$は$A^2(\Omega)$の完全正規直交系である．(4.2) の右辺は$\Omega \times \Omega$上広義一様収束している．ベルグマン核の簡単で重要な例として，領域が超球の場合：$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ がある．この場合は，$A^2(\Omega)$の直交系として単項式がとれ，正規化もその形状から計算可能となり，最終的に次のようなきれいな形に計算できる．

$$B_{\mathbb{B}}(z,w) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1 - \bar{w} \cdot z)^{n+1}}. \tag{4.3}$$

ただし，$\bar{w} \cdot z = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j z_j$．超球の場合は，単に例としてばかりでなく，強擬凸の場合の研究のモデルとして重要な役割を果たす．

ベルグマン核の有用な性質として，ある種の単調性がある．2つの領域Ω_1, Ω_2が$\Omega_1 \subset \Omega_2$をみたしているときに，それらのベルグマン核は$\Omega_1$上の点$z$において$B_{\Omega_2}(z,z) \leq B_{\Omega_1}(z,z)$となる．

この講演では，ベルグマン核を対角線集合に制限し，$B_\Omega(z) := B_\Omega(z,z)$の境界挙動を調べることにする．すなわち，次の問題を考えよう．

問題 4 与えられた領域Ωに対して，ベルグマン核$B_\Omega(z)$の挙動を境界のわかりやすい情報で定量的に表せ．

境界挙動の研究には，その詳しさから次の3つのレベルが考えられる．

(i)　評価 (estimate)
(ii)　漸近極限 (asymptotic limit)
(iii)　漸近展開 (asymptotic expansion)

（上の３つの単語の意味はややあいまいに考える．以下，具体的な結果を述べていく際にその意味を理解して頂けるであろう.）実は，これは「詳細に関する」レベルだけの問題ではないことが最近理解されるようになってきた．すなわち，きれいな形の漸近極限や漸近展開の結果が得られるということ自体が，領域の境界のきれいな構造によるものであるということである．これは，ただ単に詳しい解析を行えばよいということではなく，例えば、漸近展開を計算する意義が明確になるという意味で重要なことである．

以下，領域内の点 z と境界までの距離を $\delta(z)$ で表すこととする．

詳細な結果を紹介する前に，まずベルグマン核の境界での挙動の大まかな評価に関する事実を述べておこう．Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界擬凸領域とするとき，次が成り立つ．

$$\frac{C_1}{\delta(z)^2} \le B_\Omega(z) \le \frac{C_2}{\delta(z)^{n+1}}. \tag{4.4}$$

先に述べた単調性を用いると，右側の不等式は，領域を内側から超球で近似し，表示 (4.3) を用いると得られる．左側の不等式を示すのは，実は難しい (ベルグマン予想と呼ばれた)．実際に，これが示されれば，レビ問題が解けてしまう．大沢-竹腰の L^2 拡張定理 [35] という近代兵器を用いることによりやっと示される不等式である．上の評価は，一般には最良のものであるが，発散の位数が，2 から $n+1$ と幅があり，さらに詳細な境界の情報を与えることにより，詳細な結果が得られる．どのような情報が重要となるかであるが，例えば，大沢-竹腰の L^2 拡張定理をさらに繊細に用いることにより，特異性の強さがレビ形式の正の固有値の数に，ある程度依存していることがわかる．実際に，境界点 p において多重劣調和ピーク関数が存在し，レビ形式の正の固有値の数が k $(< n-1)$ であるとき，次が得られる ([12])．

$$\lim_{z\to p} B_\Omega(z)\cdot\delta(z)^{k+2} = \infty. \tag{4.5}$$

大雑把に言えば，特異性の強さをベキの部分だけでみたときに，2 という基本料金にレビ形式の正の固有値の個数の分だけ上乗せになっていて，それよりもいくらかは強い．実際は，特異性の詳細な様子は，整数のベキだけで表されるわけではなく，境界の曲がり具合によってその様子がドラマティックに変ることを，以下にみるであろう．

4.2. 強擬凸な場合

以下，Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界強擬凸領域とし，p をその境界点とする．

4.2.1. Hörmander の結果

近代的なベルグマン核の研究は，やはり次の Hörmander の結果 [17] から始まったと言えよう．Hörmander は L^2-評価式の応用として，ベルグマン核の特異性が境界の局所的な性質で決まるということを示した．さらに，強擬凸な点の周りで，序で述べたようなきれいな局所座標系 (1.2) を導入することが可能であることを用いて，内と外から超球（と双正則な領域）を用いて正確に近似することにより，次の結果を得た．

$$\lim_{z\to p} B_\Omega(z)\cdot\delta(z)^{n+1} = \frac{n!}{4\pi^n}\cdot(\text{レビ形式の行列式 at } p). \tag{4.6}$$

これは，(4.4) にある右側の評価の精密化になっていて,「漸近極限」のレベルでの完璧な結果である．極限値に，重要な不変量が現れることにも注意したい．この結果は，さらに詳細に「漸近展開」のレベルにまで拡張される．

4.2.2. C. Feffermanの結果

次のC. Fefferman [13] による漸近展開に関する結果は，おそらくベルグマン核の研究の中で最もインパクトの強いものであろう．

$$B_\Omega(z) = \frac{\varphi(z)}{\delta(z)^{n+1}} + \psi(z)\log(1/\delta(z)). \tag{4.7}$$

ここで，φとψは，

$$\varphi(z) \sim \sum_{j=0}^{n} c_j(z)\delta(z)^j, \quad \psi(z) \sim \sum_{j=0}^{n} \tilde{c}_j(z)\delta(z)^j \tag{4.8}$$

といった漸近展開をもつ．ただし，係数$c_j, \tilde{c}_j$は境界の近くでC^∞級であり，境界上$c_0 > 0$が成り立つ．

Feffermanは，この結果を用いてベルグマン計量の解析を行い，「ふたつの有界強擬凸領域が双正則写像で移り合うとき，その写像は境界までC^∞級に拡張される」という大定理を示した．特異性の局所化も強いものが必要となるが，Kohnの$\bar{\partial}$-ノイマン問題に関する結果を用いている．さらに，実解析の技術を駆使して強引に漸近展開を引きずりだしていて，その解析の力強さには誰もが圧倒されるであろう．

漸近展開まで考える重要性を少し述べておこう．上の漸近展開の係数には境界の重要な不変量が現れる．この係数を決定することが試みられることにより，ベルグマン核の解析が様々な数学の分野と深く関わっていることが示され，充実した成果が得られてきた．また，その求めた係数にある不変量が他の分野の研究に有用となることもある．そのような研究の中で解りやすい話としては，有名なRamadanov予想と呼ばれるものがある．ψが境界$\partial\Omega$上，局所的に$\psi = O(\delta^\infty)$となるとき，局所的にΩは超球と双正則同値となるであろう，という予想である．2次元の場合は，R. Grahamにより解決され，3次元以上の場合は，超球に近い場合には成立するという事実が平地氏により示された（3次元の場合は，Curry-Ebenfeltらも示している）．

4.3. 有限型の場合

弱擬凸な場合の研究として，まず有限型の場合に制限して現在までの研究を見てみよう．

以下に述べる弱擬凸な場合の挙動に関する結果には，境界に接することのない錐に制限することが必要となる．その錐をΛと書く．(このように制限すること自体にも議論の余地があるが，この講演では深く考察しない．)

有限型の場合の研究は，2次元の場合には，Catlinにより正確な評価が与えられている．さらに以下の結果は，さらに一般的で漸近極限に関する重要なものである．

4.3.1. Boas-Straube-Yuの結果

Boas-Straube-Yu [3] により得られた漸近極限に関する結果を紹介しよう．Ωは有界擬凸領域で，その境界点pはセミギュラーな点で，正準座標(z)に対して，$\rho_j(\partial\Omega, p; (z)) = 2m_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$とする．このとき，次が成立する．

$$\lim_{z \to p, z \in \Lambda} B_\Omega(z) \cdot \delta(z)^{2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{m_j}} = B_{\Omega_0}(z_0). \tag{4.9}$$

右辺におけるΩ_0は領域Ωから決まるある種のモデルとなる領域で，z_0は領域Ω_0上のある点である．自然数の組 $(1, 2m_{n-1}, \ldots, 2m_1)$ は，Catlinの多重型と呼ばれる重要な

不変量で，これがベルグマン核の特異性の強さを決定しているところが面白い．(4.9) の計算には，領域の斉次性を活かしたスケーリング・メソッドという方法が用いられている．

4.3.2. Herbort の例

上の結果は，非常に強い結果ではあるけれども，多重型の性質から見ると，強擬凸の場合の自然な一般化であるともいえる．次の Herbort による評価に関する結果は，有限型の場合には強擬凸の場合にはない，なにか不思議な世界があるのでは，と思わせる面白いものである．次で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の領域：

$$\mathrm{Re}(z_3) + |z_1|^6 + |z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^6 < 0$$

のベルグマン核について Λ 上，次のように評価される．

$$\frac{C_1}{\delta(z)^3 \log(1/\delta(z))} < B_\Omega(z) < \frac{C_2}{\delta(z)^3 \log(1/\delta(z))}. \tag{4.10}$$

この評価を得るための方法は，内側と外側からベルグマン核の評価可能な領域による近似である．この領域だけにしかないような特徴を絶妙に使っていて，その方法では結果 (4.10) をそれ以上一般化することは難しい．

4.4. ニュートン多面体の応用

以後，私の得たベルグマン核に関する結果を紹介する．

歴史的に，Herbort の例は，セミレギュラーに関する結果よりも，10 年以上も前に発表されたものであるが，セミレギュラーの場合に含まれているわけでもないので，ずっと孤立した存在として知られていた．ニュートン多面体を使った特異性の研究により，Herbort の例における対数項が，非常に自然に理解されることになった．私の研究の段階では，まだ領域に関して強い条件がついているが，とりあえず Herbort の例は含んでいる．

これからしばらく扱う領域はすべて，モデル領域と呼ばれる領域に関するもので，すべての場合に以下に述べる条件を課す．

次の $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の領域を考える．

$$\Omega_F := \{(z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z_{n+1}) + F(z_1, \ldots, z_n) < 0\}. \tag{4.11}$$

ただし，F は $\mathbb{C}^n$ 上の C^∞ 級多重劣調和関数であり，次をみたすとする．

- $F(0) = |\nabla F(0)| = 0;$
- $F(z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_n e^{i\theta_n}) = F(z_1 \ldots, z_n)$ for any $\theta_j \in \mathbb{R}$;
- $F(z) \geq c|z|^\epsilon$ if $|z| > R$ となるような $c, \epsilon, R > 0$ が存在する．

3 番目の条件から，$\dim A^2(\Omega) = \infty$ となる．さらに，2 番目の回転不変の条件から，定理 3.3 (ii) の議論により，F はニュートン非退化であることがわかり，(4.11) で使われている座標系は，正準であることがわかる．このことから，定理 3.2 より，「$0 \in \partial\Omega_F$ が有限型である」ことと，「F が利便である」ことは同値となることに注意しておく．

4.5. $0 \in \partial\Omega_F$ が有限型の場合

領域 Ω_F に関して，原点が有限型の場合については，漸近展開というレベルで詳細な結果が得られる．以下に現れる，$d(F)$, $m(F)$ は，ニュートン多面体から決まる量で，(2.4), (2.5) で定義した．

定理 4.1 ([19]) $0 \in \partial\Omega_F$ が有限型であるとき，錐 Λ 上次が成り立つ．

$$B_{\Omega_F}(z) = \frac{\Phi(z)}{\delta(z)^{2+2/d(F)}(\log(1/\delta(z)))^{m(F)-1}}. \tag{4.12}$$

ここで，$\Phi(z)$ は次のような漸近展開をもつ：

$$\Phi(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_{jk}(z)\delta(z)^{j/m}(\log(1/\delta(z)))^{-k}, \tag{4.13}$$

ただし，m はある自然数で C_{jk} は $\bar{\Lambda}$ 上 C^∞ 級関数．さらに，$\lim_{z\to 0, z\in\Lambda} C_{00}(z) > 0$.

上の結果から，対数項が現れた Herbort の例の特異点の状況が説明できる．この場合は，主要面が座標 $(2,2)$ にあるニュートン多面体の頂点になっている．よって，主要面の次元が 0 であるので $m(F) = 2$ となり，対数項が現れるわけである．さらに，この例も漸近展開のレベルまで詳細に調べられる．

定理 4.1 の証明は，振動積分の解析で Varchenko [38] が行った方法を応用する．ニュートン多面体を用いたトーリック多様体の構成が，漸近展開を計算する上で，非常に有用となる．

定理 4.1 で扱った有限型の特別な場合，セミレギュラーの場合には，漸近展開の形が，強擬凸の場合に非常に類似した形になることがわかる．これは，特別な場合ではあるが，Boas-Straube-Yu [3] の結果を進展させたものである．

定理 4.2 ([19]) $0 \in \partial\Omega_F$ はセミレギュラーとし多重型が $(1, 2m_1, \ldots, 2m_n)$ であるとき，錐 Λ 上次が成り立つ．

$$B_{\Omega_F}(z) = \frac{\Phi(z)}{\delta(z)^{2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}}} + \Psi(z)\log(1/\delta(z)). \tag{4.14}$$

ここで，$\Phi(z)$, $\Psi(z)$ は次のような漸近展開をもつ:

$$\Phi(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j(z)\delta(z)^{j/m}, \quad \Psi(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{C}_j(z)\delta(z)^{j}, \tag{4.15}$$

ただし，m は $\{m_1, \ldots, m_n\}$ の最小公倍数とし，C_j, $\tilde{C}_j$ は $\bar{\Lambda}$ 上 C^∞ 級関数．さらに，$\lim_{z\to 0, z\in\Lambda} C_0(z) > 0$.

上の形の漸近展開は，柱状領域の場合にも成立する ([18], [20]).

定理 4.2 の証明は，トーリック多様体の理論を用いなくても，斉次性を上手に活かすことで，漸近展開を導き出すことが出来る．

せっかく，漸近展開まで考えたので，Ramadanov 予想風の問題を考えてみよう．

「上の (4.12), (4.13) において，対数項が現れないとき，$F(z) - P(z)$ は平坦となるか？ただし，P は斉次性：$P(t^{1/2m_1}z_1, \ldots, t^{1/2m_n}z_n) = tP(z)$ $(t > 0)$ をもつある多項式.」

このような問題を考えるには，漸近展開に対数項が現れる理由を考えなければならない．定理 4.1 の証明からわかることであるが，弱擬凸の場合には，その理由は二つある．ひとつは，ニュートン図形が複数の側面をもっていること，もうひとつは，漸近展開が本質的に長く続いてしまうことである．2 番目の理由は，強擬凸の場合と同じである．実は,「対数項が現れない」ということの意味をもう少し精密に意味づけしないと，この問題は問題として成立しない．いずれにしても，強擬凸の場合の解析を思い出すと，とても簡単な問題とは思われない．

4.6. $0 \in \partial\Omega_F$ が無限型の場合

この場合は，領域の性質を決めている F が「利便」でないことが非常に解析を複雑にしている．実際には，ニュートン多面体の情報に現れない平坦な関数の存在がベルグマン核に影響を与えるからである．

4.6.1. 主要面がコンパクトの場合

次のように有限型でなくても，ある条件の下では，漸近極限の形の結果が得られる．

定理 4.3 $\Omega_F \subset \mathbb{C}^3$ とするとき，F の主要面 $\kappa_0(F)$ がコンパクトな場合に次が成り立つ．

$$\lim_{z \to 0, z \in \Lambda} B_{\Omega_F}(z) \cdot \delta(z)^{2+2/d(F)} (\log(1/\delta(z)))^{m(F)-1} = C(F_{\kappa_0(F)}). \tag{4.16}$$

ただし，$C(F_{\kappa_0(F)})$ は，F の $\kappa_0(F)$-部分多項式 $F_{\kappa_0(F)}$ により決まる正の定数．

注意として上の結果は，その仮定の下では，最も一般的な形に表されている．一般には定理 4.1 にあるような漸近展開まで詳細に結果を強くすることはできない．利便でないという条件から，平坦な関数の存在が (4.13) にある漸近展開のパターンを壊してしまうことがあるからである．さらに，退化が激しくなると，もっと危ないことがおきる．

4.6.2. 主要面がコンパクトでない場合

次の場合のように，平坦な関数が定義関数に本質的に現れてしまう場合を考えてみよう．

定理 4.4 C^3 内の領域 Ω_F について，非常に小さな原点の開近傍 U が存在して，

$$\Omega_F \cap U = \{z \in U : \mathrm{Re}(z_3) + |z_1|^{2m} + \exp(-1/|z_2|^p) < 0\} \tag{4.17}$$

をみたすとき，錐 Λ 上以下が成り立つ．

$$C_1 \frac{(\log(1/\delta(z)))^{1/p}}{\delta(z)^{2+1/m}} \le B_{\Omega_F}(z) \le C_2 \frac{(\log(1/\delta(z)))^{1/p}}{\delta(z)^{2+1/m}}. \tag{4.18}$$

F のニュートン多面体は，$\{\xi \in \mathbb{R}_+^2 : \xi_2 \ge 2m\}$ と単純な形をしており，主要面がコンパクトではないこともわかる．平坦関数は，ニュートン多面体に関する情報を与えないが，強いて考えると，点 $(\infty, 0)$ がそれに対応する．この点が，ある意味でニュートン多面体の外にあることが重要である．

このクラスの領域に関しては，定理 4.3 にある漸近極限に関する結果が得られないことがわかる．定理 4.4 にある評価 (4.18) と，先に述べた Herbort による評価 (4.10) と比べると，とても面白いことがわかる．上の場合は対数項が分母ではなくて分子に表れている．実は，平坦関数を変えれば，いろいろな奇妙な特異性を作り出すことができる．このことから，この場合には，少なくともニュートン多面体の情報からだけでは，漸近極限に関する結果は得られないことがわかる．

4.6.3. 一般的な擬凸の場合とベルグマン核の発散指数

上の結果から，有限型という条件をはずした場合，漸近極限や漸近展開の結果については，必ずしもきれいなものが得られるわけではない．すべての擬凸な場合に関して統一的に結果を表すために，次のような不変量を考える．

$$\begin{aligned} G_+(\Omega;p) &:= \inf\left\{\alpha \geq 0 : \varlimsup_{z\to p, z\in\Lambda} \delta(z)^\alpha B_\Omega(z) < \infty\right\}, \\ G_-(\Omega;p) &:= \sup\left\{\alpha \geq 0 : \varliminf_{z\to p, z\in\Lambda} \delta(z)^\alpha B_\Omega(z) > 0\right\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

もちろん，$G_-(\Omega;p) \leq G_+(\Omega;p)$ はいつも成り立つが，等式が成立するとき，それらを**ベルグマン発散指数**と呼び，$G(\Omega;p)$ で表す．

次は，有限型のような類の仮定をしないでも成立する一般的な結果である．

定理 4.5 $\Omega_F \subset \mathbb{C}^3$ について，$G(\Omega_F;0) = 2/d(F) + 2$ が成り立つ．

以上の考察から，領域 Ω_F に関してではあるが，特異性をできるだけきれいに表すためには，努力や技術の問題ではなくて，領域に関して強い条件を課していかないと，詳細なレベルでの結果を一般的に得ることができない．強擬凸な場合から話を始めたために，詳細な順番に定理を並べてきたが，本来は，次のように順番に強い条件を付け加えていくのが，自然であろう．それぞれの条件が加わる度に，右側の形のように結果が詳細に得られる．さらに，その結果には，ニュートン多面体の情報が反映されていた．

(i) 一般の擬凸の場合 $\longrightarrow$ 評価（またはベルグマン発散指数）

(ii) 主要面がコンパクトな場合 $\longrightarrow$ 漸近極限

(iii) 有限型の場合 $\longrightarrow$ 漸近展開

注意として，境界に実解析性までの強い仮定を加えれば，常に定理4.1にあるような漸近展開の詳細な結果が得られる．

4.7. 考察

ベルグマン核の研究に関しては，まだ考えている領域のクラスが，かなり制限されているので，一般的なことは言えないが，私が考えたクラスのモデル領域の場合には，正準座標系が存在しており，そのことは，陰に陽にベルグマン核の解析をすすめるにあたって非常にプラスに働いている．上にあげた私の結果が,「正準座標系をもつ」という仮定だけで示されれば，すばらしいと思う．たとえば，定理4.5にある等式は，現在までに知られているベルグマン核の境界挙動に関するすべての結果に関して成立しているので，次のことが示されればとても有用となるに違いない．

問題 5 擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ について，境界点 p において正準座標をもつとする.「ニュートン距離」$d(\Omega)$ を自然に定めて，$G(\Omega;p) = 2/d(\Omega) + 2$ とできるか？

上のニュートン距離の定め方は，標準的に座標をとってやれば，(2.4) と同様に定義できる．

ベルグマン核に関しても，境界が「正準座標系」をもたないような領域に関して解析を行うことはとても難しい．現在までに，そのような領域に関するベルグマン核の

研究は，具体的なものすら私が知る限りまだない．ただ，実解析の振動積分の挙動に関する研究では，ニュートン非退化でない場合に関してもかなり研究がすすんでいるので，それらの研究は，ベルグマン核の研究にも有用となるであろう．

また，無限型の場合に関しては，平坦な関数がきれいな理論を作る際の大きな障害になっていることがわかる．平坦な関数をどのように扱うかは，とても難しい問題であるが，面白くもある．これは，弱擬凸の場合の研究において，さけて通れない特有の問題である．振動積分や局所ゼータ関数に関しても，同様な問題があり，それに関する野瀬敏洋氏と私の共同研究によるいくつかの成果を宣伝させて頂く ([23], [24], [25], [26], [27])．今後，ベルグマン核に関しても，同様に調べることは有意義なことであると思われる．

参考文献

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko: *Singularities of differentiable maps I, II*, Birkhäuser, 1985, 1988.

[2] H. P. Boas and E. J. Straube: On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$. J. Geom. Anal. **2** (1992), 95–98.

[3] H. P. Boas, E. J. Straube and and J. Y. Yu: Boundary limits of the Bergman kernel and metric. Michigan Math. J. **42** (1995), 449–461.

[4] D. Catlin: Necessary conditions for subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Ann. of Math. (2) **117** (1983), 147–171.

[5] ———: Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains, Ann. of Math. (2) **126** (1987), 131–191.

[6] J. P. D'Angelo: Real hypersurfaces, orders of contact, and applications. Ann. of Math. (2) **115** (1982), 615–637.

[7] ———: *Several complex variables and the geometry of real hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1993.

[8] ———: A remark on finite type conditions, J. Geom. Anal. **28** (2018), 2602–2608.

[9] B-Y. Chen and S. Fu: The reproducing kernels and the finite type conditions, Illinois J. Math. **56** (2012), 67–83.

[10] B-Y. Chen, J. Kamimoto and T. Ohsawa: Behavior of the Bergman kernel at infinity, Math. Z. **248** (2004), 695–708.

[11] K. Diederich and G. Herbort: Pseudoconvex domains of semiregular type. Contributions to complex analysis and analytic geometry, Aspects Math., **E26**, 127–161, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1994.

[12] ———: An alternative proof of an extension theorem of T. Ohsawa, Michigan Math. J. **46** (1999), 347–360.

[13] C. Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[14] S. Fu, A. Isaev and S. G. Krantz: Finite type conditions on Reinhardt domains, Complex Variables Theory Appl. **31** (1996), 357–363.

[15] T. Fukui: Łojasiewicz type inequalities and Newton diagrams, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1169–1183.

[16] G. Herbort: Logarithmic growth of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^3$ of finite type, Manuscripta Math. **45** (1983), 69–76.

[17] L. Hörmander: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[18] J. Kamimoto: Asymptotic expansion of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex tube domains in $\mathbb{C}^2$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **7** (1998), 51–85.

[19] ———: Newton polyhedra and the Bergman kernel, Math. Z. **246** (2004), 405–440.

[20] ———: The Bergman kernel on tube domains of finite type, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 365–408.

[21] ———: A sufficient condition for equality of regular type and singular type of real hypersurfaces, To appear in Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku.

[22] ———: Newton polyhedra and order of contact on real hypersurfaces, preprint.

[23] J. Kamimoto and T. Nose: Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 5301–5361.

[24] ———: Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Soc. Univ. Tokyo **23** (2016), 425–485.

[25] ———: Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases, Regularity and singularity for partial differential equations with conservation laws, 103–114, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, **B63**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2017.

[26] ———: Non-polar singularities of local zeta functions in some smooth case, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 661–676.

[27] ———: Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases, preprint.

[28] J. J. Kohn: Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, Acta Math. **142** (1979), 79–122.

[29] J. J. Kohn and L. A. Nirenberg: A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function, Math. Ann. **201** (1973), 265–268.

[30] A. G. Kouchnirenko: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. **32** (1976), 1–31.

[31] B. Lichtin: Estimation of Łojasiewicz exponents and Newton polygons, Invent. Math. **64** (1981), 417–429.

[32] J. McNeal: Convex domains of finite type, J. Funct. Anal. **108** (1992), 361–373.

[33] J. McNeal and L. Mernik: Regular versus singular order of contact on pseudoconvex hypersurfaces, J. Geom. Anal. **28** (2018), 2653–2669.

[34] T. Ohsawa: *L^2 approaches in several complex variables. Towards the Oka-Cartan theory with precise bounds*, Second ed., Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2018.

[35] T. Ohsawa and K. Takegoshi: On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. **195** (1987), 197–204.

[36] M. Oka: *Non-degenerate complete intersection singularity.* Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1997.

[37] J. Yu: Peak functions on weakly pseudoconvex domains, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 1271–1295.

[38] A. N. Varchenko: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, Functional Anal. Appl., **10-3** (1976), 175–196.