グラフ上の組合せゲーム

松本 直己　(慶應義塾大学デジタルメディア・コンテンツ統合研究センター)*

1. はじめに

組合せゲームとは，以下の3つを満たすゲームのことを指す：

(1) 二人のプレイヤーが交互に手を打つ.

(2) サイコロを振るなどの偶然要素を含まない(確定性).

(3) ゲームの進行やお互いの手の内が隠されていない(完全情報性).

例えば，囲碁や将棋は組合せゲームであり，すごろくやポーカーは上の性質(2)や(3)を満たさないため，組合せゲームではない．さらに上記の3つの性質に加え，

(4) 最初に打つ手が無くなったプレイヤーの負け[1].

が成り立つゲームを**Conwayゲーム**と呼ぶ．また，プレイヤーによって可能な着手に違いのないゲームを**不偏ゲーム**と呼び，それが一般には異なるものを**非不偏ゲーム**と呼ぶ．以上の各分類に該当するゲーム例を図1に表す[2].

	不偏 (impartial)	非不偏 (partisan)
Conway	ニム (Nim)	Domineering
非Conway	Graph grabbing game	囲碁，チェス

図 1: 組合せゲームの分類

組合せゲーム理論は，組合せゲームの数学的構造を研究する研究分野であり，また特に，局面全体を独立した部分局面に分解できるようなゲームに対して，プレイヤーの戦略を考える上での良い枠組みである．例えば，そのような部分性の強いゲームの一つである囲碁の研究に組合せゲーム理論おける解析手法が応用されている[43, pp.195–205]. また，Conwayゲームについては大変良い数学的な解析手法が知られており[3]，特にニムにおいてはその必勝法を簡単な計算で導けることが知られている([3, pp.40–42]など参照).

このように，様々なタイプの組合せゲームに対して数学的な研究が長年行われており，組合せゲーム理論は数学の一分野として確立されている．またグラフを盤面とし

2010 Mathematics Subject Classification: 05C57，91A46
キーワード：組合せゲーム，グラフ
* 〒223-8523 神奈川県横浜市港北区日吉本町2-1-1 慶應義塾大学 日吉キャンパス西別館1
e-mail: naoki.matsumo10@gmail.com
[1] このようなゲームを**正規形**，逆に，最後に手を打ったプレイヤーを負けとするゲームは**逆形**という.
[2] 囲碁やチェスは，最後に手を打ったプレイヤーが勝ちとならない場合があるため，Conwayゲームではない.
[3] 不偏なConwayゲームはSpragueとGrundy[30, 48]によって，また非不偏なConwayゲームについても良い解析手法がConwayによって与えられている[18].

た組合せゲームも20世紀前半からよく研究されており，そのようなグラフ上の組合せゲームにおいては，グラフ理論における命題や手法を利用した解析も行われている．グラフ上の組合せゲームを考えることで，組合せゲーム理論及びグラフ理論の研究の幅が一気に広がり，興味深い問題も数多く現れ，現在も盛んに研究が行われている．

本稿では，グラフ上の組合せゲームの簡単な分類を述べた後，いくつかのゲームの例を取り上げ，それらの未解決問題や最近の研究動向について言及する．以降では，特に断らない限り，グラフはすべて有限無向単純グラフ[4]とし，有限性 (有限回の着手によりゲームが終了する) を仮定した組合せゲーム[5]についてのみ考える．

2. グラフ上の組合せゲームの分類

グラフ上の組合せゲームは大きく分けて以下の2種類に分類される．

1. グラフ不変量がゲームの不変量となるゲーム

   グラフ理論では，これまでに多くのグラフの不変量が発見・研究されており，現在でも度々新たな不変量が定義され，活発に研究が行われている．その中のいくつかの不変量に対しては，その不変量の評価に深く関係する**ゲーム不変量**[6]が存在する．

   グラフ G の染色数 $\chi(G)$ は G の proper な頂点彩色に必要な色数の最小値である．これに対し,「先手と後手が交互に G の頂点に色を塗り合い，先手が proper な頂点彩色を構成しようとし，後手がそれを妨害する」というゲームにおいて，先手が勝てる (すなわち，proper な頂点彩色を構成できる) ときの色数の最小値－ゲーム染色数 $\chi_g(G)$ －はグラフのゲーム不変量となる．(特に，定義から $\chi(G) \leq \chi_g(G)$ が成り立つことがわかる.)

   本分類に該当するゲームの例として，Graph coloring game [4]，List coloring game [6]，Domination game [8]，Distinguishing game [29] などがある．

2. 実際に存在するゲームや問題をグラフ上でモデル化したゲーム

   囲碁，将棋，チェスやオセロなど，実際に人々が遊んでいる組合せゲームは数多く存在する．そのいくつかについては，ゲームの盤面をグラフに置き換え，より一般的な状況で研究が行われている．

   そのようなゲームの中でも有名なものの一つとして**一般化しりとり** (Generalized Geography) がある [45]．各単語を頂点,「単語 x の語尾と単語 y の語頭が同じである」という関係を有向辺 (x, y) として置き換えて得られる有向グラフを考える．この有向グラフ上で行われる「ある頂点から始めて，交互に有向辺を辿っていきながら，訪れた頂点 (とそれに隣接する有向辺) を削除していき，先に動けなくなった方が負け」というゲームは，しりとりをそのままグラフで表現したゲームとなっている (図2参照).

---

[4] 頂点数が有限で，辺に向きが付いておらず，かつ多重辺やループを含まないグラフ．
[5] このようなゲームは二人零和有限確定完全情報ゲームとも呼ばれる．
[6] ゲーム不変量とは，グラフ上のゲームから得られるグラフの不変量のことを指す．

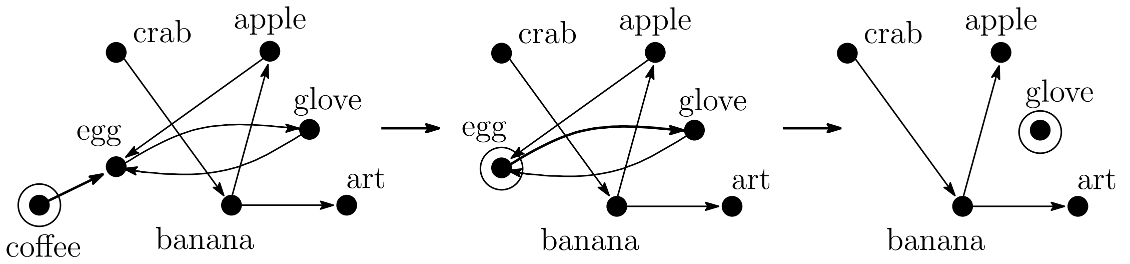

図 2: 一般化しりとりの盤面となる有向グラフとそのゲーム例 (この例では，coffee を開始頂点としており，後手勝ち.)

本ゲームにおいて，ゲームの勝利者の判定は一般には PSPACE 完全[7]であることが知られており，様々な二人ゲームの PSPACE 完全性を示す際に，その変換元として一般化しりとりが利用されることも多い (例えば [5, 40] など)．この一般化しりとりの盤面を無向グラフに拡張したグラフ上のゲームも研究がなされている [27]．他にも，実際に考えられていたゲームの一般化として考えられているものとして，Graph grabbing game [51]，Graph Ramsey game [12, p.3] などがある．

また，世の中で実際に起こりうる (現実的な) 問題をゲームとして捉え，グラフ上の組合せゲームとしてモデル化されているものもいくつか存在し，Voronoi game [49] や Cops and Robber [44] 等がこれらに該当すると考えられる．

3. グラフ上のゲーム例

本章では，先に述べたそれぞれの分類に該当するグラフの組合せゲームについて，それぞれ代表的な例を紹介する．前者 2 つはグラフの代表的な不変量をゲーム不変量とする組合せゲームであり，3 つ目はオリジナルの組合せゲームの盤面をグラフに拡張したゲームである．

3.1. Game chromatic number

グラフ G において，写像 $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ が任意の隣接 2 頂点 u, v に対し，$c(u) \neq c(v)$ を満たすとき，c は G の k**-彩色** (k-coloring) であるという．また，k-彩色が存在する最小の k を G の**染色数** (chromatic number) と呼び，$\chi(G)$ で表す[8]．グラフ G の**ゲーム染色数** (game chromatic number) $\chi_g(G)$ とは，以下で定義される Graph coloring game において，Alice がゲームに勝利できる色集合 C のサイズの最小値のことを指す．

定義 1 (Graph coloring game)．グラフ G と色集合 C が与えられる．Alice(先手) と Bob(後手) が交互に G の未彩色の頂点を C に含まれている色で彩色する．この時，通常の彩色と同様に，隣り合う 2 頂点は異なる色でなければならない．全ての頂点を彩色できた場合，Alice の勝利．そうでなければ (すなわち，Alice がどの未彩色の頂点も C の中の色では彩色できない場合)，Bob の勝利となる (図 3 参照)．

定義から，任意のグラフ G に対し，$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ が成り立つ[9]．これまでに多くのグラフクラスに対し，そのゲーム染色数の評価が与えられている (例えば，

[7] 複雑性クラスの一つ．Turing 機械によって多項式領域で問題 Q が解けるとき，Q は PSPACE であるという (問題を解く計算時間は考慮しない)．PSPACE である問題 Q が PSPACE 完全とは，NP 完全と同様に，他の PSACE に属する全ての問題から Q に多項式時間還元可能であることをいう．
[8] グラフの彩色問題については，[14] などを参照せよ．
[9] $\Delta(G)$ は G の最大次数．

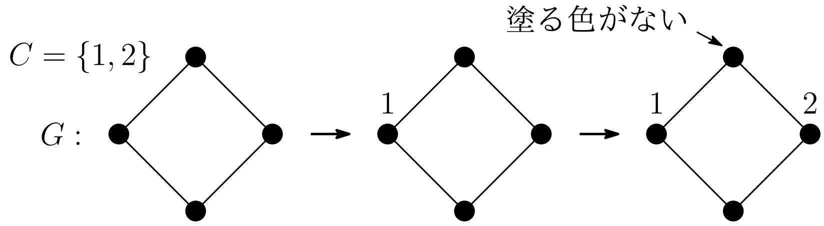

図 3: Graph coloring gameの例(3色目を要求する塗り方ができるため，Bob勝ち)

[2, 24, 53] など)．また一般に，ゲーム染色数と染色数の差は，与えられたグラフの頂点数の約2分の1ほどで抑えられることが分かっており，実際にその差を実現するグラフも無数に存在することが分かっている．

定理 2 ([41])**.** $n \geq 2$ 頂点の任意のグラフ G に対して，

$$\chi_g(G) - \chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$$

が成り立つ．またこの評価は任意の偶数 n に対して最善である．

また，染色数だけでなく，ゲーム染色数と彩色に関する他の不変量との関係もいくつか明らかとなっており [19, 35, 36]，特に，非巡回的染色数 $\chi_a(G)$[10] とは以下のような良い関係式が知られている．

定理 3 ([19])**.** 任意のグラフ G に対し，$\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) + 1)$ が成り立つ．

しなしながら，ゲーム染色数は通常の染色数とは異なり，遺伝的な性質[11]ではない．すなわち，あるグラフ G とその真部分集合 H に対して，必ずしも $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$ とはならない場合がある．したがって，以下のような興味深い未解決問題が残されている．

問題 4 ([53])**.** グラフ G 上の Graph coloring game において，色集合のサイズが k のとき，Alice がゲームに勝利できるとする．このとき，与えられた色集合のサイズが $k + 1$ でも Alice はゲームに勝利できるか？

直観的には，Alice にとって使える色数が増えることは，グラフ全体を彩色し易くなるように思える．(実際，色数が $\Delta(G) + 1$ 以上になれば，Alice は各頂点を適当に彩色するだけでゲームに勝てる.) しかしながら，現時点では本問題を解決する有効な手立てはなく，その部分的解決もほとんど知られていない．

3.2. Game domination number

グラフ G の頂点部分集合 $S \subseteq V(G)$ について，任意の頂点 $v \in V(G) \setminus S$ が S のある頂点と隣接しているとき，S を G の**支配集合** (dominating set) という．この時，S の頂点はそれ自身と隣接する頂点を**支配する** (dominate) という．また S の定義から明らかに，$V(G)$ 自身も G の支配集合であるので，G においてなるべく頂点数が小さい支配集合を見つけることが問題となる．そこで，G における最小の支配集合の頂点数を**支配数** (domination number) と呼び，$\gamma(G)$ で表す[12]．グラフ G の**ゲーム支配数** (game

[10] グラフ G の**非巡回的染色数** $\chi_a(G)$ とは，どの2色で塗られた頂点部分集合も閉路グラフを誘導しない (すなわち，森グラフとなっている) ような k-彩色が存在する最小の k のことを指す．

[11] グラフのある性質 P が遺伝的であるとは，グラフ G が P を満たすならば，任意の誘導部分グラフ $G' \subseteq G$ も P を満たすことを指す．

[12] 支配数の研究の詳細については，[31] などを参照せよ．

domination number) $\gamma_g(G)$ とは，以下で定義される Domination game において，二人のプレイヤー (Dominator と Staller) が共に最適にプレイした結果として得られる支配集合 S のサイズのことを指す.

定義 5 (Domination game). グラフ G が与えられる．Dominator (先手) と Staller (後手) が交互に $N_G[S] \subsetneq N_G[S \cup \{v\}]$[13] を満たす G の頂点 v を集合 S に追加する (すなわち，頂点 v はまだ S に支配されていない頂点を少なくとも 1 頂点以上新たに支配する). 集合 S が G の支配集合となったとき，ゲームが終了する．Dominator は結果として得られる支配集合 S のサイズを可能な限り小さく，一方 Staller はそれを可能な限り大きくするのがゲームの目的である (図 4 参照).

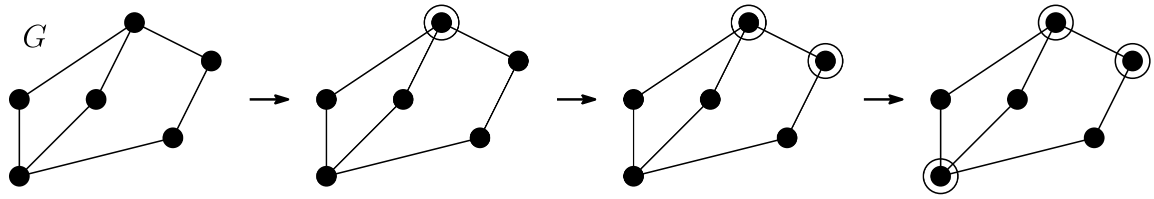

図 4: Domination game の例 (○印は各プレイヤーが S に追加した頂点)

ゲーム染色数と同様に，任意のグラフ G に対して，$\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$ が成り立つのは明らかだが，実は $\gamma_g(G)$ は支配数の 2 倍ぐらいで上から抑えられることも簡単にわかる.

命題 6 ([8]). 任意のグラフ G に対して，$\gamma(G) \leq \gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$ が成り立つ.

一般に，与えられたグラフ G と整数 k に対して，$\gamma_g(G) \leq k$ であるかどうかを判定する問題は PSPACE 完全であることが知られている [7]．また，ゲーム支配数は先手と後手を入れ替えたバージョン等も含め，現在でも様々な研究が行われており (例えば [22, 34, 39] を参照)，いくつかの問題や予想も提起されている．その中でも特に有名な未解決問題として，**3/5-予想**がある.

予想 7 (3/5-予想 [37]). G を孤立点[14]を含まないグラフとする．このとき，$\gamma_g(G) \leq \frac{3}{5}|V(G)|$ が成り立つ.

本予想の解決のため，Bujtás は**放電法**[15]に類似した手法を開発し，与えられたグラフに対して，頂点数や最小次数に依存するゲーム支配数の上界を与えた [10, 11]．その手法を用いて，Henning らは最小次数 2 以上の場合は 3/5-予想が成り立つことを証明した.

定理 8 ([32]). G を孤立点を含まないグラフとする．もし G の最小次数が 2 以上であれば，$\gamma_g(G) \leq \frac{3}{5}|V(G)|$ が成り立つ.

上記に加え，いくつかの研究グループによって，3/5-予想の部分的解決が与えられているが [33, 46]，現時点ではまだ完全解決には至っていない．最近になって，ゲーム支配数が最も大きくなるときのグラフの構造の解析 [52] や，ゲーム支配数の評価を行う

[13] $N_G[S]$ は S 自身と S に含まれる頂点の近傍からなる集合.
[14] 孤立点とは次数 0 の頂点のこと.
[15] グラフが良い性質や構造を持つことを示す際に用いられるグラフ理論における重要な手法．特にグラフの彩色問題を解く際によく利用されており，四色定理の証明にも用いられた.

新しい手法の開発 [21] などもなされており，本予想の完全解決に向けて，現在も盛んに研究が行われている．

また，ゲーム支配数は支配数に関する研究で最も有名な未解決問題である **Vizing 予想**とも重要な関係があることが知られている [8]．

予想 9 (Vizing 予想 [50])**.** 任意の二つのグラフ G と H に対し，$\gamma(G\Box H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ が成り立つ [16]．

命題 6 と Vizing 予想の不等式から，以下の式が得られる：

$$\gamma_g(G\Box H) \geq \gamma(G\Box H) \geq \gamma(G)\gamma(H) \geq \frac{1}{4}\gamma_g(G)\gamma_g(H)$$

したがって，$\gamma_g(G)\gamma_g(H) > 4\gamma_g(G\Box H)$ を満たす G と H が存在すれば，このグラフの組は Vizing 予想の反例となる．一方で，もし $c\gamma_g(G\Box H) \geq \gamma_g(G)\gamma_g(H)$ を満たす定数 $c > 0$ が存在すれば，

$$2c\gamma(G\Box H) \geq c\gamma_g(G\Box H) \geq \gamma_g(G)\gamma_g(H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

となり，すなわち，

$$\gamma(G\Box H) \geq \frac{1}{2c}\gamma(G)\gamma(H)$$

が成り立つ．もし $c = 1$ ならば，上記の不等式は Clark と Suen [17] の結果の一般化にもなっている [17]．

3.3. Graph grabbing game

重み関数 $w : V(G) \to \{0, 1, ...\}$ によってグラフ G の各頂点に非負整数の重みが与えられた重み付きグラフを (G, w) と表す．

定義 10 (Graph grabbing game)**.** 重み付き連結グラフ (G, w) が与えられる．二人のプレイヤー Alice (先手) と Bob(後手) は交互に (G, w) から 1 頂点を取り除き，その取り除いた頂点の重みを得点として獲得していく．ただし，各プレイヤーの手番において，頂点を (G, w) から除いた後のグラフは連結でないといけない．全ての頂点を取り終わったとき，Alice の獲得得点が (G, w) 全体の重みの合計の半分以上ならば Alice の勝利，そうでなければ，Bob の勝利とする (図 5 参照)．

Graph grabbing game は，2004 年の Winkler [51] の本における “Coins in a row” [18] というゲームの一般化として考案された組合せゲームである [19]．道グラフ P_m[51]，閉路グラフ C_m[16, 38]，木グラフ [47] については，それぞれ頂点数が偶数であれば，任意の重み付けに対して，Alice はそのグラフ上のゲームで勝利できることが知られている．

---

[16] $G\Box H$ は G と H の直積を表す．二つのグラフ G と H の直積 (Cartesian product) とは，次のような頂点集合と辺集合からなるグラフである：$V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$，$(u, u')(v, v') \in E(G\Box H) \Leftrightarrow$ (i) $u = v$ かつ u' と v' が (H において) 隣接している，または (ii) $u' = v'$ かつ u と v が (G において) 隣接している．

[17] $\gamma_g(C_5) = 3$ かつ $\gamma_g(C_5\Box C_5) \leq 9$ [8] より，もし $c = 1$ ならば，この評価は最善である．

[18] コインが一直線上に並べられており，二人のプレイヤーはその両端に置かれているコインのいずれか好きな方を交互に 1 枚ずつ獲得していき，全て取り終わった時に全体の半分以上の金額を獲得しているプレイヤーが勝利するというゲーム．これは道グラフ上の Graph grabbing game に対応している．

[19] Graph grabbing game はニムとは異なるタイプのゲームであるが，道グラフや閉路グラフに対しては，スプレイグ・グランディの定理と同様の性質が成り立つことも知られている [9]．

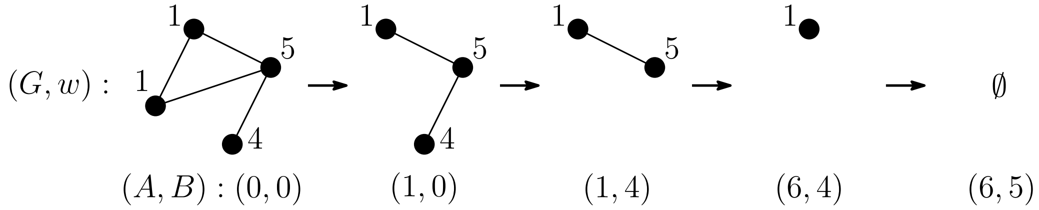

図 5: Graph grabbing game の例 (各数字は重み，下の数値は左から順に Alice と Bob の得点．この例では，Alice の勝利.)

また，Alice がゲームに勝つことができないような奇数頂点の連結グラフ G と重み関数 w の組は無数に存在することが簡単に分かる [20]．一方で，Alice がゲームに勝てないような偶数頂点の連結グラフも無数に存在することが知られている [15, 42].

ところが，そのような Alice がゲームで勝てないような偶数頂点の連結グラフ G(と重み関数 w の組) は非二部的グラフのものしか知られていない．したがって，論文 [47] の中で以下の予想が提起された.

予想 11 ([47]). 任意の偶数頂点の連結二部グラフ G と重み関数 w に対し，Alice は (G,w) 上のゲームで勝つことができる.

これまでに，私は江川氏 (東京理科大学) らと共に予想 11 の部分的解決に成功しているが [23]，依然として完全解決には至っていない.

そこで私は，Graph grabbing game における Alice にとって悪い部分構造に着目した．まず，Alice がゲームに勝つための必要条件を以下のように得た.

命題 12. 偶数頂点の連結グラフ G に対し，切断点の集合を S とする．このとき，任意の重み関数 w に対し，Alice が (G,w) 上の Graph grabbing game において勝つことができるならば，$G[S]$ は二部グラフである [21].

G を偶数頂点の連結グラフとする．命題 12 の対偶を考えると，奇数頂点の閉路グラフを誘導するような切断点の集合 S が G に存在するならば，Alice がゲームに勝てない．このとき，その奇数頂点の閉路グラフを誘導する奇数個の切断点 $s_1, s_2, \dots, s_{2k+1}$ ($s_i \in S, k \geq 1$) とそれぞれを取り除いた際に得られる，s_i が含まれていない連結成分を $T_1, T_2, \dots, T_{2k+1}$ とする．ここで，$t_i \in V(T_i)$ を s_i の隣接点とすると，$G[\bigcup_{i=1}^{2k+1} s_i \cup \bigcup_{i=1}^{2k+1} t_i]$ は奇数頂点の閉路グラフ C_{2k+1} の各頂点に次数 1 の頂点を追加したグラフ (C_{2k+1}**-corona** と呼ぶ) となる (図 6 参照).

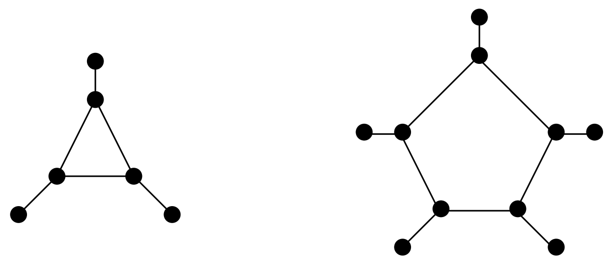

図 6: C_3-corona と C_5-corona

[20] 例えば，奇数頂点の道グラフ P_{2k+1} と中心の次数 2 の頂点に重み 1，その他の頂点には重み 0 を与えるような重み関数の組がそれにあたる.

[21] グラフ G に対し，その頂点部分集合 $S \subseteq V(G)$ から誘導される G の誘導部分グラフを $G[S]$ と表す.

これまでに分かっている Alice がゲームに勝てない偶数頂点のグラフの例は，全て (ある k に対して) C_{2k+1}-corona を誘導部分グラフとして含んでいることが確認できるため，私はこの C_{2k+1}-corona が Alice にとって悪い部分構造である，つまり，偶数頂点の連結グラフが C_{2k+1}-corona を誘導部分グラフとして含まなければ，Alice がゲームに勝つことができると予想した．

予想 13 ([20])**.** G を偶数頂点の連結グラフとする．任意の $k \geq 1$ に対し，G が C_{2k+1}-*corona* を誘導部分グラフとして含まなければ，Alice は G 上のゲームに勝つことができる．

誘導部分グラフの性質から，C_{2k+1} を誘導部分グラフとして含まなければ，C_{2k+1}-corona も含まない．また，二部グラフであれば奇数頂点の閉路グラフを誘導部分グラフとして含まないため，この予想 13 は予想 11 を包含するより強い予想となっている．

このような特定の誘導部分グラフを禁止する[22]ことによって，ハミルトン閉路の存在性などのグラフの良い性質を保証する試みはグラフ理論では長年研究されており，実に多くの先行研究が存在する (例えば [13, 28] などを参照)．その研究の流れに沿って，私は江川氏 (東京理科大学) らと共に，禁止部分グラフを用いたグラフの特徴付けを行うことによって，以下のような予想13の部分的解決を得ている．

定理 14 ([20])**.** G を P_5 と bull graph[23]を誘導部分グラフとして含まない偶数頂点の連結グラフとする．このとき，任意の重み関数 w に対し，Alice は (G, w) 上のゲームで勝つことができる．

4. おわりに

本稿では，グラフ上の組合せゲームに限定し，いくつかのゲームの紹介を行った．本稿で紹介した3つのゲームをはじめ，グラフ上の組合せゲームの多くは非 Conway ゲームであり，いずれも局面の解析が難しく，ゲームごとに異なる解析手法を用いて研究が行われている状況である．今後，このような非 Conway ゲーム全体に利用できるような一般的な解析手法の開発が待たれている．

本稿で紹介した組合せゲームの他にも，多数の組合せゲームが研究されており，現在では組合せゲームの研究に関する論文を集めた参考文献リストも作成されている [26]．今回はグラフ上の組合せゲームに対象を絞った結果，組合せゲーム理論における基本的な事項や用語についてはほとんど触れることができなかった．もし，本稿で組合せゲーム理論に興味を持ち，その詳細な内容を知りたい人は [1, 3, 18] などを参照されたい．

参考文献

[1] M.H. Albert, R.J. Nowakowski and D. Wolfe, Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory, *A K Peters/CRC Press* (2007).

[2] T. Bartnicki, B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz and I. Peterin, Game chromatic number of Cartesian product graphs, *Electron. J. Combin.* **15** (2008), #R72.

[3] E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays, *A K Peters/CRC Press* 4 vols. (1982 – 2004).

[4] H.L. Bodlaender, On the complexity of some coloring games, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **484** (1991), 30–40.

[22] グラフ理論においては，この禁止された誘導部分グラフのことを**禁止部分グラフ**と呼んでいる．

[23] Bull graph とは，C_3-corona から次数1の頂点を1つだけ取り除いて得られるグラフ．

[5] É. Bonnet, F. Jamain and A.Saffidine, On the complexity of connection games, *Theoret. Comput. Sci.* **644** (2016), 2–28.

[6] M. Borowiecki, E. Sidorowicz and Zs. Tuza, Game list colouring of graphs, *Electron. J. Combin.* **14** (2007), #R26.

[7] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj and G. Renault, Complexity of the game domination problem, *Theoret. Comput. Sci.* **648** (2016), 1–7.

[8] B. Brešar, S. Klavžar and D.F. Rall, Domination game and an imagination strategy, *SIAM J. Discrete Math.* **24** (2010), 979–991.

[9] D.E. Brown and L.G. Brown, Graphs games and the pizza problem, arXiv:1509.07533v2.

[10] Cs. Bujtás, Domination game on forests, *Discrete Math.* **338** (2015), 2220–2228.

[11] Cs. Bujtás, On the game domination number of graphs with given minimum degree, *Electron. J. Combin.* **22** (2015), #P3.29.

[12] P.J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, *Cambridge University Press* (1994).

[13] G. Chartrand, D. Geller and S. Hedetniemi, Graphs with forbidden subgraphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **10** (1971), 12–41.

[14] G. Chartrand and P. Zhang, Chromatic Graph Theory, *CRC Press* (2008).

[15] J. Cibulka, J. Kynčl, V. Mészáros, R. Stolař and P. Valtr, Graph sharing games: Complexity and connectivity, *Theoret. Comput. Sci.* **494** (2013), 49–62.

[16] J. Cibulka, J. Kynčl, V. Mészáros, R. Stolař and P. Valtr, Solution of Peter Winker's Pizza Problem, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **5874** (2009), 356–367.

[17] W.E. Clark and S. Suen, An inequality related to Vizing's conjecture, *Electron. J. Combin.* **7** (2000), #N4.

[18] J.H. Conway, On Numbers and Games, *A K Peters/CRC Press* (2000).

[19] T. Dinski and X. Zhu, A bound for the game chromatic number of graphs, *Discrete Math.* **196** (1999), 109–115.

[20] M. Doki, Y. Egawa and N. Matsumoto, Graph grabbing game on graphs with forbidden subgraphs, preprint.

[21] P. Dorbec, M.A. Henning, S. Klavžar and G. Košmrlj, Cutting lemma and union lemma for the domination game, *Discrete Math.* **342** (2019), 1213–1222.

[22] P. Dorbec, G. Košmrlj and G. Renault, The domination game played on unions of graphs, *Discrete Math.* **338** (2015), 71–79.

[23] Y. Egawa, H. Enomoto and N. Matsumoto, The graph grabbing game on $K_{m,n}$-trees, *Discrete Math.* **341** (2018), 1555–1560.

[24] U. Faigle, U. Kern, H. Kierstead and W.T. Trotter, On the game chromatic number of some classes of graphs, *Ars Combinatoria* **35** (1993), 143–150.

[25] A.S. Fraenkel, E.R. Scheinerman and D. Ullman, Undirected edge geography, *Theoret. Comput. Sci.* **112** (1993), 371–381.

[26] A.S. Fraenkel, Combinatorial Games: Selected Bibliography with a Succinct Gourmet Introduction, *Electron. J. Combin.* Dynamic Surveys (2012), #DS2.

[27] A.S. Fraenkel, E.R. Scheinerman and D. Ullman, Undirected edge geography, *Theoret. Comput. Sci.* **112** (1993), 371–381.

[28] S. Fujita, K. Kawarabayashi, C.L. Lucchesi, K. Ota, M.D. Plummer and A. Saito, A pair of forbidden subgraphs and perfect matchings, *J. Combin. Theory Ser. B* **96** (2006), 315–324.

[29] S. Gravier, K. Meslem, S. Schmidt and S. Slimani, A new game invariant of graphs: the game distinguishing number, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **19** (2017).

[30] P.M. Grundy, Mathematics and games, *Eureka* **2** (1939), 6–8.

[31] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, *CRC Press* (2013).

[32] M.A. Henning and W.B. Kinnersley, Domination game: A proof of the 3/5-conjecture for graphs with minimum degree at least two, *SIAM J. Discrete Math.* **30** (2016), 20–35.

[33] M.A. Henning and C. Löwenstein, Domination game: Extremal families for the 3/5-conjecture for forests, *Discuss. Math. Graph Theory* **37** (2017), 369–381.

[34] T. James, S. Klavžar and A. Vijayakumar, The domination game on split graphs, *Bull. Aust. Math. Soc.* **99** (2019), 327–337.

[35] K. Junosza-Szaniawski and Ł. Rożej, Game chromatic number of graphs with locally bounded number of cycles, *Inform. Process. Lett.* **110** (2010), 757–760.

[36] H.A. Kierstead and W.T. Trotter, Planar graph coloring with an uncooperative partner, *J. Graph Theory* **18** (1994), 569–584.

[37] W.B. Kinnersley, D.B. West and R. Zamani, Extremal problems for game domination number, *SIAM J. Discrete Math.* **27** (2013), 2090–2107.

[38] K. Knauer, P. Micek and T. Ueckerdt, How to eat 4/9 of a pizza, *Discrete Math.* **311** (2011), 1635–1645.

[39] G. Košmrlj, Domination game on paths and cycles, *Ars Math. Contemp.* **13** (2017), 125–136.

[40] D. Lichtenstein and M. Sipser, GO is Polynomial-Space Hard, *J. ACM* **27** (1980), 393–401.

[41] N. Matsumoto, The difference between game chromatic number and chromatic number of graphs, *Inform. Process. Lett.*, to appear.

[42] P. Micek and B. Walczak, A Graph-Grabbing Game, *Combin. Probab. Comput.* **20** (2011), 623–629.

[43] R.J. Nowakowski, Games of No Chance 4, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **63**, Cambridge Univ. Press, (2015).

[44] R.J. Nowakowski and P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in a graph, *Discrete Math.* **43** (1983), 235–239.

[45] T.J. Schaefer, On the complexity of some two-person perfect-information games, *J. Comput. System Sci.* **16** (1978), 185–225.

[46] S. Schmidt, The 3/5-conjecture for weakly $S(K_{1,3})$-free forests, *Discrete Math.* **339** (2016), 2767–2774.

[47] D.E. Seacrest and T. Seacrest, Grabbing the gold, *Discrete Math.* **312** (2012), 1804–1806.

[48] R.P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, *Tohoku Math. J.* **41** (1935), 438–444.

[49] S. Teramoto, E.D. Demaine and R. Uehara, The Voronoi game on graphs and its complexity, *J. Graph Algorithms Appl.* **15** (2011), 485–501.

[50] V.G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory, *Uspekhi Mat. Nauk* (in Russian) **23** (1968), 117–134.

[51] P.M. Winkler, Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection, *A K Peters/CRC Press* (2004).

[52] K. Xu, X. Li and S. Klavžar, On graphs with largest possible game domination number, *Discrete Math.* **341** (2018), 1768–1777.

[53] X. Zhu, The game colouring number of planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **75** (1999), 245–258.