特別講演

消散型波動方程式に対する L^p-L^q 評価と非線形問題への応用

若杉　勇太　(愛媛大学)*

1. 線形消散型波動方程式に対する L^p-L^q 評価

消散型波動方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0 \tag{1}$$

は空気抵抗や摩擦などの効果による減衰を伴う波の伝播を記述する偏微分方程式であり，通常の波動方程式の導出の際に，速度に比例する抵抗の効果を加えることで導かれる．またHeavisideにより導出された，自己誘導と漏洩コンダクタンスを伴うケーブル中の電圧と電流を記述する電信方程式としても知られる．Cattaneo [1] と Vernotte [33] は，熱伝導現象が有限伝播性をもつようにモデル化するために，通常のFourierの法則の代わりに時間遅れのFourierの法則を導入することで方程式(1)を導いた（詳細は[25]を参照）．

消散型波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

の解の長時間挙動については，Matsumura [17] の先駆的な研究以降，多くの結果がある．Matsumura [17] はFourier変換を用いた解表示

$$u(t,x) = \mathcal{D}(t)(u_0 + u_1)(x) + \partial_t \mathcal{D}(t) u_0(x)$$

を与えた．ここで

$$\mathcal{D}(t) = e^{-t/2}\mathcal{F}^{-1}L(t,\xi)\mathcal{F}, \tag{3}$$
$$L(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(t\sqrt{1/4-|\xi|^2})}{\sqrt{1/4-|\xi|^2}} & (|\xi| < 1/2), \\ \dfrac{\sin(t\sqrt{|\xi|^2-1/4})}{\sqrt{|\xi|^2-1/4}} & (|\xi| > 1/2), \end{cases}$$

であり，$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ は空間変数に関するFourier変換および逆変換を表す．さらに[17]では上の表示を用いて解の L^p-L^q 評価

$$\|u(t)\|_{L^2} \le C\langle t\rangle^{-(n/2)(1/q-1/2)}(\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}) + Ce^{-t/4}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{H^{-1}}),$$
$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le C\langle t\rangle^{-n/(2q)}(\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}) + Ce^{-t/4}(\|u_0\|_{H^{[n/2]+1}} + \|u_1\|_{H^{[n/2]}})$$

が示された．ここで，$1 \le q \le 2$，$[n/2] = \max\{k \in \mathbb{Z}; k \le n/2\}$，$\langle t\rangle = (1+|t|^2)^{1/2}$ である．右辺第一項は低周波成分に対応し，第二項は高周波成分に対応している．

本研究は科研費 (課題番号:16K17625) の助成を受けたものである。
* 〒790-8577 愛媛県松山市文京町3番　愛媛大学 大学院理工学研究科
e-mail: wakasugi.yuta.vi@ehime-u.ac.jp

この評価は Nishihara [23] により精密化され，$n=3$ のときに

$$\|\mathcal{D}(t)f-\mathcal{G}(t)f-e^{-t/2}\mathcal{W}(t)f\|_{L^p}\le Ct^{-(3/2)(1/q-1/p)-1}\|f\|_{L^q} \tag{4}$$

という評価が示された．ここで $1\le q\le p\le\infty$,

$$\mathcal{G}(t)=\mathcal{F}^{-1}e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F},\quad \mathcal{W}(t)=\mathcal{F}^{-1}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\mathcal{F}$$

である．上式は特に，$\mathcal{D}(t)f$ が漸近的に，熱部分と波動部分の和に分解できて

$$\mathcal{D}(t)f\sim\mathcal{G}(t)f+e^{-t/2}\mathcal{W}(t)f$$

のように表されることを示している．他の空間次元については，Marcati–Nishihara [16], Hosono–Ogawa [3]，Narazaki [21] および [28] を参照．また高次の漸近展開については Takeda [31]，Michihisa [18] を参照．

上記の評価 (4) より，$\mathcal{D}(t)$ に対し，低周波成分は熱方程式の解と同じ減衰評価，高周波成分は波動方程式と同じ微分の損失をもつ形の L^p-L^q 型評価の成立が期待できる．本稿ではまず，非線形問題への応用に適した形で $\mathcal{D}(t)$ の低周波・高周波成分それぞれにシャープな評価を与えた論文 [4] の結果について述べる（池田正弘氏（理化学研究所・慶應義塾大学），成亥隆恭氏（大阪大学），岡本葵氏（信州大学）との共同研究）．

以下，関数 $m(\xi)$ に対し，Fourier multiplier $m(\nabla)$ を $m(\nabla)=\mathcal{F}^{-1}m(\xi)\mathcal{F}$ で定める．$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $\chi(r)=1$ $(|r|\le 1)$，$\chi(r)=0$ $(|r|>2)$ をみたすものとし，周波数に関する cut-off multiplier を $\chi_{\le 1}(\nabla)=\chi(|\nabla|)$，$\chi_{>1}(\nabla)=1-\chi(|\nabla|)$ で定める．また，$H^s_p(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\|f\|_{H^s_p}=\|\langle\nabla\rangle^s f\|_{L^p}<\infty\}$ とおき，$p=2$ の場合は $H^s_2(\mathbb{R}^n)=H^s(\mathbb{R}^n)$ と表す．

定理 1. [4, Theorem 1.1] $1\le q\le p<\infty$，$p\ne 1$ とする．$s_1\ge s_2$，$\beta=(n-1)|1/2-1/p|$ とおく．このとき，ある $\delta_p>0$ が存在して，任意の $t>0$ に対し

$$\begin{aligned}\||\nabla|^{s_1}\mathcal{D}(t)f\|_{L^p}&\le C\langle t\rangle^{-(n/2)(1/q-1/p)-(s_1-s_2)/2}\||\nabla|^{s_2}\chi_{\le1}(\nabla)f\|_{L^q}\\&\quad+Ce^{-t/2}\langle t\rangle^{\delta_p}\||\nabla|^{s_1}\chi_{>1}(\nabla)f\|_{H^{\beta-1}_p},\\ \||\nabla|^{s_1}\partial_t\mathcal{D}(t)f\|_{L^p}&\le C\langle t\rangle^{-(n/2)(1/q-1/p)-(s_1-s_2)/2-1}\||\nabla|^{s_2}\chi_{\le1}(\nabla)f\|_{L^q}\\&\quad+Ce^{-t/2}\langle t\rangle^{\delta_p}\||\nabla|^{s_1}\chi_{>1}(\nabla)f\|_{H^{\beta}_p}\end{aligned}$$

が成立する．

注意 2. 高周波成分は Sjöstrand [29]，Miyachi [19]，Peral [27] による波動方程式に対する評価

$$\|\mathcal{W}(t)f\|_{L^p}\le C\langle t\rangle^{\tilde{\delta}_p}\|f\|_{H^{\beta-1}_p} \tag{5}$$

と同じ微分の損失をもつ．

注意 3. Inui [9, Lemma 2.5] および [10, Corollary 2.3] により，高周波成分を L^p-$L^{p'}$ 型の評価にした

$$\begin{aligned}\||\nabla|^{s_1}\mathcal{D}(t)f\|_{L^p}&\le C\langle t\rangle^{-(n/2)(1/q-1/p)-(s_1-s_2)/2}\||\nabla|^{s_2}\chi_{\le1}(\nabla)f\|_{L^q}\\&\quad+Ce^{-t/2}t^{-\frac{n-1}{2}(1-2/p)}\||\nabla|^{s_1}\chi_{>1}(\nabla)f\|_{H^{\tilde{\beta}-1}_{p'}}\end{aligned}$$

も得られている．ただし，$2 \le p < \infty$，$p' = p/(p-1)$，$\tilde{\beta} = \frac{n+1}{2}(1-\frac{2}{p})$ である．$p=\infty$ の場合は，左辺と右辺第二項のノルムをそれぞれ Besov 空間 $B^0_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$，$B^{\tilde{\beta}-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ のものに変更（ただし $\tilde{\beta} = \frac{n+1}{2}$）すれば成立する（[10, Lemma 2.2] を参照）．

定理 1 の証明の概略について述べる．まず $\mathcal{D}(t)$ を低周波成分と高周波成分に分解し，

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_1(t) + \mathcal{D}_2(t) := \mathcal{D}(t)\chi_{\le 1}(\nabla) + \mathcal{D}(t)\chi_{>1}(\nabla)$$

と表す．

低周波成分 $\mathcal{D}_1(t)$ に対しては，その核

$$\mathfrak{d}(t,x) := \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\le 1}(\xi)e^{-t/2}L(t,\xi)\right](x)$$

の各点評価：$s \ge 0$，$j \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} ||\nabla|^s \mathfrak{d}(t,x)| &\le C\min\{|x|^{-1}, \langle t\rangle^{-1/2}\}^{s+n}, \\ |\mathfrak{d}(t,x)| &\le C\langle t\rangle^{-n/2}\min\{\langle t\rangle^{1/2}|x|^{-1}, 1\}^j, \end{aligned}$$

を示すことが鍵となる．実際この評価が得られれば，Young の不等式により定理 1 の低周波成分の評価を示せる．上の各点評価は，Fourier 逆変換の表示

$$|\nabla|^s\mathfrak{d}(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\chi_{\le 1}(\xi)|\xi|^s e^{-t/2}L(t,\xi)\,d\xi$$

から積分領域をさらに $|\xi| < 1/|x|$ と $|\xi| \ge 1/|x|$ の範囲に分けて，部分積分を行うことにより示される．

高周波成分 $\mathcal{D}_2(t)$ に対しては，$\sin(t\sqrt{|\xi|^2-1/4}) = \frac{1}{2i}(e^{it\sqrt{|\xi|^2-1/4}} - e^{-it\sqrt{|\xi|^2-1/4}})$ と表して，

$$e^{it\sqrt{|\xi|^2-1/4}} = e^{it|\xi|}e^{it(\sqrt{|\xi|^2-1/4}-|\xi|)}$$

のように波動方程式の解の部分 $e^{it|\xi|}$ と残りの部分 $e^{it(\sqrt{|\xi|^2-1/4}-|\xi|)}$ に分ける．$e^{it|\xi|}$ の部分については Sjöstrand [29]，Miyachi [19]，Peral [27] による波動方程式の L^p 評価 (5) を適用し，残りの部分 $e^{it(\sqrt{|\xi|^2-1/4}-|\xi|)}$ に対しては Mikhlin の multiplier 定理を用いることで，高周波成分に対する評価を得る．

2. 非線形消散型波動方程式の初期値問題

次の非線形消散型波動方程式の初期値問題を考察する．

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = \mathcal{N}(u), & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varepsilon u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = \varepsilon u_1(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6}$$

ここで，$\mathcal{N}(u)$ は非線形項を表し，簡単のため $\mathcal{N}(u) = |u|^p$ または $\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u$，$p>1$ とする．また $\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメータとする．前節の L^p-L^q 評価を応用して，空間遠方で初期値が緩やかに減衰する場合の時間大域的可解性について議論する．

解の時間大域的存在および非存在については多くの研究があり（[2, 3, 6, 8, 11, 13, 15, 16, 20, 21, 23, 32, 35]），特に臨界指数 p_c を決定する問題が考察されている．ここ

で，臨界指数とは，小さい初期値に対する時間大域解の存在・非存在の閾値となる非線形項の指数のことをいう．より正確には，p_c が臨界指数であるとは次の (i), (ii) をみたすときをいう．(i) $p > p_c$ ならば，（考えている関数空間内の）任意の初期値 (u_0, u_1) に対し，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば (6) の時間大域解が一意的に存在する；(ii) $p < p_c$ ならば，（考えている関数空間内の）ある初期値 (u_0, u_1) が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (6) の時間局所解は有限時間で爆発する（時間大域的に延長できない）．

あとで述べるように，臨界指数 p_c の値は，初期値の属する関数空間をどのように設定するかによって変化し，特に初期値の空間遠方での減衰の速さが大きく影響する．また臨界の場合 $p = p_c$ が時間大域解の存在・非存在のどちらのケースになるかという点も，関数空間の設定により異なる．

非線形項が $\mathcal{N}(u) = |u|^p$ の形で，初期値が $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ かつコンパクトな台をもつ場合，Todorova–Yordanov [32] により，$p > 1 + 2/n$ ならば十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し時間大域解が一意的に存在することが示された．初期値がコンパクト台をもつという仮定は [2, 3, 7, 6, 21, 23, 26] により弱められ，初期値のクラスとして，

- $n = 1$ のとき $(u_0, u_1) \in (H^1 \cap L^1)(\mathbb{R}^n) \times (L^2 \cap L^1)(\mathbb{R}^n)$
- $n = 2, 3$ のとき $(u_0, u_1) \in (H^1 \cap W^{1,1})(\mathbb{R}^n) \times (L^2 \cap L^1)(\mathbb{R}^n)$
- $n = 4, 5$ のとき $(u_0, u_1) \in (H^1 \cap W^{2,1})(\mathbb{R}^n) \times (L^2 \cap W^{1,1})(\mathbb{R}^n)$
- すべての $n \geq 1$ に対し $(u_0, u_1) \in (H^{s,0} \cap H^{0,\alpha})(\mathbb{R}^n) \times (H^{s-1,0} \cap H^{0,\alpha})(\mathbb{R}^n)$

を取れば十分であることが分かっている．ここで $W^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ は Sobolev 空間 $W^{k,1}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \partial^\gamma f \in L^1(\mathbb{R}^n)\,\mathrm{for}\,\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |\gamma| \leq k\}$ を表す．また $H^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ は重み付き Sobolev 空間を表し，s は適当な範囲にある滑らかさの指数，α は $\alpha > n/2$ をみたす重みの指数である（[2] を参照）．一方，[32] および Zhang [35] により，$1 < p \leq 1 + 2/n$ ならば，$\int_{\mathbb{R}^n}(u_0 + u_1)\,dx > 0$ をみたす初期値に対し時間局所解が有限時間で爆発することが示されている．したがってこの場合の臨界指数は $p_c = 1 + 2/n$ となる．

時間大域解の存在については，$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u$ と $|u|^p$ で全く同様の結果が成立するが，解の有限時間爆発については同じ手法を適用することができない．Ikehata–Ohta [7] は Levine [14] の方法を用いて，$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u$ かつ $1 < p < 1 + 2/n$ のときに，適当な初期値 (u_0, u_1) が存在して任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対し解が有限時間爆発することを示している．臨界の場合 $p = 1 + 2/n$ については，$n = 1, 2$ および $n = 3$ の場合は基本解の正値性を用いてそれぞれ Li–Zhou [15] および Nishihara [24] により解の有限時間爆発が得られている．しかし $n \geq 4$ では基本解の正値性がなく，臨界の場合 $\mathcal{N}(u) = |u|^{2/n}u$ について解の有限時間爆発が成立するかどうかは現在のところ未解決である．

初期値が $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属するとは限らず，空間遠方で緩やかに減衰する場合，Nakao–Ono [20] により，$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u$ かつ初期値が $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ の場合に，$p \geq 1 + 4/n$ ならば，小さい $\varepsilon > 0$ に対し時間大域解が一意的に存在することが示された．また，Ikehata–Ohta [7] により，$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u$ かつ $(u_0, u_1) \in (H^1 \cap L^r)(\mathbb{R}^n) \times (L^2 \cap L^r)(\mathbb{R}^n)$ の場合が考察され，

$$r \in [1, 2]\ (n = 1, 2), \quad r \in \left[\frac{\sqrt{n^2 + 16n} - n}{4}, \min\left\{2, \frac{n}{n-2}\right\}\right]\ (3 \leq n \leq 6)$$

かつ$p>1+2r/n$の場合に，十分小さい$\varepsilon>0$に対し時間大域解$u\in C([0,\infty);H^1(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,\infty);L^2(\mathbb{R}^n))$ の一意的存在が示されている．また，$1<p<1+2r/n$の場合の有限時間爆発も得られている．これにより，初期値の空間遠方の減衰の速さを$L^r(\mathbb{R}^n)$で与えた場合には，臨界指数が$p_c=1+2r/n$となることが分かる．しかし，臨界指数$p=1+2r/n$が時間大域解の存在・非存在のどちらの場合に含まれるかはこの結果では得られていない．また，解が初期値に対応するクラス$C([0,\infty);L^r(\mathbb{R}^n))$に属するかどうかや，時間大域解の漸近形についても不明である．

別の観点からの研究として，Narazaki–Nishihara [22] により，$n\le 3$, $\mathcal{N}(u)=|u|^{p-1}u$, 初期値が$u_0\in C^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)$，$u_1\in C(\mathbb{R}^n)$かつ$0<k\le 1$に対し$\langle x\rangle^{kn}\partial^\alpha u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(|\alpha|\le[n/2])$，$\langle x\rangle^{kn}u_1\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ をみたす場合に，$p>1+2/(kn)$のとき小さい$\varepsilon>0$に対する時間大域解の一意的存在および，解が時間無限大において$\varepsilon(u_0+u_1)$を初期値とする対応する線形熱方程式の解に漸近することが示されている．また [5] では初期値のクラスを重み付きSobolev空間$H^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$に取った場合が考察されている．さらにSobajima [30] では外部領域$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$ の問題を扱い，$\langle x\rangle^\lambda u_0,\langle x\rangle^\lambda\nabla u_0,\langle x\rangle^\lambda u_1\in L^2(\Omega)$, $\lambda\in[0,n/2)$ かつ$p\ge 1+4/(n+2\lambda)$ の条件の下，小さい$\varepsilon>0$に対する時間大域解の一意的存在が得られている．

ここでは，上述の [7] で残された臨界の場合$p=1+2r/n$に，小さい初期値に対し時間大域解が一意的に存在することと，解が初期値に対応して$C([0,\infty);L^r(\mathbb{R}^n))$に属するかどうかを議論した [4] の結果を述べる．

定理 4. [4, Theorem 1.4] $n\ge 1$，$\mathcal{N}(u)=|u|^p$ または$|u|^{p-1}u$，$p>1$とする．$s\ge 0$, $r\in(1,2]$は$[s]<p$，$r\ge\frac{2(n-1)}{n+1}$かつ

$$\begin{aligned}
&1+\frac{2r}{n}\le p<\infty && \text{if } 2s\ge n,\\
&1+\frac{2r}{n}\le p\le 1+\frac{\min\{n,2\}}{n-2s} && \text{if } 2s<n
\end{aligned}$$

をみたすとする．$\beta=(n-1)(1/r-1/2)$とおき，初期値は

$$(u_0,u_1)\in(H^s\cap H^\beta_r)(\mathbb{R}^n)\times(H^{s-1}\cap L^r)(\mathbb{R}^n)$$

とする．このとき，ある$\varepsilon_0>0$が存在して，任意の$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$に対し初期値問題(6)は一意的な時間大域解

$$u\in C([0,\infty);(H^s\cap L^r)(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,\infty);H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$$

をもつ．

注意 5. (i) 上の定理より，$r\in(1,2]$のときは，臨界ケース$p=1+2r/n$において小さい初期値に対する時間大域解の存在が成立することが分かる（$r=1$の場合は臨界指数$p=1+2/n$において解の有限時間爆発が起きることに注意）．
(ii) 定理 1に現れる微分の損失より，初期値u_0が滑らかさを強めた空間$H^\beta_r(\mathbb{R}^n)$ に属していれば，解が$L^r(\mathbb{R}^n)$に属することがいえる．
(iii) $p>1+2r/n$の場合は時間大域解が時間無限大において$\varepsilon(u_0+u_1)$を初期値とする線形熱方程式の解に漸近することも示される．また$\mathcal{N}(u)=|u|^p$の場合，$1<p<1+2r/n$における時間局所解の有限時間爆発とライフスパンの上下からの評価も得られる．

$r=1$ の場合と $r\in(1,2]$ の場合で臨界ケース $p=1+2r/n$ において解の大域存在・非存在の状況が変わる一つの理由として次のものが考えられる．積分方程式

$$u(t,x)=\mathcal{D}(t)(\varepsilon u_0+\varepsilon u_1)(x)+\partial_t\mathcal{D}(t)\varepsilon u_0(x)+\int_0^t\mathcal{D}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))\,d\tau$$

において，$r\in(1,2]$ の場合，解 u が空間遠方で $L^r(\mathbb{R}^n)$ に属するとき，非線形項 $\mathcal{N}(u)$ はある指数 $\sigma\in[1,r)$ に対し空間遠方で $L^\sigma(\mathbb{R}^n)$ に属する．これより，$\mathcal{D}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))$ に定理 1 を適用すると，線形部分より少しだけ速い減衰が得られ，臨界の場合においてもアプリオリ評価を示すことができる．

3. 消散型波動方程式に対する Strichartz 評価

最後に，注意 3 で述べた形の消散型波動方程式の L^p-L^q 評価の応用として，Watanabe [34]，Inui [9] および [10] で得られた Strichartz 評価について述べる．

命題 6. [9, Proposition 1.1] $n\geq 2$，$2\leq r<\infty$，$2\leq q\leq\infty$ とする．$\gamma=\max\{n(1/2-1/r)-1/q,\frac{n+1}{2}(1/2-1/r)\}$ とおく．

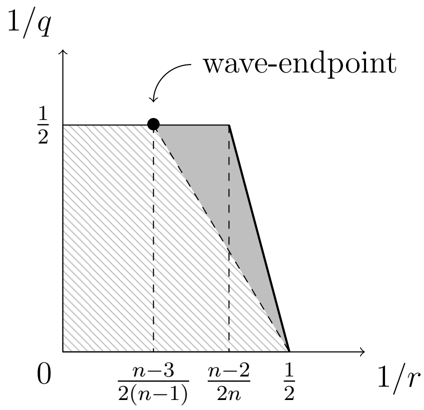
$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\geq\frac{1}{q}$$

を仮定する．このとき，

$$\|\mathcal{D}(t)f\|_{L^q_t((0,\infty);L^r_x(\mathbb{R}^n))}\leq C\|\langle\nabla\rangle^{\gamma-1}f\|_{L^2}$$

が成立する．

注意 7. 指数対 (q,r) の取れる範囲は下図のような，波動方程式と熱方程式に対する Strichartz 評価の許容指数対の範囲を合わせたものとなる．



図の斜線領域と塗りつぶし領域を合わせた台形領域が命題 6 で (q,r) が取れる範囲で，斜線領域が波動方程式に対する Strichartz 評価の許容指数対の範囲，点 $(\frac{1}{2},0)$ と点 $(\frac{n-2}{2n},\frac{1}{2})$ を結ぶ線分が熱方程式（Schrödinger 方程式）に対する Strichartz 評価の許容指数対の範囲である．消散型波動方程式の許容指数対の範囲は，波動方程式のものよりも広く，塗りつぶし領域まで広げることができるが，その代わりに塗りつぶし領域では微分の損失が大きくなる．

非斉次の Strichartz 評価は以下のようになる．特に [10] では wave-endpoint の場合 $(q,r)=(2,\frac{2(n-1)}{n-3})$ $(n\geq 4)$ の証明を与えた（戌亥隆恭氏（大阪大学）との共同研究）．

定理 8. [9, Proposition 1.2], [10, Theorem 1.3] $n \geq 2$，$2 \leq r, \tilde{r} < \infty$，$2 \leq q, \tilde{q} \leq \infty$ とする．$\gamma = \max\{n(1/2-1/r) - 1/q, \frac{n+1}{2}(1/2-1/r)\}$，$\tilde{\gamma} = \max\{n(1/2-1/\tilde{r}) - 1/\tilde{q}, \frac{n+1}{2}(1/2-1/\tilde{r})\}$ とおく．$(q,r), (\tilde{q},\tilde{r})$ は次の (i), (ii), (iii) のいずれかをみたすと仮定する．

(i) $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\tilde{r}}\right) > \dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\tilde{q}}$,

(ii) $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\tilde{r}}\right) = \dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\tilde{q}}$ かつ $1 < \tilde{q}' < q < \infty$,

(iii) $(q,r) = (\tilde{q},\tilde{r}) = (\infty, 2)$.

ただし，ここで $\tilde{q}' = \tilde{q}/(\tilde{q}-1)$ である．このとき，

$$\left\| \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau)F(\tau)\,d\tau \right\|_{L_t^q((0,\infty);L_x^r(\mathbb{R}^n))} \leq C \left\| \langle\nabla\rangle^{\gamma+\tilde{\gamma}+\delta-1} F \right\|_{L_t^{\tilde{q}'}((0,\infty);L_x^{\tilde{r}'}(\mathbb{R}^n))}$$

が成立する．ここで，$\delta \geq 0$ は

$$\delta = \frac{1}{q}\max\{\sigma(q,r,\tilde{q},\tilde{r}),0\} + \frac{1}{\tilde{q}}\max\{\sigma(\tilde{q},\tilde{r},q,r),0\},$$

$$\sigma(q,r,\tilde{q},\tilde{r}) = \min\{s(q,r),0\} - \min\{s(\tilde{q},\tilde{r}),0\}, \quad s(q,r) = \frac{n-1}{2}q\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)-1$$

で決まる定数である．ただし，$s(\infty,r) = \infty$ $(r>2)$，$s(\infty,2) = -1$ とする．

証明には，低周波成分と高周波成分に分解した後，注意3で述べた L^p-$L^{p'}$ 型の評価を適用する．さらに wave-endpoint の場合には，Keel–Tao [12] の議論を合わせて用いる．

命題6，定理8より，エネルギー臨界の非線形項をもつ消散型波動方程式の初期値問題に対し，エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ における時間局所的・大域的適切性および無条件一意性を示すことができる（[9, Theorem 1.3], [10, Theorems 1.7, 1.8] を参照）．

参考文献

[1] C. Cattaneo, *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, C. R. Acad. Sci. **247** (1958), 431–433.

[2] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Damped wave equation with super critical nonlinearities*, Differential Integral Equations **17** (2004), 637–652.

[3] T. Hosono, T. Ogawa, *Large time behavior and L^p-L^q estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations **203** (2004), 82–118.

[4] M. Ikeda, T. Inui, M. Okamoto, Y. Wakasugi, *L^p-L^q estimates for the damped wave equation and the critical exponent for the nonlinear problem with slowly decaying data*, Comm. Pure Appl. Anal. **18** (2019), 1967–2008.

[5] M. Ikeda, T. Inui, Y. Wakasugi, *The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **24** (2017), no. 2, Art. 10, 53 pp.

[6] R. Ikehata, Y. Miyaoka, T. Nakatake, *Decay estimates of solutions for dissipative wave equations in $\mathbf{R}^N$ with lower power nonlinearities*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 365–373.

[7] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in $\mathbf{R}^N$*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 87–97.

[8] R. Ikehata, K. Tanizawa, *Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in $\mathbf{R}^N$ with noncompactly supported initial data*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 1189–1208.

[9] T. Inui, *The Strichartz estimates for the damped wave equation and the behavior of solutions for the energy critical nonlinear equation*, arXiv:1903.05887v1.

[10] T. Inui, Y. Wakasugi, *Endpoint Strichartz estimate for the damped wave equation and its application*, arXiv1903.05891v2.

[11] S. Kawashima, M. Nakao, K. Ono, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 617–653.

[12] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.

[13] M. Kirane, M. Qafsaoui, *Fujita's exponent for a semilinear wave equation with linear damping*, Adv. Nonlinear Stud. **2** (2002), 41–49.

[14] H. A. Levine, *Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations*, SIAM J. Math. Anal. **5** (1974), 138–146.

[15] T.-T. Li, Y. Zhou, *Breakdown of solutions to $\Box u + u_t = |u|^{1+\alpha}$*, Discrete Contin. Dynam. Syst. **1** (1995), 503–520.

[16] P. Marcati, K. Nishihara, *The L^p-L^q estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media*, J. Differential Equations **191** (2003), 445–469.

[17] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 169–189.

[18] H. Michihisa, *L^2-asymptotic profiles of solutions to linear damped wave equations*, arXiv1710.04870v1.

[19] A. Miyachi, *On some estimates for the wave equation in L^p and H^p*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 331–354.

[20] M. Nakao, K. Ono, *Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations*, Math. Z. **214** (1993), 325–342.

[21] T. Narazaki, *L^p-L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 585–626.

[22] T. Narazaki, K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 803–819.

[23] K. Nishihara, *L^p-L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631–649.

[24] K. Nishihara, *L^p-L^q estimates for the 3-D damped wave equation and their application to the semilinear problem*, Seminar Notes of Math. Sci. **6**, Ibaraki Univ., (2003), 69–83.

[25] K. Nishihara, *Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problems for a damped wave equation (Japanese)*, Sūgaku **62** (2010), 164–181.

[26] K. Ono, *Global solvability and L^p decay for the semilinear dissipative wave equations in four and five dimensions*, Funkcial. Ekvac. **49** (2006), 215–233.

[27] J. C. Peral, *L^p estimates for the wave equation*, J. Funct. Anal. **36** (1980), 114–145.

[28] S. Sakata, Y. Wakasugi *Movement of time-delayed hot spots in Euclidean space*, Math. Z **285** (2017), 1007–1040.

[29] S. Sjöstrand, *On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **24** (1970), 331–348.

[30] M. Sobajima, *Global existence of solutions to semilinear damped wave equation with slowly decaying initial data in exterior domain*, arXiv:1812.10664v1.

[31] H. Takeda, *Higher-order expansion of solutions for a damped wave equation*, Asymptotic Analysis **94** (2015), pp. 1–31.

[32] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations **174** (2001), 464–489.

[33] P. Vernotte, *Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur*, Comptes Rendus **246** (1958), 3154–3155.

[34] T. Watanabe, *Strichartz type estimates for the damped wave equation and their application*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B63** (2017), 77–101.

[35] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 109–114.