

特別講演

エネルギー交差の上位準位におけるレゾナンスの 準古典分布

渡部 拓也¹ (立命館大学)

1. 問題と結果

本講演は、 2×2 行列値の1次元 Schrödinger 作用素のレゾナンスに関する藤家雪朗 氏 (立命館大学), André MARTINEZ 氏 (ボローニャ大学) との一連の共同研究 [7, 8, 9] に基づくものである. ここでは特に, エネルギー交差の上位準位におけるレゾナンスの準古典分布について考察した [9] に焦点を当てる.

以下, 次の 2×2 行列値の1次元 Schrödinger 作用素 P の固有値問題を考察する.

$$Pu = Eu, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & hW \\ hW^* & P_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

各 $P_j = h^2 D_x^2 + V_j(x)$ ($j = 1, 2$) は, 単独の Schrödinger 作用素で, $W = W(x, hD_x)$ は1階の微分作用素, W^* は W の形式的な共役作用素とする. 但し $D_x = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ とする. また h は正の小さなパラメータで, 準古典パラメータと呼ばれるものである. 一連の研究の目的は, ある固定された実のエネルギー E_0 の近くに存在するレゾナンス (量子共鳴) の準古典極限 ($h \downarrow 0$) における漸近分布を調べることである.

Klein-Martinez-Seiler-Wang [16] によれば, 多原子分子を記述する多体 Schrödinger 方程式において, 原子核と電子の質量比を小さなパラメータとみなす Born-Oppenheimer 近似の下, 電子の2準位エネルギーに着目し Feshbach 簡約化を施すと, 上記の方程式 (1) が導出される. この物理モデルにおいては, 各ポテンシャル V_1, V_2 は電子のエネルギー準位を表し, W はその交差における相互作用を表す. ポテンシャル V_1, V_2 , 正のエネルギー E_0 (図1参照) 及び相互作用 W に対し, 次を仮定する.

(A1) $V_1(x), V_2(x)$ は, 実軸上で実数値をとる滑らかな関数で, ある定数 $\delta_0 > 0$ が存在して, 複素領域 $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} x| < \delta_0 \langle \operatorname{Re} x \rangle\}$ 上に解析的に拡張される. 但し $\langle t \rangle := (1 + |t|^2)^{1/2}$ とする.

(A2) $V_1(x), V_2(x)$ は, 複素領域 $\mathcal{S}$ 内の遠方で極限をもち, 以下の関係式を満たす.

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} x \rightarrow -\infty \\ x \in \mathcal{S}}} V_1(x) > E_0, \quad \lim_{\substack{\operatorname{Re} x \rightarrow -\infty \\ x \in \mathcal{S}}} V_2(x) > E_0, \quad \lim_{\substack{\operatorname{Re} x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathcal{S}}} V_1(x) > E_0, \quad \lim_{\substack{\operatorname{Re} x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathcal{S}}} V_2(x) < E_0.$$

(A3) $a < b < 0 < c$ を満たす実数 a, b, c が存在して, $V_1(x), V_2(x)$ は, 次を満たす.

$$V_1(a) = V_1(c) = V_2(b) = E_0, \quad V_1'(a) < 0, \quad V_1'(c) > 0, \quad V_2'(b) < 0.$$

$$V_1 > E_0 \text{ on } (-\infty, a) \cup (c, +\infty), \quad V_1 < E_0 \text{ on } (a, c),$$

$$V_2 > E_0 \text{ on } (-\infty, b), \quad V_2 < E_0 \text{ on } (b, +\infty).$$

¹email : t-watana@se.ritsumei.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:15K04971, 15K17563, 18K03349, 18K03384) の助成を受けたものである.

(A4) $V_1(x), V_2(x)$ が E_0 以下で交差するのは原点のみ, すなわち

$$\{x \in \mathbb{R}; V_1(x) = V_2(x), V_1(x) \leq E_0, V_2(x) \leq E_0\} = \{0\},$$

であり, $V_1(x), V_2(x)$ は原点で $V_1(0) = V_2(0) = 0, V_1'(0) > 0, V_2'(0) < 0$ を満たす.

この仮定により, 相空間上における $P_j - E_0$ の特性集合 $\Gamma_j := \{\xi^2 + V_j(x) = E_0\}$ ($j = 1, 2$) は, 点 $(0, \pm\sqrt{E_0})$ において横断的に交わる (図2参照).

(A5) W は, $W(x, hD_x) = r_0(x) + ir_1(x)hD_x$ で与えられ, r_0 及び r_1 は $\mathcal{S}$ 上有界な解析関数で, かつ実軸上の実数値関数である. さらに次を満たす.

$$(r_0(0), r_1(0)) \neq (0, 0). \quad (2)$$

条件 (2) は, W が Γ_j の交差点 $(0, \pm\sqrt{E_0})$ において楕円型であることを意味する.

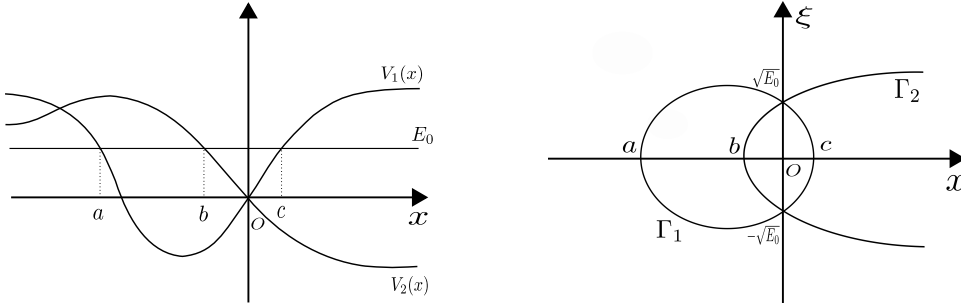


図 1: ポテンシャル $V_1(x), V_2(x)$ 及び E_0 . 図 2: 特性集合 Γ_j と交差点 $(0, \pm\sqrt{E_0})$.

定義 1 $E \in \mathbb{C}$ が P のレゾナンス (量子共鳴) あるとは, スペクトルパラメータを E とする固有値問題 (1) が非自明な外向波解をもつことである. ここで, 関数 $u(x)$ が外向波であるとは, 十分小さな $\theta > 0$ に対し, $u(xe^{i\theta}) \in L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ を満たすことをいう. またレゾナンスの集合を $\text{Res}(P)$ と記す.

注意 1 各レゾナンス自身は θ に依存しない. またレゾナンスの定義については, レゾルベントを複素下半平面へ有理型拡張した際に現れる極として定義するものや, 作用素を複素拡張して定義するものが存在するが, 本稿では外向波解による定義を採用する. それらの同値性については, Helffer-Martinez[12] を参照されたい.

方程式 (1) において, 相互作用 W が $W \equiv 0$ の場合を考えると, $E = E_0$ の近くに, 単独の Schrödinger 作用素 P_1 は, 単井戸型ポテンシャル V_1 の生成する固有値をもち, もう一方の Schrödinger 作用素 P_2 は, 散逸ポテンシャル V_2 の生成する本質的スペクトルをもつ. したがって, 相互作用が存在しない場合, 行列値の Schrödinger 作用素 P は, 埋蔵固有値をもつ. 相互作用 hW が存在する場合, その摂動を受け埋蔵固有値は, その複素近傍 (下半平面) にレゾナンスとして現れると期待される. この現象は, Fermi 黄金律 [23] として知られているように, 物理的にも興味深い. 実際, 固有値が束縛状態にある量子的粒子のエネルギーを表すのに対して, レゾナンスは半束縛状態にある量子的粒子について, 実部がそのエネルギーを表し, 虚部がその生存時間に反比例すると考えられている. こういった物理的背景から, 準古典極限 ($\hbar \downarrow 0$) の下で, レゾナ

ンスの虚部が準古典パラメータ h に関して、どの程度小さいかということが興味の対象となる。

準古典解析の呼称の由来でもある量子力学における Bohr の対応原理とは、“準古典極限下において量子力学的描像が古典力学的描像を復元する”というものであるが、この量子力学の原理は、本研究の問題意識のひとつで、例えば単独の Schrödinger 作用素のレゾナンスの準古典分布の豊富な先行研究 [3, 12, 13] などからも見てとれるように、対応する古典軌道（特性集合）とレゾナンスの虚部には著しい関係ある。特に、行列値の Schrödinger 作用素については、単独の場合と異なり、2つの異なる古典軌道が交わりをもつ場合が起こり得る。そのような場合を扱った先行研究はほとんど知られておらず、本研究は、その問題にアプローチするものである。

エネルギー準位 E_0 の近くの $E \in \mathbb{C}$ に対して、作用積分 $\mathcal{A}(E)$ を次で定義する。

$$\mathcal{A}(E) := \int_{a(E)}^{c(E)} \sqrt{E - V_1(t)} dt.$$

但し、 $a(E)$ は a の近傍に存在する $V_1(x) = E$ の唯一つの根であり、 $c(E)$ も同様に c の近傍に存在する唯一つの根である。先述の仮定の下、 $\mathcal{A}(E)$ は E_0 において E の解析関数であり、 $\mathcal{A}'(E)$ は E_0 の近くで正である。さらに十分小さな $\delta_0 > 0$ 及び任意の大きな $C_0 > 0$ を固定し、複素領域における集合 $\mathcal{D}_h(\delta_0, C_0)$ を次で定める。

$$\mathcal{D}_h(\delta_0, C_0) := [E_0 - \delta_0, E_0 + \delta_0] - i[0, C_0 h].$$

我々の目的は、 h に依存するレゾナンスの漸近分布を、集合 $\mathcal{D}_h(\delta_0, C_0)$ の中に現れるものについて調べることである。先に述べた考察から、 $\mathcal{A}([E_0 - 2\delta_0, E_0 + 2\delta_0])$ に存在する P_1 の固有値（摂動前の P の埋蔵固有値）

$$e_k(h) := \mathcal{A}^{-1} \left((k + \frac{1}{2})\pi h \right), \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

を用いて、 P のレゾナンスの準古典分布を以下のように記述できる。

定理 1 仮定 (A1)-(A5) の下、ある $\delta_0 > 0$ が存在して、任意の $C_0 > 0$ に対して、次の漸近展開を満たす複素数列 $\{E_k(h)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が存在して、十分小さな $h > 0$ に対して、

$$\text{Res}(P) \cap \mathcal{D}_h(\delta_0, C_0) = \{E_k(h); k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathcal{D}_h(\delta_0, C_0)$$

が成り立つ。ここで複素数 $E_k(h)$ は、 $h \downarrow 0$ のとき一様に

$$\text{Re } E_k(h) = e_k(h) + \mathcal{O}(h^2), \quad (4)$$

$$\text{Im } E_k(h) = -C(e_k(h))h^2 + \mathcal{O}(h^{7/3}), \quad (5)$$

を満たす。虚部の主要項の係数は、

$$C(E) = \frac{\pi}{\gamma \mathcal{A}'(E)} \left| r_0(0) E^{-\frac{1}{4}} \sin \left(\frac{\mathcal{B}(E)}{h} + \frac{\pi}{4} \right) + r_1(0) E^{\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{\mathcal{B}(E)}{h} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^2$$

で与えられる。但し $\gamma := V_1'(0) - V_2'(0) > 0$ であり、 $\mathcal{B}(E)$ は次の作用積分である。

$$\mathcal{B}(E) := \int_{b(E)}^0 \sqrt{E - V_2(x)} dx + \int_0^{c(E)} \sqrt{E - V_1(x)} dx.$$

但し、 $b(E)$ は b の近傍に存在する $V_2(x) = E$ の唯一つの根である。

注意 2 作用積分 $\mathcal{A}(E)$ に関する Bohr-Sommerfeld の量子化条件 (3) で定まる $e_k(h)$ が、作用積分 $\mathcal{B}(E)$ によって定まるある離散的な値をとるとき、虚部の係数 $C(e_k(h))$ は消え得る。このことは、量子的粒子の“より強い捕捉”の存在を示唆し、異なる古典軌道によって囲まれる面積が量子化される、すなわち作用積分 $\mathcal{B}(E)$ に関する Bohr-Sommerfeld の量子化条件として捉えることができる。

2. 準古典解析におけるレゾナンスの先行研究

ここでは、準古典解析の数学的背景とともに古典軌道とレゾナンスとの関係について述べ、これに着目して先行研究を紹介する。

一般に、質点の位置を $x \in \mathbb{R}^n$ 、運動量を $\xi \in \mathbb{R}^n$ 、質量を $m = 1/2$ とした力学的エネルギー保存則は、ポテンシャルを $V(x)$ 、全エネルギーを E とすると、 $|\xi|^2 + V(x) = E$ と表せる。左辺を古典ハミルトニアンと呼び、 $p(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$ とかく。それに対して、Schrödinger 作用素 $P = -h^2 \Delta + V$ を量子ハミルトニアンと呼び、それを $P(x, hD_x)$ とかくと、量子ハミルトニアン $P(x, hD_x)$ は、古典ハミルトニアン $p(x, \xi)$ の準古典 Weyl 量子化：

$$P(x, hD_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y) \cdot \xi/h} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \quad (6)$$

であり、力学的エネルギー保存則と Schrödinger 方程式 $(-h^2 \Delta + V)u = Eu$ が対応する。この事実は、先述の Bohr の対応原理の数学的解釈を与えるものであり、量子力学を古典力学と関係付けるものである。この準古典 Weyl 量子化（準古典擬微分作用素）の理論については、教科書 [4, 19, 26] を参照されたい。また、与えられたエネルギー $E \in \mathbb{R}$ に対して、古典ハミルトニアン $p(x, \xi)$ に付随するハミルトンベクトル場

$$H_p := \partial_\xi p \cdot \partial_x - \partial_x p \cdot \partial_\xi = 2\xi \cdot \partial_x - \partial_x V(x) \cdot \partial_\xi$$

の $(x, \xi) \in p^{-1}(E)$ を通る積分曲線 $t \mapsto \exp t H_p(x, \xi)$ を、 E に対応する古典軌道という。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $\exp t H_p(x, \xi)$ が有界であるとき、古典軌道は捕捉的であるといい、非有界のとき、非捕捉的であるという。さらに特異性の伝播から、 E に対応する古典軌道は $P - E$ の特性集合に含まれることも知られている。

Helffer-Sjöstrand による“島の中の井戸”の生成するレゾナンスの準古典分布の研究 [13] から示唆されるように、『“捕捉が強い”ほど、レゾナンスの虚部は準古典パラメータ h に関して小さい』と考えられている。例えば、捕捉軌道と非捕捉軌道が交わりをもたない（“強い捕捉”が存在する）場合、レゾナンスの虚部は指数的に小さいことが知られている。これに対して“弱い捕捉”の例としては、双曲型不動点やホモクリニック軌道が挙げられるが、これらの生成するレゾナンスの準古典分布については、Gérard-Sjöstrand による研究 [10] や近年では Bony-藤家-Ramond-Zerzeri の一連の研究 [3] が詳しい。また捕捉された軌道とレゾナンスの関係については、上記の他にも様々な文脈で研究されており、井川による波動方程式の散乱極の研究 [15] や、田村による磁場付き Schrödinger 作用素のレゾナンスと Aharonov-Bohm 効果の研究 [24]、さらにはカオティックな捕捉軌道について扱った Nonnenmacher-Zworski [22] や Faure-辻井 [5] の研究が挙げられる。

以下、上記の視点に基づいて、 2×2 行列値の Schrödinger 作用素のレゾナンスの先行研究について述べる。捕捉軌道から成る P_1 の特性集合と非捕捉軌道から成る P_2 の特性集合が交わらない場合について扱ったものとして、Martinez [18]、中村 [21]、Baklouti [2]

による研究が挙げられる．この場合，半束縛状態を表すレゾナンスは，トンネル効果として捉えられ，レゾナンスの虚部は指数的に小さく，その減衰は捕捉軌道と非捕捉軌道との Agmon 距離で特徴付けられる．さらに，Grigis-Martinez[11] や 蘆田 [1] は，ポテンシャルが交差する場合について考察し，指数減衰するレゾナンスの虚部の漸近展開を得ている．

一方，我々の一連の研究では， P_1 の特性集合（捕捉軌道）と P_2 の特性集合（非捕捉軌道）が交わりをもつ場合を扱っている．先行研究 [7, 8] では，ポテンシャルの概形は同一で， E_0 がエネルギー交差準位近く，すなわち $E_0 = 0$ とした問題を考察し， $\mathcal{D}_h^0(C_0) := [-C_0 h^{2/3}, C_0 h^{2/3}] - i[0, C_0 h]$ に含まれるレゾナンスの準古典分布を調べている．特性集合が交わりをもつ場合は，もはやトンネル効果による虚部の指数減衰は期待できず，実際， $\mathcal{D}_h^0(C_0)$ に含まれるレゾナンスの虚部は，次の漸近展開を持つ [7]．

$$\operatorname{Im} E_k(h) = -\frac{\pi^2 r_0(0)^2}{2^{2/3} \mathcal{A}'(0)} (\operatorname{Ai}(-2^{2/3} \lambda_k(h)))^2 h^{5/3} + \mathcal{O}(h^2). \quad (7)$$

ここで， Ai は Airy 関数を表し， $\lambda_k(h)$ は $\mathcal{D}_h^0(C_0) \cap \mathbb{R}$ に含まれる P_1 の固有値を表し， $\lambda_k(h) = \mathcal{A}'(0)^{-1} h^{-2/3} ((k+1/2)\pi h - \mathcal{A}(0))$ で与えられる．さらに， $r_0(x) \equiv 0$ の場合，(7) の初項は消えるものの， $r_1(x)$ が実軸上で実数値のとき，次が成り立つ [8]．

$$\operatorname{Im} E_k(h) = -\frac{\pi^2 r_1(0)^2}{2^{4/3} \mathcal{A}'(0)} (\operatorname{Ai}'(-2^{2/3} \lambda_k(h)))^2 h^{7/3} + \mathcal{O}(h^{8/3}). \quad (8)$$

注意 3 レゾナンスの虚部 (7) 及び (8) の主要項において， $\lambda_k(h)$ を形式的に $\lambda_k(h) \rightarrow \infty$ とすることで，エネルギー交差の上位準位のレゾナンスについての主結果 (定理 1) と比較することができる．実際，Airy 関数の負の無限大における漸近公式を用いることで，[7], [8] の結果と本稿の主結果が整合することが確かめられる．また，エネルギー交差の下位準位のレゾナンスについての蘆田の結果 [1] についても，同様の議論を通して，虚部の主要項が互いに一致することが確かめられる．

3. 証明の概略

定理の証明は 2 つの段階に分けられる．第 1 段階では，先行研究 [7] を踏襲して，単独の Schrödinger 作用素 $P_j - E$ の基本解を拵え，それらを用いた逐次近似により，(1) の線形独立な外向波解の組 $w_{1,L}, w_{2,L} \in L^2(\mathbb{R}_-) \oplus L^2(\mathbb{R}_-)$ ， $w_{1,R}, w_{2,R} \in L^2(\mathbb{R}_+ e^{i\theta}) \oplus L^2(\mathbb{R}_+ e^{i\theta})$ をそれぞれ構成することができる．この構成については，基本解の積分核を，単独の Schrödinger 方程式の WKB 解や Yafaev の構成法による解 [25] を用いて表すことで，その大域的な評価が得られることが鍵となる．レゾナンスの量子化条件は，外向波解の組のロンスキアン $\mathcal{W}(E, h)$ を用いて $\mathcal{W}(E, h) = \cos \frac{\mathcal{A}(E)}{h} + \mathcal{O}(h^{1/6}) = 0$ で与えられ，レゾナンス $E_k(h) \in \mathcal{D}_h(\delta_0, C_0)$ の粗い評価 $E_k(h) = e_k(h) + \mathcal{O}(h^{7/6})$ が得られる．先行研究 [7] と異なる点は，交差付近において各 $P_j - E$ の楕円性がともに失われるところであり，これが粗い評価しか得られない要因である．

第 2 段階は，超局所解析的なアプローチである．これは，第 1 段階で存在が保証された外向波解を，相空間上の特性集合に沿って超局所的に接続することにより，精密な評価を得るものである．本稿では，第 2 段階について焦点を当てて述べる．

3.1. 超局所解の接続

超局所解を接続する上で、いくつか準備する．相空間上の点 $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ で、関数 $u \in L^2$ が超局所的に 0 に同値であるとは、ある $\delta > 0$ が存在して、 $h \downarrow 0$ のとき、 (x_0, ξ_0) の近傍で一様に

$$(Tu)(x, \xi; h) := \int e^{i(x-y)\xi/h - (x-y)^2/(2h)} u(y) dy = \mathcal{O}(e^{-\delta/h}),$$

が成り立つことをいい、 $u \sim 0$ とかく．このような点から成る集合の補集合を超局所台と呼ぶ．また、関数 u が領域 $\Omega \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ における $(P - E)u = 0$ の超局所解であるとは、 Ω 上で $(P - E)u$ が超局所的に 0 に同値であることをいう．ここで、 T は FBI 変換と呼ばれるもので、その性質などは、[19], [26] を参照されたい．

単独の Schrödinger 作用素 $P_j - E$ の特性集合 $\Gamma_j = \{(x, \xi); \xi^2 + V_j(x) = E\}$ を、さらに 3 つの変わり点 $(a(E), 0)$, $(b(E), 0)$, $(c(E), 0)$ 及び 2 つの特性集合の交差点 $\rho_\pm := (0, \pm\sqrt{E})$ によって、8 つの部分集合 $\Gamma_{j,S}^\pm$ ($j = 1, 2, S = L, R$) に分割する (図 3 参照)．この 8 つの特性集合上に超局所台をもつ 2 元連立の Schrödinger 方程式 (1) の WKB 解

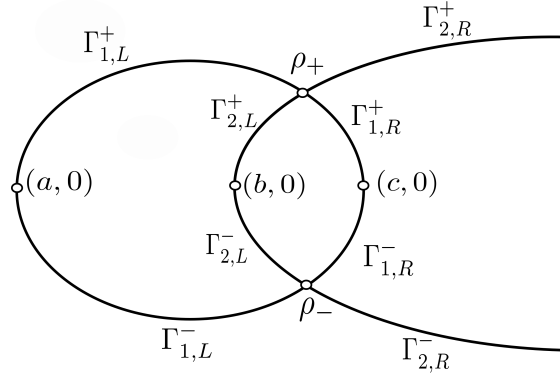


図 3: 変わり点と交差点による特性集合の分割

を次のように定める．

$$f_{1,S}^\pm \sim \begin{pmatrix} a_1^\pm \\ h a_2^\pm \end{pmatrix} e^{\pm i\nu_1(x)/h} \text{ on } \Gamma_{1,S}^\pm(E), \quad f_{2,S}^\pm \sim \begin{pmatrix} h b_1^\pm \\ b_2^\pm \end{pmatrix} e^{\pm i\nu_2(x)/h} \text{ on } \Gamma_{2,S}^\pm(E).$$

但し、相関数 $\nu_j(x)$ は $\nu_j(x) := \int_0^x \sqrt{E - V_j(t)} dt$ であり、ベクトル値の振幅関数は h に関する漸近展開

$$a_j^\pm(x; h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k a_{j,k}^\pm(x), \quad b_j^\pm(x; h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k b_{j,k}^\pm(x)$$

をもつ．これらの超局所的な WKB 解 $f_{j,S}^\pm$ は、分割されたそれぞれの特性集合 $\Gamma_{j,S}^\pm$ 上に超局所台をもつ．さらに、それら主要項は以下で与えられ、その支配的な成分は単独の Schrödinger 方程式の WKB 解の主要項と一致し、変わり点に特異性をもつ．もう一方の成分は変わり点だけでなく特性集合の交差点にも特異性をもつことに注意する．

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= \frac{1}{(E - V_1)^{\frac{1}{4}}}, & a_{2,0} &= \frac{r_0 + ir_1 \sqrt{E - V_1}}{(V_1 - V_2)(E - V_1)^{\frac{1}{4}}}, \\ b_{2,0} &= \frac{1}{(E - V_2)^{\frac{1}{4}}}, & b_{1,0} &= \frac{r_0 - ir_1 \sqrt{E - V_2}}{(V_2 - V_1)(E - V_2)^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

以上の準備の下、超局所的なWKB解を基底として、レゾナンスを実現するSchrödinger方程式の外向波解を特性集合上に沿って接続するというのが証明の第2段階である。以下、 u を外向波解とする。レゾナンスの定義である外向波解の性質から、 u は相空間上の内向波の軌道 $\Gamma_{2,R}^-$ に超局所台をもたない[17]。そこで、まずは $\Gamma_{1,L}^-$ 上で正規化した

$$u \sim \begin{cases} f_{1,L}^- & \text{on } \Gamma_{1,L}^-, \\ 0 & \text{on } \Gamma_{2,R}^-, \end{cases}$$

を、特性集合に沿って接続していく。後に与える命題1により、交差点 ρ_- を越えた特性集合 $\Gamma_{2,L}^-, \Gamma_{1,R}^-$ 上の超局所WKB解 $f_{2,L}^-, f_{1,R}^-$ の係数が決まる。さらにそれぞれは、後に与える命題2により、前者は変わり点 $(b(E), 0)$ 、後者は変わり点 $(c(E), 0)$ を越えた特性集合 $\Gamma_{2,L}^+, \Gamma_{1,R}^+$ 上に台をもつ超局所WKB解 $f_{2,L}^+, f_{1,R}^+$ に接続され、その係数が決まる。先と同様に交差点 ρ_+ の接続を考察すれば、 $\Gamma_{1,L}^+, \Gamma_{2,R}^+$ 上の超局所WKB解 $f_{1,L}^+, f_{2,R}^+$ が決まる。

これら2つの超局所WKB解 $f_{1,L}^+, f_{2,R}^+$ から、それぞれレゾナンスの実部、虚部についての詳しい漸近挙動を得ることができる。まず $f_{1,L}^+$ を $\Gamma_{1,L}^+$ からさらに変わり点 $(a(E), 0)$ を越えて $\Gamma_{1,L}^-$ まで接続すると、外向波解は、 $\Gamma_{1,L}^-$ 上で $u \sim t_{1,L}^- f_{1,L}^-$ と表せる。但し、 $t_{1,L}^- = -e^{2iA(E)/h} + \mathcal{O}(h)$ を満たす。特性集合に沿って接続し $\Gamma_{1,L}^-$ に戻ってきても、外向波解は初めに正規化したものに一致しなければならない。したがって、第1段階より精密なBohr-Sommerfeldの量子化条件

$$-e^{2iA(E)/h} = 1 + \mathcal{O}(h)$$

を得ることができ、この条件式から定理の実部の結果が得られる。

一方、 x_0 を $x_0 > c$ となるようにとり、外向波解を $x = x_0$ に制限すると、外向波解が $\Gamma_{2,R}^+$ 上にしか超局所台をもたないことから、 $\text{Im} \langle (P = E)u, u \rangle_{L^2((-\infty, x_0])} = 0$ 、すなわち

$$-\text{Im} E = \frac{h^2}{\|u\|_{L^2((-\infty, x_0])}^2} \text{Im} (u_1' \bar{u}_1 + u_2' \bar{u}_2 - r_1 u_2 \bar{u}_1) \Big|_{x=x_0}$$

を計算することで、虚部の漸近展開が得られる。実際、超局所WKB解の形から、右辺の第2項が主要項となることが分かり、さらに、 $E \in \mathcal{D}_h(\delta_0, C_0) \cap \mathbb{R}$ に対して、 $\|u\|_{L^2((-\infty, x_0])}^2 = 2\mathcal{A}'(E)^{1/2} + \mathcal{O}(h^{1/3})$ が計算できるので、定理の虚部の結果が得られる。

超局所的な外向波解の接続については、特性集合がホモクリニック軌道をなす単独Schrödinger作用素のレゾナンスについて調べたBony-藤家-Ramond-Zerzeri[3]が詳しい。また、その概説を行った藤家[6]も参照されたい。

3.2. 交差点及び変わり点での接続公式

最後に、証明で用いた交差点及び変わり点での超局所WKB解の接続公式を記す。

命題 1 (交差点 ρ_- での接続) 関数 u を $\rho_-(E)$ 近傍における超局所解とし、 E 及び h に依存する定数 $t_{j,S}^-(E, h)$ ($j = 1, 2, S = L, R$)を用いて、

$$u \sim t_{j,S}^- f_{j,S}^- \quad \text{on } \Gamma_{j,S}^-(E)$$

と表せると仮定する。このとき、 $E \in \mathcal{D}_h(\delta_0, C_0)$ に対して、

$$\begin{pmatrix} t_{1,R}^- \\ t_{2,L}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1,1}^-(E, h) & \tau_{1,2}^-(E, h) \\ \tau_{2,1}^-(E, h) & \tau_{2,2}^-(E, h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1,L}^- \\ t_{2,R}^- \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tau_{1,1}^- &= 1 + \mathcal{O}(h), & \tau_{1,2}^- &= e^{i\frac{\pi}{4}}\tau_- h^{\frac{1}{2}+i\mu h} + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}), \\ \tau_{2,1}^- &= e^{-i\frac{\pi}{4}}\tau_+ h^{\frac{1}{2}-i\mu h} + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}), & \tau_{2,2}^- &= 1 + \mathcal{O}(h),\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\tau_{\pm}$ は以下で与えられる。

$$\tau_{\pm} = \sqrt{\frac{\pi}{V_1'(0) - V_2'(0)}} \left(r_0(0)E^{-\frac{1}{4}} \pm ir_1(0)E^{\frac{1}{4}} \right).$$

同様に交差点 ρ_+ での接続公式も得られるが、その表示はここでは省略する。命題 1 の証明は、方程式 (1) を W の楕円性の仮定 (A5) に基づいて単独の方程式に直し、Helffer-Sjöstrand[14] で導入された超局所的な標準形に帰着させることが鍵となる。

命題 2 (変わり点での接続) 変わり点近傍における超局所解の係数 $t_{1,L}^{\pm}$, $t_{1,R}^{\pm}$, $t_{2,L}^{\pm}$ を命題 1 と同様に定めるものとする。このとき

$$t_{1,S}^+ = \sigma_{1,S} t_{1,S}^-, \quad (S = L, R), \quad t_{2,L}^+ = \sigma_{2,L} t_{2,L}^-$$

が成り立ち、 $h \downarrow 0$ のとき、次の漸近展開をみたす。

$$\sigma_{1,L} = -ie^{2iS_{1,L}/h} + \mathcal{O}(h), \quad \sigma_{1,R} = ie^{-2iS_{1,R}/h} + \mathcal{O}(h), \quad \sigma_{2,L} = -ie^{2iS_{2,L}/h} + \mathcal{O}(h).$$

但し、作用積分 $S_{1,L}(E)$, $S_{1,R}(E)$ 及び $S_{2,L}(E)$ は以下で与えられるものである。

$$\begin{aligned}S_{1,L}(E) &= \int_{a(E)}^0 \sqrt{E - V_1(t)} dt, & S_{1,R}(E) &= \int_0^{c(E)} \sqrt{E - V_1(t)} dt, \\ S_{2,L}(E) &= \int_{b(E)}^0 \sqrt{E - V_2(t)} dt.\end{aligned}$$

ここで、主結果に現れる作用積分 $\mathcal{A}(E)$, $\mathcal{B}(E)$ は、 $\mathcal{A}(E) = S_{1,L}(E) + S_{1,R}(E)$, $\mathcal{B}(E) = S_{2,L}(E) + S_{1,R}(E)$ であることに注意する。命題 2 の証明は、変わり点近傍で超局所解を、双対変数に関する擬微分方程式の WKB 解とみること (Maslov の理論 [20]) により、その接続係数を調べることで達成される。

参考文献

- [1] S. Ashida: *Molecular predissociation resonances below an energy level crossing*, Asymptot. Anal. 107 (2018), no. 3-4, 135-167.
- [2] H. Baklouti: *Asymptotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor., 68 (1998); no. 2, 179-228.
- [3] J. F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond and M. Zerzeri: *Resonances for homoclinic trapped sets*. Soc. Math. France, Astérisque no. 405, 2018
- [4] M. Dimassi, S. Sjöstrand: *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] F. Faure, M. Tsujii: *Band structure of the Ruelle spectrum of contact Anosov flows*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 351 (2013), no. 9-10, 385-391.
- [6] 藤家 雪朗: ホモクリニック軌道が生成する共鳴の準古典漸近分布 — 超局所的視点からのアプローチ — 日本数学会 数学 71 巻 第 1 号 2019

- [7] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe: *Widths of resonances at an energy-level crossing I: Elliptic interaction*, J. Diff. Eq. 260 (2016) 4051-4085.
- [8] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe: *Widths of resonances at an energy-level crossing II: Vector field interaction*, J. Diff. Eq. 262 (2017) 5880-5895.
- [9] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe: *Widths of resonances above an energy-level crossing*, Preprint2019 <https://arxiv.org/abs/1904.12511>.
- [10] C. Gérard, J. Sjöstrand: *Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type*. Comm. Math. Phys. 108 (1987), no. 3, 391-421.
- [11] A. Grigis, A. Martinez: *Resonance widths for the molecular predissociation*. Anal. PDE 7 (2014), no. 5, 1027-1055.
- [12] B. Helffer, A. Martinez: *Comparaison entre les diverses notions de résonances*. Helv. Phys. Acta, 60 (1987), no. 8, 992-1003.
- [13] B. Helffer, J. Sjöstrand: *Résonances en limite semiclassique*. Bull. Soc. Math. France, Mémoire no. 24-25, 1986.
- [14] B. Helffer, J. Sjöstrand: *Semiclassical analysis for Harper's equation. III. Cantor structure of the spectrum*. Mém. Soc. Math. France, (1989), no. 39 1-124.
- [15] M. Ikawa: *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), no. 2, 113-146.
- [16] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, X.W. Wang: *On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules*. Comm. Math. Physics, 143 (1992), no. 3, 607-639.
- [17] A. Lahmar-Benbernou, A. Martinez: *On Helffer-Sjöstrand's theory of resonances*. Int. Math. Res. Not. 2002, no. 13, 697-717.
- [18] A. Martinez: *Estimates on Complex Interactions in Phase Space*. Math. Nachr. **167** (1994), 203-254.
- [19] A. Martinez: *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer-Verlag New-York, UTX Series, 2002.
- [20] V. Maslov, M. Fedoriuk: *Semi-classical approximation in quantum mechanics*. Mathematical Physics and Applied Mathematics, vol. 7, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981, Translated from the Russian by J. Niederle and J. Tolar, Contemporary Mathematics, 5.
- [21] S. Nakamura: *On an example of phase-space tunneling.*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor., 63 (1995), no. 2,
- [22] S. Nonnenmacher, M. Zworski: *Decay of correlations for normally hyperbolic trapping*. Invent. Math. 200 (2015), no. 2, 345-438.
- [23] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV*, Academic Press New York, 1972.
- [24] H. Tamura: *Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions III*. Math. J. Okayama Univ. 58 (2016), 79-108.
- [25] D.R. Yafaev: *The semiclassical limit of eigenfunctions of the Schrödinger equation and the Bohr-Sommerfeld quantization condition, revisited*. Algebra i Analiz 22 (6) (2010), 270-291; translation in St. Petersburg Math. J. 22 (6) (2011), 1051-1067
- [26] M. Zworski: *Semiclassical Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 138*. American Mathematical Soc., 2012.