Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras *

津田 照久 (一橋大学大学院 経済学研究科)

概 要

団代数は，箙（有向グラフ）の変異と呼ばれる操作と，ある簡単な双有理変換によって生成される代数構造である。この講演では，団代数を介したワイル群の双有理表現の構成法について紹介する。得られる双有理表現は，ある有理代数多様体上のワイル群作用や q-差分パンルヴェ方程式など，可積分系にも関係した興味深いクラスを与える。とくに，構成の鍵となる「閉路グラフに付随する鏡映変換」の組合せ的な側面に焦点をあてて論ずる。

1　団代数からの準備

はじめに Fomin–Zelevinsly [3] に従って，団代数について必要な事柄をまとめる。$Q = (V, E)$ は $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ を頂点集合，$E \subseteq V \times V$ を有向辺集合とする箙（有向グラフ）である。但し Q は辺として自己ループ $i \to i$ および 2 サイクル $i \to j \to i$ は持たないものとする。尚，同じ 2 頂点の間に複数の辺を持っても構わない。

代数的に独立で可換な変数の組 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ を y 変数と呼び，Q と $\boldsymbol{y}$ の組を（初期）Y 種子と呼ぶ。頂点 k における Y 種子の**変異（mutation）**$(Q', \boldsymbol{y}') = \mu_k(Q, \boldsymbol{y})$ を定義しよう。箙の変異 $Q' = \mu_k(Q)$ は次の手順で定める。

1. 部分グラフ $i \to k \to j$ ごとに辺 $i \to j$ を加える
2. 頂点 k を含む辺の向きを全て反転する
3. 現れた 2 サイクルを消す

また y 変数の変異 $\boldsymbol{y}' = \mu_k(\boldsymbol{y})$ は Q の符合付き隣接行列 $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$:

$$b_{ij} = -b_{ji} = (\text{辺 } i \to j \text{ の本数})$$

*この講演は青山学院大学の大久保直人氏，増田 哲氏との共同研究に基づく。 また，この予稿は RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の諸相」（2018 年 10 月 9 日〜12 日）の講究録原稿に加筆修正をしたものである。本研究は JSPS 科研費 17K05270 の助成を受けて行われた。

を用いて，次の双有理変換で定める。

$$
y_i' = \begin{cases} {y_k}^{-1} & (i = k) \\ y_i \dfrac{(1+y_k)^{[b_{ik}]_+}}{(1+{y_k}^{-1})^{[b_{ki}]_+}} & (i \neq k) \end{cases} \tag{1}
$$

ここで $a \in \mathbb{R}$ に対し $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ という記号を用いた。変異の合成 $w = \mu_{i_1} \circ \mu_{i_2} \circ \cdots \circ \mu_{i_\ell}$ の有理函数 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{y})$ への作用は

$$w.\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{y}.w)$$

のように，y 変数への右作用によって定義する。このとき

$${\mu_k}^2 = \mathrm{id} \quad \textbf{（対合性）} \quad \text{および} \quad \mu_i \circ \mu_j = \mu_j \circ \mu_i \quad (b_{ij} = 0)$$

が成り立つ。

箙 Q には頂点のラベルの貼り替えとして対称群 $\mathfrak{S}_N$ が作用する。これを

$$\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

のように y 変数に拡張すれば，任意の $i, j \in V$ に対して

$$(i, j) \circ \mu_i = \mu_j \circ (i, j)$$

が成り立つ。また箙 Q の辺の向きを一斉に反転する操作を ι と記し，y 変数への作用を

$$\iota(y_i) = {y_i}^{-1}$$

と定めれば，任意の変異と ι は可換となる。

変異 μ_k や置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$（および反転 ι）は，一般に箙 Q の形を変える。与えられた箙 Q に対して，変異と置換の合成で Q を不変に保つものの全体を G_Q と表す。このとき G_Q は y 変数への作用を介して，有理函数体 $\mathbb{Q}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ 上の非自明な双有理変換群を定める。これが我々の興味ある対象である。

例 (変異の合成の計算)**.** 次の Y 種子

$$
Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] \\ 3 \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \text{および} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)
$$

に変異の合成 $w = \mu_2 \circ \mu_1$ を施す。箙の変異は，上記 1, 2, 3 の手順から

$$
\mu_1(Q) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \\ 3 & \end{tikzcd} \quad , \qquad \mu_2 \circ \mu_1(Q) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 3 & \end{tikzcd}
$$

となる。一方 y 変数の変異は，箙 Q において

$$\mu_1(y_1) = {y_1}^{-1}, \quad \mu_1(y_2) = y_2\left(1 + {y_1}^{-1}\right)^{-1}, \quad \mu_1(y_3) = y_3(1 + y_1),$$

また箙 $\mu_1(Q)$ において

$$\mu_2(y_1) = y_1\left(1 + {y_2}^{-1}\right)^{-1}, \quad \mu_2(y_2) = {y_2}^{-1}, \quad \mu_2(y_3) = y_3$$

ゆえ，合成の規則から

$$\begin{aligned}
\mu_2 \circ \mu_1(y_1) &= \mu_1(y_1)\left(1 + \mu_1(y_2)^{-1}\right)^{-1} = {y_1}^{-1}\left(1 + {y_2}^{-1}\left(1 + {y_1}^{-1}\right)\right)^{-1} = \frac{y_1}{1 + y_1 + y_1 y_2}, \\
\mu_2 \circ \mu_1(y_2) &= \mu_1(y_2)^{-1} = {y_2}^{-1}\left(1 + {y_1}^{-1}\right) = \frac{1 + y_1}{y_1 y_2}, \\
\mu_2 \circ \mu_1(y_3) &= \mu_1(y_3) = y_3(1 + y_1)
\end{aligned}$$

と計算できる。

註. 団変数と呼ばれる変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ に対し，双有理変換

$$\boldsymbol{x}' = \mu_k(\boldsymbol{x}), \quad x'_i = \begin{cases} {x_k}^{-1}\left(\displaystyle\prod_{j \to k} x_j + \prod_{j \leftarrow k} x_j\right) & (i = k) \\ x_i & (i \neq k) \end{cases}$$

を考える。このとき，あらゆる変異の繰り返しで得られる団変数によって生成される $\boldsymbol{x}$ の有理函数体の $\mathbb{Z}$ 部分代数を箙 Q に付随する**団代数（cluster algebra）**という。変数変換

$$\hat{y}_i = \left(\prod_{j \to i} x_j\right)\left(\prod_{j \leftarrow i} x_j\right)^{-1}$$

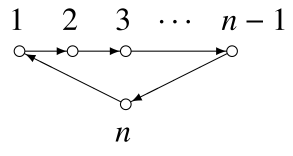
を介して，$\hat{y}_i$ は y_i と同じ変換則 (1) を満たす。尚，団代数の文脈において，y 変数の変換則は「係数付き団代数」に現れるものに相当する。

2　閉路グラフに付随する鏡映変換

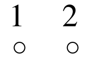
n を 2 以上の整数とする。また，変異の合成について $\mu_{i_1, i_2, \ldots, i_\ell} = \mu_{i_1} \circ \mu_{i_2} \circ \cdots \circ \mu_{i_\ell}$ のような略記法を用いる。

はじめに，箙として長さ n の向き付けられた閉路グラフ

$$C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1) =$$



$(n \geq 3)$



$(n = 2)$

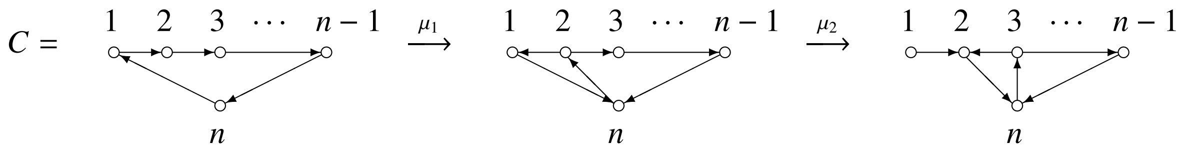
を考える。変異と置換の合成の列

(2) $$R = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M, \quad M = \mu_{n-1,\dots,2,1} = \mu_{n-1} \circ \cdots \circ \mu_2 \circ \mu_1$$

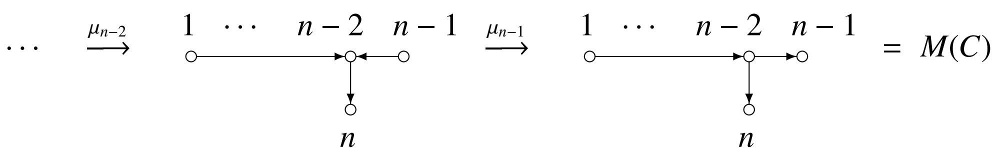
によって **閉路 C に付随する鏡映** $R = R_C$ を定義しよう。

命題 1. 変換 R は箙 C を不変に保ち，かつ $R^2 = \mathrm{id}$ を満たす。

証明　対合性 $R^2 = \mathrm{id}$ は ${\mu_k}^2 = (n-1, n)^2 = \mathrm{id}$ から容易に従う。箙については，下図のように変異の様子を追いかけられる。



「3 角形 $n \to k+1 \to k \to n$ が右にずれていく」

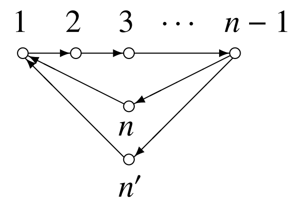


最後の三つ叉グラフ $M(C)$ は，頂点 $n-1$ と n について対称な形ゆえ，明らかに置換 $(n-1, n)$ で不変である。よって

$$R(C) = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M(C) = M^{-1} \circ M(C) = C$$

が従う。 □

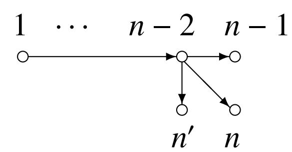
閉路グラフ C に頂点 n の「複製」 n' を付け加えた箙

$Q =$ 

を考える。このとき鏡映 $R = R_C$ と置換 (n, n') について，次が成り立つ。

命題 2. $(R \circ (n, n'))^3 = \mathrm{id}$

証明　箙 Q に先程と同じ変異の合成 $M = \mu_{n-1,\dots,2,1}$ を施すと，3 頂点 $n-1, n, n'$ が対称な四つ叉グラフ

$M(Q) =$ 

が得られる。ここで $M = \mu_{n-1,\dots,2,1}$ と (n, n') は可換ゆえ

$$
\begin{aligned}
R \circ (n, n') &= M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M \circ (n, n') \\
&= M^{-1} \circ (n-1, n) \circ (n, n') \circ M
\end{aligned}
$$

となり，$(n-1, n) \circ (n, n')$ が位数 3 の巡回置換であることから $(R \circ (n, n'))^3 = \mathrm{id}$ が従う。 □

とくに上の証明から箙 Q が鏡映 R_C で不変に保たれることが分かる。

ところで，一般に閉路 C を部分グラフとして含む箙 $Q\ (\supseteq C)$ は，一体いつ鏡映 $R = R_C$ で不変となるのだろうか。まず鏡映の定義

$$
R_C = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M, \quad M = \mu_{n-1,\dots,2,1}
$$

から，

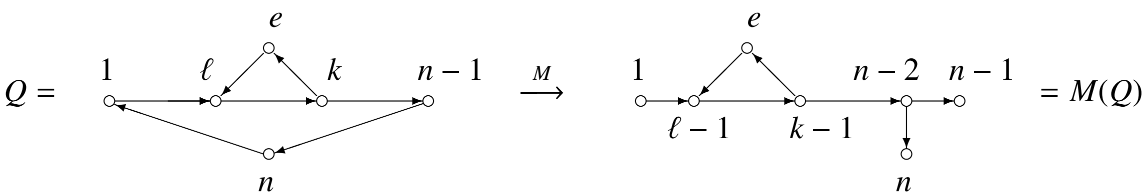
$$
Q \text{ が鏡映 } R_C \text{ で不変} \iff M(Q) \text{ が置換 } (n-1, n) \text{ で不変}
$$

であることに注意しておこう。

鏡映不変な箙の特徴付け　次の補題は簡単だが，この問題の大切な鍵である。

補題 3. 閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ に「松葉グラフ」$w = (k \to e \to \ell)$ を付け加えた箙 $Q = C \cup w$ を考える。但し e は C にない新しい頂点で，k, ℓ は C の相異なる任意の 2 頂点である。このとき $R = R_C$ は箙 Q を不変に保つ。

証明　変異の合成 $M = \mu_{n-1,\dots,2,1}$ を施した箙 $M(Q)$ は頂点 $n-1$ と n について対称となる。これは，実際に変異の様子を追いかけることで容易に確かめられる。例えば $2 \le \ell < k \le n-1$ の場合，



のようになる。あとは命題 1 の証明と同様である。 □

閉路 C に「松葉」をいくつ付け加えても得られる箙は，やはり R_C 不変である。

補題 4. 閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ に m 個の「松葉」$w_i = (k_i \to e_i \to \ell_i)$ を付け加えた箙 $Q^{(m)} = C \cup \bigcup_{i=1}^{m} w_i$ を考える。但し，各 e_i は C にない新しい頂点で，各 k_i, ℓ_i は C の相異なる任意の 2 頂点である。（尚，付け加わる新しい頂点と辺には重複があっても構わない。）このとき $R = R_C$ は箙 $Q^{(m)}$ を不変に保つ。

証明　まず $M = \mu_{n-1,\dots,2,1}$ の形から $M(C \cup w_i)$ と $M(Q^{(m)})$ は，ともに $M(C)$ を部分グラフとして含む。さらに 2 つのグラフ $\bigcup_{i=1}^{m}(M(C \cup w_i) - M(C))$ と $M(Q^{(m)}) - M(C)$ は $V_e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

の頂点同士を結ぶ辺を除いて等しい[1]。命題 1 と補題 3 から $M(C)$ と $M(C \cup w_i)$ は，ともに頂点 $n-1$ と n について対称である。よって $M(Q^{(m)})$ も頂点 $n-1$ と n について対称となり，$Q^{(m)}$ は $R = R_C$ で不変である。 □

箙の変異の定義から直ちに従う次の一般的な事実を述べておこう。

補題 5. 自己ループと 2 サイクルを持たない箙 $Q = (V, E)$ を考える。部分集合 $V_0 \subset V$ について，Q から $V_1 = V \setminus V_0$ の頂点同士を結ぶ辺を除いた箙を Q' とおく。このとき，任意の変異の合成列 $M = \mu_{i_1, i_2, \ldots, i_\ell}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in V_0)$ に対し，$M(Q)$ と $M(Q')$ は V_1 の頂点同士を結ぶ辺を除いて等しい。

ここまでの準備の下で，鏡映不変な箙の特徴付けが得られる。

定理 6 (cf. Goncharov–Shen [4, Theorem 7.7])**.** 閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ を部分グラフとして含む箙 Q が鏡映 $R = R_C$ で不変となるための必要十分条件は，

条件 (W) :　閉路 C に含まれない Q の任意の頂点 v に対し，v から C に入る辺と出る辺の本数が等しい

である。

証明　この証明では，C の頂点に接続する全ての辺からなる Q の部分グラフを Q' と記す。

［十分性］Q が条件 (W) を満たすならば，Q' は C に適当な数の「松葉」を付け加えた箙に等しい。このとき補題 4 から $M(Q')$ は頂点 $n-1$ と n について対称ゆえ，補題 5 から $M(Q)$ もそうなる。即ち Q は $R = R_C$ で不変である。

［必要性］R 不変な箙 Q が条件 (W) を満たさないと仮定して，矛盾を導く。条件 (W) より Q' から適当な数の「松葉」を除いた箙 Q'' は，C の 1 つの頂点 n に p 個の多重辺 $v_j \xrightarrow{m_j} n$ または $v_j \xleftarrow{m_j} n$ $(1 \le j \le p)$ を付け加えた形にできる。ここで $v_1, v_2, \ldots, v_p$ は C にない相異なる頂点とした。明らかに $M(Q'')$ は頂点 $n-1$ と n について対称ではない。また Q'' に適当な数の「松葉」$w_1, w_2, \ldots, w_q$ を付け加えた箙である Q' に対し，2 つのグラフ $M(Q') - M(C)$ と $\bigcup_{k=1}^{q}(M(C \cup w_k) - M(C)) \cup (M(Q'') - M(C))$ は C の頂点に接続する辺に制限すれば等しい。よって補題 4 と同様の議論から $M(Q')$ も頂点 $n-1$ と n について対称ではない。

しかるに Q の R 不変性から $M(Q)$ は頂点 $n-1$ と n について対称となり，補題 5 から $M(Q')$ もそうなる。これは矛盾である。 □

双有理変換 $R = R_C$ の具体形と巡回対称性　n 変数多項式

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{y}) &= F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= y_0 + y_0 y_1 + y_0 y_1 y_2 + \cdots + y_0 y_1 \cdots y_{n-1} \end{aligned}$$

を導入する。但し，変数 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元と看做す（つまり $y_{i+n} = y_i$ なる周期性を課す）。また巡回置換 $\rho = (1, 2, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ を用いて，$F = F(\boldsymbol{y})$ の変数の添字を k

[1]グラフ G とその部分グラフ H について，差 $G - H$ は G から H の辺を除いて得られるグラフを表す。

だけずらして得られる多項式

$$F_k = \rho^k.F(\boldsymbol{y}) = F(y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{n+k}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

も導入しておく。

　はじめに箙が閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ の場合，鏡映 $R = R_C = \mu_{1,2,\ldots,n-1} \circ (n-1, n) \circ \mu_{n-1,\ldots,2,1}$ の y 変数への作用は

$$R(y_k) = \frac{F_{k-1}}{y_{k-1}F_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

となることが単純な計算から従う[2]。とくに添字の巡回置換 $\rho = (1, 2, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\rho^{-1} \circ R \circ \rho = R$$

のような対称性が (3) 式の具体形から直ちに分かる。

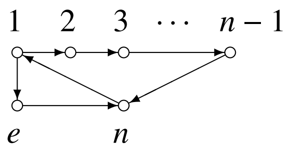
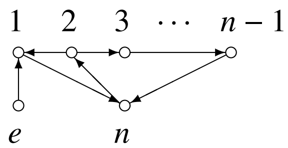
　次に閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ に 1 個の「松葉」$w = (1 \to e \to n)$ を付け加えた箙 $Q = C \cup w$ を考える。変異の定義式 (1) より明らかに $R = R_C$ の y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ への作用は，箙が C の場合 (3) に等しい（一般に C を含み，かつ鏡映 $R = R_C$ で不変な箙 Q についても全く同様である）。あとは新しい頂点 e の変数 y_e への作用について調べればよい。

補題 7. 閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ に 1 個の「松葉」$w = (1 \to e \to n)$ を付け加えた箙 $Q = C \cup w$ について，鏡映 $R = R_C$ の y_e への作用は

$$R(y_e) = y_e \frac{y_n F_1}{F_n} \tag{4}$$

で与えられる。

<u>証明</u>　箙 $Q' = \mu_1(Q)$ は下図のように長さ $n-1$ の閉路 $C' = (2 \to 3 \to \cdots \to n \to 2)$ を含む。

$Q =$  $\overset{\mu_1}{\longleftrightarrow}$ $Q' = \mu_1(Q) =$ 

このとき鏡映 $R = R_C$ は C' に付随する鏡映 $R' = R_{C'}$ を用いて

$$R = \mu_1 \circ R' \circ \mu_1$$

と表される。勿論，定理 6 より Q' は R' 不変である。

　そこで，初期 Y 種子 $(Q, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_e))$ の変換の様子を追いかけてみよう。

$$(Q, \boldsymbol{y}) \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} (Q' = \mu_1(Q), \boldsymbol{y}') \overset{R'}{\longleftrightarrow} (Q'' = Q', \boldsymbol{y}'') \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} (Q''' = Q, \boldsymbol{y}''')$$

[2]例えば，閉路 C の長さ n に関する帰納法を用いて容易に証明できる。

変異の定義式 (1) より

$$y'_e = \mu_1(y_e) = y_e \frac{y_1}{1+y_1}, \quad y'''_e = \mu_1(y''_e) = y''_e(1+y''_1) = y''_e\left(1+\frac{1}{y'''_1}\right)$$

である。また箙 Q' において頂点 e は C' に隣接しないので，$y''_e = R'(y'_e) = y'_e$ となる。これらと既に示した (3) 式：

$$y'''_1 = R(y_1) = \frac{F_n}{y_n F_2}$$

を合わせれば，

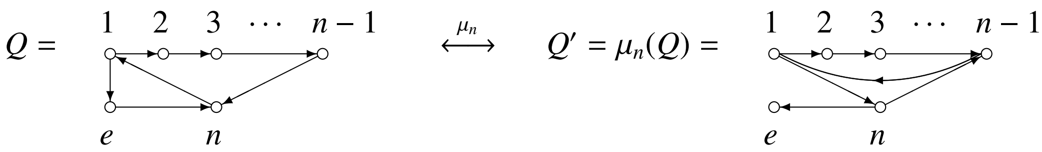
$$y'''_e = R(y_e) = y_e \frac{y_1}{1+y_1} \cdot \frac{F_n + y_n F_2}{F_n} \tag{5}$$

が従う。最後に簡単な恒等式

$$F_k + y_k F_{k+2} = \frac{y_k(1+y_{k+1})F_{k+1}}{y_{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

の成立に注意すれば，(5) は (4) と等価である。 □

上と同じ箙 Q に対し，$Q' = \mu_n(Q)$ は下図のようにやはり長さ $n-1$ の閉路 $C' = (1 \to 2 \to \cdots \to n-1 \to 1)$ を含み，かつ頂点 e は C' に隣接しない。



ここで変異と置換の合成列

$$T := \mu_{n,1,2,\ldots,n-2} \circ (n-2, n-1) \circ \mu_{n-2,\ldots,2,1,n} = \rho^{-1} \circ R \circ \rho$$

を考える。但し $\rho = (1,2,\ldots,n) \in \mathfrak{S}_n$ である。このとき，補題 7 の証明と全く同様の議論によって双有理変換 $T(y_e)$ の具体形が計算できるが，驚くべきことに $T(y_e) = R(y_e)$ が成り立つ。即ち，鏡映 $R = R_C$ は箙 Q においても巡回対称性 $\rho^{-1} \circ R \circ \rho = R$ を持つ。

次は補題 7 の一般化である（$k=1$ の場合が補題 7 そのもの）。

補題 8. 閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ に 1 個の「松葉」$w_k = (k \to e \to k-1)$ $(k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を付け加えた箙 $Q = C \cup w_k$ について，鏡映 $R = R_C$ の y_e への作用は

$$R(y_e) = y_e \frac{y_{k-1}F_k}{F_{k-1}}$$

で与えられる。

<u>証明</u>　鏡映 R の持つ上記の巡回対称性を用いれば，補題 7 より明らかである。 □

以下，箙 $Q = (V, E)$ は閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ を部分グラフとして含み，かつ鏡映 $R = R_C$ で不変なものとする。また C の頂点集合を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ と記す。このとき定理6より，C に属さない任意の頂点 $e \in V \setminus I$ について，部分集合 $\{e\} \cup I \subset V$ の**誘導する部分グラフ**[3] $Q[\{e\} \cup I] \subseteq Q$ は，閉路 C に e を新しい頂点とする適当な個数の「松葉」を付け加えた形になっている。即ち，非負整数の組 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ を適当にとると，$Q[\{e\} \cup I]$ は C に「松葉」$w_k = (k \to e \to k-1)$ を m_k 個ずつ付け加えた箙 $C \cup \bigcup_{k=1}^{n} m_k w_k$ に等しい。

命題 9 (cf. [4, Theorem 7.7])**.** 箙 Q は閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ を部分グラフとして含み，かつ鏡映 $R = R_C$ で不変なものとする。このとき，

i) C の頂点 $k \in I$ について

$$R(y_k) = \frac{F_{k-1}}{y_{k-1} F_{k+1}};$$

ii) C に外から隣接する頂点 e について，上のような非負整数の組 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ を定めると，

$$R(y_e) = y_e \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{y_{k-1} F_k}{F_{k-1}} \right)^{m_k};$$

iii) それ以外の頂点 v について $R(y_v) = y_v$ である。

証明　i) は既に示してあり（補題7の手前を見よ），iii) は変異の定義から自明である。以下，ii) を示す。まず，各 $k \in I$ について m_k 個の「松葉」$w_{k,i} = (k \to e_{k,i} \to k-1)$ $(1 \leq i \leq m_k)$ を閉路 C に付け加えて得られる箙 $\widetilde{Q} = C \cup \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m_k} w_{k,i}$ を考える。但し，付け加わる $|\boldsymbol{m}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 個の新しい頂点 $\{e_{k,i}\}$ は互いに異なるものとする。このとき，補題8より

$$R(y_{e_{k,i}}) = y_{e_{k,i}} \frac{y_{k-1} F_k}{F_{k-1}}$$

である。一方，頂点 $\{e_{k,i}\}$ を全て 1 点 e に接着して得られる箙は $Q[\{e\} \cup I]$ に等しい。ここで頂点 e の変数 y_e は $\{y_{e_{k,i}}\}$ の積

$$y_e = \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m_k} y_{e_{k,i}}$$

として定められる。鏡映 $R = R_C$ の y_e への作用が Q でも $Q[\{e\} \cup I]$ でも同じであることに注意すれば，上の 2 式から ii) は直ちに従う。 □

とくに（繰り返しになるが），鏡映 $R = R_C$ の y 変数への双有理変換の具体形から**巡回対称性**

$$\rho^{-1} \circ R \circ \rho = R, \quad \rho = (1, 2, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n \tag{6}$$

が成り立つ。

[3]つまり $Q[\{e\} \cup I]$ は，両端点が $\{e\} \cup I$ に属する辺からなる Q の部分グラフを表す。

系 10 (cf. [4, Theorem 7.1])**.** 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，$\sigma^{-1} \circ R \circ \sigma = R$ が成り立つ。

<u>証明</u>　箙 $Q\ (\supseteq C)$ は定理 6 の条件 (W) を満たすものとする。変異の定義から，閉路 C の任意の頂点 $i_1 \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，箙 $Q' = \mu_{i_1}(Q)$ は $I \setminus \{i_1\}$ を頂点とする長さ $n-1$ の閉路 C' を含み，かつ C' について条件 (W) を満たす。また巡回対称性 (6) より $R = \mu_{i_1} \circ R_{C'} \circ \mu_{i_1}$ である。以下，同様の操作を繰り返せば，I の任意の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

に対し $R = \mu_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \circ (i_{n-1}, i_n) \circ \mu_{i_{n-1}, \ldots, i_2, i_1}$ が成り立つ。 □

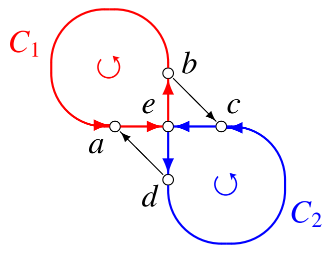
註. 閉路グラフに付随する鏡映変換 (2) が可積分系の文脈に現れたのは，井上–Lam–Pylyavskyy [6] による団代数と幾何的 R 行列の研究が最初である。彼らは，本稿 4.2 節の例に見る箙 Q において縦方向の周期条件のみを課したような円筒上の箙の団代数を考察し，対称群（つまり A 型のワイル群）の双有理的実現を得た。 さらに最近の井上–石橋–大矢 [5] による高次タイヒミュラー空間の研究では，より一般のコクセター群の双有理的実現が重み付き箙の団代数から導出された。尚，群の生成元の満たす基本関係式は，以下 3 節に見るようなグラフの組合せ的な議論ではなく，変異の具体形を用いた直接計算で証明されている。

鏡映変換 (2) の初出自体は，恐らく Bucher [2] による曲面の 3 角形分割に由来した団代数の研究であり，その後 Goncharov–Shen [4, Section 7] にその性質が詳細に調べられた。実際，定理 6（鏡映不変な箙の特徴付け）の条件 (W) の十分性，命題 9（双有理変換の具体形），および系 10（鏡映の対称性）は既知の結果である。但し証明は本稿とは全く異なっている。例えば，命題 9 の [4] による証明は閉路の長さに関する帰納法で双有理変換を計算するものだが，場合分けもあって些か煩雑である。一方，我々の証明は「頂点の接着」のアイデアを用いた（計算を殆ど必要としない）見通しのよいものになっている。系 10 についても，その特別な場合である「巡回対称性」が本質的であることが今回の証明で露となった。

3　鏡映変換の満たす関係式

箙 Q が閉路を部分グラフとして複数含み，かつそれらに付随する鏡映で不変に保たれるとき，鏡映同士はどのような関係式を満たすのだろうか。

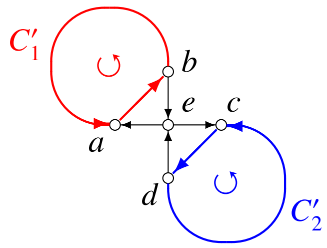
交叉する閉路　2 つの閉路 C_1 と C_2 が頂点 e で交叉した次のような箙

$Q =$ 

を考える。但し $C_1 = (\cdots \to a \to e \to b \to \cdots)$ と $C_2 = (\cdots \to c \to e \to d \to \cdots)$ の長さは異なっていても構わない。辺 $b \to c$ と $d \to a$ の存在によって，定理 6 から Q は鏡映 R_{C_i} $(i = 1, 2)$ で不変であることに注意しておく。

命題 11. R_{C_1} と R_{C_2} は互いに可換である。

証明　2 つの閉路の交点 e における変異を施すと

$Q' = \mu_e(Q) =$ 

が得られる。鏡映の巡回対称性を用いて

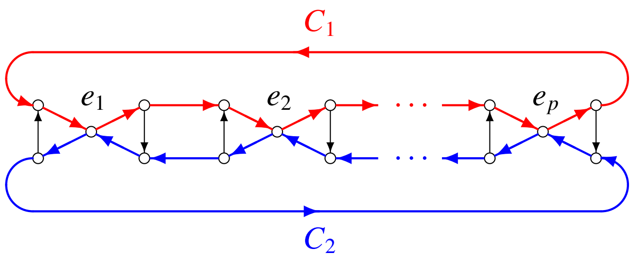
$$R_{C_i} = \mu_e \circ R_{C'_i} \circ \mu_e, \quad i = 1, 2$$

と表される。ここで 2 つの閉路 $C'_1 = (\cdots \to a \to b \to \cdots)$ と $C'_2 = (\cdots \to c \to d \to \cdots)$ は互いに隣接していないことから $R_{C'_1}$ と $R_{C'_2}$ は可換である。よって

$$\begin{aligned} R_{C_1} \circ R_{C_2} &= \mu_e \circ R_{C'_1} \circ R_{C'_2} \circ \mu_e \\ &= \mu_e \circ R_{C'_2} \circ R_{C'_1} \circ \mu_e = R_{C_2} \circ R_{C_1} \end{aligned}$$

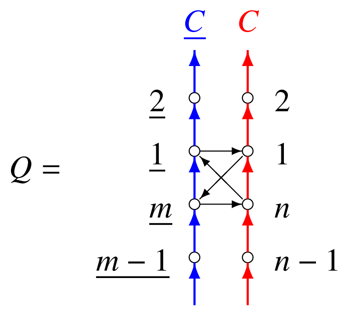
が従う。 □

より一般に 2 つの閉路 C_1 と C_2 が複数の頂点 $e_1, e_2, \ldots, e_p$ で交叉した箙

$Q =$ 

においても，上の命題 11 と同様に，交点 $e_1, e_2, \ldots, e_p$ における変異で 2 つの閉路を分離すれば，鏡映の巡回対称性を用いて R_{C_1} と R_{C_2} の可換性が証明できる。

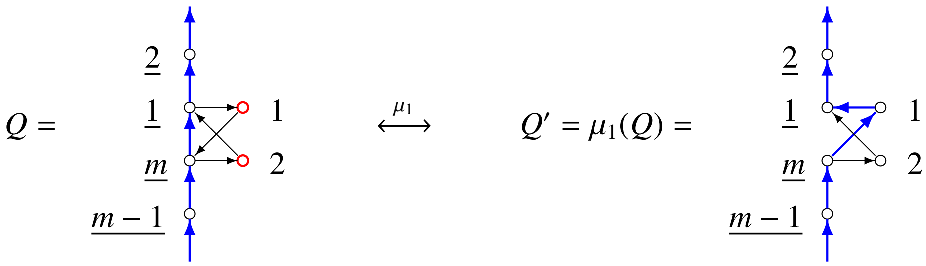
蝶番で繋がれた閉路　長さ n の閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ と長さ m の閉路 $\underline{C} = (\underline{1} \to \underline{2} \to \cdots \to \underline{m} \to \underline{1})$ が「蝶番」$\underline{1} \to 1 \to \underline{m} \to n \to \underline{1}$ で繋がれた箙



を考える。

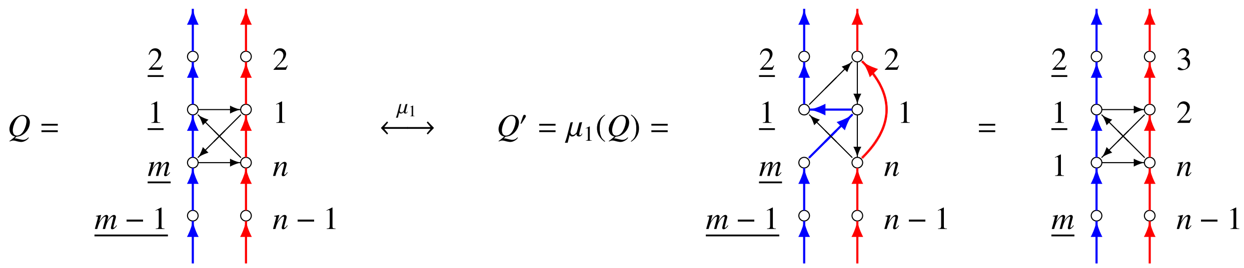
命題 12. R_C と $R_{\underline{C}}$ は組紐関係式 $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \mathrm{id}$ を満たす。

証明　i) $n = 2$, つまり $C = (1 \to 2 \to 1)$ の場合，箙 $Q' = \mu_1(Q)$ は下図のように長さ $m+1$ の閉路 $\underline{C}' = (1 \to \underline{1} \to \underline{2} \to \cdots \to \underline{m} \to 1)$ に頂点 1 の「複製」2 を付け加えた形である。



よって命題 2 から $(R_{\underline{C}'} \circ (1,2))^3 = \mathrm{id}$ が成り立つ。鏡映の巡回対称性から $R_{\underline{C}} = \mu_1 \circ R_{\underline{C}'} \circ \mu_1$ と表せるので，定義 $R_C = \mu_1 \circ (1,2) \circ \mu_1$ と合わせて $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \mathrm{id}$ が分かる。

ii) $n > 2$ の場合，箙 Q に変異 μ_1 を施すと

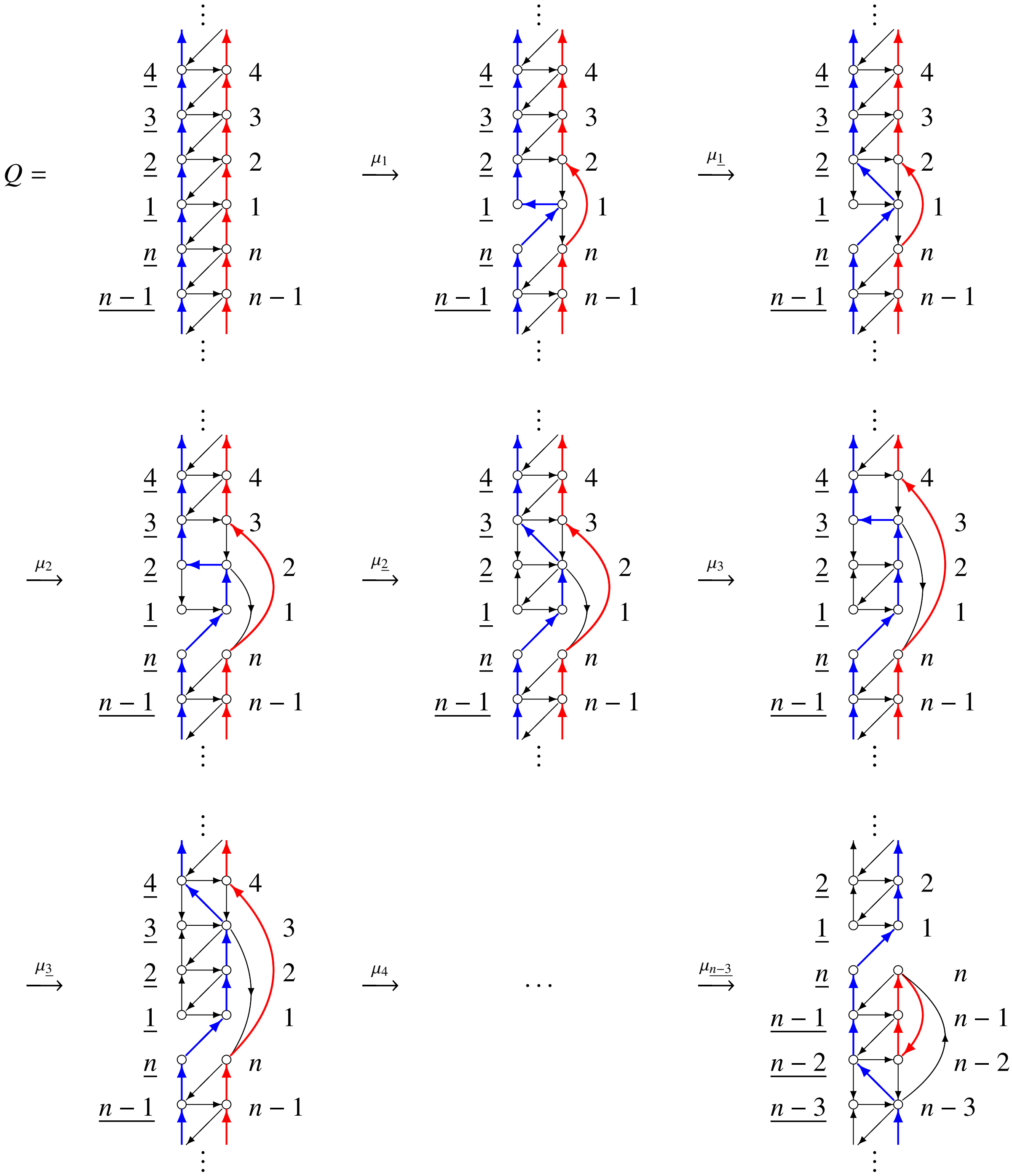


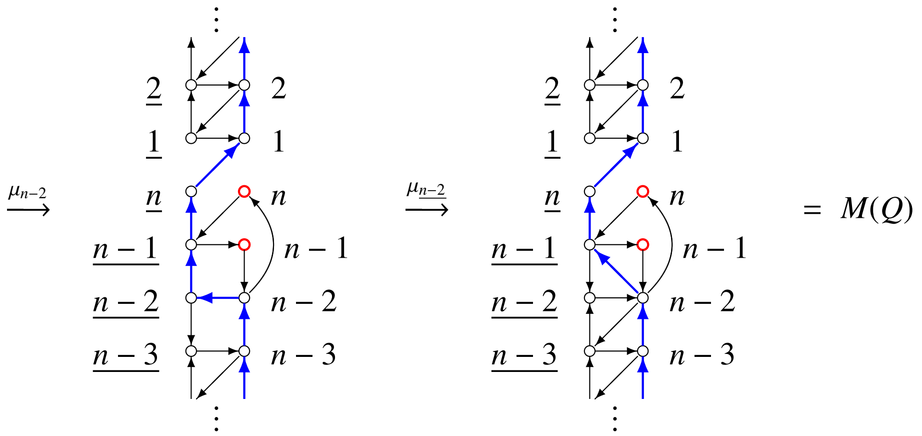
が得られる。これは長さ $n-1$ の閉路 $C' = (2 \to 3 \to \cdots \to n \to 2)$ と長さ $m+1$ の閉路 $\underline{C}' = (1 \to \underline{1} \to \underline{2} \to \cdots \to \underline{m} \to 1)$ が「蝶番」で繋がれた形である。以下，鏡映の巡回対称性に注意しながら変異 $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n-2}$ を順番に施すことで，i) $n = 2$ の場合に帰着できる。 □

隣接する閉路　同じ長さ n の 2 つの閉路 $C = (1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1)$ と $\underline{C} = (\underline{1} \to \underline{2} \to \cdots \to \underline{n} \to \underline{1})$ を「松葉」$\underline{i} \to i \to \underline{i-1}$ $(i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ で隣接させた箙 Q を考える。

命題 13 (cf. [6, Theorem 3.2]). R_C と $R_{\underline{C}}$ は組紐関係式 $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \mathrm{id}$ を満たす。

証明　些か天下り的ではあるが Q に変異の合成列 $M = \mu_{\underline{n-2},n-2,\ldots,\underline{2},2,\underline{1},1}$ を施してみよう。


$Q =$
μ_1
$\mu_{\underline{1}}$
μ_2
$\mu_{\underline{2}}$
μ_3
$\mu_{\underline{3}}$
μ_4
$\cdots$
$\mu_{\underline{n-3}}$
$\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ $\underline{n}$ $\underline{n-1}$
4 3 2 1 n $n-1$



上図のように $Q^{(2k-1)} = \mu_{k,\underline{k-1},k-1,\dots,\underline{2},2,\underline{1},1}(Q)$ は，長さ $n-k$ の閉路 $C^{(2k-1)} = (k+1 \to k+2 \to \cdots \to n \to k+1)$ と長さ $n+1$ の閉路 $\underline{C}^{(2k-1)} = (1 \to 2 \to \cdots \to k \to \underline{k} \to \underline{k+1} \to \cdots \to \underline{n} \to 1)$ を部分グラフとして含み，かつ $R_{C^{(2k-1)}}$ と $R_{\underline{C}^{(2k-1)}}$ で不変な箙である。同様に $Q^{(2k)} = \mu_{\underline{k},k,\dots,\underline{2},2,\underline{1},1}(Q)$ は，長さ $n-k$ の閉路 $C^{(2k)} = C^{(2k-1)}$ と長さ n の閉路 $\underline{C}^{(2k)} = (1 \to 2 \to \cdots \to k \to \underline{k+1} \to \underline{k+2} \to \cdots \to \underline{n} \to 1)$ を含み，かつ $R_{C^{(2k)}}$ と $R_{\underline{C}^{(2k)}}$ で不変な箙である。ここで

$$R_C = M^{-1} \circ R_{C^{(2n-4)}} \circ M, \quad R_{\underline{C}} = M^{-1} \circ R_{\underline{C}^{(2n-4)}} \circ M \tag{7}$$

が成り立つが，これは変異の各段階で鏡映の巡回対称性に注意すれば明らかである。とくに箙 $Q^{(4n-4)} = M(Q)$ において，長さ 2 の閉路 $C^{(4n-4)} = (n-1 \to n \to n-1)$ と長さ n の閉路の $\underline{C}^{(2n-4)} = (1 \to 2 \to \cdots \to n-2 \to \underline{n-1} \to \underline{n} \to 1)$ は「蝶番」で繋がれた形ゆえ，命題 12 から $(R_{C^{(2n-4)}} \circ R_{\underline{C}^{(2n-4)}})^3 = \mathrm{id}$ が成り立つ。これは (7) 式を介して $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \mathrm{id}$ と同値である。 □

4 例

これまでに説明した一般的な枠組みを用いて，様々なワイル群の双有理表現が団代数から得られる。以下 2 つの具体例を実際に見てみよう。

4.1 $D_5^{(1)}$ 型の q-差分パンルヴェ方程式（q-P_{VI}）

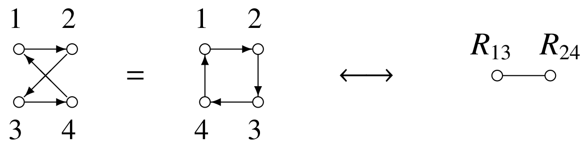
はじめに 2 つの 2 サイクル $C_{13} = (1 \to 3 \to 1)$ と $C_{24} = (2 \to 4 \to 2)$ が「蝶番」$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ で繋がれた箙[4]

$$Q_0 = (V_0, E_0), \quad V_0 = \{1,2,3,4\}, \quad E_0 = \{i \to i+1 \,|\, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

を考える。定理 6 から C_{13}, C_{24} に付随する鏡映 R_{13}, R_{24} は Q_0 を不変に保ち，また命題 12 からは組紐関係式 $(R_{13} \circ R_{24})^3 = \mathrm{id}$ が従う。即ち Q_0 を不変に保つ群 G_{Q_0} は，A_2 型の（有限）ワイル群 $W(A_2)$ と同型な群 $\langle R_{13}, R_{24} \rangle$ を含む。

[4] あるいは 2 つの 2 サイクル C_{13} と C_{24} を「松葉」$1 \to 2 \to 3$ と $3 \to 4 \to 1$ で隣接させた箙と看做しても同じである。

$Q_0 =$

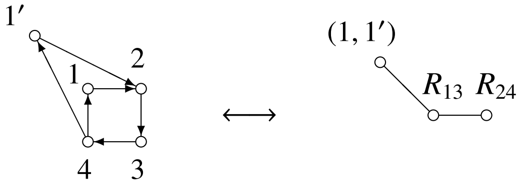


A_2 型

図において左側には箙を，右側には現れたワイル群に対応する**ディンキン図形**を記した。

次に Q_0 に頂点 1 の「複製」$1'$ を付け加えた箙 Q_1 を考える。明らかに頂点 1 と頂点 $1'$ の置換 $(1,1')$ は Q_1 を不変に保ち，また命題 2 から $(R_{13} \circ (1,1'))^3 = \mathrm{id}$ が従う。尚 $(1,1')$ と R_{24} は可換である。即ち $G_{Q_1} \supset \langle R_{13}, R_{24}, (1,1') \rangle \simeq W(A_3)$ となる。

$Q_1 =$



A_3 型

同様に Q_0 の 4 頂点全てに対し「複製」を付け加えた箙

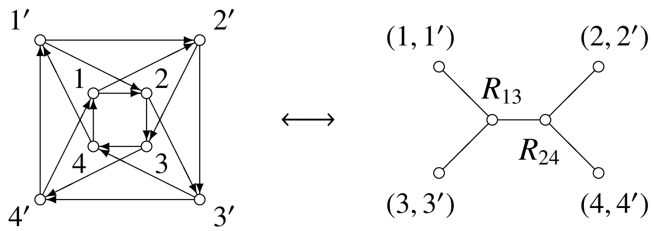
$$
\begin{aligned}
&Q = (V, E),\\
&V = \{1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'\}, \quad E = \{i \to i+1,\ i' \to i+1,\ i \to (i+1)' \,|\, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

を考えれば

$$G_Q \supset W = \langle R_{13}, R_{24}, (1,1'), (2,2'), (3,3'), (4,4') \rangle \simeq W(D_5^{(1)})$$

となり，$D_5^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群 $W(D_5^{(1)})$ の双有理表現が得られる。

$Q = (V, E) =$



$D_5^{(1)}$ 型

箙 Q の頂点に付随する y 変数 y_i $(i = 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4')$ への双有理変換

$$s_0 = (1,1'), \quad s_1 = (3,3'), \quad s_2 = R_{13}, \quad s_3 = R_{24}, \quad s_4 = (4,4'), \quad s_5 = (2,2')$$

の具体形は，命題 9 から次のように書き下すことができる。

$$
\begin{aligned}
&s_0 : y_1 \leftrightarrow y_{1'}, \quad s_1 : y_3 \leftrightarrow y_{3'}, \quad s_4 : y_4 \leftrightarrow y_{4'}, \quad s_5 : y_2 \leftrightarrow y_{2'},\\
&s_2(y_{\{1,3\}}) = \frac{1}{y_{\{3,1\}}}, \quad s_2(y_{\{2,2'\}}) = y_{\{2,2'\}} \frac{y_1(1+y_3)}{1+y_1}, \quad s_2(y_{\{4,4'\}}) = y_{\{4,4'\}} \frac{y_3(1+y_1)}{1+y_3},\\
&s_3(y_{\{2,4\}}) = \frac{1}{y_{\{4,2\}}}, \quad s_3(y_{\{1,1'\}}) = y_{\{1,1'\}} \frac{y_4(1+y_2)}{1+y_4}, \quad s_3(y_{\{3,3'\}}) = y_{\{3,3'\}} \frac{y_2(1+y_4)}{1+y_2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

その他の記していない変数への作用は自明である。頂点の置換と辺の向きの反転 ι の合成

$$\sigma_1 = (1,2) \circ (1',2') \circ (3,4) \circ (3',4') \circ \iota, \quad \sigma_2 = (1,3) \circ (1',3') \circ \iota$$

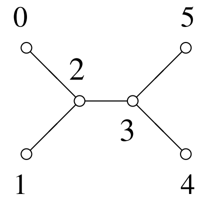
もやはり箙 Q を不変に保つが，これはディンキン図形の自己同型に相当する。

さて，乗法的ルート変数 a_i $(0 \le i \le 5)$ を

$$\begin{aligned}&a_2 = y_1 y_3, \quad a_3 = y_2 y_4,\\ &a_0 = \frac{y_{1'}}{y_1}, \quad a_1 = \frac{y_{3'}}{y_3}, \quad a_4 = \frac{y_{4'}}{y_4}, \quad a_5 = \frac{y_{2'}}{y_2}\end{aligned}$$

で導入しよう。このとき

$$(C_{ij})_{0\le i,j\le 5} = \begin{pmatrix} 2 & & -1 & & & \\ & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}$$



を $D_5^{(1)}$ 型の一般カルタン行列として $s_i(a_j) = a_j {a_i}^{-C_{ij}}$ が成り立つ。全ての頂点の y 変数の積

$$q := y_1 y_2 y_3 y_4 y_{1'} y_{2'} y_{3'} y_{4'} = a_0 a_1 {a_2}^2 {a_3}^2 a_4 a_5$$

は $W(D_5^{(1)})$ で不変となり，零ルートに対応する。乗法的ルート変数をパラメタと看做せば，ワイル群作用 (8) の離散力学系としての次元は $8-6=2$ に等しい。例えば「従属変数」f_1, f_2 を

$$f_1 = \left(\frac{y_1 y_{1'}}{y_3 y_{3'}}\right)^{1/4}, \quad f_2 = \left(\frac{y_4 y_{4'}}{y_2 y_{2'}}\right)^{1/4}$$

で導入すると，それらと乗法的ルート変数への作用は次のように閉じた形で書ける。

$$\begin{aligned}&s_i(a_j) = a_j {a_i}^{-C_{ij}},\\ &\sigma_1(a_{\{0,1,2,3,4,5\}}) = \frac{1}{a_{\{5,4,3,2,1,0\}}}, \quad \sigma_2(a_{\{0,1,2,3,4,5\}}) = \frac{1}{a_{\{1,0,2,3,4,5\}}},\\ &\frac{s_2(f_2)}{f_2} = {a_2}^{1/2}\frac{f_1 + {a_0}^{1/4}{a_1}^{-1/4}{a_2}^{-1/2}}{f_1 + {a_0}^{1/4}{a_1}^{-1/4}{a_2}^{1/2}}, \quad \frac{s_3(f_1)}{f_1} = {a_3}^{-1/2}\frac{f_2 + {a_3}^{1/2}{a_4}^{1/4}{a_5}^{-1/4}}{f_2 + {a_3}^{-1/2}{a_4}^{1/4}{a_5}^{-1/4}},\\ &\sigma_1(f_{\{1,2\}}) = f_{\{2,1\}}, \quad \sigma_2(f_2) = \frac{1}{f_2}\end{aligned}$$

これは坂井 [12] による有理曲面の代数幾何に由来したワイル群作用と一致する[5]。拡大アフィン・ワイル群 $\widetilde{W} = \langle s_i\ (0 \le i \le 5), \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ の平行移動部分 $\ell = (\sigma_1 \sigma_2 s_2 s_0 s_1 s_2)^2$ から生ずる 2 次元の離散力学系が，q-$P_{\rm VI}$ と呼ばれる q-差分パンルヴェ方程式に他ならない。

同様の方法で様々なディンキン図形に対応したワイル群作用が構成できる。本節では 2 つの 2 サイクルが「蝶番」で繋がれた箙 $Q_0 = (1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1)$ を基礎として，各頂点に「複製」を 1 つ付け加えた箙 Q から $D_5^{(1)}$ を得たが，替わりに付け加える「複製」の個数

[5] 坂井 [12] は射影平面の 9 点ブローアップとその退化を考えて，$E_8^{(1)}$ 型の楕円差分方程式を頂点とする 2 次元の離散パンルヴェ系の一族を幾何学的に構成した。

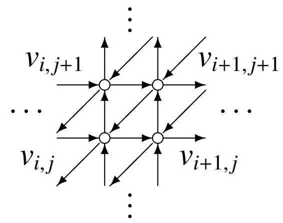
を任意に選ぶことで論文 [13] のワイル群作用が再現される[6]。また任意の個数の 2 サイクルを「蝶番」で数珠繋ぎにした箙を基礎とし，付け加える「複製」の個数も任意に選ぶことで津田–竹縄 [14] の与えたある有理代数多様体上のワイル群作用が再現される[7]。

註. 上記の箙 Q から q-P_{VI} が導出できることは，大久保 [9, 10] による離散ソリトン方程式と団代数についての一連の研究の中で発見された[8]。また Bershtein–Gavrylenko–Marshakov の論文 [1] は「団可積分系」の非自励化を介して，2 次元の全ての q-差分パンルヴェ系（および，その背景のアフィン・ワイル群対称性）を団代数から導出する画期的なものである。反面これらの結果において，箙とディンキン図形との対応は漠然としていた。本稿の 2 節と 3 節に整備した「閉路グラフに付随する鏡映変換」の一般論は，従来の結果に自然な解釈を許すのみならず，様々なワイル群の双有理表現を統一的に構成する枠組みを与えている。

4.2　高次元の例

m,n を 2 以上の整数とする。頂点集合が $V=\{v_{i,j}\,|\,i\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\,j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ で，有向辺集合が $E=\{v_{i,j}\to v_{i+1,j},\,v_{i,j}\to v_{i,j+1},\,v_{i+1,j+1}\to v_{i,j}\}$ で与えられた円環面上の箙

$Q=(V,E)=$



を考える。箙 Q は長さ n の「縦方向の閉路」$C_i^v=(v_{i,1}\to v_{i,2}\to\cdots\to v_{i,n}\to v_{i,1})$ $(i\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ と長さ m の「横方向の閉路」$C_j^h=(v_{1,j}\to v_{2,j}\to\cdots\to v_{m,j}\to v_{1,j})$ $(j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を部分グラフとして含む。また m,n が互いに素でない場合には，その最大公約数を $g\geq 2$ として長さ $\ell:=mn/g$ の「斜め方向の閉路」$C_k^d=(v_{k,0}\to v_{k-1,-1}\to v_{k-2,-2}\to\cdots\to v_{k-\ell+1,-\ell+1}\to v_{k,0})$ $(k\in\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})$ も含んでいる。定理 6 の条件 (W) が満たされていることから，箙 Q はこれらの縦・横・斜め 3 種類の閉路に付随する鏡映

$$s_i^{\triangle}=R_{C_i^{\triangle}},\quad \triangle=v,h,d$$

で不変であることが分かる。

以下では，簡単のため $m,n\geq 3$ の場合を考えよう[9]。各 $\triangle=v,h,d$ ごとに閉路 $C_i^{\triangle}$ と $C_j^{\triangle}$ は，$|i-j|=1$ のとき隣接し，$|i-j|\geq 2$ のとき互いに接続する辺を持たない。また $\triangle\neq\triangle'$ のとき，

[6] 例えば $Q_0=(1\to 2\to 3\to 4\to 1)$ の頂点 1 に 2 つ，頂点 3 に 5 つ「複製」を付け加えた箙からは $E_8^{(1)}$ 型の q-差分パンルヴェ方程式が得られる。

[7] このワイル群作用は，高次元の q-差分パンルヴェ系の幾何学的な起源の 1 つである。実際，増田 [8] はここから $D_r^{(1)}$ 型の高階 q-差分パンルヴェ方程式と呼ぶべき新しい系列を導出した。

[8] 大久保 [10] は離散 KdV 方程式に対応する無限グラフに周期条件を課すことで q-P_{VI} に対応する箙 Q を得た。その他のいくつかの q-差分パンルヴェ方程式についても同様の構成が為されている。

[9] m または n が 2 の場合は $A_1^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群が現れる。

任意の i,j に対し $C_i^{\triangle}$ と $C_j^{\triangle'}$ は交叉している。よって命題 11 と命題 13 から鏡映の満たす基本関係式

$$
\begin{aligned}
(s_i^{\triangle})^2 = (s_i^{\triangle} \circ s_{i+1}^{\triangle})^3 = \mathrm{id} \quad (\forall i; \forall \triangle)\\
s_i^{\triangle} \circ s_j^{\triangle} = s_j^{\triangle} \circ s_i^{\triangle} \quad (|i-j| \geq 2; \forall \triangle)\\
s_i^{\triangle} \circ s_j^{\triangle'} = s_j^{\triangle'} \circ s_i^{\triangle} \quad (\forall i,j; \triangle \neq \triangle')
\end{aligned}
$$

が得られる。各 $\triangle = v,h,d$ ごとに $\{s_i^{\triangle}\}$ は $A_r^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群 $W(A_r^{(1)})$ $(r = m-1, n-1, g-1)$ を生成し，それらの作用は互いに可換である。即ち Q を不変に保つ群 G_Q について

$$G_Q \supset W = \langle s_i^v, s_i^h, s_i^d \rangle \simeq W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)}) \times W(A_{g-1}^{(1)})$$

が分かる。

頂点 $v_{i,j}$ の y 変数を $y_{i,j}$ とおくと，双有理変換 $s_i^{\triangle}$ の具体形は命題 9 から次のようになる。

(9) s_i^v の作用： $s_i^v(y_{i,j}) = \dfrac{F_{i,j-1}}{y_{i,j-1}F_{i,j+1}}, \quad \dfrac{s_i^v(y_{i+1,j})}{y_{i+1,j}} = \dfrac{s_i^v(y_{i-1,j-1})}{y_{i-1,j-1}} = \dfrac{y_{i,j-1}F_{i,j}}{F_{i,j-1}}$

(10) s_j^h の作用： $s_j^h(y_{i,j}) = \dfrac{G_{i-1,j}}{y_{i-1,j}G_{i+1,j}}, \quad \dfrac{s_j^h(y_{i,j+1})}{y_{i,j+1}} = \dfrac{s_j^h(y_{i-1,j-1})}{y_{i-1,j-1}} = \dfrac{y_{i-1,j}G_{i,j}}{G_{i-1,j}}$

(11) s_k^d の作用： $s_k^d(y_{i+k,i}) = \dfrac{H_{i+k+1,i+1}}{y_{i+k+1,i+1}H_{i+k-1,i-1}}, \quad \dfrac{s_k^d(y_{i+k,i+1})}{y_{i+k,i+1}} = \dfrac{s_k^d(y_{i+k+1,i})}{y_{i+k+1,i}} = \dfrac{y_{i+k+1,i+1}H_{i+k,i}}{H_{i+k+1,i+1}}$

その他の記していない変数への作用は自明である。ここで y 変数の多項式 $F_{i,j}, G_{i,j}, H_{i,j}$ を

$$F_{i,j} = \sum_{a=1}^{n} \prod_{b=0}^{a-1} y_{i,j+b}, \quad G_{i,j} = \sum_{a=1}^{m} \prod_{b=0}^{a-1} y_{i+b,j}, \quad H_{i,j} = \sum_{a=1}^{\ell} \prod_{b=0}^{a-1} y_{i-b,j-b}$$

と定めた。定理としてまとめておこう。

定理 14. 双有理変換 (9)–(11) は $A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)} \times A_{g-1}^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群 W の生成元 s_i^v, s_j^h, s_k^d の有理函数体 $\mathbb{Q}(\{y_{i,j} \,|\, i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\})$ 上の実現を与える。

註. 上記の内 (9), (10) の部分は，山田 [15] および梶原–野海–山田 [7] による $W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)})$ の作用[10]と（適当な変数変換を介して）等価である。斜めの閉路に付随する鏡映 (11) の出現は，団代数を用いた 1 つの利点であろう。アフィン・ワイル群の平行移動部分からは q-P_{IV}, q-P_{V} およびその高階化が得られることは論文 [7] に述べられた通りである。また $m=2$ かつ n が 4 以上の偶数の場合，(11) も含んだ今回の構成法に基づいて，全く同じ箙 Q から q-ガルニエ系など種々の q-P_{VI} の高階化も得られることが大久保–鈴木 [11] に報告されている[11]。

[10] 離散戸田方程式や幾何学的 R 行列の文脈にも現れる可積分系の分野では馴染み深い対象である。尚，2 節末の註にも述べた通り，井上–Lam–Pylyavskyy [6] は Q において縦方向の周期条件のみを課したような円筒上の箙の団代数から，m 次対称群 $\mathfrak{S}_m \simeq W(A_{m-1})$ の作用を構成している。

[11] 離散ソリトン方程式の観点から，q-P_{VI} の高階化が Q から生ずること自体は [10] 以来予見されていた。

謝辞　本研究の共同研究者である大久保直人氏と増田哲氏，および団代数について様々な議論や有益な助言を頂いた井上玲氏，鈴木貴雄氏，寺嶋郁二氏に厚く感謝いたします。

参考文献

[1] Bershtein, M., Gavrylenko, P., Marshakov, A.: Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and their quantization. J. High Energy Phys. **2018**, 077 (33pp)

[2] Bucher, E.: Maximal green sequences for cluster algebras associated to the n-torus. arXiv:1412.3713

[3] Fomin, S., Zelevinsky, A.: Cluster algebras. IV. Coefficients. Compos. Math. **143**, 112–164 (2007)

[4] Goncharov, A., Shen, L.: Donaldson-Thomas transformations of moduli spaces of G-local systems. Adv. in Math. **327**, 225–348 (2018)

[5] Inoue, R., Ishibashi, T., Oya, H.: Cluster realization of Weyl groups and higher Teichmulüller theory. arXiv:1902.02716

[6] Inoue, R., Lam, T., Pylyavskyy, R.: On the cluster nature and quantization of geometric R-matrices. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **55**, 25–78 (2019)

[7] Kajiwara, K., Noumi, M., Yamada, Y.: Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry. Lett. Math. Phys. **60**, 211–219 (2002)

[8] Masuda, T.: A q-analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type D. Funkcial. Ekvac. **58**, 405–430 (2015)

[9] Okubo, N.: Discrete integrable systems and cluster algebras. RIMS Kokyuroku Bessatsu **B41**, 25–41 (2013)

[10] Okubo, N.: Bilinear equations and q-discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras. J. Phys. A **48**, 355201 (2015) (25pp)

[11] Okubo, N., Suzuki, T.: Generalized q-Painlevé VI systems of type $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$ arising from cluster algebra. arXiv:1810.03252

[12] Sakai, H.: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. Comm. Math. Phys. **220**, 165–229 (2001)

[13] Tsuda, T.: Tropical Weyl group action via point configurations and τ-functions of the q-Painlevé equations. Lett. Math. Phys. **77**, 21–30 (2006)

[14] Tsuda, T., Takenawa, T.: Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties. Adv. Math. **221**, 936–954 (2009)

[15] Yamada, Y.: A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation. Physics and Combinatorics 2000: Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop. World Scientific, 2001, pp. 305–319