

ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論 とその応用

The Spectral Theory of the Neumann-Poincaré Operator and its Applications

宮西 吉久 (大阪大学 数理・データ科学教育研究センター)*

1. ノイマン・ポアンカレ作用素

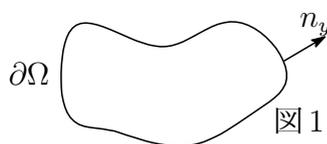
本稿では、二重層ポテンシャルとも呼ばれるノイマン・ポアンカレ作用素¹のスペクトル理論に関して近年の結果を報告したい。ここでは、いたずらに一般化することを避けて², $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) を有界な Lipschitz 領域とし、境界 $\partial\Omega$ 上の適当な関数 ϕ に対して、ノイマン・ポアンカレ作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ を

$$\mathcal{K}_{\partial\Omega}[\phi](x) \equiv \int_{\partial\Omega} \phi(y) \cdot \partial_{n_y} E(x, y) ds_y, \quad x \in \partial\Omega \quad (1)$$

のように定義する。ただし、

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y|, & \text{if } n = 2, \\ \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, & \text{if } n = 3 \end{cases}$$

はラプラス作用素の基本解。また、 ds_y は境界 $\partial\Omega$ の線素 もしくは 面素を表し、 ∂_{n_y} は (外向き) 法線微分³ である (図1)。



このとき、様々な関数空間 $\wp := \wp(\partial\Omega)$ に対して、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega} : \wp \rightarrow \wp$ は有界作用素になり [9, 23, 24, 75], さらに境界 $\partial\Omega$ が $C^{1,\alpha}$ 級ならば、コンパクト作用素になることが分かっている (例えば, [52, Theorem 7.3.2], [9]などを参照)。

本稿の目的は、ノイマン・ポアンカレ作用素の意味を述べたうえで、作用素のスペクトル構造と境界形状の関係を見ることにある。さらに、空間次元に応じてスペクトルの挙動が劇的に変化することも紹介する。加えて、スペクトルの挙動は物理現象にも影響し、応用例の一つとして Cloaking と呼ばれる現象が、3次元狭義凸領域では起きないことも最後に言及したい。

本研究は科研費 (課題番号: JP19K14553, 19H01799) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 47A45 (primary), 31B25 (secondary)

キーワード: Neumann-Poincaré operator, eigenvalues

* 〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

e-mail: miyanishi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

web: <http://mmds.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/>

¹ C. Neumann と H. Poincaré に由来 [57, 61].

² 勿論、境界付きの多様体や様々な線形偏微分作用素に対するノイマン・ポアンカレ作用素を定義することも出来ている ([1, 55]などを参照)。

³ 境界に角がある場合、法線微分は境界上で殆ど至る所定義されるものとする。

2. ノイマン・ポアンカレ作用素の意味

2.1. 境界値問題への利用

ノイマン・ポアンカレ作用素は、歴史的には線形偏微分方程式の境界値問題の可解性に関して多くの研究がなされてきた ([19, 21, 43, 49, 57, 61, 80] など). ここでは、ラプラス方程式の境界値問題として、

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \text{ or } 3; \quad u|_{\partial\Omega} = \psi \in L^2(\partial\Omega) \quad (2)$$

を考えてみる. もし、 Ω が $C^{1,\alpha}$ 級の有界領域⁴ならば、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Omega[\phi](x) &:= \int_{\partial\Omega} E(x, y)\phi(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{D}_\Omega[\phi](x) &:= \int_{\partial\Omega} \phi(y) \cdot \partial_{n_y} E(x, y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega \end{aligned}$$

とし、 $u(x) = \mathcal{D}_\Omega[\phi](x)$ とすれば、ラプラス作用素の基本解を用いているので、自動的に $\Delta u = 0$ in Ω を満たす. 境界条件について整合性を保つためには、Jump formula [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) &:= \left(\mp \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega} \right) [\phi](x) \quad a.e. x \in \partial\Omega \\ \partial_{n_y} \mathcal{S}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) &:= \left(\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \right) [\phi](x) \quad a.e. x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

を利用⁵⁶して、 $\mathcal{D}_\Omega[\phi]|_-(x) = \left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}\right) [\phi](x) = \psi(x)$ を満たすように $\phi(x)$ を見つければ良い. 実際、ノイマン・ポアンカレ作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ がコンパクトであり、スペクトルが $(-1/2, 1/2]$ に含まれることから [9, 43, 44, 58], Fredholm の定理 (Neumann 級数)[29] によって、 $\phi(x) \in L^2(\partial\Omega)$ の存在が分かる.

ノイマン境界値問題

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \text{ or } 3; \quad \partial_n u|_{\partial\Omega} = \psi \in L_0^2(\partial\Omega) \text{ on } \partial\Omega \quad (3)$$

についても、 $u = \mathcal{S}_\Omega[\phi]$ を考えれば、 $\partial_{n_y} \mathcal{S}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) := \left(\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*\right) [\phi](x) = \psi(x)$ であるから、同様に境界値問題の可解性を示すことが出来る⁷. 以下では通例にならない、ノイマン境界条件を解く際に利用した随伴作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ も ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ぶことにする⁸.

2.2. 物理現象への応用

Jump formula は、メタマテリアルと呼ばれる疑似物質の定式化、逆問題への利用、ディリクレ・ノイマン写像⁹へも応用されている. 例えば、plasmon eigenvalue と呼ばれる定数 ϵ を用いて、メタマテリアルは定式化されている. .

⁴Lipschitz 領域の場合には、[25, 76] など

⁵ $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ は、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ の $L^2(\partial\Omega)$ での随伴作用素. なお、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ は、 $L^2(\partial\Omega)$ 上で一般には自己共役でない.

⁶記号 $|_{\pm}$ は、 $+$ が領域の外側からの (non-tangential) 極限. $-$ が内側からの (non-tangential) 極限.

⁷ノイマン境界条件の場合には、 $\psi \in L_0^2(\partial\Omega) := \{\psi \in L^2 \mid \int_{\partial\Omega} \psi ds = 0\}$ に対して可解となる.

関数空間が $C(\Gamma)$ や $H^{-1/2}(\Gamma)$ などの場合にも、可解性を示すことが出来ている. さらに詳しい内容と文献については、[49, 78] を参照.

⁸実は、 L^2 自己共役でないにもかかわらず $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ と $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ の固有値は一致する.

⁹ディリクレ・ノイマン写像 Λ は、 $\Lambda = \left(-\frac{1}{2} + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*\right) \mathcal{S}_{\partial\Omega}^{-1}$ と表せる.

(メタマテリアル) $\nabla(\sigma\nabla)u + \omega^2u = 0$, $\omega \approx 0$ (quasi-static)

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \epsilon & \text{in } \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} u|_+ = u|_- & \text{(Continuity of potential)} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_+ = \epsilon \frac{\partial u}{\partial \nu}|_- & \text{(Continuity of flux)} \end{cases}$$

実際, メタマテリアルの方程式は $h(x) \approx 0$ を \mathbb{R}^n 上の調和関数とすれば, 解を $u(x) = h(x) + S[\psi](x)$ と表すことができる. さらに境界 $\partial\Omega$ 上で (Continuity of flux) を満たすので,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_+ = \epsilon \frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_- \quad (4)$$

となっている. Jump formula を利用すれば, $\frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_{\pm} = (\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)[\psi]$ on $\partial\Omega$ となり, (4) に代入して整理することで,

$$\left(\frac{\epsilon + 1}{2(\epsilon - 1)} I - \mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \right) [\psi] = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

を得る. つまり, $\frac{\epsilon+1}{2(\epsilon-1)}$ はノイマン・ポアンカレ作用素の固有値 $\lambda(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)$ と見なせて, 次の関係式が分かる.

$$-\frac{1}{2} < \lambda(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*) = \frac{\epsilon + 1}{2(\epsilon - 1)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \epsilon < 0. \quad (5)$$

関係式 (5) は言い換えると, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有関数 ψ を境界におけば, 誘電率 ϵ があたかも負になるように出来ることを意味している. このようにメタマテリアルと呼ばれる疑似物質は, 負の誘電率や負の透磁率が現れるモデルとして定式化されている.

3. 積分作用素の一般論から分かること

いくつかの準備と一般論から分かる事実を述べていこう. 実際, 作用素のシャッテンノルム [32, 50, 73] やミニマックス法 [44] だけから, 積分作用素のスペクトル構造に見当がつくことも多い.

3.1. シャッテンクラス

ヒルベルト空間 H 上のコンパクト作用素 $K : H \rightarrow H$ に対して, K の共役を K^* と表す. 勿論, K^*K は半正定値の自己共役コンパクト作用素になるので, $\sqrt{K^*K}$ の固有値を特異値と呼び, $s_j(K) = \lambda_j(\sqrt{K^*K})$ と表しておこう. 以下, 特異値は単調減少するように並べてあるものとする.

$$\sigma_{sing}(K) = \{ s_j(K) \mid s_1(K) \geq s_2(K) \geq s_3(K) \geq \dots \}. \quad (6)$$

また, $\|K\|_{\mathfrak{S}^p}^p = \text{tr}(K^*K)^{p/2} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K)^p < \infty$ を満たす作用素全体の集合を (p -) シャッテンクラス \mathfrak{S}^p と呼ぶ. もし, $K \in \mathfrak{S}^p$ ならば,

$$s_j(K) = o(j^{-1/p}). \quad (7)$$

となっている事に注意しておく [73]. とくに, シャッテンクラス \mathfrak{S}^2 は, 良く知られているヒルベルト・シュミットクラスのことである.

加えて, ワイルの不等式 [50, 73]

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j(K)|^r \geq \sum_{\lambda_j \in \sigma_p(K)} |\lambda_j(K)|^r \quad (0 < r < \infty) \quad (8)$$

を用いることで, 固有値 $\lambda_j(K)$ の絶対値の評価が出来ることにも注意しておく.

3.2. 積分作用素

一般の多様体 M を考える. ここでは, $L^2(M)$ で定義された積分作用素

$$K\psi(x) := \int_M E(x, y)\psi(y) dy \quad (9)$$

を考えよう. このとき, J. Delgado -M. Ruzhansky によって, シャッテンクラスと積分核の正則性の関係が得られている.

定理 3.1 ([26] Theorem 3.6). M を n 次元閉多様体とし, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ とする. K を積分核 $E(x, y) \in H_{x,y}^{\mu_1, \mu_2}(M \times M)$ を持つ積分作用素とする. そのとき, $L^2(M)$ 上の積分作用素 K はシャッテンクラス $\mathfrak{S}^r(L^2(M))$ ($r > \frac{2n}{n+2(\mu_1+\mu_2)}$) の作用素になる.

とくに, $E(x, y) \in L^2(M \times M)$ のとき K はヒルベルト・シュミット作用素¹⁰になり, (7), (8) より

$$\lambda_j(K) = o(j^{-1/2}), \quad s_j(K) = o(j^{-1/2}). \quad (10)$$

であることが分かる. ノイマン・ポアンカレ作用素について応用してみると, 境界 $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が $C^{k,\alpha}$ 級 ($k + \alpha \geq 2$) であれば積分核の正則性は $C^{k+\alpha-2}$ になる事が直接確かめられる. つまり, $L^2(M)$ 上で次の結果を得ることが出来る.

定理 3.2 ([56] Theorem 2.12). $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を $C^{k,\alpha}$ 級 ($k + \alpha \geq 2$) の領域とする. 任意の $\tau > -(k + \alpha) + 3/2$ に対し,

$$s_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = o(j^\tau) \text{ and } \lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = o(j^\tau) \text{ as } j \rightarrow \infty.$$

ただし, 少なくとも積分核が L^2 でない場合, 固有値や特異値の挙動はこの定理では解決しない. とくに, 2次元の $C^{k,\alpha}$ 級 $1 < k + \alpha \leq 3/2$ の領域に対しては, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の漸近挙動は未解決になっている¹¹.

上記が2次元の場合に使われる理論で, 3次元以上の場合には, -1 階の擬微分作用素の理論が適用可能である. 積分核が特異性を持つ場合には, 擬微分作用素で書き下すことで, さらに精緻な挙動が分かる場合がある. ここでも, 状況を見やすくするために, 以下の節で必要な形の定理を準備していきたい.

定理 3.3. [16, 34] M を n 次元閉多様体とし, P を局所座標において -1 階の同次シンボル $p(x, \xi)$ をもつ擬微分作用素とする. シンボルを $S^{m-1} = \{|\xi| = 1\}$ 制限したとき, $p(x, \xi) \in C(C^\epsilon, S^{m-1})$ となると仮定する. つまり, x に関しては C^ϵ 級となると仮定しておく. そのとき, $L^2(M)$ 上の擬微分作用素 P に対して

$$s_j(P) \sim C(\partial\Omega)^{1/2} j^{-1/2} \quad j \rightarrow \infty.$$

さらに, S^*M を *cosphere bundle* として.

$$C(\partial\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} |p(x, \xi)|^2 dx d\xi, \quad (11)$$

となる.

¹⁰ 積分核が L^2 になるとき, 積分作用素がヒルベルト・シュミットクラスの作用素になる事実は古くから知られている [22].

¹¹ 最近, $k + \alpha > 3/2$ の場合にも, 定理 3.2 が成り立つことが Y. Jung と M. Lim によって示された [39].

このことから、 -1 階の擬微分作用素については、特異値の漸近挙動が分かることになる。さらに、積分作用素を K とし、

$$K \equiv P \quad \text{modulo Hilbert-Schmidt operators} \quad (12)$$

となるとき、特異値の漸近挙動は $s_j(K) \sim C(\partial\Omega)j^{-1/2}$ を満たしていることが分かる。つまり、

$$s_j(P) \sim Cj^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

とすると、Ky Fan の定理 (例えば, [28, 45] を参照)

定理 3.4. ヒルベルト空間上のコンパクト作用素 P の特異値の漸近挙動が (13) を満たすとする。さらに、 $R \in \mathfrak{S}^2$ とするとき、 $K = P + R$ の特異値の漸近挙動も $s_j(K) \sim Cj^{-\frac{1}{2}}$ となる。

によって、 $K \equiv P$ ならば¹², $s_j(K) \sim Cj^{-\frac{1}{2}}$ となることがわかる。我々の目標は、固有値の漸近挙動であるので特異値と固有値の漸近挙動も比較する必要がある。このことは、次の補題 [53] で保証される。

補題 3.5. K をコンパクト作用素とし、次の (1), (2), (3) を仮定する。

(1) $K - K^*$ は、ヒルベルト・シュミット作用素。

(2) K の固有値は実数からなる。

(3) $s_j(K) \sim Cj^{-1/2}$ as $j \rightarrow \infty$.

そのとき $|\lambda_j(K)| \sim s_j(K) \sim Cj^{-1/2}$ as $j \rightarrow \infty$.

(1)-(3) を満たす K を “almost self-adjoint operator” と呼んでおく。

Proof. コンパクト作用素は、compact normal operator D と compact quasinilpotent operator V の和に Schur 分解 [32] することができて、

$$K = D + V \quad \text{and} \quad \sigma(D) = \sigma(K). \quad (14)$$

となることが知られている。ここで、 $\sigma(D)$ と $\sigma(K)$ は、それぞれ作用素 D と K のスペクトルを表す。

さらに、仮定 (2) より $\sigma(D) = \sigma(K)$ は実数であるから、 D は自己共役なコンパクト作用素になっている。つまり、共役は

$$K^* = D + V^*.$$

を満たし、仮定 (1) より $K - K^* = V - V^*$ はヒルベルト・シュミット作用素になっている。ここで、 $\Im(V) = \frac{V - V^*}{2i}$ がヒルベルト・シュミット作用素になるとき、 V 自体がヒルベルト・シュミット作用素になることも知られている [30, Lemma 6.5.1], [31]. よって、定理 3.4 より、 K と D の固有値の絶対値の漸近挙動と特異値の漸近挙動はすべて一致する。すなわち、

$$|\lambda_j(K)| = |\lambda_j(D)| = s_j(D) \sim s_j(K) \sim Cj^{-1/2} \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

□

3次元の場合には、ノイマン・ポアンカレ作用素に対して -1 階の擬微分作用素が近似作用素と思えるので、一般論からもある程度の類推が出来る。実際、この節で用いた定理と補題も利用して、§4.1.2 で、より詳細な固有値の漸近挙動を求めることにする。

¹²以下、 \equiv は、 $K - P$ がヒルベルト・シュミットクラスになることを意味する。

3.3. ノイマン・ポアンカレ作用素の性質

ここでは、後で利用するノイマン・ポアンカレ作用素の性質を述べる。一重層ポテンシャル $\mathcal{S}_{\partial\Omega} : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ を

$$\mathcal{S}_{\partial\Omega}[\phi](x) := \int_{\partial\Omega} \phi(y)E(x, y) ds_y \quad x \in \partial\Omega \quad (15)$$

とおくと、Plemelj の原理 [58] と呼ばれる

$$\mathcal{S}_{\partial\Omega}\mathcal{K}_{\partial\Omega}^* = \mathcal{K}_{\partial\Omega}\mathcal{S}_{\partial\Omega} \quad (16)$$

を満たしている¹³。2次元の場合には領域 Ω をスケール変換したと考えると、3次元の場合はそのままとすれば、 $-\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ は positive definite な作用素になることも分かっている。つまり、新たな内積を $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, -\mathcal{S}_{\partial\Omega}v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$ とおくと、 \mathcal{H} はヒルベルト空間になり、 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \approx \|\cdot\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$ となっている。この \mathcal{H} はエネルギー空間と呼ばれ、 $K_{\partial\Omega}^*$ は自己共役作用素となる。つまり、スペクトルは実数になっている¹⁴。

さらに、境界が $C^{1,\alpha}$ の場合、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ には正則性があり、ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値は、 $L^2(\partial\Omega)$ 上で考えても、 \mathcal{H} 上で考えたものと一致する。さらに、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ と $K_{\partial\Omega}^*$ の固有値も一致する¹⁵。この事実から、多くの文献で、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ も $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ 同様に、ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれている。

4. ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル

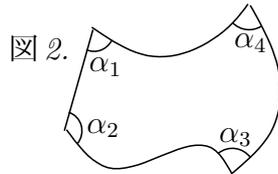
ここでは、ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルについて、角のある領域についても補足しておきたい。そのうえで本稿で主に扱う滑らかな領域について、結果を述べていくことにする。

4.0.1. 角のある領域 (領域が2次元)

区分的に $C^{1,\alpha}$ で、有限個の0より大きい角 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を持つ $\partial\Omega$ については、ノイマン・ポアンカレ作用素は $L^2(\partial\Omega)$, $C(\partial\Omega)$ や \mathcal{H} 上で有界であってもコンパクトでないことが分かっている。まずは、エネルギー空間 $\mathcal{H} \approx H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上においては、前節3.3で述べたように、ノイマン・ポアンカレ作用素は自己共役になり、さらに essential spectrum (連続スペクトルと固有値の集積点) も分かっている。

定理 4.1. [59, 60] Ω を2次元の有界領域で、境界が区分的に C^2 級となる *curvilinear polygon* (図2 参照) とする。そのとき、

$$\sigma_{ess}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \max_{j=1, \dots, n} \frac{1}{2} \left| \frac{\pi - \alpha_j}{\pi} \right| \right\} \text{ on } \mathcal{H}.$$



¹³ さらに詳しくは、[44] を参照

¹⁴ $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ については、内積 $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, (-\mathcal{S}_{\partial\Omega})^{-1}v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$ を考えておけば、 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ と同値なヒルベルト空間上の自己共役作用素と考えられる。

¹⁵ エネルギー空間におけるノイマン・ポアンカレ作用素の研究は [9, 10, 44, 78] などを参照。

また、関数空間 \wp として $L^2(\partial\Omega)$ や $C(\partial\Omega)$ などとすると、ノイマン・ポアンカレ作用素は自己共役でないが、例えば、 $K_{\partial\Omega}$ の essential norm¹⁶を取ってみると、

$$\|K_{\partial\Omega}\|_{L^2 \text{ ess}} = \frac{1}{2} \sin \sup_i \left| \frac{\pi - \alpha_i}{2} \right|, \quad \|K_{\partial\Omega}\|_{C \text{ ess}} = \frac{1}{2} \sup_i \left| \frac{\pi - \alpha_i}{\pi} \right| \quad (17)$$

が示されている¹⁷[62, 71]. ここで注意すべきは、関数空間によってスペクトル半径の挙動が変化していくことにある. L^p 空間や重み付き関数空間についても、偏微分方程式の境界値問題の可解性や Garelkin 法にも関連して歴大な研究がなされている [78].

4.0.2. 角のある領域 (3次元)

3次元の場合、 $d\Omega_x(y) = \partial_{n_y} E(x, y) ds_y$ とおくと、

$$\|K_{\partial\Omega}\|_{C \text{ ess}} = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x \in \partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \int_{0 < |x-y| < \delta} |d\Omega_x(y)| \quad (18)$$

となっている¹⁸. ただし、エネルギー空間 \mathcal{H} 上については、部分的にしか解決されていない¹⁹.

定理 4.2. [36] $\partial\Omega$ を 3次元空間の中の回転面とする. 1点 $x \in \partial\Omega$ のみで 2α の opening angle を持ち、1点を除いて C^4 級とする. このとき、ルジャンドル陪多項式 $P_\lambda^n(x)$ を用いて、

$$\Sigma_n = \left\{ \frac{P_{i\xi-1/2}^n(\cos \alpha) \frac{dP_{i\xi-1/2}^n(-\cos \alpha)}{dx} - P_{i\xi-1/2}^n(-\cos \alpha) \frac{dP_{i\xi-1/2}^n(\cos \alpha)}{dx}}{P_{i\xi-1/2}^n(-\cos \alpha) \frac{dP_{i\xi-1/2}^n(\cos \alpha)}{dx} + P_{i\xi-1/2}^n(\cos \alpha) \frac{dP_{i\xi-1/2}^n(-\cos \alpha)}{dx}} \mid -\infty \leq \xi \leq \infty \right\}$$

とおくと、

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Sigma_n.$$

3次元においても、関数空間に応じてスペクトルの構造は変化していく. 例えば、 L^2 空間上の場合にも、角が一点しかない回転面についてはスペクトルの解析が出来ているが、勿論、 \mathcal{H} 上の場合とは違う挙動を示す [36].

4.1. 滑らかな境界を持つ場合

境界が $C^{1,\alpha}$ ($\alpha > 0$) 級の場合には、積分核は

$$\partial_{n_y} E(x, y) \leq C|x-y|^{\alpha-n} \quad (x \neq y)$$

を満たし、ノイマン・ポアンカレ作用素は Weakly singular kernel と呼ばれる積分核を持つことになり、 \mathcal{H} 上でも $C(\partial\Omega)$ 上でも同じ固有値²⁰になる. 勿論、 $L^2(\partial\Omega)$ 上でも同じ固有値を持つことになるので、それらを多重度を含めて

$$\sigma_p(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \{ \lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid |\lambda_0(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| > |\lambda_1(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \geq |\lambda_2(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \geq \dots \}$$

¹⁶ Essential spectral radius と考えても良い

¹⁷ $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ の essential norm は、 C が \wp 上のコンパクト作用素全体を動くときの作用素ノルム $\|K_{\partial\Omega} - C\|_{\wp}$ の下限

$$\|K_{\partial\Omega}\|_{\wp \text{ ess}} := \inf_C \|K_{\partial\Omega} - C\|_{\wp}$$

として定義される.

¹⁸ 詳細は、[78] の参考文献を参照

¹⁹ 角の近傍で回転面にならない場合、立方体の表面なども含めて未解決になっている.

²⁰ 以下、0 固有値は考えないことにする.

と書くことにする. 実は, 定数関数1について $\mathcal{K}_{\partial\Omega}[1] = 1/2$ であり, $\lambda_0(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = 1/2$ は単純固有値になっている. また, 正と負の固有値がありうるので, それぞれ

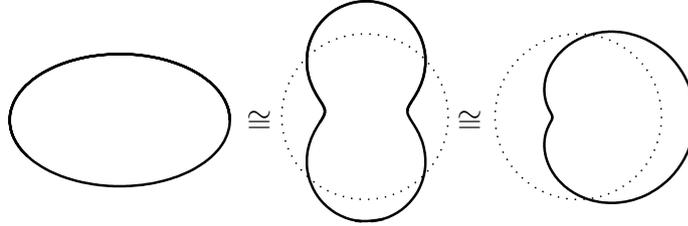
$$\begin{aligned}\sigma_p^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) &= \{ \lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid \lambda_0^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) > \lambda_1^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \geq \lambda_2^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \geq \dots \}, \\ \sigma_p^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) &= \{ \lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid \lambda_1^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \lambda_2^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \lambda_3^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \dots \}\end{aligned}$$

と表しておく. 固有値は関数空間によらないので, 以下では $L^2(\partial\Omega)$ 理論と考えて差し支えない.

4.1.1. 2次元の場合

2次元の場合には解析関数を用いることによって, $\lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = -\lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$ ($j = 1, 2, \dots$) が示されている [19, 58]. さらに, 固有値はメビウス変換不変である [38, 67]. つまり, ノイマン・ポアンカレ作用素に対する等スペクトルな図形が表れる (下図は, 楕円を円 (点線) で反転変換した図形の例).

等スペクトル曲線 (ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値はメビウス変換不変)



$$\sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Ellipse}}) = \sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Hippopede}}) = \sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Limaçon de Pascal}})$$

(具体例) (楕円) $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (} a > b)\}$ とすると,

$$\Rightarrow \sigma_p(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \left\{ \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^j, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

具体例をみても, $\lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = -\lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$ ($j = 1, 2, \dots$) となっている.

以下では, 固有値の漸近挙動を調べることを主題にしたい²¹. 境界 $\partial\Omega$ が $C^{k,\alpha}$ 級の場合には, 一般論の応用として既に定理 3.2 を得ている. つまり, 境界の滑らかさに応じて, 固有値の絶対値の多項式減少が分かっている. さらに, 境界が解析的な場合には, 指数減少を示すことが出来ている.

定理 4.3. [13] 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の境界 $\partial\Omega$ を実解析的とする. G_ϵ を境界の *maximal Grauert tube* とする. このとき, 任意の $\alpha < \epsilon$ に対し

$$\lambda_j = o(e^{-\alpha j}) \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

ここで, maximal Grauert radius の詳細な定義は省略するが ([13] 参照), $\partial\Omega$ が楕円の場合には $\epsilon = \left| \log \left(\frac{a-b}{a+b} \right) \right|$ となるのが直接計算出来て, 具体例 (上記) と比較すれば評価が最善であることが分かる.

²¹ 固有値の研究では, 1 番目の固有値を調べることも多い. 例えば, Ω を凸領域とするとき, 閉曲線 $\partial\Omega$ の曲率の最大値を R とおくと,

$$\lambda_1(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \frac{1}{2}(1 - |\partial\Omega|/2\pi R)$$

となっている [68], [77].

4.1.2. 3次元の場合

3次元の場合, 滑らかな境界は曲面となるが, 2次元の場合とは挙動が大きく違う. 実際, 球面 $\partial\Omega = S^2$ の場合, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値は Poincaré [61] によって求められており, 並べて書いてみると

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_1, \underbrace{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}}_3, \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}}_5, \dots, \underbrace{\frac{1}{2(2k+1)}, \dots, \frac{1}{2(2k+1)}}_{2k+1}, \dots$$

となっている. 正と負の固有値の対称性もない上, 負の固有値が現れることもない. さらに, 固有値の漸近挙動は, $j = k^2$ 番目を数えてみると

$$\lambda_j(\mathcal{K}_{S^2}) \sim \frac{1}{4}j^{-1/2} \quad (19)$$

であることが容易に分かる. 2次元のときと違いをみると, 次のような問題点がある.

(問題点)

- (問題1) 境界形状によって, 正と負の固有値が現れるか.
- (問題2) 固有値の漸近挙動を求めることが出来るか.
- (問題3) 固有値はメビウス変換不変になるか.

これらについて一般的に答えるために, 次のような結果を得た.

定理 4.4. [53] Ω を $C^{2,\alpha}$ 級 ($\alpha > 0$) の有界領域とする. このとき,

$$|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} j^{-1/2}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (20)$$

ただし, $W(\partial\Omega)$ と $\chi(\partial\Omega)$ はそれぞれ境界曲面上の Willmore energy と オイラー標数を表す.

補足として, Willmore energy とは境界曲面上の平均曲率を H とするとき

$$W(\partial\Omega) := \int_{\partial\Omega} H^2(x) dS_x \quad (21)$$

で与えられる量であり, Blaschke の定理 [18, 48, 79] によって, メビウス変換不変量になることが知られている. 結局, オイラー標数は位相不変量であるから, $|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})|$ の漸近挙動はメビウス変換不変である.

勿論, 球面の場合 $W(S^2) = 4\pi$, $\chi(S^2) = 2$ であるから,

$$|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} j^{-1/2} \sim \frac{1}{4}j^{-1/2} \quad (22)$$

となり, (19) と一致することも確かめられる.

さらに正と負の固有値の漸近挙動について求めることが出来て, 次の結果を得た.

定理 4.5. [54] Ω を滑らかな境界を持つ有界領域とする. そのとき,

$$\lambda_j^\pm(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \sim \pm C_\pm(\partial\Omega)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}}, j \rightarrow \infty. \quad (23)$$

ただし, $C_\pm(\partial\Omega)$ は, $k_1(x), k_2(x)$ を $x \in \partial\Omega$ における主曲率として,

$$C_\pm(\partial\Omega) = \frac{1}{128\pi^2} \int_{\partial\Omega} dS_x \int_0^{2\pi} [(k_1(x) \cos^2 \theta + k_2(x) \sin^2 \theta)_\mp]^2 d\theta, \quad (24)$$

で与えられる. 積分に含まれる $(\dots)_\mp$ は, 括弧内の負と正の部分を表す²².

ここで,

$$C(\partial\Omega) = C_+(\partial\Omega) + C_-(\partial\Omega)$$

に注意すれば, “滑らかな境界の場合” には, 定理 4.5 は定理 4.4 の一般化になっている. また, Gauss 曲率が負になる場合, すなわち,

$$K(x) = k_1(x)k_2(x) < 0$$

となる点 $x \in \partial\Omega$ が存在すれば $C_-(\partial\Omega) > 0$ となり, 無限個の負の固有値が現れる²³. 狭義凸領域 Ω に対しては, 負の固有値は高々有限個となることも示した [54, Theorem 3]. これは, (問題 1) に対する一つの答になっている.

また, 適当な楕円面 (楕円面 $\partial\Omega$ に対して, $C_-(\partial\Omega)=0$) を球面で反転した曲面 $h(\partial\Omega)$ 上には Gauss 曲率が負になる点が現れるので, $C_-(h(\partial\Omega)) > 0$ となり負の固有値が無限個存在する. つまり, 固有値 $\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$ はメビウス変換によって変化するが, $|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})|$ の漸近挙動はメビウス変換不変である. このことが, (問題 3) に対する一つの答と言って差し支えないと思う.

定理 4.4 の証明の概略. 手順を追って説明していく.

(Step1) まずは, ノイマン・ポアンカレ作用素を, -1 階の同次擬微分作用素で近似する. その際, 境界近傍でノイマン・ポアンカレ作用素の積分核を Taylor 展開し, 局所座標で -1 階の同次擬微分作用素で書き直すと次を得る [53].

補題 4.6 (Key Lemma). Ω を $C^{2,\alpha}$ 有界領域とするととき, ノイマン・ポアンカレ作用素は境界 $\partial\Omega$ 上で定義された擬微分作用素で近似できる,

$$\mathcal{K}_{\partial\Omega} \equiv P = Op\left(\left[\frac{L(x')\xi_2^2 - 2M(x')\xi_1\xi_2 + N(x')\xi_1^2}{4 \det(g_{ij}) \left\{ \sqrt{\sum_{j,k} g^{jk}(x')\xi_j\xi_k} \right\}^3}\right]\right) \quad \text{modulo Hilbert-Schmidt operators.}$$

ただし, L, M, N は第二基本量, g_{jk} ($j, k = 1, 2$) は第一基本量を表し, (g^{jk}) は (g_{jk}) の逆行列を表す.

²² 通常, 微分幾何の主曲率の定義には (内方向) 法線方向微分を利用する (ノイマン・ポアンカレ作用素の定義では逆の外方向を利用する) ので, 積分の中の式では \mp を利用している [63].

²³ $\partial\Omega$ がトーラスの場合には, 負の固有値が無限個存在する別証明が分かっている [15]. 負の固有値が一個以上存在するための十分条件も分かっている [38]. さらに, 楕円面 (凸領域) の場合には, 有限個の負の固有値が存在する具体例が知られている [5, 6, 7, 46].

(Step2) 定理 3.3 によって, 擬微分作用素の特異値 $s_j(P)$ の漸近挙動は,

$$s_j(P) \sim C(\partial\Omega)^{1/2} j^{-1/2} \quad j \rightarrow \infty.$$

ここで, 定数 $C(\partial\Omega)$ を計算するために, $\partial\Omega$ に等温座標系²⁴を $g_{11}(x) = g_{22}(x) = E(x)$, $g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0$ ととり, Gauss-Bonnet の定理 [63] を利用すれば,

$$\begin{aligned} C(\partial\Omega) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial\Omega} \int_{S^1} \left[\frac{L(x)\xi_2^2 - 2M(x)\xi_1\xi_2 + N(x)\xi_1^2}{4 \det(g_{ij}) \left\{ \sqrt{\sum_{j,k} g^{jk}(x)\xi_j\xi_k} \right\}^3} \right]^2 d\xi dx \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial\Omega} \int_{S^1} \left[\frac{L(x) \cos^2 \theta - 2M(x) \cos \theta \sin \theta + N(x) \sin^2 \theta}{4E^2(x)E^{-3/2}(x)} \right]^2 d\xi dx \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \int_{\partial\Omega} \int_{S^1} \frac{(L(x) \cos^2 \theta - 2M(x) \cos \theta \sin \theta + N(x) \sin^2 \theta)^2}{E(x)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{(\frac{3\pi}{4}L^2(x) + \frac{3\pi}{4}N^2(x) + \pi M^2(x) + \frac{\pi}{2}L(x)N(x))}{E(x)} dx \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{(\frac{3\pi}{4}L^2(x) + \frac{3\pi}{4}N^2(x) + \pi(L(x)N(x) - E^2(x)K(x)) + \frac{\pi}{2}L(x)N(x))}{E(x)} dx \\ &= \frac{3}{512\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{L(x) + N(x)}{E(x)} \right)^2 - \frac{4}{3}K(x) \right] E(x) dx \\ &= \frac{3}{512\pi} \int_{\partial\Omega} 4H^2(x) dx - \frac{1}{64}\chi(\partial\Omega) \\ &= \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi}. \end{aligned}$$

(Step3) $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ は P のシンボルが実数であることから分かるように, almost self-adjoint であり, 定理 3.4 と定理 3.5 から,

$$|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \sim s_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} j^{-1/2}$$

となって, 定理 4.4 を得る. □

次に, 定理 4.5 については, 特異値を使うことなく計算する必要がある.

定理 4.5 の証明の概略. (Step1) Plemelj の原理 (16) によって,

$$\sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}^{-1} \mathcal{K}_{\partial\Omega} \sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}$$

は, $L^2(\partial\Omega)$ において自己共役な作用素になっている.

(Step2) 境界が滑らかならば, ノイマン・ポアンカレ作用素と境界上の一重層ポテンシャル作用素 $-\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ は, とともに -1 階の poly-homogeneous な擬微分作用素になる. さらに一重層ポテンシャル作用素 $-\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ は positive definite な作用素である. そこで, Seeley の定理 ([2, 69, 70, 72] など参照) によって, $\sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}$ は $-1/2$ 階の擬微分作用素になる.

擬微分作用素の積公式 [2, 37, 72] を使えば, 定理 4.4 の証明と同様に,

$$\sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}^{-1} \mathcal{K}_{\partial\Omega} \sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}} \equiv P \quad \text{modulo Hilbert-Schmidt operators.}$$

²⁴ 曲面は二次元なので, いつでも等温座標系が存在する [27].

次に、多様体 $\partial\Omega$ を開集合 U_j に分割する (delocation). すなわち, $U_j \cap U_k = \emptyset (j \neq k)$ となり, $\partial\Omega = \bigcup \bar{U}_j$ となるように U_j を選ぶ. このとき, 擬微分作用素 $P_{m,n} = \chi_m(x) P \chi_n(x)$ を考えれば 擬微分作用素 P は, 自己共役な作用素 Q を使って

$$\sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}^{-1} \mathcal{K}_{\partial\Omega} \sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}} \equiv P \equiv Q = \sum_{m,n} P_{m,n} \quad \text{modulo Hilbert-Schmidt operators}$$

として表現される (Pseudo locality と呼ばれる). 加えて, 定理 3.3 は本質的に min-max 法を利用しているため, 再度見直すと, Q に対して

$$\lambda_j^\pm(Q) \sim \pm C_\pm(\partial\Omega)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}}, j \rightarrow \infty$$

を満たすことが示せる [54].

(Step3) 最後に, 正負の固有値の漸近挙動について摂動による安定性を示す. 実際, Kato の定理 [42] によって, 自己共役なコンパクト作用素 A, B に対して, $A - B$ がヒルベルト・シュミット作用素であれば, 正負の固有値の漸近挙動もそれぞれ一致する.

以上をすべてまとめて,

$$\lambda_j^\pm(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \lambda_j^\pm(\sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}^{-1} \mathcal{K}_{\partial\Omega} \sqrt{-\mathcal{S}_{\partial\Omega}}) \sim \lambda_j^\pm(Q) \sim \pm C_\pm(\partial\Omega)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}}, j \rightarrow \infty \quad (25)$$

□

5. 応用

最後に応用例として, 結果を載せる形で Cloaking と呼ばれる現象について記載する. まずは, §2.2 で述べたメタ材料の plasmon eigenvalues について漸近挙動を求めることができる. 関係式 (5) を用いて,

定理 5.1. [54] $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな有界領域とすると,

$$\epsilon_j - 1 = \frac{-2\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})}{\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) - 1/2} \sim 4C_\pm(\partial\Omega)j^{-1/2}, j \rightarrow \infty. \quad (26)$$

つまり, $\{\epsilon_j\}$ は 1 に収束する数列で, 領域形状に応じた収束のレートが分かる. さらに, 散逸 $\delta > 0$ とするとき, 誘電率 ϵ を

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_c + i\delta & \text{in } \Omega, \\ \epsilon_m & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (27)$$

と表すと, Cloaking の定式化では次の方程式を解くことになる [8, 10, 20, 40, 41, 47, 51],

$$\begin{cases} \nabla \cdot \epsilon \nabla u = a \cdot \nabla \delta_z & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ u(x) = O(|x|^{-2}) & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (28)$$

ただし, $a \neq 0$ は定ベクトル, 外部領域の点 $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ に対してデルタ関数を δ_z としている. 方程式 (28) に対し,

$$\|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty \quad \text{as } \delta \downarrow 0. \quad (29)$$

となるときに, Cloaking が起きると呼ぶ. 実際, plasmon eigenvalue に対応して Cloaking が起きる [10]. さらに, $\epsilon_c = -\epsilon_m$ のときに Cloaking が発生することもあり, このとき,

Cloaking by anomalous localized resonance (CALR) と呼ばれる. 例えば2次元の場合, $\partial\Omega$ が特別な楕円ならば (CALR) が起きる. また, 3次元で $\partial\Omega$ が球面ならば, (CALR) が起こらないことが分かっている [10].

この問題に対して, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の漸近挙動を用いると次を得る.

定理 5.2. [13] $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を狭義凸な滑らかな領域とする. $\text{Ker}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \emptyset$ のとき, (CALR) は起こらない. すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} < C \quad \text{as } \delta \rightarrow 0. \quad (30)$$

実際, エネルギー空間 \mathcal{H} で正規化されたノイマン・ポアンカレ作用素の固有関数 $\Psi_j(x)$ を用いて $\alpha_j(z) = (\lambda_j - \frac{1}{2}) a \cdot \nabla \mathcal{S}_{\partial\Omega}[\Psi_j](z)$ とおくと

$$\|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \preceq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\alpha_j(z)|^2}{\delta^2 + \lambda_j^2(\mathcal{K}_{\partial\Omega})} \quad (31)$$

が示されており, 定理 4.4 によって固有値 $\lambda_j^2(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$ を評価することが出来る. さらに, 補題 4.6 によって, $\partial\Omega$ が狭義凸であるなら, ノイマン・ポアンカレ作用素が楕円型になっており, $|\alpha_j(z)|$ は任意のオーダー j^{-s} よりも早く 0 に収束されることが示される.

また, $\alpha_j(z)$ に含まれる

$$u_j(x) = \mathcal{S}_{\partial\Omega}[\Psi_j](x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

を surface plasmon と呼ぶが, 名前が示すように, 関数列 $\{u_j\}$ が境界 $\partial\Omega$ 上に何らかの意味で収束することですら, 数学的には全く分かっていなかった. そこで, 境界 $\partial\Omega$ に H^1 の意味で収束することも示した.

定理 5.3 (Surface plasmon [13]). 定理 5.2 の仮定の下,

$$\emptyset \neq \text{supp}\{u_j\} \subset \partial\Omega \quad (32)$$

となる. ここで, 関数列 $\{u_j\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ に対する *support* は, 補集合の記号を c として次のように定義されている.

$$(\text{supp}\{u_j\})^c := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{ある } x \text{ の近傍 } B_x \text{ が存在して } \lim_{j \rightarrow 0} \|u_j\|_{H^1(B_x)} = 0 \}.$$

このように, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有関数に関係した量も計算できるようになって来ている.

参考文献

- [1] M. Agranovich, *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2015.
- [2] M. S. Agranovich, *Elliptic Operators on Closed Manifolds*, In Partial Differential Equations VI, Encyclopedia of Mathematical Sciences Volume 63, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov and N.N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin, 1999.

- [4] L. V. Ahlfors, *Remarks on the Neumann-Poincaré integral equation*, Pacific. J. Math., **2** (1952), 271–280.
- [5] J. F. Ahner, *Some spectral properties of an integral operator in potential theory*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **29** (1986), 405–411.
- [6] J. F. Ahner, *On the eigenvalues of the electrostatic integral operator II*, J. Math. Anal. Appl., **181** (1994), 328–334.
- [7] J. F. Ahner and R. F. Arenstorf, *On the eigenvalues of the electrostatic integral operator*, J. Math. Anal. Appl., **117** (1986), 187–197.
- [8] H. Ammari, G. CIAOLO, H. Kang, H. Lee and G. W. Milton. *Spectral theory of a Neumann-Poincaré-type operator and analysis of cloaking due to anomalous localized resonance*, Arch. Ration. Mech. An. **208** (2013), 667–692.
- [9] H. Ammari, H. Kang, and H. Lee, *Layer potential techniques in spectral analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, **153** American Math. Soc., Providence RI, (2009).
- [10] K. Ando and H. Kang, *Analysis of plasmon resonance on smooth domains using spectral properties of the Neumann-Poincaré operator*, J. Math. Anal. Appl. **435**(1) (2016), 162–178.
- [11] K. Ando, H. Kang and Y. Miyanishi, *Elastic Neumann-Poincaré operators on three dimensional smooth domains: Polynomial compactness and spectral structure*, Int. Math. Res. Notices, rnx258, (2017).
- [12] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi, *Exponential decay estimates of the eigenvalues for the Neumann-Poincaré operator on analytic boundaries in two dimensions*, J. Integral Equations Applications, **30**(4) (2018), 473–489.
- [13] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi, *A remark on non-cloaking by anomalous localized resonance for the electro-static system in three dimensional smooth convex domains*, in preparation.
- [14] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi and E. Ushikoshi, *The first Hadamard variation of Neumann-Poincaré eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 1073–1080.
- [15] K. Ando, Y. Ji, H. Kang, D. Kawagoe, and Y. Miyanishi, *Spectral structure of the Neumann-Poincaré operator on tori*, to appear in Ann. I. H. Poincaré-AN, arXiv:1810.09693.
- [16] M. Birman and M. Solomyak, *Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropically homogeneous symbols*, Vestnik Leningrad Univ. **13** (1977), 13–21; English translation in Vestin. Leningr. Univ. Math. **10**, 237–247.
- [17] M. Birman, D. Yafaev, *Asymptotic behavior of the spectrum of the scattering matrix. (Russian) Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions*, 13. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **110** (1981), 3-29. English translation in: J. Sov. Math. **25** (1984), 793-814.
- [18] W. Blaschke, *Voresungen Über Differentialgeometrie III*, Berlin: Springer (1929)
- [19] J. Blumenfeld and W. Mayer, *Über poincaré fundamental funktionen*, Sitz. Wien. Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse **122**, Abt. IIa (1914), 2011–2047.
- [20] E. Bonnetier and F. Triki, *On the spectrum of Poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in 2D*, Arch. Ration. Mech. An. **209** (2013), 541–567.
- [21] T. Carleman, *Über das Neumann-Poincarésche problem für ein gebiet mit ecken*, Almqvist and Wiksells, Uppsala, 1916.
- [22] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I*, Wiley-Interscience, (1953).
- [23] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Au dulà des opérateurs pseudodifférentiels*, Asterisque **57** (1978), 1–185.

- [24] R. R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy Définie un Opérateur Borné sur L^2 Pour Les Courbes Lipschitziennes*, **116** (2) (1982), 361–387
- [25] B.E.J. Dahlberg: *On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 -domains*, *Studia Math.* **66** (1979) 1324.
- [26] J. Delgado and M. Ruzhansky, *Schatten classes on compact manifolds: Kernel conditions*, *J. Funct. Anal.*, **267** (2014), 772–798.
- [27] D. Deturck and L. Kazdan, *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, **14** (3) (1981), 249–260.
- [28] M. Dostanić, *A theorem of Ky-Fan type*, *Matematički Vesnik*, **47** (1995), 7–10.
- [29] E. I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, *Acta Mathematica*, **27** (1903), 365–390.
- [30] M. I. Gil', *Lower bounds for eigenvalues of Schatten-Von Neumann operators*, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **8**(3) (2007), Art. 66.
- [31] M. I. Gil', *Operator functions and localization of spectra*, *Lectures Notes in Mathematics*, vol.1830, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [32] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, *Trans. Mathem. Monographs*, **18**: (1969) Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [33] D. Grieser, *The plasmonic eigenvalue problem*, *Rev. Math. Phys.* **26** (2014), 1450005.
- [34] G. Grubb, *Spectral asymptotics for nonsmooth singular green operators*, *Comm. P. D. E.*, **39**: (2014), 530–573.
- [35] J. Helsing, H. Kang and M. Lim, *Classification of spectra of the Neumann–Poincaré operator on planar domains with corners by resonance*, *Ann. I. H. Poincaré-AN*, to appear., arXiv:1603.03522, 2016.
- [36] J. Helsing and K.-M. Perfekt, *The spectra of harmonic layer potential operators on domains with rotationally symmetric conical points*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués* **118** (2018), 235287.
- [37] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
- [38] Y. Ji and H. Kang, *A concavity condition for existence of a negative Neumann-Poincaré eigenvalue in three dimensions*, *Proc. Amer. Math.* **147** (2019), 3431-3438
- [39] Y. Jung and M. Lim, *A decay estimate for the eigenvalues of the Neumann–Poincaré operator in two dimensions using the Grunsky coefficients*, arXiv:1811.05070
- [40] H. Kang, K. Kim, H. Lee, J. Shin and S. Yu, *Spectral properties of the Neumann–Poincaré operator and uniformity of estimates for the conductivity equation with complex coefficients*, *J. London Math. Soc. (2)* **93** (2016), 519–546.
- [41] H. Kang, M. Lim and S. Yu, *Spectral resolution of the Neumann-Poincaré operator on intersecting disks and analysis of plasmon resonance*, arXiv:1501.02952, 2015.
- [42] T. Kato, *Variation of discrete spectra*, *Comm. Math. Phys.*, **111**: (1987), 501–504.
- [43] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1953.
- [44] D. Khavinson, M. Putinar, and H.S. Shapiro, *Poincaré's variational problem in potential theory*. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **185**(1) (2007), 143–184.
- [45] Ky Fan, *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators*, *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.* **37**, (1951), 760–766.
- [46] E. Martensen, *A spectral property of the electrostatic integral operator*, *J. Math. Anal. Appl.*, **238** (1999), 551–557.
- [47] I. D. Mayergoyz, D. R. Fredkin and Z. Zhang, *Electrostatic (plasmon) resonances in nanoparticles*, *Phys. Rev. B*, **72** (2005), 155412.

- [48] F. C. Marques and A. Neves, *Min-Max theory and the Willmore conjecture*, *Anal. Math.* **179** (2014), 683–782.
- [49] V. G. Maz'ya, *Boundary Integral Equations*, *Itogi Nauki i Tekhniki, Fundamental Directions*, vol. 27, Analysis-4, Viniti, 1988, 131–228.
- [50] C. A. McCarthy, C_p , *Israel J. Math.*, **5** (1967), 249–271.
- [51] G.W. Milton and N.-A.P. Nicorovici, *On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance*, *Proc. R. Soc. A* **462** (2006), 3027–3059.
- [52] S. G. Mikhlin: *Mathematical Physics, an Advanced Course*. North Holland Pub. Comp., Amsterdam (1970).
- [53] Y. Miyanishi, *Weyl's law for the eigenvalues of the Neumann–Poincaré operators in three dimensions: Willmore energy and surface geometry*, arXiv:1806.03657.
- [54] Y. Miyanishi and G. Rozenblum, *Eigenvalues of the Neumann–Poincaré operator in dimension 3: Weyl's law and geometry*, *St. Petersburg Jour.* **31** (2), 248–268.
- [55] Y. Miyanishi and G. Rozenblum, *Spectral properties of the Neumann–Poincaré operator in 3D elasticity*, arXiv: 1904.09449.
- [56] Y. Miyanishi and T. Suzuki, *Eigenvalues and eigenfunctions of double layer potentials*, *Trans. Amer. Math.* **369** (2017), 8037–8059.
- [57] C. Neumann, *Über die Methode des arithmetischen Mittels, Erste and zweite Abhandlung*, Leipzig 1887/88, in *Abh. d. Kgl. Sächs Ges. d. Wiss.*, IX and XIII.
- [58] J. Plemelj, *Potentialtheoretische Untersuchungen, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen, Gesellschaft zu Leipzig*, Teubner-Verlag, Leipzig, (1911).
- [59] K. Perfekt and M. Putinar, *Spectral bounds for the Neumann–Poincaré operator on planar domains with corners*, *J. Anal. Math.* **124** (2014), 39–57.
- [60] K. Perfekt and M. Putinar, *The essential spectrum of the Neumann–Poincaré operator on a domain with corners*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **223** (2017), no. 2, 1019–1033.
- [61] H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*, *Acta Math.* **20** (1897), 59–152.
- [62] J. Radon, *Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential*, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien* **128** (1919) 11231167.
- [63] Y. G. Reshetnyak, *Two-Dimensional Manifolds of Bounded Curvature*, in *Geometry IV. Nonregular Riemannian Geometry*, English Translation by E. Primrose, Springer Encyclopedia of Mathematical Sciences, **70** (1993), 3–163.
- [64] S. Ritter, *The spectrum of the electrostatic integral operator for an ellipsoid*, in “Inverse Scattering and Potential Problems in Mathematical Physics,” (R.F.Kleinman, R.Kress, and E.Marstensen, Eds.), Lang, Frankfurt/Bern, (1995), 157–167.
- [65] G. Rozenblum and G. Tashchian, *Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces*, *Russ. J. Math. Phys.* **13** (3), (2006), 326–339.
- [66] M. Schiffer, *The Fredholm eigenvalues of plane domains*, *Pacific J. Math.* **7** (1957), 1187–1225.
- [67] M. Schiffer, *Fredholm eigenvalues and conformal mapping*, *Autovalori e autosoluzioni, C.I.M.E. Summer Schools* **27**, Springer (2011), 203–234.
- [68] G. SCHOBER, *Neumann's lemma*, *Proc. AMS* **19**, (1968), 306–311.
- [69] R. Seeley, *Singular integrals and boundary value problems*, *American Journal of Mathematics*, **88** (4), 1966, 781–809.
- [70] R. Seeley, *Complex Powers of an Elliptic Operator*, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, **10** (1967), 288–307.
- [71] V. Yu. Shelepov, *On the index of an integral operator of the potential type in the space L_p* , *Sov. Math., Dokl.* 10/A, (1969), 754–757.

- [72] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory (Second Edition)*, Springer, (2001).
- [73] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, 2nd ed., Amer. Math. Soc. (2005).
- [74] O. Steinbach and W. L. Wendland, *On C. Neumann's method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries*, J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 733–748.
- [75] M. E. Taylor, *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators, and Layer Potentials*, Mathematical Surveys and Monographs, **81** American Math. Soc., Providence RI, (2000).
- [76] G.C. Verchota, *Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 572–611.
- [77] S. Warschawski, *On the solution of Lichtenstein-Gersgorin integral equation in conformal mapping: I. Theory*, Nat. Bur, Standards Appl. Math. Ser. **42**, (1955), 7–29
- [78] W. L. Wendland, *On the Double Layer Potential*, In: Cialdea A., Ricci P.E., Lanzara F. (eds) *Analysis, Partial Differential Equations and Applications. Operator Theory: Advances and Applications*, **193** (2009) Birkhäuser Basel
- [79] J. H. White, *A global invariant of conformal mappings in space*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 162–164.
- [80] S. Zaremba, *Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composé de polygones curvilignes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 10 (1904), 395–444.