

スケイン代数を用いた3次元ホモロジーシリ ンダーの Johnson 準同型の計算

辻俊輔（京都大学数理解析研究所）*

概 要

曲面の研究においては、Johnson 準同型は一つの重要な役割をはたしている。この Johnson 準同型は、3 次元ホモロジーシリ
ンダーにおいても定義できる。本稿では、3 次元ホモロジーシリ
ンダーの Johnson 準同型の計算方法を紹介する。具体的には、3 次元ホモロジー
シリ
ンダーの集合から完備 Goldman Lie 代数へのモノイド準同型を構成
する。このモノイド準同型は Torelli 群から完備 Goldman Lie 代数への
埋め込みの拡張になっている。主結果においては、Goldman Lie 代数で
記述されるが、証明において、あるスケイン代数を使用する。また、こ
の主結果は Kuno-Massuyeau [7] により示された公式を導く。

目 次

1	はじめに	1
2	Torelli 群において	2
2.1	Torelli 群と第 1-Johnson 準同型	2
2.2	Goldman Lie 代数と基本群群環	3
2.3	Johnson 準同型と Goldman Lie 代数	3
3	スケイン代数	5
4	ホモロジーシリ ンダーにおいて	9
4.1	主定理	9
4.2	主結果	10

1 はじめに

本稿では議論を簡潔にするために、曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ を種数 g で連結で境界
が空でない曲面とする。Johnson [4] は、曲面 Σ の Torelli 群からホモロジー
群への 3 次の外積 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ への群準同型写像を構成

*本研究は科研費（科研番号:18J00305）の助成を受けたものである。

した。これを第 1-Johnson 準同型と呼ぶ。この Johnson 準同型は一般化されて n 次の Johnson フィルトレーションに対応した第 n -Johnson 準同型が定義できる。この Johnson 準同型と Goldman Lie 代数の関係があることが、Kawazumi-Kuno[6], [5] や Massuyeau-Turaev [8] の研究などにより明らかになった。具体的には、全ての Johnson 準同型が導出できる Torelli 群から完備 Goldman Lie 代数への埋め込みを構成することが可能である。本稿ではホモロジーコボルディズムとはコンパクトで連結な向きづけられた 3 次元多様体 C と $\Sigma \times [0, 1]$ の境界 $\partial(\Sigma \times [0, 1])$ から 3 次元多様体の境界 ∂C への微分同相写像 ϑ の次を満たす対とする。その条件は、埋め込み $\vartheta_0 : \Sigma \rightarrow C, p \mapsto (p, 0)$ と $\vartheta_1 : \Sigma \rightarrow C, p \mapsto (p, 1)$ がホモロジー同型を導くという条件である。さらにこのホモロジー同型が同じであるとき、ホモロジーコボルディズム (C, ϑ) をホモロジーシリンダーと呼ぶ。ホモロジーシリンダーにおいても、Johnson 準同型が定義できる。Kuno-Massuyeau [7] は、特定の状況で、Goldman Lie 代数を用いて Johnson 準同型の公式を得た。一般化された Dehn ツィストで記述される。本稿では、この公式をさらに拡張する。具体的には、Torelli 群から Goldman Lie 代数への埋め込みをホモロジーシリンダーの微分同相類の集合から Goldman Lie 代数への射に拡張する。

まず、Torelli 群における Goldman Lie 代数を用いた Johnson 準同型の研究をふりかえる。第 3 節では本稿で用いるスケイン代数について紹介する。第 4 節では Torelli 群の研究をホモロジーシリンダーの研究に拡張する。

2 Torelli 群において

2.1 Torelli 群と第 1-Johnson 準同型

ここでは第 1-Johnson 準同型の定義を説明をする。本稿では曲面 Σ の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ を境界を各点で固定した Σ の微分同相写像のイソトピー類とする。写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ のホモロジー群 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ への作用の核を Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma)$ とする。基本群の中心降下列 $\{F^n \pi_1(\Sigma, *)\}_{n \geq 0}$ は、 $F^1 \pi_1(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} \pi_1(\Sigma, *)$ と $F^{n+1} \pi_1(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} [F^n \pi_1(\Sigma, *), \pi_1(\Sigma, *)]$ により定義される。ただし基点 $*$ は境界 $\partial \Sigma$ からとる。トレリ群の元 ξ を一つとる。線形写像

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) &\simeq F^1 \pi_1(\Sigma, *) / F^2 \pi_1(\Sigma, *), [r] \mapsto r, \\ F^1 \pi_1(\Sigma, *) / F^2 \pi_1(\Sigma, *) &\rightarrow F^2 \pi_1(\Sigma, *) / F^3 \pi_1(\Sigma, *), r \mapsto \xi(r) r^{-1}, \\ F^3 \pi_1(\Sigma, *) &\simeq H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z}), [r_1, r_2] \mapsto [r_1] \wedge [r_2] \end{aligned}$$

により、 $\mathbb{Z}$ -線形写像 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ が定義される。この写像は、 $\tau_1 : \mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z})^* \otimes H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ を導出する。ここで、 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})^* \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z})$ とする。さらに、インターセクション形式 $\mu : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ を用いて、 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq$

$H_1(\Sigma, \mathbb{Z})^*, a \mapsto \mu(a, \cdot) : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ と、 $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ と $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})^*$ を同一視する。この、準同型 $\tau_1 : \mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ を第 1-Johnson 準同型と呼んでいる。また、

$$\begin{aligned} \tau_1(\mathcal{I}(\Sigma)) &= \langle a_1 \otimes a_2 \wedge a_3 + a_2 \otimes a_3 \wedge a_1 + a_3 \otimes a_1 \wedge a_2 \mid a_1, a_2, a_3 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rangle \\ &\simeq H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \wedge H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

であることが知られている。

2.2 Goldman Lie 代数と基本群群環

ここでは、Goldman Lie 代数と Goldman Lie 代数の基本群群環への Lie 作用を説明する。基本群の共役類の集合を $\hat{\pi}_1(\Sigma)$ と書くことにする。また、商写像 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ を $|\cdot|$ で書く。基本群の共役類の元 $\alpha, \beta \in \hat{\pi}_1(\Sigma)$ を一般の位置にとる。括弧積 $[\alpha, \beta] \in \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ を

$$[\alpha, \beta] \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \mu(p, \alpha, \beta) |\alpha_p \beta_p|$$

により定義する。ただし $\alpha_p, \beta_p \in \pi_1(\Sigma, p)$ は p を基点とした x, y に沿った基本群の元とし、 $\mu(p, \alpha, \beta)$ を局所的な交差数とする。Goldman [2] はこれが well-defined であることを示し、さらに $\mathbb{Q}$ -線形写像に拡張した $[\cdot, \cdot] : \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \times \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)$ が Lie 代数になることを示した。この Lie 代数を Goldman Lie 代数と呼んでいる。Kawazumi-Kuno[5][6] はさらに Goldman Lie 代数の基本群群環 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ への Lie 作用を次で定義した。基本群の元 $\gamma \in \pi_1(\Sigma, *)$ と基本群の共役類の元 $\alpha \in \hat{\pi}_1(\Sigma)$ を一般の位置にとり、 $\sigma(\alpha)(\gamma)$ を

$$\sigma(\alpha)(\gamma) = \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \mu(p, \alpha, \gamma) \gamma_{*p} \alpha_p \gamma_{p*}$$

により定義する。ただし、 γ_{*p} を γ の $*$ から p までのパスで γ_{p*} を γ の p から $*$ までのパスとする。

本稿では、あとで定義するスケイン代数との整合性をとるために、Lie 代数、また、Lie 作用の中心である $\mathbb{Q}[1]$ で割った $(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)/\mathbb{Q}[1]$ を考える。

2.3 Johnson 準同型と Goldman Lie 代数

この節では Torelli 群から完備 Goldman Lie 代数への埋め込みを用いて、Johnson 準同型の導出の方法を説明する。

群 G について、添加写像 $\varepsilon : \mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{Q}$ を $x \in G \mapsto 1$ により定義する。この時 $(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma)$ と $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ のフィルトレーションを $\{F^n(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{Q}\hat{\pi}_1(\Sigma)/\mathbb{Q}[1] \mid n \geq 0\}$

$\{(\ker \varepsilon)^n\}_{n \geq 0}$ と $\{F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} (\ker \varepsilon)^n\}_{n \geq 0}$ により定義する。このフィルトレーションは

$$\begin{aligned} [F^n(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma), F^m(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)] &\subset F^{n+m-2}(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma), \\ \sigma(F^n(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma))(F^m \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)) &\subset F^{n+m-2} \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \end{aligned}$$

を満たす。このフィルトレーションにより、 $(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$ と $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ の完備化

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)/F^i(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma), \\ \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) &\stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)/F^i \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \end{aligned}$$

を定義する。完備化のフィルトレーションも

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)/F^i(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) &= (\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma)/F^i(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma), \\ \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)/F^i \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) &= \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *)/F^i \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \end{aligned}$$

により定義する。このフィルトレーションは

$$F^n \pi_1(\Sigma, *) = (1 + F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)) \cap \pi_1(\Sigma, *)$$

を満たす。単純閉曲線 c について $r_c \in \pi_1(\Sigma, *)$ を $|r_c| = c$ となるようにとり

$$L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\lfloor \frac{1}{2}(\log r_c)^2 \right\rfloor \in (\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma)$$

とおく。Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma)$ は単純閉曲線の境界対 (c_1, c_2) の Dehn ツイスト $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ で生成される。境界対 (c_1, c_2) とは、あるコンパクトな曲面の境界が c_1 と c_2 となる単純閉曲線の対である。

Theorem 2.1 (Kawazumi-Kuno[5] [6], Massuyeau-Turaev [8]). 単純閉曲線 c に沿った Dehn ツイスト t_c の作用と完備 Goldman Lie 代数の元 $L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c)$ は

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c))) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c)))^i(\cdot) : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *)$$

を満たす。Baker-Campbell-Hausdorff 級数 bch により、 $F^3(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma)$ は群とみなせる。群準同型 $\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1} : \mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow (F^3(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|}), \text{bch})$ を境界対 (c_1, c_2) で $t_{c_1} t_{c_2}^{-1} \mapsto L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c_1) - L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c_2)$ により定義する。この時、 $\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}$ は well-defined であり単射になる。さらに、 $\xi \in \mathcal{I}(\Sigma)$ において

$$\xi(\cdot) = \exp(\sigma(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))) : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *)$$

を満たす。

1以上の整数 n について、 $F^n \mathcal{I}(\Sigma)$ を $\pi_1(\Sigma, *) / F^{n+1} \pi_1(\Sigma, *)$ への作用の核として Johnson フィルトレーションを定義する。別の言い方をすると $F^n \mathcal{I}(\Sigma) = \zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}^{-1}(F^{n+2}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma))$ としても Johnson フィルトレーションの定義が可能である。この時、第 n -Johnson 準同型は

$$\begin{aligned} F^n \mathcal{I}(\Sigma) &\xrightarrow{\zeta} F^{n+2}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma) \\ &\rightarrow F^{n+2}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma) / F^{n+3}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma) \xrightarrow{\lambda_{n+2}} c_{n+2}(H_1(\Sigma, \mathbb{Q})^{\otimes n+2}) \end{aligned}$$

により定義できる。ここで、 c_{n+2} と λ_{n+2} は

$$\begin{aligned} c_{n+2} : H_1(\Sigma, \mathbb{Q})^{\otimes n+2} &\rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Q})^{\otimes n+2}, \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+2} &\mapsto \sum_{i=1}^{n+2} a_i \otimes \cdots \otimes a_{n+2} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}, \\ \lambda_{n+2} : \\ F^{n+2}(\widehat{(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)}(\Sigma)) / F^{n+3}(\widehat{(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)}(\Sigma)) &\rightarrow c_{n+2}(H_1(\Sigma, \mathbb{Q})^{\otimes n+2}), \\ |(x_1 - 1) \cdots (x_{n+2} - 1)| &\mapsto c_{n+2}([x_1] \otimes \cdots \otimes [x_{n+2}]) \end{aligned}$$

により定義される線形写像である。このように $\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}$ は全ての Johnson 準同型が導出できる。

3 スケイン代数

この節では主定理の記述に使うスケイン加群とスケイン代数の説明をする。まず、一般の3次元多様体でスケイン加群を定義する。コンパクトで連結で向きづけられた3次元多様体 M について $\mathcal{L}(M)$ を向きづけられた（フレームのついていない）絡み目の集合とする。ここで絡み目は $\coprod S^1$ の $\text{int} M$ への埋め込みのイソトピー類である。3次元多様体の境界の基点 $*_1$ と $*_2$ について、 $*_1$ が始点で $*_2$ が終点となる M の向きづけられた（フレームのついていない）タングルの集合を $\mathcal{L}(M, *_1, *_2)$ とする。ここで、 $*_1$ が始点で $*_2$ が終点となる M のタングルとは $([0, 1] \cup \coprod S^1, \coprod S^1, 0 \in [0, 1], 1 \in [0, 1])$ から $(M, \text{int} M, *_1, *_2)$ への埋め込みのイソトピー類である。本稿では Figure 1 で定義されるスケイン関係式を用いる。このスケイン関係式では、自己交差を無視し、もし自明な結び目が一つでもあれば0にする関係式である。絡み目の集合 $\mathcal{L}(M)$ を自由基底とした $\mathbb{Q}[[h]]$ 上自由加群を Figure 1 の関係式で割った加群 $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}(M)$ とし、タングルの集合 $\mathcal{L}(M, *_1, *_2)$ を自由基底とした $\mathbb{Q}[[h]]$ 上自由加群を Figure 1 の関係式で割った加群 $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}(M, *_1, *_2)$ とそれらをスケイン加群と呼ぶ。

Remark 3.1. 変数 ρ は、フレーミングと自明な結び目に関する変数であり、変数 h は自己交差に関する変数であり、本稿では無視をする。(0 とする。)

次に、曲面 Σ と $[0, 1]$ の積多様体においてスケイン代数を定義する。スケイン加群 $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma \times [0, 1])$ と $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma \times [0, 1], (*, 1), (*, 0))$ を単に $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma)$ と $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *)$ と書く。埋め込み $\iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]} : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ と $\iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]} : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ を $\iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]}(p, t) = (p, \frac{t+1}{2})$ と $\iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]}(p, t) = (p, \frac{t}{2})$ により定義する。スケイン加群の元 $x, x' \in \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma)$ と $y, y' \in \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *)$ について、

$$\begin{aligned} xx' &= \iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]}(x) \cup \iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]}(x'), \\ yy' &= \iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]}(y) \cup \iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]}(y'), \\ xy &= \iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]}(x) \cup \iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]}(y) \cup * \times [\frac{1}{2}, 1], \\ yx &= \iota_{[0,1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]}(y) \cup \iota_{[0,1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]}(x) \cup * \times [0, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

と定義する。これらの定義により、 $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma)$ と $\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *)$ の代数構造を定める。これをスケイン代数と呼ぶ。ここで

$$\begin{aligned} U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \\ &\oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{Q}[[h]] \otimes (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma)^{\otimes n} \\ &/ (x \otimes y - y \otimes x - h[x, y] | x, y \in (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma)), \\ U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma, *) &\stackrel{\text{def.}}{=} \\ &U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) \otimes \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \otimes U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) \\ &/ (x \otimes y - y \otimes x - h\sigma(x)(y) | x \in (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma), y \in \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma)) \end{aligned}$$

とおく。次の定理は、全射であることは定義から明らかで、単射であることは、逆写像を絡み目ダイアグラムから構成し、それが well-defined であることを確認することで得られる。

Theorem 3.2 (Turaev [12], Tsuji [10]). 代数準同型

$$\psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}} : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma) \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma), l \in \hat{\pi}(\Sigma) \mapsto T_l \in \mathcal{L}(\Sigma \times [0, 1])$$

により定める。ただし、結び目 T_l はホモトピークラス $p_1(T_l)$ が l となる結び目とする。ここで $p_1 : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ は第一成分の射影とする。また、 $\mathbb{Q}[[h]]$ 加群準同型 $\psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}} : U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma, *) \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *)$ を $x, x' \in U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma)$ と $r \in \pi_1(\Sigma, *)$ において

$$x \otimes r \otimes x' \mapsto \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(x) T_r \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(x')$$

と定義する。ここで、 $T_r \in \mathcal{L}(\Sigma \times [0, 1], (*, 0), (*, 1))$ を $p_1(T_r)$ のホモトピー

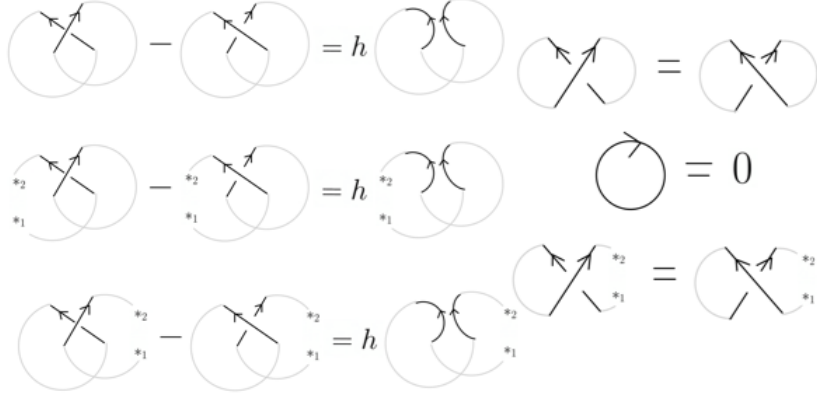


Figure 1: $\widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(M, *1, *2)$

クラスが r となるタングルとする。この時、

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}} : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) &\rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma), \\ \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}} : U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma, *) &\rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *) \end{aligned}$$

は全単射となる。

Lie 括弧積 $[\cdot, \cdot] : (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \rightarrow (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$ と Lie 作用 $\sigma(\cdot)(\cdot) : (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ は Leibniz 規則を用いて、Lie 括弧積 $[\cdot, \cdot] : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \rightarrow U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$ Lie 作用 $\sigma(\cdot)(\cdot) : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma) \rightarrow U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma)$ に拡張できる。また、 $\widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)$ の Lie 括弧積と $\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)$ の $\widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)$ への Lie 作用を

$$[x, x'] = \frac{1}{\hbar}(xx' - x'x), \quad \sigma(x)(y) = \frac{1}{\hbar}(xy - yx)$$

で定義する。同様の式を用いても、Lie 括弧積 $[\cdot, \cdot] : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \rightarrow U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$ Lie 作用 $\sigma(\cdot)(\cdot) : U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \times U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma) \rightarrow U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma)$ を定義することが可能である。

Lie 代数、Lie 加群 $U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$, $U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma, *)$, $\widetilde{\mathcal{A}}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)$,

$\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *)$ のフィルトレーションを

$$\begin{aligned}
& F^n U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \\
& \sum_{2i_0+i_1+i_2+\dots \geq n} h^{i_0} |F^{i_1}(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)| \otimes |F^{i_2}(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)| \otimes \dots, \\
& F^n U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i_1+i_2 \geq n} F^{i_1} U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma) \otimes F^{i_2} \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *), \\
& F^n \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}} (F^n U_h(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)), \\
& F^n \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}} (F^n U_h(\mathbb{Q}\pi_1)(\Sigma, *))
\end{aligned}$$

により定義する。また、完備化、完備化した加群のフィルトレーションも $(\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|)(\Sigma)$ と $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma)$ と同様に定義する。一般の 3 次元多様体のスケイン加群にも同様のフィルトレーションを定義でき、また、完備化、完備化のフィルトレーションを定義することができる。

この、スケイン代数は、Goldman Lie 代数と基本群群環に“厚み”を入れただけの簡単なスケイン代数である。具体的には、写像類群の量子不変量からくる情報を引き出したり、量子不変量の再定義などはできない。次は簡単に示せる。

Lemma 3.3. 単純閉曲線 c に沿った *Dehn* ツイスト t_c の作用と完備スケイン代数の元 $L_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \psi_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(L_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(c))$ は

$$\begin{aligned}
t_c(\cdot) &= \exp(\sigma(L_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(c))) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(c)))^i(\cdot) \\
&: \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma, *) \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma, *)
\end{aligned}$$

を満たす。*Baker-Campbell-Hausdorff* 級数 bch により、 $F^3 \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma)$ は群とみなせる。群準同型 $\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}} : \mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow (F^3 \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma), \text{bch})$ を境界対 (c_1, c_2) で $t_{c_1} t_{c_2}^{-1} \mapsto L_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(c_1) - L_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(c_2)$ により定義する。この時、 $\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}$ は *well-defined* であり単射になる。さらに、 $\xi \in \mathcal{I}(\Sigma)$ において

$$\xi(\cdot) = \exp(\sigma(\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi))) : \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma, *) \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}}(\Sigma, *)$$

を満たす。

このスケイン代数は次に紹介する主定理の記述に有用である。

4 ホモロジーシリンダーにおいて

4.1 主定理

曲面の埋め込み $e' : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ が存在して、 $e(p, t) = (e'(p), \frac{1+t}{3})$ を満たす曲面と閉区間の積 $\Sigma' \times [0, 1]$ から曲面と閉区間の積 $\Sigma \times [0, 1]$ への埋め込み e が標準であるとする。Habbeger [3] Theorem 2.5, Lemma 6.1, を用いて次が示せる。

Lemma 4.1 ([3], [11]). 曲面 Σ の任意のホモロジーシリンダーについて、標準な埋め込み $e : \Sigma' \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$ と $\partial(\Sigma' \times [0, 1]) \setminus \text{int} D$ のホモロジーに自明に作用する微分同相写像 χ が存在して、このホモロジーシリンダーは $(\Sigma \times [0, 1]_{e, \chi}, \text{id}_{\partial(\Sigma \times [0, 1])}) \stackrel{\text{def.}}{=} (\Sigma \times [0, 1] \setminus e(\Sigma' \times [0, 1]) \cup_{e|_{\partial(\Sigma' \times [0, 1])} \circ \chi} \Sigma' \times I, \text{id}_{\partial(\Sigma \times [0, 1])})$ と微分同相である。 D を $(\partial \Sigma') \times [0, 1]$ の閉円盤とする。

スケイン代数、スケイン加群を $\widetilde{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^{-i} F^{3i} \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)}$ と $\widetilde{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^{-i} F^{3i} \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)}$ により拡張する。またフィルトレーションを $F^n \widetilde{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{-2i_1+i_2 \geq n} \hbar^{-i_1} F^{i_2} \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)}$ と $F^n \widetilde{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{-2i_1+i_2 \geq n} \hbar^{-i_1} F^{i_2} \widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)}$ により定義しそれぞれの完備化 $\widehat{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)}$ と $\widehat{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)}$ を定義する。

トレリ群の元 $\xi \in \mathcal{I}(\Sigma)$ と $x \in \widehat{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma, *)}$ について、

$$\xi(x) = \exp(\sigma(\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)))(x) = \exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar})(x) \exp(-\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar})$$

であるため、

$$\xi(x) \exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar}) = \exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar}) x$$

を得る。これは、 $\exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar})$ を上から下に通過したときに、 ξ が作用するとみることができる。この観察を用いて次の主定理の証明が得られた。

Theorem 4.2 (Tsuji [11]). 標準な埋め込み $e : \Sigma' \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$ と $\partial(\Sigma' \times [0, 1]) \setminus \text{int} D$ の *Torelli* 群の元 ξ を代表とする微分同相写像 χ をとる。この時、埋め込み $\vartheta_0 : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]_{e, \chi}, (p, t) \rightarrow (p, \epsilon t)$ と埋め込み $\vartheta_1 : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]_{e, \chi}, (p, t) \rightarrow (p, 1 - \epsilon + \epsilon t)$ は同型写像 $\vartheta_{0*} : \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\Sigma, *)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\Sigma \times [0, 1], (*, 1), (*, 0))}$ と $\vartheta_{1*} : \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\Sigma, *)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\Sigma \times [0, 1], (*, 1), (*, 0))}$ を導出する。管状近傍 $\iota_{\partial} : \partial(\Sigma' \times [0, 1]) \setminus \text{int} D \times [0, 1] \rightarrow \Sigma' \times [0, 1]$ をとる。埋め込み $e \circ \iota_{\partial}$ は $(e \circ \iota_{\partial})_* : \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\partial(\Sigma' \times [0, 1]) \setminus \text{int} D)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}_{\rho=0, \hbar=0}(\Sigma)}$ を導出する。この時、任意の $x \in \widehat{\text{ext} \mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}(\Sigma)}$ について、

$$\vartheta_{1*}^{-1} \circ \vartheta_{0*}(x) (e \circ \iota_{\partial})_*(\exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar})) = (e \circ \iota_{\partial})_*(\exp(\frac{\zeta_{\widetilde{\mathcal{A}_{\rho, \hbar=0}}}(\xi)}{\hbar})) x$$

を満たす。

4.2 主結果

主定理の記述でも、 $\vartheta_{1*}^{-1} \circ \vartheta_{0*} : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *)$ の計算が可能であるが、使いにくい記述のように思われる。

埋め込み $e'' : \Sigma' \times I \rightarrow (\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D) \times [0, 1]$ を $\iota_\partial \circ e''$ が $\text{id}_{\Sigma' \times [0, 1]}$ とイソトピックになるようにとる。埋め込み e'' と ι_∂ は $e'_* : \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\Sigma') \rightarrow \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D)$ と $\iota_{\partial*} : \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D) \rightarrow \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\Sigma')$ を導出する。スケイン代数の元 $y \in F^3 \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D)$ について、 $\nu_1(y) \stackrel{\text{def.}}{=} e''_*(y)$ と $\nu_{n+1}(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \nu_n(y) + e''_*(\text{bch}(-\iota_{\partial*}(\nu_n(y)), y))$ により $\nu(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i(y)$ と定義する。この時、

$$(e \circ \iota_\partial)_*(\exp(\frac{y}{h})) = \exp(\frac{e'_*(\nu(y))}{h})$$

が得られる。ただし、 $e'_* : \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\Sigma') \rightarrow \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\Sigma)$ は埋め込み $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ から導出される代数準同型とする。よって、任意の $x \in \widehat{\mathcal{A}_{\rho=0, h=0}}(\Sigma)$ において

$$\vartheta_{1*}^{-1} \circ \vartheta_{0*}(x) \exp(\frac{e'_*(\nu(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}}(\xi)))}{h}) = \exp(\frac{e'_*(\nu(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}}(\xi)))}{h})x$$

となり、

$$\begin{aligned} \vartheta_{1*}^{-1} \circ \vartheta_{0*}(x) &= \exp(\frac{e'_*(\nu(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}}(\xi)))}{h})x \exp(-\frac{e'_*(\nu(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}}(\xi)))}{h}) \\ &= \exp(\sigma(e'_*(\nu(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}_{\rho, h=0}}}(\xi))))(x) \end{aligned}$$

が得られる。Goldman Lie 代数への対応を考えて、次の定理が得られる。

Theorem 4.3 (Tsui [11]). 標準な埋め込み $e : \Sigma' \times [0, 1] \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$ と $\partial(\Sigma' \times [0, 1]) \setminus \text{int} D$ の *Torelli* 群の元 ξ を代表とする微分同相写像 χ をとる。この時、埋め込み $\vartheta_0 : \Sigma \rightarrow \Sigma \times [0, 1]_{e, \chi}, p \rightarrow (p, 0)$ と埋め込み $\vartheta_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma \times [0, 1]_{e, \chi}, p \rightarrow (p, 1)$ は同型写像 $\vartheta_{0*} : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma \times [0, 1], (*, \frac{1}{2}))$ と $\vartheta_{1*} : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma \times [0, 1], (*, \frac{1}{2}))$ を導出する。埋め込み $e'' : \Sigma' \rightarrow \partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D, p \mapsto (p, 1)$ と $\iota_\partial : \partial(\Sigma \times I) \setminus \text{int} D \rightarrow \Sigma \times I$ は $e''_* : (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma') \rightarrow (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D)$ と $\iota_{\partial*} : (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D) \rightarrow (\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1])(\Sigma')$ を導出する。スケイン代数の元

$$\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi) \in F^3(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}[1]})(\partial(\Sigma' \times I) \setminus \text{int} D)$$

について、

$$\begin{aligned} \nu_1(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)) &\stackrel{\text{def.}}{=} e''_*(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)), \\ \nu_{n+1}(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)) &\stackrel{\text{def.}}{=} \nu_n(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)) + e''_*(\text{bch}(-\iota_{\partial*}(\nu_n(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))), \zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))) \end{aligned}$$

により $\nu(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))$ と定義する。この時、

$$\vartheta_{1*}^{-1} \circ \vartheta_{0*}(\cdot) = \exp(\sigma(e'_*(\nu(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))))(\cdot) : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *) \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1}(\Sigma, *)$$

が得られる。ただし、 $e'_* : (\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma') \rightarrow (\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma)$ は埋め込み $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ から導出される *Lie* 代数準同型とする。さらに、このような $e'_*(\nu(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi)))$ はホモロジーシリンダーの微分同相類 Ξ から一つ定まる。この時、

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1} : \{\text{homology cylinders}\}/\text{diffeomorphism} &\rightarrow (F^3(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma), \text{bch}) \\ \Xi &\rightarrow e'_*(\nu(\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1}(\xi))) \end{aligned}$$

はモノイド準同型となる。

Cheptea-Habiro-Massuyeau [1] により LMO 関手が定義された。モノイド準同型 $\zeta_{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1} : \{\text{homology cylinders}\}/\text{diffeomorphism} \rightarrow (F^3(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}_1/\mathbb{Q}|1|})(\Sigma), \text{bch})$ から LMO 関手の tree 部分への再構成が期待される。また、他のスケイン代数でも同様の議論が可能であり、これは LMO 関手の tree 部分以外の情報を持っている。今後の研究ではこれらの関係性を明らかにすることが課題である。

参考文献

- [1] D. Cheptea, K. Habiro, G. Massuyeau, *A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms*, Geometry and Topology 12 (2008) 1091–1170.
- [2] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations*, Invent. Math. 85, 263–302(1986).
- [3] N. Habegger, *Milnor, Johnson, and tree level perturbative invariants*, preprint.
- [4] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$* , Math. Ann. 249, 225–242(1980).
- [5] N. Kawazumi and Y. Kuno, *The logarithms of Dehn twists*, Quantum Topology, Vol. 5(2014), Issue 3, pp. 347–423.
- [6] N. Kawazumi and Y. Kuno, *Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces*, arXiv: 1109.6479 (2011), UTMS preprint: 2011–28.

- [7] Y. Kuno and G. Massuyeau, *Generalized Dehn twists on surfaces and homology cylinders*. Preprint, arXiv:1902.02592.
- [8] G. Massuyeau and V. Turaev, *Fox pairings and generalized Dehn twists*, Ann. Inst. Fourier 63 (2013) 2403-2456.
- [9] S. Tsuji, *Dehn twists on Kauffman bracket skein algebras*, Kodai Math. J., 41(2018), 16-41.
- [10] S. Tsuji, *A formula for the action of Dehn twists on HOMFLY-PT skein modules and its applications*, preprint, arXiv:1801.00580.
- [11] S. Tsuji, *The total Johnson homomorphism on the homology cylinder and the bracket-quantization HOMFLY-PT skein algebra*, in preparation.
- [12] V. G. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6, 635-704.