作用素幾何平均に纏わる不等式について

藤井　正俊

大阪教育大学　名誉教授

1　はじめに

ここでは、ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を単に作用素と呼ぶことにします。作用素 A が positive ($A \geq 0$) であるとは,

$$(Ax, x) \geq 0 \quad x \in H$$

が成り立つこととします。　特に、A が positive かつ invertible のとき、$A > 0$ で表します。また、自己共役作用素 A, B に対して、$A - B \geq 0$ によって、作用素順序 $A \geq B$ が自然に導入されます。$\mathbb{R}^+$ 上で定義された連続関数 f による functional calculus がこの順序を保存する、すなわち

$$A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(A) \geq f(B)$$

のとき、f を作用素単調といいます。ここで、冪関数について重要な事実を述べねばなりません。作用素の非可換性が働いて、

$t \;\rightarrow\; t^\alpha$ **は、**$\alpha \in [0, 1]$ **のときのみ、作用素単調である。**

通常、これは Löwner-Heinz inequality と呼ばれています。[28], [24], [30] (以下 (LH) で表す。)

t^2 が作用素単調でないことは、次の行列から知られます：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、これより、$\alpha > 1$ のとき、t^α は作用素単調ではないことが知られます。

さて、(LH) より、$\alpha \in [0, 1]$ に対して、α-幾何平均 $\#_\alpha$ が次のような形で定義されます：

$$A \#_\alpha B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0, \ B \geq 0,$$

cf. [31], [32], [1], 一般的には、Kubo-Ando [27] による作用素平均の理論によって、非負作用素単調関数と作用素平均の間には、アフィン-同型が

$$A\ \sigma\ B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0,\ B \geq 0$$

によって与えられます。特に、

$$f(x) = 1\ \sigma\ x$$

は作用素平均 σ の表現関数と呼ばれています。なお、作用素平均は、次の３条件を満たす２項演算を言います：

Monotonicity: $A \leq C,\ B \leq D\ \Rightarrow\ A\ \sigma\ B \leq C\ \sigma\ D$

Upper semi-continuity: $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B\ \Rightarrow A_n\ \sigma\ B_n \downarrow A\ \sigma\ B$

Transformer inequality: $T^*(A\ \sigma\ B)T \leq (T^*AT)\ \sigma\ (T^*BT)$ for all T

(Normalization: $1\ \sigma\ 1$)

2 (LH) に連関する不等式

最初に、(LH) と同値なノルム不等式を幾つか挙げます。[11], [21]

Theorem 2.1. *Let* $A,\ B \geq 0$.

(1) $\|B^t A^t B^t\| \leq \|BAB\|^t$ *for* $0 \leq t \leq 1$.

(2) $\|A^t T B^{1-t}\| \leq \|AT\|^t \|TB\|^{1-t}$ *for* $0 \leq t \leq 1$ *and arbitrary* T.

(3) $\|ABA\| \leq \|A^2 B\|$

(4) $\|TS\| \geq \|ST\|$ *if* ST *is selfadjoint.*

(5) $\|(A \#_t B)^{\frac{1}{2}} (C \#_t D)^{\frac{1}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}\|^{1-t} \|B^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}\|^t$ *for* $0 \leq t \leq 1$.

(6) $(T^*AT)^t \geq T^* A^t T$ *for contraction* T *and* $0 \leq t \leq 1$.

(1) は、Araki [3] によりますが、次のようにも変形できます：

(1') $\|B^t A^t B^t\| \geq \|BAB\|^t$ for $t \geq 1$.

(1") $\|A^t B^t\| \leq \|AB\|^t$ for $0 \leq t \leq 1$.

(5) は Corach-Porta-Recht [6] 、(6) は Hansen [23] によります。

一方、Heinz [24] は、(LH) よりもう少し強い不等式を示しています：

Heinz inequality. Let $A,\ B \geq 0$. Then

$$\|AT + TB\| \geq \|A^t T B^{1-t} + A^{1-t} T B^t\| \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1 \text{ and arbitrary } T.$$

これにも同値な不等式が幾つかあります。[29], [5], [7], [8], [12], [15]

Theorem 2.2. (1) $\|R^*RT + TSS^*\| \geq 2\|RTS\|$ *for arbitrary* R, S, T.
(2) $\|STR^{-1} + S^{-1}TR\| \geq 2\|T\|$ *for invertible selfadjint* S, R *and arbitrary* T
(3) $\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|$ *for invertible selfadjint* S *and arbitrary* T
(4) $\|ReA^2T\| \geq \|ATA\|$ *for* $A \geq 0$ *and selfadjoint* T.
(5) $\|ReTS\| \geq \|ST\|$ *if* ST *is selfadjoint.*

Theorem 2.1 (4) と Theorem 2.2 (5) を比べることにより、Heinz 不等式が (LH) より強い不等式であることが分かります。また、 Theorem 2.2 (1) 等より、Heinz 不等式は、算術幾何平均不等式のノルム版だと解釈できます。

3 Ando-Hiai inequality

Ando-Hiai [2] による log-majorization theorem は、次のように表されています: For $\alpha \in [0, 1]$ and positive definite matrices A and B,

$$(A\#_\alpha B)^r \succ_{(\log)} A^r\#_\alpha B^r \quad (r \geq 1).$$

ところが実際に証明されているのは、次の作用素不等式

$$A\#_\alpha B \leq 1 \implies A^r\#_\alpha B^r \leq 1 \quad \text{for } r \geq 1$$

で、Ando-Hiai inequality (AH) と呼ばれています。 この 2 変数版への一般化は次の形で与えられます。 [13], [16], [15]

Generalized Ando-Hiai inequality (GAH).
If $A\#_\alpha B \leq 1$ for $\alpha \in [0, 1]$ and positive operators A, B, then $A^r\#_\beta B^s \leq 1$ for $r, s \geq 1$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}$.

(GAH) の表し方については、次の方が良いかもしれません：

If $A\#_{\frac{1}{q+1}}B \leq 1$ for some $q > 1$ and positive operators A, B, then $A^r\#_{\frac{r}{qs+r}}B^s \leq 1$ for $r, s \geq 1$.

それはさておき、(GAH) については、 2 つの one-sided 版は同値であって、さらにそれらは Furuta inequality の別表現であることが知られています。すなわち、

次の３つは同値:

(i) $A\#_\alpha B \le 1 \ \Rightarrow\ A^r\#_{\frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)}}B \le 1$ for $r \ge 1$.

(ii) $A\#_\alpha B \le 1 \ \Rightarrow\ A\#_{\frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)s}}B^s \le 1$ for $s \ge 1$.

(iii) Furuta inequality

さて、ごく最近の（AH) に関する発展として、次の結果が [33], [26] にあります。$\alpha \notin [0,1]$ に対して、２項演算 $\natural_\alpha$ を、α-geometric mean と全く同一の定義で与えます。 即ち, $A\natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$ for $A, B > 0$.

Theorem S. For $\alpha \in [-1, 0]$ and $A, B > 0$,

$$A\natural_\alpha B \le 1 \ \Rightarrow\ A^r\natural_\alpha B^r \le 1 \quad \text{for } r \in [0,1].$$

以前に、(AH) を一般化した手法が、Theorem S に対して有効かどうかであるが、次のことが成立します：

Lemma 3.1. *If $A\natural_\alpha B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A^r\natural_\beta B \le 1$ for $r \in [0,1]$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)}$.*

Lemma 3.2. *If $A\natural_\alpha B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A\natural_\beta B^s \le 1$ for $s \in [\frac{-2\alpha}{1-\alpha}, 1]$, where $\beta = \frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)s}$.*

ここで、s に関する制限 $s \in [\frac{-2\alpha}{1-\alpha}, 1]$ は、$\beta \in [-1, 0]$ を保証するためのものです。なお、このようなある種の制限が必要であることは検証できます。

この２つの補題を組み合わせることによって、Theorem S の一般化が得られます：

Theorem 3.3. *If $A\natural_\alpha B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A^r\natural_\beta B^s \le 1$ for $r \in [0,1]$ and $s \in [\frac{-2\alpha r}{1-\alpha}, 1]$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}$.*

4 Furuta inequality

よく知られているように、古田不等式は（LH) の見事な一般化であります。

Furuta Inequality (FI)

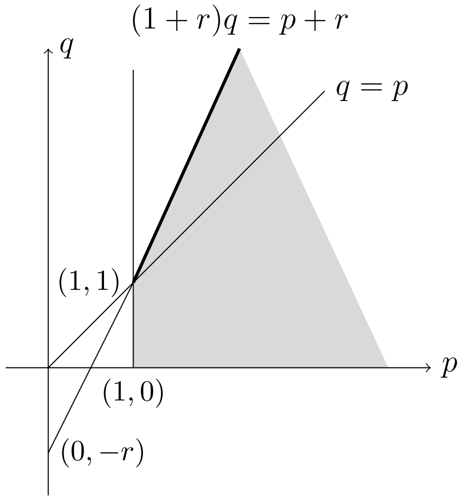
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i) $\quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

and

(ii) $\quad (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.



Furuta inequality に関する文献は、[19], [20], [9], [10], [34]、[15]　など多岐にわたります。

（FI) が (LH) を含んでいることは、$r = 0$ とすると、付帯条件が $q \geq p$ となることにより検証されます。一方で、(LH) より付帯条件において等号成立のときが最も重要で、α-geometric mean を用いてそれを表すと次のように整理されます：

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p \leq A$$

holds for $p \geq 1$.

（FI) をこのように表すと、Kamei [25] より精密な結果が得られます:

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p \leq B \ (\leq A)$$

holds for $p \geq 1$.

Lemma 2.1 を古田不等式の形式に翻訳すると次のようになります。

Theorem 4.1. *If $A \geq B > 0$, then*

$$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A$$

holds for $p \leq -1$ and $r \in [-1, 0]$.

5 Grand Furuta inequality

Ando-Hiai inequality の出現の後、Furuta 自身によって、それと (FI) を補完する作用素不等式が提案されました。[22], [14]

Grand Furuta inequality (GFI) *If* $A \geq B > 0$ *and* $t \in [0,1]$*, then*

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

holds for $r \geq t$ *and* $p, s \geq 1$*.*

実際、 (GFI) の下で、 (FI) 及び (AH) の位置は次のようになっています：

$$\text{(GFI) for } t = 1,\ r = s \iff \text{(AH)}$$

$$\text{(GFI) for } t = 0,\ (s = 1) \iff \text{(FI)}$$

さて、(GFI) も (FI) と同様に次のように表現できます:
If $A \geq B > 0$ *and* $t \in [0,1]$*, then*

$$A^{-r+t} \ \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \ (A^t \ \natural_s \ B^p) \leq A$$

holds for $r \geq t$ *and* $p, s \geq 1$*.*

従って、上記の議論と同様にして、 Theorem 2.3 を (GFI)-型で書き下すことができます：

Theorem 5.1. *If* $A \geq B > 0$*, then*

$$A^{-r+1}\natural_{\frac{r}{r+(p-1)s}}(A\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$*,* $r \in [0,1]$ *and* $s \in [\frac{-2r}{p-1}, 1]$*.*

この結果と (GFI) との比較から、次のことが期待されます:

Conjecture 5.2. *If* $A \geq B > 0$ *and* $t \in [0,1]$*, then*

$$A^{-r+t} \ \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}}(A^t\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$*,* $r \in [0,t]$ *and* $s \in [\frac{-2r}{p-t}, 1]$*.*

現時点で示せることは、次のところまでです：

Theorem 5.3. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}} (A^t \#_s B^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s \in [\max\{\frac{-t}{p-t}, \frac{-2r-(1-t)}{p-t}\}, 1]$.

なお、端の値 $s = \frac{-t}{p-t}, \frac{-2r-(1-t)}{p-t}$ では、成立していることが確かめられます。

Proposition 5.4. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}} (A^t \#_s B^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s = \frac{-2r-(1-t)}{p-t}$.

Proposition 5.5. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}} (A^t \#_s B^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s = \frac{-t}{p-t}$.

6 Bebiano-Lemos-Providência inequality

Bebiano-Lemos-Providência [4] は次のノルム不等式を提示しました。[4] この一般化は [17] で議論されています。

Bebiano-Lemos-Providência inequality (BLP)

$$\|A^{\frac{1+t}{2}} B^t A^{\frac{1+t}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for $A, B \geq 0$ and $s \geq t \geq 0$.

前節の結果の応用として、(BLP)の成立範囲を拡大することができます。その前段階として次のようなことを示します。

Lemma 6.1. *Suppose that $A, B > 0$.*

(1) *If $A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq A^{1+r}$ for some $p \leq -1$ and $r \in [-1,0]$, then $B^{1+r} \leq A^{1+r}$.*

(2) *If $A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq A^{1+r}$ for some $p \in [0,1]$ and $r \leq -1$, then $B^{1+r} \leq A^{1+r}$.*

Corollary 6.2. *Suppose that* $A, B > 0$.
(1) *If* $A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq A^{1+r}$ *for some* $p \leq -1$ *and* $r \in [-1, 0]$, *then* $B^{1+s} \leq A^{1+s}$ *for* $-1 \leq s \leq r$.
(2) *If* $A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq A^{1+r}$ *for some* $p \in [0, 1]$ *and* $r \leq -1$, *then* $B^{1+s} \leq A^{1+s}$ *for* $r \leq s \leq -1$.

結果的に、（BLP） の一般化は次の形で得られます:

Theorem 6.3. *If* $A, B > 0$, *then*

$$\|A^{\frac{1+r}{2}} B^{1+r} A^{\frac{1+r}{2}}\|^{\frac{p+r}{p(1+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for either $p \leq -1$ *and* $r \in [-1, 0]$ *or* $p \in [0, 1]$ *and* $r \leq -1$.

また、 Corollary 6.2 に対応するものとして、次が得られます:

Theorem 6.4. *If* $A, B > 0$, *then*

$$\|A^{\frac{1+s}{2}} B^{1+s} A^{\frac{1+r}{2}}\|^{\frac{p+r}{p(1+s)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^{p+r} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for either $p \leq -1$ *and* $-1 \leq s \leq r \leq 0$ *or* $p \in [0, 1]$ *and* $r \leq s \leq -1$.

7 Reverse inequalities of (LH)

Theorem 2.1 で述べたように、Araki inequality

$$\|ABA\|^p \leq \|A^p B^p A^p\| \quad \text{for } A, B \geq 0$$

は（LH) と同値な不等式です。その逆不等式については、次のような結果が [18] において知られています。

Theorem R. If $A \geq 0$, $0 < m \leq B \leq M$ for some $M > m > 0$ and $h = \frac{M}{m}$, then

$$(\|ABA\|^p \leq)\ \|A^p B^p A^p\| \leq K(h, p) \|ABA\|^p$$

holds for $p \geq 1$, where $K(h, p)$ is the generalized Kantorovich constant defined by

$$K(h, p) = \frac{1}{h-1} \frac{h^p - h}{p-1} \left(\frac{p-1}{h^p - h} \frac{h^p - 1}{p} \right)^p .$$

Theorem 7.1. *Suppose that* $A \geq 0$, $0 < m \leq B \leq M$ *for some* $M > m > 0$ *and* $h = \frac{M}{m}$. *Then*

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\| \leq K(h^{1+s}, -\frac{p+r}{1+s})^{-\frac{1}{p}}\|A^{\frac{1+s}{2}}B^{1+s}A^{\frac{1+s}{2}}\|^{\frac{p+r}{p(1+s)}}$$

holds for $p \leq -1$, $-1 < s$ *and* $r \leq -(p+1+s)$.

この結果は次のような作用素不等式で表せます：

Corollary 7.2. *Suppose that* $A > 0$, $0 < m \leq B \leq M$ *for some* $M > m > 0$ *and* $h = \frac{M}{m}$. *If* $B^{1+s} \leq A^{1+s}$ *for some* $-1 < s \leq 0$, *then*

$$A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq K(h^{1+s}, -\frac{p+r}{1+s})^{-\frac{1}{p}}A^{1+r}$$

for $p \leq -1$ *and* $r \leq -(p+1+s)$.

Corollary 7.3. *Suppose that* $0 < m \leq B \leq M$ *for some* $M > m > 0$ *and* $h = \frac{M}{m}$. *If* $A \geq B$, *then*

$$A^r \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+r} \leq K(h, -(p+r))^{-\frac{1}{p}}A^{1+r}$$

for $p \leq -1$ *and* $r \leq -(p+1)$.

最後に、差に関する逆不等式を考察します。実際には、与えられた $\lambda > 0$ に対して、

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{p(1+s)}{p+r}} - \lambda\|A^{\frac{1+s}{2}}B^{1+s}A^{\frac{1+s}{2}}\|$$

の上界を定めたい。そのために、
For $q > 1$, $M > m > 0$ and $h = \frac{M}{m}$,

$$j_1 = j_{q,h}^{(1)} = \frac{h^q - 1}{q(h^q - h^{q-1})},\ j_2 = j_{q,h}^{(2)} = \frac{h^q - 1}{q(h-1)}$$

and

$$\beta(m, M, q; \lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)M & \text{if } 0 < \lambda < j_1 \\ \frac{q-1}{q}\left(\frac{M^q - m^q}{\lambda q(M-m)}\right)^{\frac{1}{q-1}} + \frac{\lambda(Mm^q - mM^q)}{M^q - m^q} & \text{if } \lambda \in [j_1, j_2] \\ (1-\lambda)m & \text{if } \lambda > j_2 \end{cases}$$

とおきます。

Theorem 7.4. *Suppose that* $A \geq 0$, $0 < m \leq B \leq M$ *for some* $M > m > 0$ *and* $h = \frac{M}{m}$. *If* $p \leq -1$, $-1 < s$ *and* $r \leq -(p+1+s)$, *then for each* $\lambda > 0$

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{p(1+s)}{p+r}} \leq \lambda\|A^{\frac{1+s}{2}}B^{1+s}A^{\frac{1+s}{2}}\| + \beta(m^{1+s}, M^{1+s}, -\frac{p+r}{1+s}, \lambda)\|A\|^{1+s}.$$

References

[1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture Note, Hokkaido University, Sapporo, 1978.

[2] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198** (1994), 113–131.

[3] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Let. Math. Phys., **19** (1990), 167–170.

[4] N. Bebiano, R.Lemos and J. Providência, *Inequalities for quantum relative entropy*, Linear Algebra Appl., **401** (2005), 159–172.

[5] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *An operator inequality*, Linear Algebra Appl., **142** (1990), 153–159.

[6] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators*, Illinois J. Math., **38** (1994), 87–94.

[7] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities related to McIntosh type inequality*, Nihonkai Math. J., **118** (1993), 827–830.

[8] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1992), 67–72.

[9] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, 23 (1990), 67–72.

[10] M. Fujii, *Furuta inequality and its related topics*, Ann. Funct. Anal., **1** (2010), 28–45.

[11] M. Fujii and T. Furuta , *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math. Japon., **38** (1993), 73–78.

[12] M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities in the Corach-Porta-Recht theory and operator means*, Illinois J. Math., **40** (1996), 527–534.

[13] M. Fujii, M. Ito, E. Kamei and A. Matsumoto, *Operator inequalities related to Ando-Hiai inequality*, Sci. Math. Japon., **70** (2009), 229–232.

[14] M. Fujii and E. Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

[15] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Element, Zagreb, Monographs in Inequalities **4**, 2012.

[16] M. Fujii and E. Kamei, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 541–545.

[17] M. Fujii, R. Nakamoto and M. Tominaga, *Generalized Bebiano-Lemos-Providência inequalities and their reverses*, Linear Algebra Appl., **426** (2007), 33–39.

[18] M. Fujii and Y. Seo, *reverse inequalities of Cordes and Löwner-Heinz inequalities*, Nohonkai Math. J., **16** (2005), 145–154.

[19] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.

[20] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.

[21] T. Furuta, *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1** (1989), 135–137.

[22] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.

[23] F. Hansen, *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249–250.

[24] E. Heinz, *Beitrage zur Storungstheorie der Spectral-zegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[25] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. 33 (1988), 883–886.

[26] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., Online, 2018–7.

[27] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[28] K. Löwner, *Über monotone Matrix function*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[29] A. McIntosh, *Heinz inequalitiesand perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.

[30] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[31] G. K. Pedersen and M. Takesaki, *The operator equation* $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 311–312.

[32] W. Pusz and S. L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear formsand the purification map*, Rep. Math. Phys., **8** (1975),159–170.

[33] Y. Seo, *Matrix trace inequalities related to the Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl., **472** (2019), 1499–1508.

[34] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141–146.