正則一様ハイパーグラフにおける線形計画限界について

野崎　寛　(愛知教育大学)*

概　要

Delsarte–Goethals–Seidel (1977) は，2点間の距離の値の情報を仮定した球面有限集合に対して，線形計画限界と呼ばれる頂点数に対する良い上界を与えた．特に，線形計画限界は接吻数問題に応用され顕著な成果を得ている．球面上の線形計画限界の類似として，正則一様なハイパーグラフの頂点数に対する線形計画限界を与える．最大固有値と第二固有値の差をスペクトラルギャップというが，その値によりある種の連結性が評価できる．線形計画限界の応用として，スペクトラルギャップを固定したときの頂点数に対する上界を与える．そして，その上界を達成するグラフが，距離正則グラフの理論において重要とされ，存在定理などが研究されてきた generalized Moore geometry であることを紹介する．

1. はじめに

Delsarte [8] は，種々の符号またはデザインをアソシエーションスキームの枠組みで統一的に扱うデルサルト理論を確立した．例えば，ジョンソンスキーム（Johnson scheme）上のデザインは組合せデザイン（combinatorial design）であり，ハミングスキーム（Hamming scheme）上のデザインは直交配列（orthogonal array）となる．ジョンソンスキームとハミングスキームを含むクラスである Q 多項式スキーム（Q-polynomial scheme）と呼ばれる対象の上で線形計画限界の手法が与えられ，符号，デザインの両方に良い上界，下界を与えている．Delsarte–Goethals–Seidel [9] により，線形計画限界は球面集合に展開され，その後，コンパクトな二点等質空間へと拡張された [17]．

可換アソシエーションスキームにおける隣接代数 $\mathfrak{A}$ には隣接行列からなる基底 $\{\boldsymbol{A}_i\}$ と，行列の通常の積を隣接代数 $\mathfrak{A}$ の積とするときの原子冪等元からなる基底 $\{\boldsymbol{E}_i\}$ がある [2]．隣接代数 $\mathfrak{A}$ は行列の成分ごとの積（アダマール積 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}\,\boldsymbol{B}_{ij})$）でも代数となり，その積での原子冪等元は $\{\boldsymbol{A}_i\}$ となる．この二つの基底は，双対の関係にあると呼ばれ，$\{\boldsymbol{A}_i\}$ と $\{\boldsymbol{E}_i\}$，行列の積とアダマール積をそれぞれ取り替えて得られる性質もまた「双対」な性質と呼ばれる．Q 多項式スキームの双対な概念は P 多項式スキームと呼ばれ，それは距離正則グラフ [5] と一致する．Q 多項式スキームでは部分集合に対して線形計画限界を与えることができるが，距離正則グラフ G では G が被覆グラフ（covering graph）となるような正則グラフ H に対して線形計画限界を与えることができる．正則木（regular tree）は局所有限（辺次数が有限）な無限距離正則グラフであり，任意の正則グラフの被覆グラフになる．ある種，球面の双対的な議論で正則グラフにおける線形計画限界を得た [26]．さらに，それを正則一様なハイパーグラフへと拡

本研究は科研費 (課題番号:16K17569, 17K05155, 18K03396, 19K03445) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05E30, 90C05
キーワード：グラフ固有値，距離正則グラフ，線形計画限界，ラマヌジャングラフ，デルサルト理論
* 〒448-8542 愛知県刈谷市井ヶ谷町広沢 1　愛知教育大学 教育学部数学教育講座
e-mail: hnozaki@auecc.aichi-edu.ac.jp
web: https://hnozaki.jimdo.com/

張したことが，本稿の主題となる．本稿は，Jack Koolen 氏，Sebastian Cioabă 氏，見村万佐人氏，奥田隆幸氏との共同研究に基づく．

2. 球面有限集合と線形計画限界

2.1. 球面符号

球面符号（spherical code）とは，球面上の有限集合のことで，特にその最小距離に注目するときにそう呼ばれる．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の標準内積を $\langle , \rangle$ で表す．球面 $S^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ 上の有限集合 X について，その異なる 2 点間の内積の集合を

$$A(X) = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$$

で表す．球面上 S^{d-1} 上の有限集合 X が球面 u-符号（spherical u-code）と呼ばれるのは，$A(X) \subset [-1, u]$ を満たすときである．球面 u-符号の主な問題は，頂点数 $|X|$ を固定したとき u が最小となる（最小距離が最大となる）球面符号 X を決定することと，u を固定したとき頂点数 $|X|$ が最大となる X を決定することである．

$u = 1/2$ のとき，頂点数が最大となる 1/2-符号を与える問題は，接吻数問題（kissing number problem）として知られている．接吻数問題とは，単位球の周りに，同じ半径の球をいくつまで互いに重なることなく配置できるかという問題である．その最大数を接吻数（kissing number）といい，S^{n-1} における接吻数を $k(n)$ で表す．$k(2) = 6$ となることは明らかである．接吻数を決定することは 3 次元でさえ難しい．$k(3) = 12$ であることは Schütte–van der Waerden [29] が証明を与えているが，エレガントであるとは言い難く，その後いくつかの証明が与えられ，未だに簡明な証明が求められている [18, 20, 25, 4]．$k(8) = 24$，$k(24) = 196560$ であることは，Odlyzko–Sloane [27] により，Delsarte method [8, 9] と呼ばれる次節に紹介する線形計画限界（linear programming bound）を有効に用いた手法により，簡明に与えられた．$k(4) = 24$ であることは，Musin [25] により Delsarte method の改良を行なうことで決定された．また，$k(4) = 24$ については，Bachoc–Vallentin [1] により，線形計画限界の一般化にあたる半正定値計画限界（semidefinite programming bound）を用いての別証明も得られている．

2.2. 球面符号に対する線形計画限界

球面上の線形計画限界においては，次の三項間漸化式により定義される直交多項式であるゲーゲンバウアー多項式（Gegenbauer polynomial）が重要である．

$$G_0^{(d)}(x) = 1, \qquad G_1^{(d)}(x) = d \cdot x,$$

$$xG_{i-1}^{(d)}(x) = \frac{i}{d+2i-2} G_i^{(d)}(x) - \frac{d+i-4}{d+2i-6} G_{i-2}^{(d)}(x).$$

ゲーゲンバウワー多項式の密度関数は $(1-x^2)^{(d-3)/2} (-1 \leq x \leq 1)$ である．次が線形計画限界の証明において本質的である．

Theorem 2.1. 球面 S^{d-1} 上の有限集合 X のグラム行列を M とする．つまり，$M = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X}$．そのとき，$G_i^{(d)}(M^\circ)$ は半正定値行列である．ここで，

$$G_i^{(d)}(M^\circ) = \left(G_i^{(d)}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \right)_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X}$$

である（行列の多項式の積をアダマール積で定める）．

Theorem 2.1 が表す半正定値性を主に用いて次の線形計画限界を得る．

Theorem 2.2 (Delsarte–Goethals–Seidel [9]). X を S^{d-1} 上の有限集合とする．$A(X) = \{\alpha_0 = 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ とする．そのとき，もし *2* 条件

- $g(1) > 0$, $g(\alpha_j) \leq 0$ （$j \in \{1, \ldots, s\}$），
- $g_0 > 0$, $g_i \geq 0$ （$i \in \{1, \ldots, \deg g\}$）

が成り立つような多項式 $g(x) = \sum_{i \geq 0} g_i G_i^{(d)}(x)$ が存在するならば，

$$|X| \leq \frac{g(1)}{g_0}$$

が成り立つ．

線形計画限界を用いるうえで条件を満たす多項式 g を見つけることが必要であるが，多項式 g を見つけることは，ある線形計画法の解を見つけることに対応しており，数値計算により上界を見積もることも可能である．

線形計画限界の応用例として，$k(8) = 240$ であることを示す．まず，$k(8) = 240$ を与えるような例は唯一存在しており，それは E_8 ルート系である．内積の集合は $A(E_8) = \{\pm 1/2, 0, -1\}$ である．多項式 $g(x) = (x+1)(x+1/2)^2 x^2 (x-1/2)$ は線形計画限界の条件を満たしており，その多項式が与える上界が $|X| \leq 240$ となる．線形計画限界を認めれば，非常に簡明に接吻数を決定することが出来た．線形計画限界は，球面デザインや s-距離集合として良いものでなければ，良い評価を得られないことも分かっており，良い具体例が存在している場合に，その特徴づけに非常に有用である [9].

3. 正則一様ハイパーグラフと線形計画限界

3.1. 基本的な定義

V を有限集合とし，E を V の部分集合族とする．V と E の組 $H = (V, E)$ をハイパーグラフという．V を頂点集合，E を辺集合といい，V の元を頂点，E の元を辺という．任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を含む辺の個数 $|\{e \in E \colon v \in e\}|$ が定数 m であるとき，H は m-正則（m-regular）であるという．任意の辺 $e \in E$ に対して， e のサイズ $|e|$ が定数 s であるとき，H は s-一様（s-uniform）であるという．

ハイパーグラフ H の隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_H$ とは頂点集合 V で添え字づけられた正方行列で， (u, v)-成分 $\boldsymbol{A}_{uv}$ が，$u \neq v$ のとき $\boldsymbol{A}_{uv} = |\{e \in E \colon \{u, v\} \subset e\}|$ であり，$u = v$ のとき $\boldsymbol{A}_{uv} = 0$ であるときをいう．隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を H の固有値という．この隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を多重グラフの隣接行列だと見なして定義される多重グラフ G_H を H の点グラフ（point graph）という．もし H が m-正則かつ s-一様なハイパーグラフならば，$m(s-1)$ は H の最大固有値となる．

$H = (V, E)$ をハイパーグラフとする． $v_i \in V$ と $e_j \in E$ に対して，$v_0 \in e_1$，$v_p \in e_p$，$v_i \in e_i \cap e_{i+1}$（$\forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$），$v_i \neq v_{i+1}$（$\forall i \in \{0, \ldots, p-1\}$）を満たすとき，列

$$w_p = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_p, v_p)$$

を v_0 から v_p への長さ p の道（walk）という．部分列 $(v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, v_{i+2})$ が $e_i = e_{i+1}$ を満たすとき，その部分列を w_p のバックトラック（backtracking） という．道 w_p が

バックトラックを持たないか $p=1$ であるとき，w_p を既約道（irreducible walk）という．頂点 u から頂点 v への既約道 w_p が $u=v$ を満たすとき，w_p を閉路（cycle）という．H の長さが最小である閉路の長さを H の内周（girth） という．

3.2. スペクトラルギャップとチーガー定数

$H=(V,E)$ を m-正則かつ s-一様なハイパーグラフであるとする．H のスペクトラルギャップ（Spectral gap）$\Delta(H)$ とは，H の最大固有値と二番目に大きい固有値（第二固有値）の差として定義される.

H のチーガー定数（Cheeger constant）$h(H)$ とは，$\partial S=\{e\in E \mid e\cap S\neq\emptyset, e\cap(V\setminus S)\neq\emptyset\}$ を用いて，

$$h(H)=\min_{S\subset V,|S|\leq|V|/2}\frac{|\partial S|}{|S|}$$

と定義される．チーガー定数 $h(H)$ は，頂点集合 V のどんな部分集合 S を持ってきても，S と $V\setminus S$ の間に辺が，ある一定の割合以上存在していることを保証しており，$h(H)$ が大きいハイパーグラフは高い連結性を持っているということが出来る．ネットワークの要請から，頂点数が大きく，連結性の高いグラフの構成が望まれる．頂点数を固定するならば，出来るだけ $h(H)$ の大きいグラフ，$h(H)$ をある数以上と固定するならば，出来るだけ頂点数の多いグラフの構成が望まれる．

Rodríguez [28] は，チーガー定数とスペクトラルギャップを関係づける次の興味深い不等式を得ている．

Theorem 3.1. $H=(V,E)$ を m-正則かつ s-一様なハイパーグラフとする．s が偶数のとき，

$$h(H)\geq\frac{2\Delta(H)}{s^2}.$$

s が奇数のとき，

$$h(H)\geq\frac{2\Delta(H)}{s^2-1}.$$

Theorem 3.1 における $s=2$ の場合は，正則単純グラフにあたるが，この場合は Mohar [22] により示されている．スペクトラルギャップ $\Delta(H)$ が大きいグラフを得られれば，この不等式から，大きなチーガー定数 $h(H)$ が保証されるため，大きな $\Delta(H)$ を持つハイパーグラフは連結性が高いということができる．

グラフの頂点数を大きくしたとき，どの程度スペクトラルギャップを大きくすることが出来るかという問いについては，Feng–Li (1996) により，次の結果が得られている．

Theorem 3.2. $H=(V,E)$ を m-正則かつ s-一様なハイパーグラフとし，$\tau_2(H)$ を H の第二固有値とする．そのとき次が成立する．

$$\lim_{|V|\to\infty}\inf\tau_2(H)\geq s-2+2\sqrt{(m-1)(s-1)}.$$

Theorem 3.2 の $s=2$（単純グラフ）のときは，Alon–Bappana の定理として知られ，[19] で示されている．$\tau_2(H)<s-2+2\sqrt{(m-1)(s-1)}$ を満たすグラフはラマヌジャングラフと呼ばれ，頂点数 $|V|$ が発散するようなラマヌジャングラフの無限系列を構成することは主要な問題として知られている．単純グラフにおけるラマヌジャングラフは，Marcus–Spielman–Srivastava [21] により，任意の 3 以上の次数において，無限系列の存在性が示された．ラマヌジャングラフは，漸近的にスペクトラルギャップを最大に

するグラフである．$\tau_2(H) < s-2+2\sqrt{(m-1)(s-1)}$ という仮定もとでは，H の頂点数は有限であることから，τ_2 を固定したとき，頂点数が最大となるグラフの決定は，ひとつの面白い問題である．

3.3. 無限距離正則グラフと直交多項式

正則単純グラフについての線形計画限界 [26] は，正則木が任意の正則グラフの被覆グラフ（covering graph）になっていることが本質的にはたらいている．ここで，単純グラフ $G=(V_1,E_1)$ が単純グラフ $H=(V_2,E_2)$ の被覆グラフであるとは，V_1 から V_2 へのある全射 f が存在し，任意の $v \in V_1$ に対し f の v に隣接する頂点集合への制限がグラフの隣接関係を保つときにいう．正則木は，無限距離正則グラフ（infinite distance-regular graph）の構造を持つことが知られている．他の無限距離正則グラフで類似を得ようというのが，本研究の出発点であった．

距離正則グラフの定義を行う．V を可算集合とする．単純グラフ $G=(V,E)$ が局所有限（locally finite）とは各頂点と辺次数が有限であるときをいう．$d(x,y)$ を $x \in V$ から $y \in V$ への（最短道）距離とする．V 上の二項関係 R_i を，$R_i = \{(x,y) \in V \times V \mid d(x,y)=i\}$ で定義する．グラフ G の第 i 距離行列（i-th distance matrix）$\boldsymbol{A}_i$ とは V で添え字付けられた正方行列で，その (u,v)-成分 $(\boldsymbol{A}_i)_{uv}$ が，$(u,v) \in R_i$ のときは $(\boldsymbol{A}_i)_{uv}=1$，それ以外のときは $(\boldsymbol{A}_i)_{uv}=0$ となるものである．特に，行列 $\boldsymbol{A}_1$ を隣接行列（adjacency matrix）という．局所有限単純グラフ $G=(V,E)$ が距離正則グラフ（distance-regular graph）とは，任意の非負整数 i,j,k に対して，$p_{ij}^k = |\{z \in V \mid (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}|$ が $(x,y) \in R_k$ の選び方に依らない定数であるときをいう．p_{ij}^k は交叉数（intersection number）と呼ばれる．また，$a_i = p_{1,i}^i$，$b_i = p_{1,i+1}^i$，$c_i = p_{1,i-1}^i$ とするとき，

$$\begin{pmatrix} * & c_1 & c_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

は距離正則グラフの交叉列（intersection array）と呼ばれる．多項式 $v_i(x)$ を次の様に交叉数で定義される直交多項式系とする．

$$v_0(x)=1, \qquad v_1(x)=x,$$

$$c_{i+1}v_{i+1}(x) = (x-a_i)v_i(x) - b_{i-1}v_{i-1}(x) \quad (i \geq 1).$$

ここで，$\boldsymbol{A}_i$ は $\boldsymbol{A}_1$ の多項式 $\boldsymbol{A}_i = v_i(\boldsymbol{A}_1)$ で表される [5, Section 4.1].

無限距離正則グラフ（頂点数が有限でない）については，Ivanov [16] により完全に分類されている（英語解説論文 [7, 23] 参照）．任意の無限距離正則グラフの交叉列は $m,s \geq 2$ に対して，

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & s-2 & s-2 & \cdots \\ m(s-1) & (m-1)(s-1) & (m-1)(s-1) & \cdots \end{pmatrix}$$

とならなければならない．そして，その交叉列を持つ距離正則グラフ $D_{m,s}$ は一意的に定まる．距離正則グラフ $D_{m,s}$ は (m,s)-準正則木（(m,s)-semiregular tree）$T_{m,s}$ から構成することができる．$T_{m,s}$ は二部グラフであることに注意する．$T_{m,s}$ の辺次数 m の

部集合が $D_{m,s}$ の頂点集合となり，二頂点 u,v は $T_{m,s}$ での距離が $d(u,v)=2$ であるときに隣接すると定義することにより，$D_{m,s}$ が構成される．$D_{m,s}$ の各頂点は m 個の頂点数 s の完全グラフに含まれる，完全グラフからなる木とも言うべき構造を持っている．$D_{m,s}$ は頂点可移であり，$D_{m,2}$ は正則木になる．

無限距離正則グラフ $D_{m,s}$ の直交多項式 $v_i(x)=F_i^{(m,s)}(x)$ は交叉数により次の様に定義される．

$$F_0^{(m,s)}(x)=1, \qquad F_1^{(m,s)}(x)=x, \qquad F_2^{(m,s)}(x)=x^2-(s-2)x-m(s-1),$$
$$F_{i+1}^{(m,s)}(x)=(x-s+2)F_i^{(m,s)}(x)-(m-1)(s-1)F_{i-1}^{(m,s)}(x).$$

$q=(m-1)(s-1)$，$k=m(s-1)$ とすると，$F_i^{(m,s)}(k)=kq^{i-1}$（$1\le i$），$F_0^{(m,s)}(k)=1$ が成り立っている．$\boldsymbol{A}$ を $D_{m,s}$ の隣接行列とすると，$F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A}_1)$ は第 i 距離行列 $\boldsymbol{A}_i$ に等しい．$\delta_I(x)$ は $\delta_I(x)=1$（$x\in I$），$\delta_I(x)=0$（$x\notin I$）で定まる関数とする．直交多項式 $F_i^{(m,s)}$ の密度関数は，次のように定まる．$m\ge s$ のとき，

$$w(x)=\frac{\sqrt{4q-(x-s+2)^2}}{(k-x)(m+x)}\delta_{I_{m,s}},$$

$m<s$ のとき，

$$w(x)=\frac{\sqrt{4q-(x-s+2)^2}}{(k-x)(m+x)}\delta_{I_{m,s}}+\frac{s-m}{s}\delta_{\{-m\}}(x),$$

ここで $I_{m,s}=[s-2-2\sqrt{q},s-2+2\sqrt{q}]$ [23].

3.4. 線形計画限界

m-正則かつ s-一様なハイパーグラフにおける線形計画限界を得るためには，次の結果が本質的である．

Theorem 3.3. $\boldsymbol{A}$ を連結な m-正則かつ s-一様なハイパーグラフの隣接行列とする．そのとき，$F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A})$ の (u,v)-成分は，u から v への長さ i の既約道の個数と一致する．特に，$F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A})$ の (u,v)-成分は非負である．

次が，ハイパーグラフにおける線形計画限界である．

Theorem 3.4. $H=(V,E)$ を連結な m-正則かつ s-一様なハイパーグラフとする．H の異なる固有値を $\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_d$ とする．ここで，$\tau_0=m(s-1)=k$ である．そのとき，もし *2* 条件

- $f(k)>0,\ f(\tau_j)\le 0$（$j\in\{1,\dots,d\}$），
- $f_0>0,\ f_i\ge 0$（$i\in\{1,\dots,\deg f\}$）

が成り立つような多項式 $f(x)=\sum_{i\ge 0}f_iF_i^{(m,s)}(x)$ が存在するならば，

$$|V|\le\frac{f(k)}{f_0}$$

が成り立つ．等号成立は，$f(\tau_j)=0$（$j\in\{1,\dots,d\}$）かつ $f_i\cdot\mathrm{tr}(F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A}))=0$（$i\in\{1,\dots,\deg f\}$）のときに限られる．

線形計画限界において，その条件を満たす多項式 f をどの様に見つけてくるかが問題であるが，その多項式を見つけることは次の線形計画法 (3.1) の双対問題 (3.2) の解を見つけることと同値である．

$$v \le \max_{m_i} \left\{ 1 + m_1 + \cdots + m_d \mid \begin{array}{cc} -\sum_{i=1}^{d} m_i F_j^{(m,s)}(\tau_i) \le F_j^{(m,s)}(k), & j = 1, \ldots, u, \\ m_i \ge 0, & i = 1, \ldots, d \end{array} \right\}, \tag{3.1}$$

$$v \le \min_{f_j} \left\{ 1 + f_1 F_1^{(m,s)}(k) + \cdots + f_u F_u^{(m,s)}(k) \mid \begin{array}{cc} -\sum_{j=1}^{u} f_j F_j^{(m,s)}(\tau_i) \ge 1, & i = 1, \ldots, d, \\ f_j \ge 0, & j = 1, \ldots, u \end{array} \right\}, \tag{3.2}$$

ここで，u は多項式 f の次数, m_i は固有値 τ_i の重複度である．また $f_0 = 1$ と正規化してある. 線形計画法は数値計算により，その解を見積もることができるため，コンピューターにより，線形計画限界による上界を見積もることが可能である．

線形計画限界は，異なる固有値の情報が分かっているときに，頂点数の最大値を求めるのに有効であり，固定されたスペクトラルギャップに対して，最大のグラフを決定することには非常に相性が良い．線形計画限界の等号成立の条件に，$f_i \cdot \mathrm{tr}(F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A})) = 0$（$i \in \{1, \ldots, \deg f\}$）とあるが，特に $\mathrm{tr}(F_i^{(m,s)}(\boldsymbol{A})) = 0$（$i \in \{1, \ldots, \deg f\}$）である場合は，そのグラフの内周が $\deg f + 1$ 以上であることを意味する．異なる固有値の個数 d が小さく，内周が大きいグラフが存在するとき，線形計画限界は良い評価を与えやすい．

3.5. Generalized Moore geometry

内周が大きいハイパーグラフのクラスとして，generalized Moore geometry というクラスが知られている．直径が d の m-正則かつ s-一様なハイパーグラフが generalized Moore geometry であるとは，次の 2 条件を満たすときにいう．

- 内周 g が $2d$ 以上である．
- 距離が d である任意の 2 頂点 v, u に対して，丁度 c 本の長さ d の v から u への道が存在する．

$s = 2$，$c = 1$，$g = 2d + 1$ のとき，generalized Moore geometry は Moore グラフ（直径 d，内周 $2d + 1$ の単純グラフ）になる．Generalized Moore geometry H の点グラフ G_H は次の交叉列をもつ距離正則グラフになることが知られている.

$$\begin{bmatrix} * & 1 & \cdots & 1 & c \\ 0 & s-2 & \cdots & s-2 & m(s-1)-c \\ m(s-1) & (m-1)(s-1) & \cdots & (m-1)(s-1) & * \end{bmatrix}.$$

サイクルグラフは自明な generalized Moore geometry と呼ばれる．Fuglister [11, 12] は，直径 d が 14 以上の generalized Moore geometry は非存在であることを示している．現在知られている generalized Moore geometry の直径の最大値は 6 であり，直径の上界の改善が望まれる．知られている generalized Moore geometry について，表 1 にまとめる．

表 1: Known generalized Moore geometry

v	m	s	d	c	Name
$m+1$	m	2	1	1	Complete graph K_{m+1}
$2m$	m	2	2	m	Complete bipartite graph $K_{m,m}$
$2d+1$	2	2	d	1	$(2d+1)$-gon C_{2d+1}
$2d$	2	2	d	2	$(2d)$-gon C_{2d}
10	3	2	2	1	Petersen [15]
50	7	2	2	1	Hoffman–Singleton [15]
35	4	2	2	3	Odd graph [24]
16	5	2	2	2	Clebsch [30, 13]
56	10	2	2	2	Gewirtz [6, 13]
77	16	2	2	4	M_{22} [14, 13]
100	22	2	2	6	Higman–Sims [14, 13]
$1+k/\lambda$	m	s	1	λ	2-(v,s,λ) design
$1+k+kq/m$	m	s	2	m	Generalized quadrangle $GQ(s-1,m-1)$ [5]
					$(s-1,m-1)=(2,1),(2,2),(2,4),(p,p)$
$1+k+kq+kq^2/m$	m	s	3	m	Generalized hexagon $GH(s-1,m-1)$ [5]
					$(s-1,m-1)=(1,p),(p,1),(p,p),(p,p^3),(p^3,p)$
$1+\sum_{i=0}^{2} kq^i+kq^3/m$	m	s	4	m	Generalized octagons $GO(s-1,m-1)$ [5]
					$(s-1,m-1)=(1,p),(p,1),(r,r^2),(r^2,r)$
$1+\sum_{i=0}^{4} kq^i+kq^5/m$	m	s	6	m	Generalized dodecagons $GD(s-1,m-1)$ [5]
					$(s-1,m-1)=(1,p),(p,1)$

p: prime power, r: odd power of 2

3.6. 次数 (m,s) と第二固有値を固定した時の上界

第二固有値が λ 以下である m-正則かつ s-一様なハイパーグラフのうち，頂点数が最大なものを決定したい．その最大の頂点数を $v(m,s,\lambda)$ とする．線形計画限界により，次の上界が得られた．

Theorem 3.5. λ_j を $G_j^{(m,s)}(x)=\sum_{i=0}^{j}F_i^{(m,s)}(x)$ の最大の根とする．λ を区間 $[-1, s-2+2\sqrt{(m-1)(s-1)})$ に含まれる実数とする．$t\geq 1$ を $\lambda_{t-1}\leq\lambda<\lambda_t$ 満たす自然数とする．$k=m(s-1)$, $q=(m-1)(s-1)$，$c=-F_t^{(m,s)}(\lambda)/G_{t-1}^{(m,s)}(\lambda)$ とする．そのとき，

$$v(m,s,\lambda)\leq 1+\sum_{j=0}^{t-2}kq^j+\frac{kq^{t-1}}{c},$$

が成り立つ．等号成立はハイパーグラフが *generalized Moore geometry* であるときであり，またそのときに限る．

ここで，$G_j^{(m,s)}(x)$ は直交多項式となり，最大根は $\lambda_{j-1}\leq\lambda<\lambda_j$ と $\lim_{j\to\infty}\lambda j=s-2+2\sqrt{(m-1)(s-1)}$ を満たすことから，$\lambda_{t-1}\leq\lambda<\lambda_t$ となる t が取れることは明らかである．Theorem 3.5 の上界は，

$$f(x)=\frac{\left((c-1)G_{t-1}^{(m,s)}(x)+G_t^{(m,s)}(x)\right)^2}{x-\lambda}.$$

が線形計画限界の条件を満たすことを確かめ，f により得られる上界を計算することで得られる．$f(x)$ を $F_i^{(m,s)}$ に関して展開したときの係数の非負性を確かめることが，証明の本質である．

参考文献

[1] C. Bachoc and F. Vallentin, New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), no. 3, 909–924.

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, (1984).

[3] C.T. Benson, Minimal regular graphs of girths eight and twelve, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 1091–1094.

[4] P. Boyvalenkov, S. Dodunekov, and O. Musin, A survey on the kissing numbers, *Serdica Math. J.* **38** (2012), no. 4, 507–522.

[5] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[6] A.E. Brouwer and W.H. Haemers, The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra, *European J. Combin.* **14**(1993), 397–407.

[7] E. Bannai and T. Ito, Current research on algebraic combinatorics: supplements to our book, Algebraic combinatorics. I, *Graphs Combin.* **2** (1986), no. 4, 287–308.

[8] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, *Philips Res. Rep. Suppl.* No. 10 (1973), vi+97 pp.

[9] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* **6** (1977), no. 3, 363–388.

[10] K. Feng and W.-C.W. Li, Spectra of hypergraphs and applications, *J. Number Theory* **60** (1996), no. 1, 1–22.

[11] F.J. Fuglister, On generalized Moore geometries. I, *Discrete Math.* **67** (1987), no. 3, 249–258.

[12] F.J. Fuglister, On generalized Moore geometries. II, *Discrete Math.* **67** (1987), no. 3, 259–269.

[13] C.D. Godsil, Problems in algebraic combinatorics, *Electron. J. Combin.* **2** (1995), #F1, 20 pages.

[14] D.G. Higman and C.C. Sims, A simple group of order 44,352,000, *Math. Z.* **105** (1968), 110–113.

[15] A.J. Hoffman and R.R. Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.* **4**(1960), 497–504.

[16] A.A. Ivanov, Bounding the diameter of a distance-regular graph, *Soviet Math. Doklady* **28** (1983), 149–152.

[17] G.A. Kabatiansky and V.I. Levenshtein, Bounds for packings on a sphere and in space, *Probl. Peredachi Inf.* **14** (1978), 3–25.

[18] J. Leech, The problem of the thirteen spheres, *Math. Gaz.* **40** (1956), 22–23.

[19] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* **8** (1988), 261–277.

[20] H. Maehara, The problem of thirteen spheres – a proof for undergraduates, *European J. Combin.* **28** (2007), no. 6, 1770–1778.

[21] A.W. Marcus, D.A. Spielman, and N. Srivastava, Interlacing families I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees, *Ann. of Math.* **182** (2015), no. 1, 307–325.

[22] B. Mohar, Isoperimetric numbers of graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* **47** (1989), 274–291.

[23] B. Mohar and W. Woess, A survey on spectra of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 209–234.

[24] A. Moon, Characterization of the odd graphs O_k by parameters, *Discrete Math.* **42**(1982), 91–97.

[25] O. Musin, The kissing number in four dimensions, *Ann. of Math.* **168** (2008), no. 1, 1–32.

[26] H. Nozaki, Linear programming bounds for regular graphs, *Graphs Combin.* **31** (2015), 1973–1984.

[27] A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions, *J. Combin. Theory Ser. A* **26** (1979), no. 2, 210–214.

[28] J.A. Rodríguez, Laplacian eigenvalues and partition problems in hypergraphs, *Appl. Math. Lett.* **22** (2009), 916–921.

[29] K. Schütte and B.L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln (German), *Math. Ann.* **125**(1953), 325–334.

[30] J.J. Seidel, Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3, *Linear Algebra and Appl.* **1**(1968), 281–298.

[31] R. Singleton, On minimal graphs of maximum even girth, *J. Combin. Theory* **1** (1966), 306–332.