ダイヤモンドアルファ差分方程式のウラム安定性

鬼塚 政一　(岡山理科大学理学部)*

1. はじめに

本講演では，ダイヤモンドアルファ差分方程式

$$\Diamond_\alpha x(t) - \lambda x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

を考える．ただし，$\alpha \in [0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ かつ

$$\Diamond_\alpha x(t) := \alpha \Delta x(t) + (1-\alpha)\nabla x(t)$$

である．ここで，$\nabla x(t) := x(t) - x(t-1)$ は後退差分，$\Delta x(t) := x(t+1) - x(t)$ は前進差分を意味し，上記の差分 $\Diamond_\alpha x(t)$ を**ダイヤモンドアルファ差分** (diamond-alpha difference) と呼ぶ．特に，$\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ および $\alpha = 1$ のとき，方程式 (1) はそれぞれ，後退差分 (backward difference) 方程式

$$\nabla x(t) - \lambda x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1_b}$$

中心差分 (central difference) 方程式

$$\frac{x(t+1) - x(t-1)}{2} - \lambda x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1_c}$$

前進差分 (forward difference) 方程式

$$\Delta x(t) - \lambda x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1_f}$$

であることに注意する．ダイヤモンドアルファ差分は，2007 年頃から，Sheng [28], Bohner & Duman [7] 等を中心に研究が開始され，近年注目を浴びつつある．微分に対して，逆微分（不定積分）があるように，後退差分 $\nabla x(t)$ や前進差分 $\Delta x(t)$ に対しても逆差分（不定和分）があるが，$\Diamond_\alpha x(t)$ に対しては，逆差分が存在しない難点がある．一方，$\Diamond_\alpha$-差分の優れた点として，微分を差分化した際の近似の有効性が挙げられる．例えば，Rogers Jr. & Sheng [26] は，領域 $\{(x,y) | -a < x < a, -b < y < b\}$ におけるサイン–ゴルドン方程式

$$w_{rr} = w_{xx} + w_{yy} - \phi(x,y)\sin w, \quad r > 0$$

のソリトン解

$$u(x,y) := p\tan^{-1}\left(\exp\left(q - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

に着目し，特に $p = q = \pi$, $x = t$, $y \equiv 0$ の場合の解，すなわち，$u(t) := \pi\tan^{-1}\left(e^{\pi - |t|}\right)$ の導関数 $u'(t)$ とその近似 $\nabla u(t)$, $\Delta u(t)$ および $\Diamond_\alpha u(t)$ との絶対誤差や相対誤差について比較を行った．その結果，$\Diamond_\alpha$-差分による近似が有効であることが判明している．

本研究は科研費 (課題番号:17K14226) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 39B82, 39A06, 65Q10, 34N05.
キーワード：ダイヤモンドアルファ差分, 前進差分, 中心差分, 後退差分, ウラム安定性, 最良ウラム定数.
* 〒700-0005 岡山市北区理大町 1-1
e-mail: onitsuka@xmath.ous.ac.jp
web: http://www.xmath.ous.ac.jp/~onitsuka/

本研究の目的は，ダイヤモンドアルファ差分方程式 (1) に対するウラム安定性を確立することである．2 節では，常微分方程式に対するウラム安定性の定義と先行研究および，差分方程式に対するウラム安定性の定義と先行研究を紹介する．3 節では，ダイヤモンドアルファ差分方程式 (1) に対するウラム安定性の定義と主結果を紹介する．

2. ウラム安定性

ウラム安定性は，1940 年にウィスコンシン大学で開催された数学の未解決問題に関する講話において，水爆の基本機構を創案した人物としても知られる Ulam [30] が提唱した関数方程式における安定性の一種である．彼が提起した問題は,「線形写像の近似の写像の近くに厳密な線形写像が存在するか？」を問うものであった．この問題は，翌年，Hyers [12] によって部分的に解かれることになる．以来，Hyers–Ulam 安定性とも呼ばれ，バナッハ空間上の関数方程式を主として，様々な関数方程式に対して研究がなされてきた ([1, 8, 9, 13] を参照)．

2.1. 微分方程式のウラム安定性

微分方程式の分野においては，1998 年に Alsina & Ger [2] が $x' - x = 0$ に対するウラム安定性を定義したことを皮切りに研究が進展した．ただし，彼らが与えた定義は,「微分方程式の近似解の近くに厳密解が存在するか？」を問うという意味では，関数方程式のそれと類似しているが，単に関数方程式の定義を微分方程式に適用したのではなく，微分方程式に対する新たな安定性の概念を導入したものである．その後，微分方程式のウラム安定性と呼ばれるようになり，近年では，バナッハ空間上の微分方程式や変数係数をもつ微分方程式など，様々な設定の下，線形微分方程式に対するウラム安定性が盛んに研究されている ([10, 11, 14, 22, 23, 29, 31] を参照)．まず，λ を実数係数とする常微分方程式

$$x' - \lambda x = 0 \tag{2}$$

を考え，ウラム安定性の定義を紹介する．

定義 方程式 (2) が開区間 I 上で**ウラム安定性をもつ**とは，次を満たす定数 $K > 0$ が存在するときを言う: $\varepsilon > 0$ を与えられた定数とする．もし，関数 $\phi : I \to \mathbb{R}$ が任意の $t \in I$ に対して，$|\phi'(t) - \lambda\phi(t)| \le \varepsilon$ を満たすならば，方程式 (2) のある解 $x : I \to \mathbb{R}$ が存在し，任意の $t \in I$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \le K\varepsilon$ が成り立つ．

ここで，定数 K は，I 上における方程式 (2) の**ウラム定数**と呼ばれる．Alsina & Ger が与えた結果は以下の通りである．

定理 A (Alsina & Ger [2])**.** 方程式 $x' - x = 0$ は I 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は 3 である．

上記の定義が示すように，厳密解 $x(t)$ と，その近似解 $\phi(t)$ との差の大きさを表すのがウラム定数 K である．例えば，ある現象を数理モデル化する際に生じる実モデル（非摂動系）と数理モデル（摂動系）との誤差を ε とするとき，摂動系の解を近似解 $\phi(t)$，非摂動系の解を厳密解 $x(t)$ として捉えれば，近似解と厳密解に生じる誤差の精度が，高々，方程式系の誤差 ε に比例することを保証するのが，ウラム安定性である．また，このときの比例係数が，ウラム定数 K に対応する．講演者は，方程式 (2) を一般化した物体の表面の温度変化を表す数理モデル（制御系）に対して，ウラム安定性を応用した精度保証の提案を行ってきた ([18] を参照)．また，非摂動系に指数安定性

とウラム安定性を仮定すれば，摂動系の一様終局有界性が得られ，解の振幅の上極限が（最良）ウラム定数を用いて表現されることも確立している ([20] を参照)．応用上，厳密解 $x(t)$ と $\phi(t)$ との差はできるだけ小さい方が良い．ここで次の疑問が生じる．

「ウラム安定であるとき，最小のウラム定数は存在するか？もし存在するのであれば，それは何か？」

様々な関数方程式におけるウラム定数の最小値もしくは下限の研究は，2014 年以降，Popa & Raşa [24, 25] によってなされており，特に，本講演では，ウラム定数の最小値が存在すれば，それを**最良ウラム定数**または単に**最良定数**と呼ぶことにする．近年，方程式 (2) に対して，以下の結果が得られている．

定理 B ([14, 18, 20, 29])**.** 方程式 (2) は I 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/|\lambda|$ である．加えて，もし，$I=\mathbb{R}$ ならば，$1/|\lambda|$ は最良ウラム定数である．

定理 B が示すように，Alsina & Ger が考察した方程式 $x'-x=0$ に対する $\mathbb{R}$ 上の最良ウラム定数は 1 である．また，以下の事実も報告されている．

注意 2.1 ([18])**.** $\lambda=0$ ならば，方程式 (2) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定性をもたない．よって，方程式 (2) が $\mathbb{R}$ 上でウラム安定性をもつための必要十分条件は，$\lambda\neq 0$ である．

2.2. 定数刻み幅をもつ前進差分方程式のウラム安定性

差分方程式におけるウラム安定性の研究は，2005 年に Popa [21] によって開始され，その後，微分方程式のウラム安定性と平行して注目を浴びてきた ([6, 9, 15, 27] を参照)．その背景として，コンピュータサイエンスへの応用の期待が挙げられる．最近では，講演者等を中心に，定数刻み幅 $h>0$ をもつ前進差分方程式

$$\Delta_h x(t)-\lambda x(t)=0,\quad t\in h\mathbb{Z} \tag{3}$$

のウラム安定性に関する研究が進展している ([16, 17, 19] を参照)．ただし，

$$\Delta_h x(t)=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\quad \text{かつ}\quad h\mathbb{Z}=\{hk|\,k\in\mathbb{Z}\}$$

と定め，$\lambda\in\mathbb{R}$ かつ $\lambda\neq -1/h$ を仮定する．$h=1$ のとき，方程式 (3) は，冒頭で紹介した方程式 (1) の $\alpha=1$ の場合，すなわち，方程式 (1_f) と一致することに注意する．また，以下の事実に注意しておく．

注意 2.2. $\lambda=-1/h$ のとき，方程式 (3) の初期値に関する解の一意性が保証されない．

方程式 (3) に対するウラム安定性の定義は以下の通りである．

定義 方程式 (3) が $h\mathbb{Z}$ 上で**ウラム安定性をもつ**とは，次を満たす定数 $K>0$ が存在するときを言う: $\varepsilon>0$ を与えられた定数とする．もし，関数 $\phi: h\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が任意の $t\in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\Delta_h\phi(t)-\lambda\phi(t)|\le\varepsilon$ を満たすならば，方程式 (3) のある解 $x: h\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が存在し，任意の $t\in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t)-x(t)|\le K\varepsilon$ が成り立つ．

ここで，定数 K を，$h\mathbb{Z}$ 上における方程式 (3) の**ウラム定数**と呼ぶ．講演者のこれまでの一連の研究では，ウラム安定性よりも精密な解の挙動について解析してきた．本節では，それらを含め，定数刻み幅 $h>0$ をもつ前進差分方程式 (3) に対するいくつかの結果を紹介する．

定理 2.1 (Onitsuka [16]). $\lambda > -1/h$ かつ $\lambda \neq 0$ とし，$\varepsilon > 0$ を任意定数とする．関数 $\phi : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ がすべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\Delta_h \phi(t) - \lambda\phi(t)| \leq \varepsilon$ を満たすと仮定する．このとき，以下が成立する:

(i) $\lambda > 0$ ならば，$\lim_{t\to\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h}$ が存在し，すべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \leq \varepsilon/\lambda$ を満たす (3) の一意解

$$x(t) := \left\{ \lim_{t\to\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h} \right\} (\lambda h + 1)^{t/h}$$

が存在する;

(ii) $-1/h < \lambda < 0$ ならば，$\lim_{t\to-\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h}$ が存在し，すべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \leq \varepsilon/|\lambda|$ を満たす (3) の一意解

$$x(t) := \left\{ \lim_{t\to-\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h} \right\} (\lambda h + 1)^{t/h}$$

が存在する．

定理 2.2 (Onitsuka [16]). $\lambda < -1/h$ かつ $\lambda \neq -2/h$ とし，$\varepsilon > 0$ を任意定数とする．関数 $\phi : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ がすべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\Delta_h \phi(t) - \lambda\phi(t)| \leq \varepsilon$ を満たすと仮定する．このとき，以下が成立する:

(i) $-2/h < \lambda < -1/h$ ならば，$\lim_{t\to-\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h}$ が存在し，すべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \leq \varepsilon/(\lambda + 2/h)$ を満たす (3) の一意解

$$x(t) := \left\{ \lim_{t\to-\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h} \right\} (\lambda h + 1)^{t/h}$$

が存在する;

(ii) $\lambda < -2/h$ ならば，$\lim_{t\to\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h}$ が存在し，すべての $t \in h\mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \leq \varepsilon/|\lambda + 2/h|$ を満たす (3) の一意解

$$x(t) := \left\{ \lim_{t\to\infty} \phi(t)(\lambda h + 1)^{-t/h} \right\} (\lambda h + 1)^{t/h}$$

が存在する．

注意 2.3. ウラム安定性は，単に $h\mathbb{Z}$ 上で $|\phi(t) - x(t)| \leq K\varepsilon$ を満たす解 $x(t)$ の存在を保証するのみにとどまるが，定理 2.1 および 2.2 は，上記不等式を満たす解 $x(t)$ が具体的に求まり，しかもそれが唯一であることを主張している．

定理 2.1 および 2.2 を用いれば，次の結果が得られる．

系 2.3 ([16]). $\lambda \neq -2/h, -1/h, 0$ とすると，方程式 (3) は $h\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $\lambda > -1/h$ ならば $1/|\lambda|$, $\lambda < -1/h$ ならば $1/|\lambda + 2/h|$ である．

また，以下の事実が分かる．

定理 2.4 ([16]). $\lambda = -2/h$ または $\lambda = 0$ ならば，方程式 (3) は $h\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもたない．

注意 2.4. $\lambda \neq -1/h$ とする．このとき，系 2.3 と定理 2.4 より，方程式 (3) が $h\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもつための必要十分条件は，$\lambda \neq -2/h, 0$ である．

さて，ここで「系 2.3 で登場したウラム定数 $1/|\lambda|$ および $1/|\lambda+2/h|$ は最良ウラム定数か？」という新たな疑問が生じる．この問いに答えるのが次の定理である．

定理 2.5 ([16])**.** $\lambda \neq -2/h, -1/h, 0$ とする．方程式 (3) が $h\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもつとき，以下が成立する:

(i) $\lambda > -1/h$ ならば，任意のウラム定数は $1/|\lambda|$ 以上である;

(ii) $\lambda < -1/h$ ならば，任意のウラム定数は $1/|\lambda+2/h|$ 以上である．

注意 2.5. 系 2.3 と定理 2.5 より，系 2.3 におけるウラム定数 $1/|\lambda|$ および $1/|\lambda+2/h|$ はいずれも λ の各場合の最良ウラム定数である．

刻み幅が十分小さくなるとき，すなわち，$h \to 0$ のとき，方程式 (3) は方程式 (2) になる．この点に注意を払うと，以下の事実が明らかとなる．

注意 2.6. $\lambda > 0$ のとき，方程式 (3) に対する最良ウラム定数は $1/\lambda$ となり，微分方程式 (2) に対する最良ウラム定数と一致する (定理 B を参照)．一方，$\lambda < 0$ のとき，方程式 (3) に対する最良ウラム定数は刻み幅 $h > 0$ の関数

$$U(h) := \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda|} & : 0 < h < -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{|\lambda+2/h|} & : -\dfrac{1}{\lambda} < h \ \text{かつ} \ h \neq -\dfrac{2}{\lambda} \end{cases}$$

として書き表すことができる．刻み幅 $h > 0$ が十分小さければ，微分方程式 (2) に対する最良ウラム定数 $1/|\lambda|$ と一致し，刻み幅 $h > 0$ が大きければ，刻み幅に依存して最良ウラム定数が変化する．後者は，差分方程式特有の性質と言える．

2.3. 後退差分方程式のウラム安定性

ダイヤモンドアルファ差分方程式 (1) を考察する前に，方程式 (1) の $\alpha = 0$ の場合，すなわち，後退差分方程式 (1_b) に対するウラム安定性を議論しておく．

注意 2.7. $\lambda = 1$ のとき，方程式 (1_b) の初期値に関する解の一意性が保証されないため，$\lambda \neq 1$ を仮定する．

先述の定理 2.1 および 2.2 と類似した具体的な一意解を与える定理も導出可能だが，紙面の都合上割愛することにし，得られる系のみを以下に記載する．

系 2.6 (Anderson & Onitsuka [5])**.** $\lambda \neq 0, 1, 2$ とするとき，以下が成立する:

(i) $\lambda < 1$ ならば，方程式 (1_b) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/|\lambda|$ である;

(ii) $\lambda > 1$ ならば，方程式 (1_b) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/|\lambda-2|$ である．

注意 2.8. $\lambda \neq 1$ とする．方程式 (1_b) に対して，定理 2.4 と類似した不安定性定理が得られることから，$\lambda = 0$ または $\lambda = 2$ ならば，方程式 (1_b) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもたないことが分かる．よって，方程式 (1_b) が $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもつための必要十分条件は，$\lambda \neq 0, 2$ である．

注意 2.9. 方程式 (1_b) に対して，定理 2.5 と類似した定理が得られることから，系 2.6 におけるウラム定数はいずれも λ の各場合の最良ウラム定数であることが分かる．

次に，非同次線形後退差分方程式

$$\nabla x(t) - \lambda x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

を考える．ただし，$f(t)$ は $\mathbb{Z}$ 上の実数値関数とする．方程式 (4) に対するウラム安定性の定義は割愛するが，系 2.6 と変数変換を用いて，以下の結果が得られる．

定理 2.7 ([5])**.** $\lambda \neq 0,\ 1,\ 2$ とするとき，以下が成立する:

(i) $\lambda < 1$ ならば，方程式 (4) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/|\lambda|$ である;

(ii) $\lambda > 1$ ならば，方程式 (4) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/|\lambda - 2|$ である．

注意 2.10. 系 2.6 と定理 2.7 の比較より，摂動 $f(t)$ はウラム定数に影響を与えない．

3. 主結果

本節では，一般の $\alpha \in (0,1)$ に対して，方程式 (1) を考える．初めに，ダイヤモンドアルファ差分方程式 (1) に対するウラム安定性の定義を紹介する．

定義 方程式 (1) が $\mathbb{Z}$ 上で**ウラム安定性をもつ**とは，次を満たす定数 $K > 0$ が存在するときを言う: $\varepsilon > 0$ を与えられた定数とする．もし，関数 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ が任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して，$|\Diamond_\alpha \phi(t) - \lambda\phi(t)| \leq \varepsilon$ を満たすならば，方程式 (1) のある解 $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ が存在し，任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して，$|\phi(t) - x(t)| \leq K\varepsilon$ が成り立つ．

ここで，定数 K を，$\mathbb{Z}$ 上における方程式 (1) の**ウラム定数**と呼ぶ．まず，方程式 (1) に対する不安定性定理を紹介する．

定理 3.1 ([5])**.** $\alpha \in [0,1]$ のとき，$\lambda = 0$ または $\lambda = 2(1-2\alpha)$ ならば，方程式 (1) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもたない．

この定理の証明は，$\alpha = 1,\ 0$ のときはそれぞれ定理 2.4 および注意 2.8 より明らかであるため，$\alpha \in (0,1)$ の場合のみを考える．ここで，次を満たす関数 $\phi(t)$ が存在することを示せばよい．$\varepsilon > 0$ を任意定数とする．ある関数 $\phi(t)$ がすべての $t \in \mathbb{Z}$ に対して，$|\Diamond_\alpha \phi(t) - \lambda\phi(t)| \leq \varepsilon$ を満たし，方程式 (1) の任意の解 $x(t)$ に対して，

$$\limsup_{t\to\infty} |\phi(t) - x(t)| = \infty$$

が成り立つ．すなわち，どんな厳密解 $x(t)$ に対してもウラム定数を選べない近似解 $\phi(t)$ の存在を示すことが目標となる．

前節で紹介した系 2.3 および定理 2.7 を駆使することにより，以下の結果が得られたので報告する．

定理 3.2 ([5])**.** $\alpha \in (0,1),\ \lambda \neq 0,\ 2(1-2\alpha)$ とするとき，以下が成立する:

(i) $0 < \lambda < 2(1-2\alpha)$ または $2(1-2\alpha) < \lambda < 0$ ならば，方程式 (1) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/\left(1 - \sqrt{1 - 2\lambda + 4\alpha\lambda + \lambda^2}\right)$ である;

(ii) 「$\lambda > 0$ かつ $\lambda > 2(1-2\alpha)$」または「$\lambda < 0$ かつ $\lambda < 2(1-2\alpha)$」ならば，方程式 (1) は $\mathbb{Z}$ 上でウラム安定性をもち，そのウラム定数は $1/\left(\sqrt{1 - 2\lambda + 4\alpha\lambda + \lambda^2} - 1\right)$ である．

以後，$\alpha \in (0,1)$ とし，定理 3.2 の証明の概略について述べる．方程式 (1) は方程式

$$\alpha x(t+1) + (1-2\alpha-\lambda)x(t) + (\alpha-1)x(t-1) = 0$$

に書き換えられるから，特性方程式 $g(\mu) := \alpha\mu^2 - (\lambda+2\alpha-1)\mu + \alpha - 1 = 0$ の根を用いて，方程式 (1) の一般解を表現可能である．実際，

$$\Lambda_{\pm} := \frac{\lambda+2\alpha-1 \pm \sqrt{(\lambda+2\alpha-1)^2 - 4\alpha(\alpha-1)}}{2\alpha}$$

とおくと，方程式 (1) の一般解は $x(t) = a_1\Lambda_-^t + a_2\Lambda_+^t$ と表される．加えて，$\alpha(\alpha-1) < 0$ から，$\Lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$ かつ $\Lambda_- < 0 < \Lambda_+$ が分かる．本研究では，この一般解を使用することなく，特性方程式 $g(\mu) = 0$ の根 Λ_+, Λ_- の性質に着目し，以下の補題と系 2.3 および定理 2.7 を組み合わせることにより，定理 3.2 の証明を完成させる．定理 3.2 の証明の詳細については，講演中に紹介したい．

補題 3.1 ([5])**.** $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．Λ_+ および Λ_- を特性方程式 $g(\mu) = 0$ の根とするとき，以下が成立する:

(i) $0 < \lambda < 2(1-2\alpha)$ ならば，$\Lambda_+ - 1 > 0$ かつ $1 < (\Lambda_- - 1)/\Lambda_- < 2$ である;

(ii) $\lambda > 0$ かつ $\lambda > 2(1-2\alpha)$ ならば，$\Lambda_+ - 1 > 0$ かつ $(\Lambda_- - 1)/\Lambda_- > 2$ である;

(iii) $\lambda < 0$ かつ $\lambda < 2(1-2\alpha)$ ならば，$-1 < \Lambda_+ - 1 < 0$ かつ $1 < (\Lambda_- - 1)/\Lambda_- < 2$ である;

(iv) $2(1-2\alpha) < \lambda < 0$ ならば，$-1 < \Lambda_+ - 1 < 0$ かつ $(\Lambda_- - 1)/\Lambda_- > 2$ である．

注意 3.1. 本講演で紹介した一連の研究成果は，微分と差分を総括的に扱った関数方程式 (dynamic equations on time scales) に対する結果に拡張可能である ([3, 4] を参照)．

参考文献

[1] R. P. Agarwal, B. Xu and W. Zhang, Stability of functional equations in single variable, *J. Math. Anal. Appl.*, **288** (2003), no. 2, 852–869.

[2] C. Alsina and R. Ger, On some inequalities and stability results related to the exponential function, *J. Inequal. Appl.*, **2** (1998), no. 4, 373–380.

[3] D. R. Anderson and M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear dynamic equations on time scales, *Demonstr. Math.*, **51** (2018), no. 1, 198–210.

[4] D. R. Anderson and M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability for a discrete time scale with two step sizes, *Appl. Math. Comput.*, **344/345** (2019), 128–140.

[5] D. R. Anderson and M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of a discrete diamond–alpha derivative equation, *Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities*, Springer book, to appear.

[6] A. R. Baias, F. Blaga and D. Popa, Best Ulam constant for a linear difference equation, *Carpathian J. Math.*, **35** (2019), no. 1, 13–22.

[7] M. Bohner and O. Duman, Opial-type inequalities for diamond-alpha derivatives and integrals on time scales, *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, **18** (2010), no. 1–2, 229–237.

[8] J. Brzdęk, K. Ciepliński and Z. Leśniak, On Ulam's type stability of the linear equation and related issues, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, **2014** (2014), Art. ID 536791, 14 pp.

[9] J. Brzdęk, D. Popa, I. Raşa and B. Xu, *Ulam stability of operators. Mathematical analysis and its applications*, Academic Press, 2018.

[10] C. Buşe, V. Lupulescu and D. O'Regan, Hyers–Ulam stability for equations with differences and differential equations with time-dependent and periodic coefficients, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, DOI:10.1017/prm.2019.12.

[11] R. Fukutaka and M. Onitsuka, Best constant in Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a periodic coefficient, *J. Math. Anal. Appl.*, **473** (2019), 1432–1446.

[12] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **27** (1941), 222–224.

[13] S.-M. Jung, *Hyers–Ulam–Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis. Springer Optimization and Its Applications*, **48**, Springer, New York, 2011.

[14] T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, A characterization of Hyers–Ulam stability of first order linear differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **286** (2003), 136–146.

[15] M. S. Moslehian and D. Popa, On the stability of the first-order linear recurrence in topological vector spaces, *Nonlinear Anal.*, **73** (2010), no. 9, 2792–2799.

[16] M. Onitsuka, Influence of the stepsize on Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear difference equations, *Int. J. Difference Equ.*, **12** (2017), no. 2, 281–302.

[17] M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of first-order nonhomogeneous linear difference equations with a constant stepsize, *Appl. Math. Comput.*, **330** (2018), 143–151.

[18] M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of first order linear differential equations of Carathéodory type and its application, *Appl. Math. Lett.*, **90** (2019), 61–68.

[19] M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of second-order nonhomogeneous linear difference equations with a constant stepsize, *J. Comput. Anal. Appl.*, **28** (2020), no. 1, 152–165.

[20] M. Onitsuka and T. Shoji, Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient, *Appl. Math. Lett.*, **63** (2017), 102–108.

[21] D. Popa, Hyers–Ulam–Rassias stability of a linear recurrence, *J. Math. Anal. Appl.*, **309** (2005), no. 2, 591–597.

[22] D. Popa and I. Raşa, On the Hyers–Ulam stability of the linear differential equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **381** (2011), no. 2, 530–537.

[23] D. Popa and I. Raşa, Hyers–Ulam stability of the linear differential operator with nonconstant coefficients, *Appl. Math. Comput.*, **219** (2012), no. 4, 1562–1568.

[24] D. Popa and I. Raşa, Best constant in Hyers–Ulam stability of some functional equations, *Carpathian J. Math.*, **30** (2014), no. 3, 383–386.

[25] D. Popa and I. Raşa, Best constant in stability of some positive linear operators, *Aequationes Math.*, **90** (2016), no. 4, 719–726.

[26] J. W. Rogers Jr. and Q. Sheng, Notes on the diamond-α dynamic derivative on time scales, J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), no. 1, 228–241.

[27] Y. Shen and Y. Li, The z-transform method for the Ulam stability of linear difference equations with constant coefficients, *Adv. Difference Equ.*, **2018** (2018), 2018:396, 15 pp.

[28] Q. Sheng, Hybrid approximations via second order combined dynamic derivatives on time scales, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2007** (2007), no. 17, 13 pp.

[29] S.-E. Takahasi, H. Takagi, T. Miura and S. Miyajima, The Hyers–Ulam stability constants of first order linear differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **296** (2004), no. 2, 403–409.

[30] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, **8**, Interscience Publishers, New York-London, 1960.

[31] G. Wang, M. Zhou and L. Sun, Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, *Appl. Math. Lett.*, **21** (2008), no. 10, 1024–1028.