

解析関数に対する最良近似の評価および数理最適化 による近似公式の構築

Estimate of the best approximation of analytic functions and
construction of approximation formulas for them by
mathematical optimization

田中健一郎 (東京大学 大学院情報理工学系研究科 数理情報学専攻)
Ken'ichiro TANAKA (University of Tokyo)*¹

1. 導入

本講演では、実軸を含む領域で減衰度の指定された解析関数に対する近似手法の理論と算法について述べる。これらの内容は、論文[18, 20]に基づいている。減衰度の指定された解析関数は、関数近似に対するDE-Sinc法[11, 22]や数値積分に対するDE公式[10, 15, 23]などをはじめとする変数変換型数値計算法において現れる。ここでは、複素領域上の解析関数を、領域

$$\mathcal{D}_d := \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\} \quad (d > 0), \quad (1)$$

上の関数に変換する変数変換を想定する。ここで、変換された関数は無限遠で急速に減衰するものとする。そのような関数はそれ自身の近似や積分の近似がしやすいため、そのような減衰を与える変数変換は有用である。代表例として、高橋・森[15]による二重指数関数型変換(DE変換)

$$\psi_{\text{DE}}(x) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh x\right) \quad (2)$$

がある。これは $(-1, 1)$ を含むある領域をある $d > 0$ に対する $\mathcal{D}_d$ にうつす。その他のDE変換については[22, 23]およびその中の参考文献を参照されたい。DE変換の他にも、TANH変換

$$\psi_{\text{SE}}(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

に代表される(一重)指数関数型変換(SE変換)なども用いられる。これらは一般に、DE変換と比べて狭い正則領域を持つ関数を $\mathcal{D}_d$ 上の関数にうつすので、適用範囲はDE変換と比べて広いが、実現する減衰はDE変換と比べて緩やかになる。SE変換については[4, 9, 12, 13, 14]およびその中の参考文献を参照されたい。以下、関数近似法と数値積分法についてそれぞれ述べる。

This work was supported by KAKENHI (17K14241).

2010 Mathematics Subject Classification: 41A25, 41A50, 65D05, 65D15, 65E05

キーワード: weighted Hardy space, function approximation, potential theory, numerical integration, discrete energy minimization

*¹e-mail: kenichiro@mist.i.u-tokyo.ac.jp

web: <https://sites.google.com/site/ketanakahp/>

1.1. 関数近似

関数 g の sinc 法 [12, 13] による近似は、変換 ψ を用いて $f(x) = g(\psi(x))$ とし、sinc 補間

$$f(x) \approx \sum_{k=-N_-}^{N_+} f(kh) \operatorname{sinc}(x/h - k) \quad (4)$$

によって行う．ここで $\operatorname{sinc}(x) = (\sin \pi x)/(\pi x)$ である．関数 g が一定の減衰性を持てば、 f は $\mathcal{D}_d$ 上で無限遠で減衰する．このとき sinc 補間は高精度になることが知られている [12, 13, 22]．さらに、杉原 [11] によって、特定の減衰度を持つ $\mathcal{D}_d$ 上の解析関数の空間 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ (後出の (6)) における sinc 補間の「準最適性」が示されている．

しかし、 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ における最適関数近似公式の具体形は特別な場合 [19] を除いて知られていない．論文 [17, 20] では最適公式を目指して、sinc 法より高精度な近似公式の構築が行われている．特に [20] では、離散エネルギー最小化に基づいた簡潔な方法によって補間のための標本点を生成し、近似公式を構築している．この方法は、ポテンシャル論 [8] における基本的な事実の離散版に相当するものを基礎にしている．

1.2. 数値積分

数値積分に対する DE 公式は、部分積分と実軸上の台形公式に基づいて

$$\int_I g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\psi(x)) \psi'(x) dx \approx h \sum_{k=-N_-}^{N_+} g(\psi(kh)) \psi'(kh) \quad (5)$$

のように近似を与える公式である．ここで ψ は DE 変換である．関数 g に対する適切な仮定のもとで、変換された関数 $f(x) = g(\psi(\cdot))\psi'(\cdot)$ は二重指数関数的に減衰し、式 (5) が高精度な近似を与える．DE 公式の詳細な誤差評価は [10, 23] にある．また、DE 公式の他に、前述の SE 変換を用いた公式もある．以上の公式はいずれも実軸上の台形公式に基づいている．減衰度が台形公式の性能に与える影響を調べた研究として [6, 23, 24] などがある．杉原 [10] は、台形公式についても、 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ における「準最適性」を示した．しかし、台形公式の最適性までは示されておらず、より高精度な公式が存在する可能性がある．実際、減衰度が指数関数的である場合には、最適公式が知られている例がある [1, 2]．近年、筆者ら [18] は、前述の関数近似の場合とほぼ同様の原理を用いて、高精度公式を構成する一般的方法の構築に着手している．

1.3. 本講演の内容

本講演では、一般的な重みに対する重み付きハーディ空間の関数に対する近似の理論と算法を論じる．具体的には以下の項目を論じる：

- (i) 関数や積分の最適近似精度の評価．
- (ii) 関数や積分の高精度近似法の一般的構築方法．

特に後者に関しては、筆者らは、凸性を持つ離散エネルギーの最小化によって、関数近似や数値積分のための標本点をとる簡潔な方法を考案した．また、それらの近似公式の数学的な収束次数の解析を、前述の最小化問題の連続版に関する双対定理を用いて与えた [5]．

2. 数学的準備

2.1. 重み関数と重み付きハーディ空間

d を正の実数とし、 $\mathcal{D}_d$ を式 (1) で定まる帯状領域とする． $\mathcal{D}_d$ 上の解析関数 ζ であって

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-d}^d |\zeta(x + iy)| dy = 0$$

かつ

$$\lim_{y \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} (|\zeta(x + iy)| + |\zeta(x - iy)|) dx < \infty.$$

を満たすものの全体を $\mathcal{B}(\mathcal{D}_d)$ とする．そして、 $\mathcal{D}_d$ 上の関数 w で次の仮定を満たすものを重み関数とする．

仮定 1. 関数 w は $\mathcal{B}(\mathcal{D}_d)$ に属し、 $\mathcal{D}_d$ 上で零にならず、実軸上では $(0, 1]$ 内の値をとる．

仮定 2. 関数 $\log w$ は $\mathbf{R}$ 上で狭義凹．

仮定 1 と 2 を満たす重み関数 w に対し、 $\mathcal{D}_d$ 上の重み付きハーディ空間¹ を

$$\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) := \{f : \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ は } \mathcal{D}_d \text{ 上で正則で } \|f\| < \infty \text{ を満たす} \}, \quad (6)$$

で定義する．ここで $\|f\|$ は次式で定義される：

$$\|f\| := \sup_{z \in \mathcal{D}_d} \left| \frac{f(z)}{w(z)} \right|.$$

2.2. 最適関数近似公式

与えられた正の整数 n に対し、関数 $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ に適用可能な実軸上の n 点補間公式を考え、この空間における最適近似を特徴づける．具体的には [11] に基づき、

$$\begin{aligned} E_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) \\ := \inf_{1 \leq l \leq n} \inf_{\substack{m_1, \dots, m_l \\ m_1 + \dots + m_l = n}} \inf_{\substack{a_j \in \mathcal{D}_d \\ \text{distinct}}} \inf_{\phi_{jk}} \left[\sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(a_j) \phi_{jk}(x) \right| \right] \end{aligned} \quad (7)$$

を最適近似公式の精度と定める²．ここで ϕ_{jk} は $\mathcal{D}_d$ 上の解析関数である．この $E_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ を達成する公式がもしあれば、それを最適公式とする．

2.3. 最適数値積分公式

第 2.2 節と同様にして、数値積分公式の最適性を定式化する．与えられた正の整数 n に対し、関数 $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ に適用可能な実軸上の n 点数値積分公式を考える．そして

$$\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$$

¹ ハーディ空間は、通常、複素単位円上の正則関数のなす空間として定義されるが、一般の領域上のハーディ空間というものも考えられている [3, 第 10 章]．

² この値は、空間 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ の単位球 B に対する線形 n -width $\delta_n(B; \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ の類似である．一般にノルム空間 U の部分集合 A に対する線形 n -width $\delta_n(A; U)$ は $\delta_n(A; U) := \inf_{P_n} \sup_{u \in A} \|u - P_n u\|_X$ と定義される．ここで下限は U の n 次元部分空間への線形作用素 P_n 全体にわたってとる [7]．

$$:= \inf_{1 \leq \ell \leq n} \inf_{\substack{m_1, \dots, m_\ell \\ m_1 + \dots + m_\ell = n}} \inf_{a_p \in \mathcal{D}_d} \inf_{c_{pq} \in \mathbb{C}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{q=0}^{m_p-1} c_{pq} f^{(q)}(a_p) \right| \quad (8)$$

を最適数値積分公式の精度と定める．この $\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ を達成する公式がもしあれば，それを最適公式とする．

3. 高精度関数近似公式

3.1. 最適関数近似公式の特徴づけ

相異なる n 点の列 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し，

$$T_d(x) := \tanh\left(\frac{\pi}{4d}x\right), \quad (9)$$

$$B_n(x; a, \mathcal{D}_d) := \prod_{j=1}^n \frac{T_d(x) - T_d(a_j)}{1 - \overline{T_d(a_j)} T_d(x)}, \quad (10)$$

$$B_{n;k}(x; a, \mathcal{D}_d) := \prod_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq k}} \frac{T_d(x) - T_d(a_j)}{1 - \overline{T_d(a_j)} T_d(x)}, \quad (11)$$

と定める³．そして Lagrange 型の補間公式を

$$L_n[a; f](x) := \sum_{k=1}^n f(a_k) \frac{B_{n;k}(x; a, \mathcal{D}_d) w(x)}{B_{n;k}(a_k; a, \mathcal{D}_d) w(a_k)} \frac{T'_d(x - a_k)}{T'_d(0)} \quad (12)$$

と定める．杉原 [10] により，これらを用いて式 (7) の $E_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ が次のように特徴づけられることが示されている．

命題 1 ([11, 補題 4.3 とその証明]). $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ を相異なる点の列とする．このとき式 (12) の公式について，次の誤差評価が成り立つ：

$$E_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) \leq \sup_{\substack{f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) \\ \|f\| \leq 1}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - L_n[a; f](x)| \right) \quad (13)$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_n(x; a, \mathcal{D}_d) w(x)|. \quad (14)$$

さらに，上の不等式で全ての n 点列 a にわたる下限をとると，全てで等号が成立する：

$$E_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) = \inf_{a_j \in \mathbf{R}} \left[\sup_{\substack{f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) \\ \|f\| \leq 1}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - L_n[a; f](x)| \right) \right] \quad (15)$$

$$= \inf_{a_j \in \mathbf{R}} \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} |B_n(x; a, \mathcal{D}_d) w(x)| \right]. \quad (16)$$

命題 1 は，もし命題中の下限を達成する n 点列 $a = a^*$ があれば，補間公式 $L_n[a; f](x)$ が最適公式の具体形を与えることを示している． $a_j \in \mathbf{R}$ かつ $x \in \mathbf{R}$ のときに

$$\frac{T_d(x) - T_d(a_j)}{1 - \overline{T_d(a_j)} T_d(x)} = T_d(x - a_j)$$

³ 式 (10) の関数は変換ブラシュケ積と呼ばれる．

となることに注意し、式(16)の対数をとって

$$\inf_{a_j \in \mathbf{R}} \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} \left(\sum_{j=1}^n \log |T_d(x - a_j)| + \log w(x) \right) \right] \quad (17)$$

を考える．この式(17)の表す最適化問題を扱うために

$$K(x) = -\log |T_d(x)| \quad \left(= -\log \left| \tanh \left(\frac{\pi}{4d} x \right) \right| \right), \quad (18)$$

$$Q(x) = -\log w(x) \quad (19)$$

とおく．また、整数 $n \geq 2$ に対し $\mathcal{R}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1 < \dots < a_n\}$ とし、 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{R}_n$ に対し

$$U_n^D(a; x) = \sum_{i=1}^n K(x - a_i), \quad x \in \mathbf{R} \quad (20)$$

と定める．このとき式(17)と同等な最適化問題は次のように表される：

$$(D) \quad \text{最大化} \quad \inf_{x \in \mathbf{R}} (U_n^D(a; x) + Q(x)) \quad \text{条件} \quad a \in \mathcal{R}_n. \quad (21)$$

式(21)の問題(D)はポテンシャル論[8]と関わりがある．実際、 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ の関数 $K(x - y)$ は領域 $\mathcal{D}_d$ のグリーン関数

$$g_{\mathcal{D}_d}(z_1, z_2) = -\log \left| \frac{T_d(z_1) - T_d(z_2)}{1 - \overline{T_d(z_2)} T_d(z_1)} \right| \quad (22)$$

で $(z_1, z_2) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ とした特別な場合から導かれる．したがって関数 $U_n^D(a; x)$ は離散測度 $\sum_{i=1}^n \delta_{a_i}$ に対するグリーンポテンシャルである⁴．

3.2. 高精度関数近似公式の構成法

正整数 n に対し、 $\mathcal{M}(\mathbf{R}, n)$ を $\mathbf{R}$ 上で全測度 n となるボレル測度の集合とし、そのうち台がコンパクトとなるものの集合を $\mathcal{M}_c(\mathbf{R}, n)$ とする．特に、 $a \in \mathcal{R}_n$ に対し、離散測度 $\sum_{i=1}^n \delta_{a_i}$ は $\mathcal{M}_c(\mathbf{R}, n)$ に属す．測度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, n)$ に対しポテンシャル $U_n^C(\mu; x)$ とエネルギー $I_n^C(\mu)$ を

$$U_n^C(\mu; x) = \int_{\mathbf{R}} K(x - y) d\mu(y), \quad (23)$$

$$I_n^C(\mu) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} K(x - y) d\mu(y) d\mu(x) + 2 \int_{\mathbf{R}} Q(x) d\mu(x), \quad (24)$$

と定める．式(18)と(22)より、これらはグリーンポテンシャルとグリーンエネルギーである．そこで、ポテンシャル論の基本的事実を用いて、次の定理が示せる．

定理 2 ([20, 定理 2.6]). 仮定 1 と 2 のもとで、 I_n^C の最小化元 μ_n^* は次の最適化問題の最適解を与える：

$$(C) \quad \text{最大化} \quad \inf_{x \in \mathbf{R}} (U_n^C(\mu; x) + Q(x)) \quad \text{条件} \quad \mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{R}, n). \quad (25)$$

⁴ ここで δ_{a_i} は点 a_i に台を持つディラック測度である．

我々の主目的は式 (21) の問題 (D) の最適解 $a^\dagger \in \mathcal{R}_n$ を求めて最適関数近似公式 $L_n[a^\dagger; f]$ を得ることであるが、問題 (D) を直接解くのは困難である。そこで、定理 2 の離散的類似を見込んで、 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{R}_n$ に対し離散エネルギー $I_n^D(a)$ を

$$I_n^D(a) := \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K(a_i - a_j) + \frac{2(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n Q(a_i) \quad (26)$$

で定め、これの最小化を考える。まず I_n^D の最小化問題の可解性は次のように示される。

定理 3 ([20, 定理 3.3]). 仮定 1 と 2 のもとで、エネルギー I_n^D は $\mathcal{R}_n$ 上の凸関数で、 $\mathcal{R}_n$ 内に唯一の最小点を持つ。

そこで $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in \mathcal{R}_n$ を I_n^D の最小点とし、 $F_{K,Q}^D(n)$ を

$$F_{K,Q}^D(n) = I_n^D(a^*) - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n Q(a_i^*). \quad (27)$$

と定める。すると、次のように離散測度 $\sum_{i=1}^n \delta_{a_i}$ に対する外場付きグリーンポテンシャルの下限が与えられる。

定理 4 ([20, 定理 3.4]). $a^* \in \mathcal{R}_n$ を I_n^D の最小点とする。仮定 1 と 2 のもとで、任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し次の評価が成り立つ：

$$U_n^D(a^*; x) + Q(x) \geq \frac{F_{K,Q}^D(n)}{n-1}. \quad (28)$$

この定理は a^* が問題 (D) の最適解になることを保証するわけではないが、ある程度良い近似解になっているであろうことを示唆する。この定理に基づき、 I_n^D の最小点 $a^* \in \mathcal{R}_n$ を式 (12) の補間公式の標本点として用い、 $L_n[a^*; f]$ を近似公式として提案する。なお、実際に a^* を求める際には I_n^D に対するニュートン法を用いれば十分である。このとき、次のような誤差評価が得られる。

定理 5 ([20, 定理 4.1]). $a^* \in \mathcal{R}_n$ を離散エネルギー I_n^D の最小点とし、 $L_n[a^*; f]$ を式 (12) で $a = a^*$ として与えられる $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ の近似公式とする。仮定 1 と 2 のもとで、次の評価が成り立つ：

$$\sup_{\substack{f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) \\ \|f\| \leq 1}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - L_n[a^*; f](x)| \right) \leq \exp \left(-\frac{F_{K,Q}^D(n)}{n} \right). \quad (29)$$

証明. 命題 1 の不等式 (14) と定理 4 より、次の評価が得られる：

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) \\ \|f\| \leq 1}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - L_n[a^*; f](x)| \right) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_n(x; a^*, \mathcal{D}_d) w(x)|. \\ & = \sup_{x \in \mathbf{R}} \exp(-U_n^D(a^*; x) - Q(x)) \leq \exp \left(-\frac{F_{K,Q}^D(n)}{n} \right). \end{aligned}$$

□

定理 5 の式 (29) 右辺の n に関するオーダーを上から評価することも可能である。この評価は最近、論文 [5] でなされた。そこでは $F_{K,Q}^D(n)$ と連続エネルギー $I_n^D(\mu)$ との関係の解析結果や、 $I_n^D(\mu)$ の最小化問題に対する双対定理が活用されている。ただ、 $L_n[a^*; f]$ が最適オーダーの近似を与えるかどうかは未解明である。

4. 高精度数値積分公式

4.1. 最適数値積分公式の特徴づけ

式 (8) の最小誤差ノルム $\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ は、次のように積分作用素のノルムとして表現されることが知られている [10] :

$$\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) = \inf_{a_i \in \mathcal{D}_d} \left[\sup_{\substack{g \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) \\ \|g\| \leq 1}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) B_n(x; a, \mathcal{D}_d) dx \right| \right]. \quad (30)$$

さらに、より簡潔な表現が次のように与えられる.

定理 6 ([18, 定理 1]). 次の式が成り立つ :

$$\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) = \inf_{a_i \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) |B_n(x; a, \mathcal{D}_d)|^2 dx. \quad (31)$$

ここで下限 $\inf$ は n 点からなるあらゆる標本点 $a_i \in \mathbf{R}$ の集合にわたってとる.

論文 [10] で示されているとおり、定理 6 は式 (31) に対して不等式 (左辺) $\geq$ (右辺) と (左辺) $\leq$ (右辺) をそれぞれ示すことで得られる. まず式 (30) において g を

$$g(z) = w(z) \overline{B_n(\bar{z}; a, \mathcal{D}_d)}$$

と特殊化することで

$$\mathcal{E}_n^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) \geq \inf_{a_i \in \mathcal{D}_d} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) |B_n(x; a, \mathcal{D}_d)|^2 dx \quad (32)$$

が得られ、さらに [11, 補題 4.3 の証明] にある不等式を用いて、式 (32) で標本点の範囲を $a_i \in \mathbf{R}$ のように絞れることが分かり、前者の不等式 ((31) 左辺) $\geq$ ((31) 右辺) が得られる⁵.

後者の不等式 ((31) 左辺) $\leq$ ((31) 右辺) を示すには具体的な n 点数値積分公式を与えてその誤差評価が (31) の右辺で与えられることを示せばよい. そのような公式として、変換ブラシュケ積 $B_n(x; a, \mathcal{D}_d)$ に基づいたエルミート補間

$$H_n[a^*; f](x) = \sum_{i=1}^n f(a_i^\dagger) u_i(x; a^\dagger) + \sum_{i=1}^n f'(a_i^\dagger) v_i(x; a^\dagger) \quad (33)$$

を積分してできる公式を考える. ここで $a^\dagger$ は (31) の右辺の最小化元であり、

$$v_i(x; a^\dagger) = \frac{1}{T_d'(0)^2 B_{n;i}(a_i^\dagger; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2 w(a_i^\dagger)} w(x) B_n(x; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2 \frac{T_d'(x - a_i^\dagger)}{T_d(x - a_i^\dagger)}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} u_i(x; a^\dagger) = & - \left(\frac{2 B_{n;i}'(a_i^\dagger; a^\dagger, \mathcal{D}_d)}{B_{n;i}(a_i^\dagger; a^\dagger, \mathcal{D}_d)} + \frac{w'(a_i^\dagger)}{w(a_i^\dagger)} \right) v_i(x) \\ & + \frac{w(x) B_{n;i}(x; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2}{w(a_i^\dagger) B_{n;i}(a_i^\dagger; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2} \frac{1}{\cosh^3 \left(\frac{\pi}{4d} (x - a_i^\dagger) \right)} \end{aligned} \quad (35)$$

⁵ 詳細は [21] を参照されたい.

である [21]. 実は, $v_i(\cdot; a^\dagger)$ の積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i(x; a^\dagger) dx = 0 \quad (36)$$

のように消えることが示せるので, $H_n[a^\dagger; f]$ を積分することで n 点積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n[a^\dagger; f](x) dx = \sum_{i=1}^n c_i^{(0)} f(a_i^\dagger) \quad (37)$$

が得られる. ここで

$$c_i^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x, a^\dagger) dx \quad (38)$$

である. 式 (35) と (36) から, 重み $c_i^{(0)}$ の計算には

$$c_i^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x) B_{n;i}(x; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2}{w(a_i^\dagger) B_{n;i}(a_i^\dagger; a^\dagger, \mathcal{D}_d)^2} \frac{1}{\cosh^3\left(\frac{\pi}{4d}(x - a_i^\dagger)\right)} dx \quad (39)$$

という式を用いればよい⁶. 以上より, 式 (37) の右辺を n 点数値積分公式と見なせる. このとき, エルミート補間の誤差評価により ((31) 左辺) $\leq$ ((31) 右辺) が示せる.

4.2. 高精度数値積分公式

4.2.1. 基本方針

標本点 a を得るためには式 (31) に対する最適化問題を考える必要があるが, それを直接解くことは難しい. そこで, 十分大きい $\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) |B_n(x; a, \mathcal{D}_d)|^2 dx &\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} w(x) |B_n(x; a, \mathcal{D}_d)|^2 dx + \int_{|x|>\alpha} w(x) dx \\ &\leq \underbrace{2\alpha \sup_{x \in \mathbf{R}} \{w(x) |B_n(x; a, \mathcal{D}_d)|^2\}} + \int_{|x|>\alpha} w(x) dx \end{aligned} \quad (40)$$

となることに注意し, 元問題の近似として式 (40) の下線部の最小化を考える. そこで

$$\text{最小化} \quad \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} \left\{ \frac{1}{2} \log w(x) + \sum_{j=1}^n \log |T_d(x - a_j)| \right\} \right] \quad \text{条件} \quad a \in \mathcal{R}_n \quad (41)$$

という同値な問題を考える. 式 (41) の問題は式 (17) において $\log w(x)$ を $(1/2) \log w(x)$ に置き換えて得られる. よって, 式 (41) の問題の近似解を第 3.2 節で示された方法で与えることができる. つまり $\hat{Q}(x) = -(1/2) \log w(x)$ を用いて修正離散エネルギー $\hat{I}_n^D$ を

$$\hat{I}_n^D(a) := \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K(a_i - a_j) + \frac{2(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Q}(a_i) \quad (42)$$

で定め, これを最小化すればよい. これにより標本点が得られる.

⁶ この公式から $c_i^{(0)} \geq 0$ が分かる.

4.2.2. 高精度数値積分公式の構成

まず、離散エネルギー $\hat{I}_n^D$ の最小点 $\hat{a}^\dagger$ を標本点として用いる．次に式 (39) の $c_i^{(0)}$ に相当する重みを計算する必要があるが、式 (39) の積分をそのまま数値積分などで計算するのが適切とは限らない．なぜなら、式 (39) は標本点が (31) の右辺の最小化元 $a^\dagger$ であるときに初めて有効となるからであり、一般には $\hat{a}^\dagger = a^\dagger$ かどうかは不明だからである⁷．そこで、重みの生成のためには Lagrange 補間 $L_n[\hat{a}^\dagger; f](x)$ を用いる．つまり

$$c_i := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x) B_{n,i}(x; \hat{a}^\dagger, \mathcal{D}_d)}{w(\hat{a}_i^\dagger) B_{n,i}(\hat{a}_i^\dagger; \hat{a}^\dagger, \mathcal{D}_d)} \frac{T_d'(x - \hat{a}_i^\dagger)}{T_d'(0)} dx \quad (43)$$

を $f(\hat{a}_i^\dagger)$ に対する重みとし、この値の近似値 $\tilde{c}_i$ of c_i を台形公式⁸

$$\tilde{c}_i := \tilde{h} \sum_{k=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \frac{w(k\tilde{h}) B_{n,i}(k\tilde{h}; \hat{a}^\dagger, \mathcal{D}_d)}{w(\hat{a}_i^\dagger) B_{n,i}(\hat{a}_i^\dagger; \hat{a}^\dagger, \mathcal{D}_d)} \frac{T_d'(k\tilde{h} - \hat{a}_i^\dagger)}{T_d'(0)} \quad (44)$$

で計算する．以上により、数値積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i f(\hat{a}_i^\dagger) \quad (45)$$

を得る．以上のように構成した公式の精度は未だ理論的に示されていないが、いくつかの例に対して実際に数値計算を行った結果からは、この公式の有効性が示唆されている [18]．

5. おわりに

本稿では、解析関数に対する関数近似と数値積分について、最適近似精度の評価や高精度近似法の一般的構築方法を述べた．数値計算の実例は講演で示す予定である．なお、本稿では一変数解析関数の問題についてのみ論じたが、多変数関数に対する近似に対して、やはり数理最適化を用いて近似のための標本点を生成する試みも最近行っている [16]．

参考文献

- [1] J.-E. Andersson: Optimal quadrature of H^p functions, Math. Z. **172** (1980), pp. 55–62.
- [2] J.-E. Andersson and B. D. Bojanov: A note on the optimal quadrature in H^p , Numer. Math. **44** (1984), pp. 301–308.
- [3] P. L. Duren: Theory of H^p spaces. Academic Press, London, 1970.
- [4] S. Haber: The tanh rule for numerical integration. SIAM J. Numer. Anal. **14** (1977), pp. 668–685.
- [5] S. Hayakawa and K. Tanaka: Convergence analysis of approximation formulas for analytic functions via duality for potential energy minimization, arXiv:1906.03133 (2019).
- [6] M. Mori: Discovery of the double exponential transformation and its developments, Publ. RIMS Kyoto Univ. **41** (2005), pp. 897–935.

⁷したがって、 $\int_{-\infty}^{\infty} v_i(x; \hat{a}^\dagger) dx$ の値は0になるとは限らない．

⁸数値積分公式を構成するための重み c_i を求めるために数値積分を使うというのは極力避けたいことである．したがって、 c_i のより効率的かつ正確な計算法は、今後の課題である．

- [7] A. Pinkus: n -widths in approximation theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [8] E. B. Saff and V. Totik: Logarithmic potentials with external fields, Springer, Berlin Heidelberg, 1997.
- [9] C. Schwartz: Numerical integration of analytic functions, J. Comput. Phys. **4** (1969), pp. 19–29.
- [10] M. Sugihara: Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach, Numer. Math. **75** (1997), pp. 379–395.
- [11] M. Sugihara: Near optimality of the sinc approximation, Math. Comp. **72** (2003), pp. 767–786.
- [12] F. Stenger: Numerical methods based on sinc and analytic functions, Springer, New York, 1993.
- [13] F. Stenger: Handbook of sinc numerical methods, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [14] H. Takahasi and M. Mori: Quadrature formulas obtained by variable transformation, Numer. Math. **21** (1973), pp. 206–219.
- [15] H. Takahasi and M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ. **9** (1974), pp. 721–741.
- [16] K. Tanaka: Generation of point sets by convex optimization for interpolation in reproducing kernel Hilbert spaces, arXiv:1810.08505 (2018).
- [17] K. Tanaka, T. Okayama and M. Sugihara: Potential theoretic approach to design of accurate formulas for function approximation in symmetric weighted Hardy spaces, IMA Journal of Numerical Analysis **37** (2017), pp. 861–904 (doi:10.1093/imanum/drw022).
- [18] K. Tanaka, T. Okayama and M. Sugihara: Potential theoretic approach to design of accurate numerical integration formulas in weighted Hardy spaces, in: G. Fasshauer, L. Schumaker (eds.), Approximation Theory XV: San Antonio 2016, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 201 (2017) (pp. 335–360), Springer, Cham.
- [19] K. Tanaka, T. Okayama and M. Sugihara: An optimal approximation formula for functions with singularities, Journal of Approximation Theory **234** (2018), pp. 82–107.
- [20] K. Tanaka and M. Sugihara: Design of accurate formulas for approximating functions in weighted Hardy spaces by discrete energy minimization, IMA Journal of Numerical Analysis, published online, 2018 (doi: 10.1093/imanum/dry056).
- [21] K. Tanaka and M. Sugihara: Construction of approximation formulas for analytic functions by mathematical optimization, submitted.
- [22] K. Tanaka, M. Sugihara and K. Murota: Function classes for successful DE-Sinc approximations, Math. Comp. **78** (2009), pp. 1553–1571.
- [23] K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota and M. Mori: Function classes for double exponential integration formulas, Numer. Math. **111** (2009), pp. 631–655.
- [24] L. N. Trefethen and J. A. C. Weideman: The exponentially convergent trapezoidal rule, SIAM Review **56** (2014), pp. 385–458.