

多安定型非線形項を持つ反応拡散方程式の自由境界問題における解の漸近的形状について

松澤 寛 (沼津高専)*

1. はじめに

外来種 (invasive species) が生息領域を拡大していく現象 (invasion) は生態学における中心的な話題である. Skellam は生物種の拡散についてまとめた論文 [19] の中でマスクラットという生物の生息領域の面積の平方根 (生息領域を円と仮定した場合の半径) と時間の関係が比例関係にあることを発見した. その後, この現象のモデルとして提案されたのが反応拡散方程式の Cauchy 問題

$$(CP) \begin{cases} U_t = d\Delta U + U(a - bU), & t > 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ U(0, x) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

である. ここで a, b は正の定数である. その中で Aronson-Weinberger [1, 2] は次のことを示した:

ある c_0 が存在して U_0 が恒等的に 0 でない非負のコンパクト台をもつ関数と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, (CP) の解 $U(t, x)$ は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq (c_0 - \varepsilon)t} |U(t, x) - a/b| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq (c_0 + \varepsilon)t} |U(t, x)| = 0.$$

を満たす. そこでこの c_0 は生物が生息領域を拡大する速度とみることができ, 対応する進行波の最小速度として与えられることを示した. しかしこの問題では U_0 が恒等的に 0 でない非負の関数であればいつでも $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, x) = a/b$ (\mathbb{R}^N 上広義一様) が成り立つといういわゆる Hair-trigger 効果が起こり, 生物が侵入に失敗し絶滅する状況を表現できないなど, 現実に即していない点もある.

こうした流れの中で Du と Lin [4] は新しいモデルとして次の反応拡散方程式の自由境界問題を提唱した.

$$(FBP) \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t, 0) = u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq h_0. \end{cases}$$

ここで, 非線形項 f は

$$f \in C^1, f(0) = 0, \text{ある } K > 0 \text{ が存在して } f(K) = 0, f(u) < 0 (u > K) \quad (1)$$

をみたす関数, $d, \mu, h_0 > 0$ は与えられた定数である. 与えられた $h_0 > 0$ に対して初期関数 u_0 は

$$u_0 \in \mathcal{X}(h_0) = \left\{ \phi \in C^2[-h_0, h_0] \mid \phi(x) > 0 \text{ in } [0, h_0), \phi'(0) = \phi(h_0) = 0 \right\}$$

本研究は科研費 (課題番号:17K05340) の助成を受けたものである. また, 兼子裕大氏 (日本女子大学), 山田義雄教授 (早稲田大学) との共同研究に基づく.

* e-mail: hmatsu@numazu-ct.ac.jp

を満たすとする. この問題における $[0, T]$ ($T > 0$) 上の解とは (FBP) の等式を満たす $u \in C^{1,2}(D_T)$, $h \in C^1([0, T])$ の組 $(u(t, x), h(t))$ である. ただし, $D_T = \{(t, x) | t \in (0, T], x \in [0, h(t)]\}$ である.

このモデルでは生物の個体数密度を表す関数 $u(t, x)$ だけでなく, 生息領域の境界を表す関数 $h(t)$ も未知関数であり, $h(t)$ の動きは Stefan 条件により決定されるモデルとなっている. このモデル, 特に Stefan 条件の生態学的な背景については上記の [4] や Bunting-Du-Krakowski [3] を参照されたい.

2. 先行研究 (正の安定平衡点が1つの場合)

Du と Lin は [4] で logistic 型非線形項 $f(u) = u(a - bu)$ ($a, b > 0$ は定数) をもつ問題 (FBP) を扱った. そこで彼らは解の一意・大域可解性を示し, さらに長時間挙動として

- **Spreading:** $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = a/b$ (広義一様)

- **Vanishing:** $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{a}}, \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, h(t)]} |u(t, x)| = 0$

のいずれかが起こること (**spreading-vanishing dichotomy**) を証明した. Spreading は外来種が生息領域を拡大すること, Vanishing は外来種が生息領域を拡大できず絶滅することに対応するとすれば, 上の結果は, 初期条件によりどちらか一方が起こることを意味するとともに, 初期条件次第では生物が侵入に失敗し, 絶滅することがあり得ることを (FBP) では表現できていることになる.

一方, 数学的には, ロジスティック型非線形項は**単安定**とよばれる常微分方程式の意味で安定な平衡点を1つもつ非線形項である. Du-Lou[5] は単安定の他に, **正の安定平衡点をただ1つもつ** $f(u) = u(u - a)(1 - u)$ ($a \in (0, 1/2)$) に代表される**双安定**や燃焼理論に用いられる**燃焼型**である場合に問題 (FBP) の解の漸近挙動を解析し, 主に spreading と vanishing のいずれかが主に起こることを証明した¹. ここで一般の f に対して spreading は u の極限を a/b から f の正の安定平衡点に置き換えたものとする.

以降, 簡単のため $d = 1$ とする. 本講演で考える次の問題は現象を理解する観点からも重要である.

Spreading が起こるとき, 十分時間が経過したときの

問題 (I) $h(t)$ についての評価は?

問題 (II) u の形状は?

f が単安定, 双安定, 燃焼型の場合, **問題 (I)** については [5] により次の結果が得られている:

定理 1 ([5]). f は単安定, 双安定, 燃焼型のいずれか, 解 $(u(t, x), h(t))$ は (FBP) の解とする. このときある $c^* = c^*(f, \mu) = c^*(\mu) > 0$ が存在して, spreading が起こるならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c^*$ が成り立つ.

¹ f が双安定あるいは燃焼型の場合は spreading と vanishing を分ける閾値的な挙動が現れる.

この c^* は [5] により導入された **semi-wave problem** とよばれる次の問題 $(\text{SWP})_{u^*}$ のただ一つの解の c と q の組 (c^*, q^*) として定まる：

$$(\text{SWP})_{u^*} \begin{cases} q'' - cq' + f(q) = 0, & q(z) > 0, & z \in (0, \infty) \\ q(0) = 0, & q(\infty) = u^*, & \mu q'(0) = c \end{cases}$$

ただし u^* は f の正の安定平衡点である。

上で定まる c^* と q^* を用いて $v(t, x) = q^*(c^*t - x)$ とおくと、

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v), & t \in \mathbb{R}, & x < c^*t, \\ v(t, -\infty) = 1, & v(t, c^*t) = 0, & -\mu v_x(t, c^*t) = c^*, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を満たし、一定の速度 c^* で進む波とみることができると、 q^* は **semi-wave** という。

注意. (1) Cauchy 問題に対応する進行波について、双安定と燃焼型の場合、進行波の速度は unique に定まるのに対して単安定の場合は最小速度 c_0 が存在し、任意の速度 $c (\geq c_0)$ の進行波が存在する。一方、**semi-wave の速度はどの非線形項に対しても一意である。**

(2) [5] では次のことも示されている： $c^*(\mu)$ は μ について単調増加で

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} c^*(\mu) = c_0 := \begin{cases} \text{進行波の最小速度} & (f \text{ が単安定}) \\ \text{進行波の唯一の} & (f \text{ が双安定, 燃焼型}) \end{cases}$$

このことから (CP) は (FBP) の $\mu \rightarrow \infty$ の極限と考えることもできる。

同じく f が単安定、双安定、燃焼型の場合、**問題 (II)** については Du-Matsuzawa-Zhou[9] により次の結果が得られている。

定理 2 ([9]). f は単安定、双安定、燃焼型のいずれか、解 $(u(t, x), h(t))$ は (FBP) の解であり、spreading が起こるとする。このとき、ある $H_\infty \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (h(t) - c^*t - H_\infty) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) &= c^*, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, h(t)]} |u(t, x) - q^*(h(t) - x)| &= 0 \end{aligned}$$

注意. (CP) ($N = 1$) の場合、進行波への収束の仕方について非線形項の間で違いが現れる。特に単安定の場合には進行波に $(c_0/3) \log t$ の shift をもって収束する。一方で、(FBP) の場合には、**収束の仕方に非線形項の間に違いが現れない。**

f が正の安定平衡点をただ 1 つもつ単安定、双安定、燃焼型の場合、対応する (FBP) の解について spreading が起きる場合の自由境界 $h(t)$ の速度や $u(t, x)$ の漸近的形状は対応する semi-wave、つまり $(\text{SWP})_{u^*}$ の解の組 (c^*, q^*) によって決定される。この数学的な結果は、spreading が起きるとき、解の形状を調べるためには semi-wave の形状を詳しく調べれば十分であるということの意味する。

3. 多安定型非線形項の場合

本講演では次の非線形項を考える：

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2} \quad (r > 0, q > 0)$$

この非線形項はアメリカ大陸に生息する spruce budworm (トウヒノシントメハマキ) とよばれる森林害虫の個体数密度の解析のために Ludwig-Aronson-Weinberger[16] により導入された。この個体数密度はひとたび高いレベルに達すると殺虫剤を散布してもしばらくは高い密度に止まり、その後、たまたま低くなるとしばらくの間低いレベルにとどまるという変動を示す。このことは鳥などの捕食者により密度が抑制されているためだと考えられた (Meng-Kamimura [17] も参照)。この非線形項の第1項は logistic 型であり、 r は害虫の増殖率、 q は害虫が食べる葉の量に比例した扶養能力を表す (環境収容力, carrying capacity とよばれる)。第2項は鳥などによる捕食の効果を表しており、以下のような仮定がなされている：

- 害虫はある一定以上の量は捕食されない
- 害虫の密度が低いときは、鳥が見つけにくいなどの理由で、あまり捕食されない。

([16] の他に矢崎[22](第5章)も参照)。この非線形項はパラメータ r, q の値によって**正の平衡点のが数が最大で3つまで変化する**。[16]の結果をまとめると次のようになる：

(I) $q < 3\sqrt{3}$ のとき、 f はただ1つの正の平衡点 u_1^* をもち、それは ODE の意味で安定である。この u_1^* は害虫が低い密度でとどまっている場合の密度に相当し、low endemic state とよばれる。

(II) $q > 3\sqrt{3}$ のとき、2つの数 $0 < r_2(q) < r_1(q)$ が存在して次が成り立つ：

(II-i) $r \in (0, r_2(q))$ のとき、(I) と同じ。

(II-ii) $r \in (r_1(q), \infty)$ のとき、 f はただ1つの正の平衡点 u_3^* をもち、それは ODE の意味で安定である。この u_3^* は害虫が大発生している場合の密度に相当し、outbreak state とよばれる。

(II-iii) $r \in (r_2(q), r_1(q))$ のとき、 f は3つの正の平衡点 $u_1^* < u_2^* < u_3^*$ をもち、ODE の意味で u_1^*, u_3^* は安定、 u_2^* は不安定である。 u_1^* は low endemic state, u_3^* は outbreak state, u_2^* は u_1^* と u_3^* を分ける閾値である。

この中で (I), (II-i), (II-ii) の場合、 f は単安定であり、(FBP) の解析は [4], [5] に帰着される。一方 (II-iii) の場合、 f は正の安定平衡点を複数もつ**多安定型**である。さらに、このとき $\tilde{r}(q) \in (r_2(q), r_1(q))$ が存在して $r \in (\tilde{r}(q), r_1(q))$ のとき f は次を満たす：

$$(f_{PB}) \begin{cases} f(u) = 0 \Leftrightarrow 0, u_1^*, u_2^*, u_3^* \text{ with } 0 < u_1^* < u_2^* < u_3^*, \\ f'(0) > 0, f'(u_1^*) < 0, f'(u_2^*) > 0, f'(u_3^*) < 0, \\ \int_{u_1^*}^{u_3^*} f(u) du > 0 \end{cases}$$

Kawai-Yamada[15] は (f_{PB}) を満たす f を **positive bistable型** と名付けた。以下、とくに断らない場合 f は (f_{PB}) を満たすとする。[15] は (FBP) の解の漸近挙動について次の結果を得た。

定理 3 ([15]). f は (f_{PB}) を満たすとする. このとき (FBP) の解 $(u(t, x), h(t))$ について次の4つのいずれかが起こる:

(i) **vanishing** : $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, h(t)]} |u(t, x)| = 0$

(ii) **small spreading**: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_1^*$ (広義一様)

(iii) **big spreading**: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_3^*$ (広義一様)

(iv) **transition** : $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = v_{\text{dec}}(x)$ (広義一様)

ただし v_{dec} はつぎを満たすただ一つの解である

$$v'' + f(v) = 0 \text{ in } (0, \infty), \quad v'(0) = 0, \quad v'(x) < 0 \text{ for } x \in (0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = u_1^*.$$

とくに2つの正の安定平衡点に対応する2種類のspreadingが現れることに注意する. この2つのspreadingに対して先ほどの**問題 (I), (II)**を考えるためには, 対応する問題 **(SWP) $_{u^*}$** ($u^* = u_1^*, u_3^*$)を考えなければならない. 次が成り立つ.

(SWP) $_{u_1^*}$: $f|_{[0, u_1^*]}$ は単安定であるので [5] より次が成り立つ:

- 任意の $\mu > 0$ に対し, ただ1つの $c_S^* = c_S^*(\mu) > 0$ とただ1つの $q_S^*(z)$ が存在して (c_S^*, q_S^*) は **(SWP) $_{u_1^*}$** の解である.
- $c_S^*(\mu)$ は μ について単調増加で $\lim_{\mu \rightarrow \infty} c_S^*(\mu) = c_0^S$ が成り立つ. ここで c_0^S は $f|_{[0, u_1^*]}$ から定まる0と u_1^* を結ぶ進行波の最小速度である.

(SWP) $_{u_3^*}$: 次のいずれかが起こる ([15])

(A) 任意の $\mu > 0$ に対し, **(SWP) $_{u_3^*}$** はただ1つの解の組 (c_B^*, q_B^*) を持つ.

(B) ある $\mu^* > 0$ があって次が成り立つ:

- $0 < \mu < \mu^*$ のとき **(SWP) $_{u_3^*}$** はただ1つの解の組 (c_B^*, q_B^*) を持つ.
- $\mu \geq \mu^*$ のとき **(SWP) $_{u_3^*}$** は解をもたない.

このことを踏まえ, [15]は**問題 (I)**について次の結果を得た.

定理 4 ([15]). $(u(t, x), h(t))$ を (FBP) の解とする.

(i) small spreading ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c_S^*$

(ii) transition ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c_S^*$

(iii) big spreading であるとき, (A)か(B)のどちらを満たすかに応じて次が成り立つ:

(A) ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c_B^*$

(B) ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \begin{cases} c_B^* & (\text{if } \mu < \mu^*) \\ c_S^* & (\text{if } \mu > \mu^*) \end{cases}$

問題 (II) について, small spreading, $(\text{SWP})_{u_3^*}$ が解 (c_B^*, q_B^*) をもつ場合に big spreading の解については [9] と同様に次の結果が得られる.

命題 5. $(u(t, x), h(t))$ を (FBP) の解とする.

(i) small spreading であれば, ある $H_S \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (h(t) - c_S^* t) = H_S, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = c_S^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, h(t)]} |u(t, x) - q_S^*(h(t) - x)| = 0.$$

(ii) $(\text{SWP})_{u_3^*}$ はただ 1 つの解の組 (c_B^*, q_B^*) をもつとする. このとき big spreading であれば, ある $H_B \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (h(t) - c_B^* t) = H_B, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = c_B^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, h(t)]} |u(t, x) - q_B^*(h(t) - x)| = 0.$$

しかし, $(\text{SWP})_{u_3^*}$ が解をもたないとき, big spreading が起きる解の漸近的形状については未解決であった. 一方, 数値シミュレーションでは次のような形状の解の存在が示唆されている.

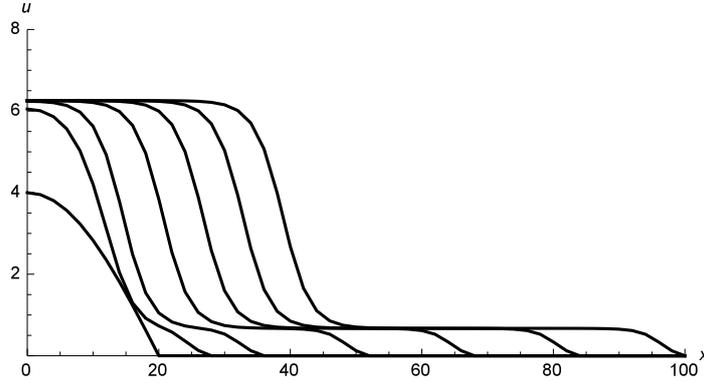


図 1: $f(u) = u(0.50 - 0.055u) - u^2/(1 + u^2)$ ($u_1^* \approx 0.672$, $u_3^* \approx 6.258$), $\mu = 6$, $h_0 = 20$, $u_0(x) = 4 \cos((\pi/40)x)$ (兼子氏 (日本女子大学) による) .

この数値シミュレーションによれば, 自由境界付近と自由境界から遠い部分で 2 つの異なる速度で進む形状が観察される. このような形状の解は propagating terrace として Cauchy 問題では最近盛んに研究されている ([11], [18]). 次節で主結果をのべる.

4. 主結果

主定理を述べる前に条件を述べよう. c_1^B を $f|_{[u_1^*, u_3^*]}$ から定まる進行波の唯一の速度とする. 先述の (B) が起こる必要十分条件は $c_1^B < c_0^S$ である ([15]). このとき $c_S^*(\mu)$ は μ に関して単調増加であるので, ただ一つの $\mu^* > 0$ が存在して $c_S^*(\mu^*) = c_0^S$ が成り立つ.

条件 (T). $c_1^B < c_0^S$ でありかつ $\mu > \mu^*$ とする. ただし μ^* は $c_S^*(\mu^*) = c_1^B$ で定まる唯一の数とする.

定理 A ([12]). 上の条件のもと解 $(u(t, x), h(t))$ は (FBP) の解であり, big spreading が起こるとする. このとき, ある $H_S, H_B \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (h(t) - c_S^* t) = H_S, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = c_S^*$$

さらに, 任意の $c \in (c_1^B, c_S^*)$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [ct, h(t)]} |u(t, x) - q_S^*(h(t) - x)| = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, ct]} |u(t, x) - Q_1^B(c_1^B t + H_B - x)| = 0$$

ここで (c_1^B, Q_1^B) は次の問題の唯一の解の組である

$$(TWP)_{[u_1^*, u_3^*]} \begin{cases} Q'' - cQ' + f(Q) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} Q(z) = u_1^*, \lim_{t \rightarrow \infty} Q(z) = u_3^*, & Q(0) = (u_1^* + u_3^*)/2. \end{cases}$$

単安定, 双安定, 燃焼型のように正の安定平衡点が1つしかない場合, 定理2のように spreading が起こる場合, 自由境界の漸近的速度 $\lim_{t \rightarrow \infty} (h(t)/t) = c^*$ が定まり, 解の定義域 $[0, h(t)]$ 全体での形状が漸近的に速度 c^* の semi-wave に近づくのに対し, **多安定型の非線形項の場合, 自由境界の漸近的速度 $\lim_{t \rightarrow \infty} (h(t)/t) = c^*$ が定まっても, 解の定義域 $[0, h(t)]$ 全体での形状が一つの関数で近似できない場合がある**ことを意味する.

5. 高次元の問題

生物種の拡散という観点から, より現実在即しているのは高次元の問題である. 高次元の問題の第一歩として次の球対称の問題について考える:

$$(FBP)_{\text{rad}} \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & t > 0, 0 < r < h(t), \\ u_r(t, 0) = u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_r(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0, r) = u_0(r), & 0 \leq r \leq h_0. \end{cases}$$

ここで, $N \geq 2$ とし, $r = |x|$ ($x \in \mathbb{R}^N$), $\Delta u = u_{rr} + \frac{N-1}{r} u_r$ である. また,

$$u_0 \in \mathcal{K}(h_0) := \left\{ \psi \in C^2[0, h_0] \mid \begin{array}{l} \psi(r) > 0 \text{ in } [0, h_0), \\ \psi'(0) = \psi(h_0) = 0, \psi'(h_0) < 0 \end{array} \right\}$$

この問題は f がロジスティック型の場合, Du-Guo [7], 単安定, 双安定の場合, Du-Lou-Zhou[6] により漸近挙動の解析が行われている.

球対称の場合においても spreading は次のように定義される:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, r) = u^* \text{ (広義一様)}$$

ただし u^* は f の正の安定平衡点である.

空間多次元の場合、解の挙動の分類のためには f は (f_{PB}) よりも強い次の仮定が必要である：

$(f_{\text{PB}}^{\text{H}})$: f は (f_{PB}) をみたしさらに $\frac{f(u)}{u - \bar{u}_2}$ は (\bar{u}_2, u_3^*) 上単調非増加

ただし $\bar{u}_2 \in (u_2^*, u_3^*)$ は $\int_{u_1^*}^{\bar{u}_2} f(s)ds = 0$ から定まる数

この条件の下、 $(\text{FBP})_{\text{rad}}$ の解の分類は以下の定理で与えられる。

定理 6 ([13]). f は $(f_{\text{PB}}^{\text{H}})$ を満たすとする。このとき $(\text{FBP})_{\text{rad}}$ の解 $(u(t, r), h(t))$ について vanishing, small spreading, big spreading, transition の4つのうちいずれかが起こる。

高次元における問題 $(\text{FBP})_{\text{rad}}$ についての問題意識は以下の通りである：

$N \geq 2$, spreading が起こるとき、 $h(t)$ の評価に1次元との違いが現れるか。

上の問題意識において、**問題 (I)** の $h(t)$ の評価について $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t}$ の値については空間1次元の場合と差異がないが、 $h(t)$ の詳しい評価と**問題 (II)** の u の漸近的形状の違いが現れる。

Cauchy 問題 (CP) においては次のように進行波への収束に \log のシフトが現れることが Uchiyama [20] によって得られている。

定理 7 ([21]). f は双安定ととする。(CP) の U_0 は非負、球対称でコンパクト台をもつとし、 $U(t, |x|)$ を (CP) の解とする。このとき $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, x) = u^*$ (\mathbb{R}^N 上広義一様) が成り立つならば (u^* は双安定型の f の唯一の正の安定平衡点)、ある $L \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| U(t, |x|) - Q_{c_0} \left(c_0 t - \frac{N-1}{c_0} \log t + L - |x| \right) \right| = 0$$

が成り立つ。ただし、 (c_0, Q_{c_0}) は f から unique に定まる進行波の速度とその形状関数の組である。

このように、 $N \geq 2$ のとき、(CP) では Δu の $(N-1)u_r/r$ の項の効果により、 $\log t$ のシフトが現れる。

自由境界問題 $(\text{FBP})_{\text{rad}}$ において、 f が単安定、双安定、燃焼型の場合は Du-Matsuzawa-Zhou [10] により次の結果が得られている。

定理 8 ([10]). f は単安定、双安定、燃焼型のいずれか、 $(u(t, r), h(t))$ は $(\text{FBP})_{\text{rad}}$ の解で spreading が起こるとする。このとき、ある $R_\infty \in \mathbb{R}$ が存在して

- $\lim_{t \rightarrow \infty} [h(t) - \{c^* t - (N-1)c_* \log t\}] = R_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = c^*$

ここで c_* は以下により定まる。

$$c_* = \frac{1}{\zeta c^*}, \quad \zeta = 1 + \frac{c^*}{\mu^2 \int_0^\infty (q_z^*(z))^2 e^{-c^* z} dz}$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{r \in [0, h(t)]} |u(t, r) - q^*(h(t) - r)| = 0$

f が (f_{PB}^H) を満たす場合については次を得た.

定理 B ([14]). f は (f_{PB}^H) を満たし, **条件 (T)** を満たすとする. $(u(t, r), h(t))$ は $(FBP)_{\text{rad}}$ の解であり, big spreading が起こるとする. このとき $R_S, R_B \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h(t) - \{c_{S,*}^* t - (N-1)c_{S,*} \log t\}] = R_S, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = c_S.$$

ここで $c_{S,*}$ は次で与えられる:

$$c_{S,*} = \frac{1}{c_S^*} \left\{ 1 + \frac{c_S^*}{\mu^2 \int_0^\infty (q_S^*)'(z)^2 e^{-c_S^* z} dz} \right\}^{-1}.$$

さらに任意の十分大きい $L > 0$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{r \in [c_S t - L \log t, h(t)]} |u(t, r) - q_S^*(h(t) - r)| = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{r \in [0, c_S t - L \log t]} \left| u(t, r) - Q_1^B \left(c_1^B t - \frac{N-1}{c_1^B} \log t + R_B - r \right) \right| = 0.$$

つまり, 条件 (T) のもとでは big spreading が起こる場合, u は球対称な propagating terrace (radial propagating terrace) に近づく. このような空間高次元での propagating terrace は Cauchy 問題においては Du-Matano [8] により扱われている. しかしここでは terrace を構成する各段における \log の shift までには言及されていない. さらに, 進行波 Q_1^B に現れる \log の項は Uchiyama [20] (定理 7), つまり Cauchy 問題の場合のものと同じにするのに対し, semi-wave q_S^* にあわられる \log の項は Du-Matsuzwa-Zhou [10] (定理 8), つまり自由境界問題の場合にもものと同じである. このことから, 1 つの propagating terrace の中に自由境界問題による伝播と Cauchy 問題による伝播が混在することが高次元の問題により, はっきりとするとと言える.

参考文献

- [1] D. G. Aronson, H. F. Weinberger, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation, in: Partial Differential Equations and Related Topics, in: Lecture Notes in Math., vol. 446, Springer, Berlin, 1975, pp. 5–49.
- [2] D. G. Aronson, H. F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics, Adv. Math., **30**(1978) 33–76.
- [3] G. Bunting, Y. Du, K. Krakowski, Spreading speed revisited: analysis of a free boundary model, Netw. Heterog. Media, **7** (2012) 583–603.
- [4] Y. Du, Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., **42**(2010), 377–405.
- [5] Y. Du, B. Lou, Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries, J. Eur. Math. Soc., **17** (2015) 2673–2724.
- [6] Y. Du, B. Lou and M. Zhou, Spreading and vanishing for nonlinear Stefan problems in high space dimensions, J. Elliptic Parabol. Equ. **2**(2016), 297–321.
- [7] Y. Du, Z. Guo, Spreading-vanishing dichotomy in a diffusive logistic model with a free boundary, II, J. Differential Equations, **250**(2011) 4336–4366.

- [8] Y. Du and H. Matano, Radial terrace solutions and propagation profile of multistable reaction-diffusion equations over \mathbb{R}^N , submitted.
- [9] Y. Du, H. Matsuzawa, M. Zhou, Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems, *SIAM J. Math. Anal.*, **46**(2014), 375–396.
- [10] Y. Du, H. Matsuzawa, M. Zhou, Spreading speed and profile for nonlinear Stefan problem in high space dimension, *J. Math. Pures Appl.*, **103**(2015), 741–787.
- [11] A. Ducrot, T. Giletti and H. Matano, *Existence and convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366 (2014) 5541–5566.
- [12] Y. Kaneko, H. Matsuzawa, Y. Yamada, Asymptotic profiles of solutions and propagating terrace for a free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity, submitted.
- [13] Y. Kaneko, H. Matsuzawa, Y. Yamada, A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimension I – classification of asymptotic behavior, in preparation
- [14] Y. Kaneko, H. Matsuzawa, Y. Yamada, A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimension II – asymptotic profiles of solutions and propagating terrace, in preparation
- [15] Y. Kawai, Y. Yamada, Multiple spreading phenomena for a free boundary problem for a free boundary problem of a reaction with a certain class of bistable nonlinearity, *J. Differential Equations*, **261**(2016), 538–572. **57**(2014) 449–465. application to a biological problem, *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.* **1**(1937), 1–25.
- [16] D. Ludwig, D.G. Aronson and H. F. Weinberger, Spatial patterning of spruce budworm, *J. Math. Biol.* **8** (1979) 217–258.
- [17] W. Meng and Y. Kamimura, Outbreak Model and Boundary Condition, *数理解析研究所講究録* **1254**(2002), 110-118.
- [18] P. Poláčik, Propagating terrace and the dynamics of front-like solutions of reaction-diffusion equations on \mathbb{R} , to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*
- [19] J. G. Skellam, Random Dispersal in Theoretical Populations, *Biometrika*, **38**(1951), 196-218.
- [20] K. Uchiyama, The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**(1978), 453–508.
- [21] K. Uchiyama, Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with varying drift coefficients, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **90**(1983), 291–311.
- [22] 矢崎成俊, 実験数学読本, 日本評論社 (2016)