

Klein群の函数論

志賀 啓成 (東京工業大学 理学院)*

1. Introduction

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \pm I$ の離散部分群を Klein 群 (Kleinian group) と呼ぶ. すなわち 2×2 の複素行列の (射影的同値類の) なす群で, その自然な位相に関して離散的なものである. これがわれわれが取り扱う対象である.

Klein 群には後で述べるようにいくつかの aspects があるが, 本講演では主にその函数論的 objects を興味の対象とする. 具体的には, Klein 群の不連続領域であり, その変形空間である. 不連続領域は Klein 群の作用に関して普遍的な平面領域もしくは Riemann 面の立場から考察する. 変形空間は Teichmüller 空間の理論の延長線上にある対象物としてその構造を考察する.

2. Klein 群

2.1. 導入

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の行列

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}; ad - bc = 1)$$

にメビウス変換

$$\gamma_A(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (z \in \mathbb{C})$$

を対応させることで, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ からメビウス変換全体のなす群 $\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ への同型が得られる. この対応で, 行列 $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ と変換 $\gamma_A \in \mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ は同一視される.

よく知られているように, $\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の自己等角写像全体 $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ そのものであり, またこれは 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ の向きを保つ自己等距離写像全体の空間 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と同一視される. つまり, これらより次の同一視が得られる.

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Möb}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3). \quad (1)$$

したがって, $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が Klein 群であるとき, G は上の同一視によってそれぞれの部分群とみなせ, いくつかの aspects からの観察が可能になる. 例えば $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の部分群とみなしたとき, G は $\mathbb{H}^3$ に真性不連続に作用していることが分かる. したがって, その商空間 $N_G := \mathbb{H}^3 / G$ には双曲計量が定義され, N_G は 3 次元双曲多様体 (もしくは orbifold) となる. つまり, 単なる 2×2 行列の部分群であったものと, 豊穡たる 3 次元多様体論とのつながりがついたことになる.

もう一つ別の見方を与えよう. 与えられた Klein 群 G に対し, $\mathbb{H}^3$ の 1 点 o の軌道 $Go = \{G(o) \mid G \in G\}$ を考える. G の $\mathbb{H}^3$ の作用は真性不連続であったから, G が無限群の時, Go は $\mathbb{H}^3$ の境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ にのみ集積点を持つ. この集積点全体を Klein 群

本研究は科研費 (課題番号:16H03933) の助成を受けたものである.

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山2-12-1, 東京工業大学 理学院 数学系
e-mail: shiga@math.titech.ac.jp

G の**極限集合** (*the limit set*) と呼び、 $\Lambda(G)$ と書く。 $\Lambda(G)$ は基点 $o \in \mathbb{H}^3$ の取り方には依らないことが分かる。 極限集合はその定義から $\widehat{\mathbb{C}}$ の閉集合であるが、時には有限集合になることがある。 しかし、その場合 Klein 群は初等的と呼ばれ、その構造はよく分かっている。 本講演ではそれは興味の対象とはせず、Klein 群は全て非初等的、すなわち極限集合は無限集合であると仮定する。

Klein 群 G の極限集合 $\Lambda(G)$ のリーマン球面における補集合を $\Omega(G)$ と書き、 G の**不連続領域** (*the region of discontinuity*) という。 不連続領域は定義より開集合であるが、空集合になる場合もある。 本講演で扱う Klein 群は、不連続領域は常に空でないと仮定する。 このとき、 $\Omega(G)$ の連結成分を G の**成分** (component) と呼び、さらに $G(\Omega_0) = \Omega_0$ となる G の成分 Ω_0 を G の**不変成分** (invariant component) という。

以上の仮定の下、与えられた Klein 群 G の極限集合 $\Lambda(G)$ と不連続領域 $\Omega(G)$ の基本的性質として次を挙げておく。

1. $\Lambda(G), \Omega(G)$ は共に G 不変である。 すなわち、 $G(\Omega(G)) = \Omega(G), G(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$ 。
2. $\Omega(G)$ は G が真性不連続に作用する最大の開集合である。
3. $\Lambda(G)$ は G 不変な最小の閉集合であり、 G の位数無限大の元の固定点全体の閉包である。
4. $\Lambda(G)$ は完全集合 (perfect set) であり、したがって非可算集合である。

2 番目の性質より、 $\Omega(G)$ の G による商空間 $\Omega(G)/G$ には自然に Riemann 面 (または orbifold) の構造が入る。 つまり今度は Riemann 面との繋がりが得られたわけである。

初めに挙げた 3 次元双曲多様体 N_G に関連して言えば、 $\Omega(G)/G$ は N_G の境界に現れている。 さらに、 $\Lambda(G)$ の $\mathbb{H}^3$ における双曲的凸核 (convex core) $\text{hull}(\Lambda(G))$ の境界に擬似的に現れるものでもある。 $\text{hull}(\Lambda(G))$ はその定義から G 不変な $\mathbb{H}^3$ の閉集合であるが、 $\text{hull}(\Lambda(G))/G$ の ε -近傍 ($\varepsilon > 0$) の双曲体積が有限であるとき、Klein 群 G は**幾何学的有限** (*geometrically finite*) であるという。 また、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、3 次元双曲多様体 N_G の単射半径が ε より大きいとき、 G (もしくは N_G) は**有限幾何** (*bounded geometry*) を持つと呼ばれる。

ここで、Klein 群と Riemann 面の関係についての最も基本的であり、かつ議論の出発点というべき事実を挙げる (cf. [29]) 。

Theorem 2.1 (Ahlfors の有限性定理). G を有限生成 Klein 群とする。 このとき、 $\Omega(G)/G$ は有限型 Riemann 面の有限和となる。

ただし Riemann 面が“有限型”であるとは、それが閉 Riemann 面から有限個の点を除いたときをいう。

2.2. 例

1) Fuchs 群

X を Riemann 面とする。 X が $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ またはトーラスのいずれとも等角同値でなければ、 X の普遍被覆面は上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ と等角同値になる。 したがって、その被覆変換群 Γ_X は $\text{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の離散部分群とみなせ、 $\mathbb{H}/\Gamma_X = X$ である。 群としては Γ_X は X の基本群と同型である。

一般に $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の離散部分群を Fuchs 群と呼ぶ。Fuchs 群は $\mathbb{H}$ に真性不連続に作用している。したがって G_X は Fuchs 群で、

$$\Omega(\Gamma_X) \supset \mathbb{H}, \quad \widehat{\mathbb{R}} \supset \Lambda(\Gamma_X)$$

となっている。Riemann 面 X が有限型であれば、 $\Omega(\Gamma_X) = \mathbb{H} \cup \mathbb{L}$, $\Lambda(\Gamma_X) = \widehat{\mathbb{R}}$ となる。ただし、 $\mathbb{L} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 0\}$ 。

2) Schottky 群

$g > 1$ なる自然数に対し、 $\mathbb{C}$ 上に $2g$ 個の互いに交わらない単純閉曲線 $C_1, C_2, \dots, C_{2g}$ をとる。さらに、ある $\gamma_j \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ($j = 1, 2, \dots, g$) が存在して、 C_{2j-1} の内部が γ_j によって C_{2j} の外部に写されていると仮定する。すると $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ によって生成される群 $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ は Klein 群となり、極限集合 $\Lambda(G)$ は Cantor 集合¹で、 $\Omega(G)/G$ は種数 g の閉 Riemann 面になることがわかる。また群としては G は loxodromic elements からなる rank g の自由群になる。このように構成された Klein 群を Schottky 群と呼ぶ。単純閉曲線 $C_1, C_2, \dots, C_{2g}$ が全て円であるとき、 G は古典的 Schottky 群と呼ばれる。

Riemann 面 X が閉 Riemann 面から互いに素な有限個の連続体を除いたものであるとき、その Fuchs 群 Γ_X は古典的 Schottky 群となる。また、上の構成法で対となっている単純閉曲線—例えば C_1, C_2 —が互いに接しているとき、 $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ を同様に取って Klein 群 G を構成することができる。この場合も G の極限集合 $\Lambda(G)$ は Cantor 集合になるが、 G は parabolic な元を含むものになる。このように構成された Klein 群を（カスプを持つ）拡張された Schottky 群と呼ぶ。

3) 擬 Fuchs 群, 境界群

有限型 Riemann 面 X の Fuchs 群 Γ_X に対して、ある擬等角写像 $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して、

$$\Gamma_X^\varphi := \varphi \Gamma_X \varphi^{-1}$$

が再び Klein 群になるとき、 Γ_X^φ を（第 1 種）擬 Fuchs 群と呼ぶ。このとき、 $\Omega(\Gamma_X^\varphi) = \varphi(\mathbb{H}) \cup \varphi(\mathbb{L})$, $\Lambda(\Gamma_X^\varphi) = \varphi(\widehat{\mathbb{R}})$ である。

$T(X)$ を X の Teichmüller 空間とする。Bers の埋め込みによって、 $T(X)$ は Γ_X から上のように得られた擬 Fuchs 群の空間の中の集合とみなせる ([6])。さらにこの意味での境界には、やはり Klein 群が現れる。その群はただ一つの単連結な不変成分を持つ Klein 群として特徴付けられている。このような Klein 群を**境界群**あるいは**b-群**という。幾何学的に有限な b-群は regular b-群と呼ばれる。これは stable curve、つまり Riemann 面 X 上の有限個の単純閉曲線をそれぞれ 1 点に退化させてできる nodes 付き Riemann 面に対応したものとして現れている。

3. 不連続領域の函数論的性質

3.1. 不変成分の解析

Klein 群 G の不連続領域 $\Omega(G)$ はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の開部分集合で、その連結成分の境界は極限集合 $\Lambda(G)$ の点からなっている。 $\Lambda(G)$ は G 不変な集合であるので、一般に複雑な形状をしている²。したがって、 G の成分は複雑な境界を持った平面領域となってい

¹ ここで Cantor 集合は一般の意味で、全不連結な完全集合を指す。

² 例えば多くの場合、極限集合の 2 次元測度は 0 だが、そのハウスドルフ次元は真に 1 より大きい。

る．ここではその函数論的性質を考える．これに関して，まず McMullen による次の結果を挙げる ([30]) ．

Proposition 3.1. Ω_0 を有限生成 Klein 群 G の不変成分とする．このとき以下は同値である．

1. Ω_0 は John domain である．
 2. G は幾何学的有限で，その放物的変換は Ω_0 内のある円板を不変にする．
- これは次のように改良される ([41]) ．

Theorem 3.1. Proposition 3.1 と同じ仮定の下で以下は同値である．

1. Ω_0 は John domain である．
2. Ω_0 は Hölder domain である．
3. G は幾何学的有限で，その放物的変換は Ω_0 内のある円板を不変にする．

特に Ω_0 が単連結ならば， Ω_0 が Hölder domain であることと quasi-disk であることは同値である．

ここでは John domain と Hölder domain のきちんとした定義は与えないが，両者ともある種の regularity を持った領域で，大雑把に言って John domain とは尖った境界を持たない領域であり，Hölder domain とは，単連結の場合には，リーマン写像が Hölder 連続になるような領域のことである．

一般に Hölder domain ならば John domain であるが，逆は成り立たない．したがって，確かに Theorem 3.1 は Proposition 3.1 の改良になっている．

3.2. Riemann mappings

G を有限生成 Klein 群で単連結な成分 Ω_0 を持つものとする．例えば，擬 Fuchs 群，b-群はその典型例である． Ω_0 は単連結であるから，単位円板 Δ からのリーマン写像 $\varphi: \Delta \rightarrow \Omega_0$ が存在する．このリーマン写像の函数論的性質と Klein 群 G との関係を考える．以下は主として論文 [41] の結果である．

単葉函数論 (Koebe の歪曲定理) から， Δ で単射正則関数 φ に対して，ある定数 $A > 0$ が存在して

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)^3} \quad (z \in \Delta) \quad (2)$$

が成り立つことが知られている (cf. [36])．これは sharp な評価であるが，一般論である．われわれの場合には， φ の像領域は Klein 群の作用に関する不変性という特殊性がある．よって，原理的には一般論による不等式 (2) よりも良い評価が得られると予想できる．実際，それは正しく，次が成り立つ．

Theorem 3.2. G を有限生成 Klein 群で，単連結不変成分 Ω_0 で $\partial\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ なるものを持つとする．また， $\varphi: \Delta \rightarrow \Omega_0$ を Ω_0 のリーマン写像とする．

1. G が regular b-群であるとき，定数 $A > 0$ が存在して， $\partial\Delta$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)|\log(1 - |z|)|^2} \quad (3)$$

が成り立つ．

2. G が有限幾何を持つとき、定数 $A > 0$, $\alpha > 0$ が存在して、 $\partial\Delta$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)|\log(1 - |z|)|^\alpha} \quad (4)$$

が成り立つ.

Remark 3.1. 有界単連結領域 Ω_0 が quasi-disk (=リーマン球面で定義された擬等角写像による単位円板の像) であれば、そのリーマン写像 $\varphi : \Delta \rightarrow \Omega_0$ に対して、ある定数 $A > 0$ と $\kappa \in (0, 1)$ が存在して、

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)^\kappa} \quad (5)$$

が成り立つことが知られている (cf. [36]). Regular b-群は Teichmüller 空間の境界に現れるため、その不変成分は quasi-disk ではない. 実際、(3) の評価は、一般の評価 (2) と quasi-disk の場合の評価 (5) の間にある.

Remark 3.2. Gehring-Pommerenke [13] は Δ 上の単葉関数 φ に対して、それが

$$\|S_\varphi\| \leq 2 \quad (6)$$

を満たすならば (3) が成立することを示している. ここで S_φ は φ の Schwartz 微分であり、

$$\|S_\varphi\| = 4 \sup_{z \in \Delta} (1 - |z|)^2 |S_\varphi|$$

である. 単連結領域 Ω_0 が有限生成擬 Fuchs 群の不変成分であるとき、そのリーマン写像 $\varphi : \Delta \rightarrow \Omega_0$ は Bers 埋め込みによる Teichmüller 空間の点を表わしている. その際、 $\|S_\varphi\| < 2$ であれば、そのような単葉関数 φ は Teichmüller 空間に含まれており、かつ $\|S_\varphi\| > 2$ を満たす φ で regular b-群に対応するものが存在することも知られている. したがって、Theorem 3.2 の最初の主張は、Gehring-Pommerenke の条件 (6) を満たさず、その主張が成り立つ単葉関数、しかも Fuchs 群の Teichmüller 空間から得られるものが (豊富に) 存在することを示している.

上の結果において (3) と (5) の growth order は大きな差がある. これは Remark 3.1 で見たように、regular b-群の不変成分が quasi-disk でないから一般論としても当然である. しかし、更に Klein 群が作用しているという特殊性から、(3) における $|\log(1 - |z|)|$ の冪である 2 が、ある意味で critical となっていることを示すことができる. すなわち、

Theorem 3.3. G を有限生成 Klein 群で、 $\partial\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ なる単連結不変成分 Ω_0 を持つとする. このとき、リーマン写像 $\varphi : \Delta \rightarrow \Omega_0$ について以下は同値である.

1. ある定数 $\alpha > 0$, $A > 0$ が存在して、単位円 $\partial\Delta$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)|\log(1 - |z|)|^{2+\alpha}} \quad (7)$$

が成り立つ.

2. G は擬 Fuchs 群である.

3. ある定数 $\kappa \in (0, 1)$, $A > 0$ が存在して、 $\partial\Delta$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)^\kappa} \quad (8)$$

が成り立つ.

3.3. 単連結でない不連続領域

Klein 群 G の成分が単連結でない場合、それは必然的に無限連結領域になる。 G が例 2.2 2) で与えた Schottky 群、拡張された Schottky 群のときはその典型で、この場合 $\Lambda(G)$ は対数容量正の閉集合である。したがって、 $\Omega(G)$ は（無限型）Riemann 面としてある意味で“大きな”理想境界をもっている。この理想境界の性質として次が得られる [40] ([38] も参照)。

Theorem 3.4. 1. G が Schottky 群であるとき、その不連続領域 $\Omega(G)$ の Martin 境界は *extreme points* のみからなり、Martin コンパクト化は $\widehat{\mathbb{C}}$ と同相になる。また、 $\Omega(G)$ で定義された $\widehat{\mathbb{C}}$ への擬等角写像はその Martin コンパクト化から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像に拡張される。

2. G がカスプを持つ拡張された Schottky 群であるとき、 $\Lambda(G)$ の *parabolic fixed point* には丁度二つの *extreme points* が対応する。

最近の論文 [43] では、上記の議論も base にして Cantor 集合の補集合として与えられる Riemann 面のある種の普遍性について論じている。

4. 変形空間の函数論的性質

4.1. Teichmüller 空間

Γ を商空間 $X := \mathbb{H}/\Gamma$ が種数 $g > 1$ のコンパクト Riemann 面になるような Fuchs 群とする。 Γ は上半平面 $\mathbb{H}$ と下半平面 $\mathbb{L}$ に作用している。 Γ の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ は Γ -同変な上半平面 $\mathbb{H}$ の自己擬等角写像 φ の Teichmüller 同値類全体 $[\varphi]_T$ として定義される。ここで二つの Γ -同変自己擬等角写像が Teichmüller 同値とはそれらが導く $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ への同型が共役であるときをいう。 $T(\Gamma)$ には次の Teichmüller 距離 d_T が定義される。

$$d_T([\varphi_1]_T, [\varphi_2]_T) := \inf_{\varphi_1, \varphi_2} \log K(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}).$$

ここで、 φ_1, φ_2 はその同値類を与える擬等角写像全体を動くものとする。また、 $K(f)$ は擬等角写像 f の maximal dilatation である。Teichmüller 距離 d_T は $T(\Gamma)$ において完備になっている。

擬等角写像 $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ が Γ -同変は、その Beltrami 係数 μ_φ をもちいて、

$$\mu_\varphi(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu_\varphi(z) \quad (\gamma \in \Gamma, \text{ a. e. in } \mathbb{H}) \quad (9)$$

なる関係式で特徴付けられる。このように与えられた μ_φ を下半平面 $\mathbb{L}$ で恒等的に 0 と延長して、 $\mathbb{C}$ 上の Beltrami 係数 $\hat{\mu}_\varphi$ を定義する。この $\hat{\mu}_\varphi$ は $\mathbb{C}$ で (9) を満たす。したがって、これを Beltrami 係数に持つ $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像 $w^{\hat{\mu}_\varphi}$ は再び Γ -同変となり、 Γ から擬 Fuchs 群への表現を与える。 $f[\varphi] := w^{\hat{\mu}_\varphi}|_{\mathbb{L}}$ は等角写像であり、その Schwartz 微分 $S_{f[\varphi]}$ は Γ に関する保形性

$$S_{f[\varphi]} \circ \gamma \cdot (\gamma')^2 = S_{f[\varphi]} \quad (\gamma \in \Gamma)$$

を $\mathbb{L}$ で持つ。これは $S_{f[\varphi]}$ が $\overline{X} = \mathbb{L}/\Gamma$ 上の正則 2 次微分であることを示している。この procedure は $T(\Gamma)$ で well-defined であることが知られている。つまり、 $T(\Gamma)$ からコンパクト Riemann 面 $\overline{X}$ の正則 2 次微分の空間 $Q(\overline{X}) \cong \mathbb{C}^{3g-3}$ への写像が得られたこと

になる．実際にはこの写像は埋め込みになっており，これによって $T(\Gamma)$ に自然な複素構造が入り， $T(\Gamma)$ は複素多様体になる．そこで $\mathbb{C}^{3g-3}$ の部分領域としての $T(\Gamma)$ の複素解析的な性質が問題となる．これについて述べる前に正則凸性について簡単に述べる．

複素多様体 M 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(M)$ とする． $\mathcal{O}(M)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ に対して， M が $\mathcal{O}$ -凸であるとは， M の任意のコンパクト集合 K に対して，その $\mathcal{O}$ -凸包

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}} := \{p \in M \mid |f(p)| \leq \max_{q \in K} |f(q)|, \forall f \in \mathcal{O}\}$$

が M でコンパクトになるときをいう．この定義より $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}(M)$ ならば， $\mathcal{O}_1$ -凸は $\mathcal{O}_2$ -凸を意味する．したがって，小さなクラスの正則凸性の方が強い性質になる． M がその上の正則関数全体 $\mathcal{O}(M)$ に対して $\mathcal{O}(M)$ -凸であるとき， M は正則凸と呼ばれ，有界正則関数全体の集合について凸であるとき， M は H^∞ -凸であるという．また， M が $\mathbb{C}^n$ の領域で， $\mathbb{C}^n$ の多項式全体の集合について凸であるとき， M は多項式凸であるという．

$T(\Gamma)$ の複素解析的性質について，以下のことが知られている ([6], [8], [22], [25], [39]).

Proposition 4.1. 上記の埋め込みによって *Teichmüller* 空間 $T(\Gamma)$ を $\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の集合とみなす．このとき

1. $T(\Gamma)$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ の有界単連結領域である．
2. $T(\Gamma)$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ で多項式凸である．
3. *Teichmüller* 距離 d_T は $T(\Gamma)$ の *Kobayashi* 距離と等しい．
4. $T(\Gamma)$ の *Carathéodory* 距離は完備で，一般に *Kobayashi* 距離より真に小さい．

4.2. Klein 群の変形空間

一般の有限生成 Klein 群 G に対して， G -同変な擬等角写像による変形全体を $D(G)$ と記して， G の変形空間 (deformation space) と呼ぶ． G から $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への準同型写像の言葉では，

$$D(G) = \{\theta \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) \mid \theta(\gamma) = w \circ \gamma \circ w^{-1}\} / \sim.$$

となる．ただし， w は擬等角写像で， $\theta_1 \sim \theta_2$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 共役を意味するものとする． $D(G)$ には，その生成系の表示から自然に複素構造が定義される ([21])．また， $D(G)$ には *Teichmüller* 距離 $d_T^{D(G)}$ が， $\theta_1, \theta_2 \in D(G)$ に対し，

$$d_T^{D(G)}(\theta_1, \theta_2) = \inf_{w_1, w_2} \log K(w_2 \circ w_1^{-1})$$

によって定義される．ここに w_1, w_2 はそれぞれ θ_1, θ_2 を与える擬等角写像を動くものとする．Standard な議論で， $d_T^{D(G)}$ は $D(G)$ で完備な距離であることがわかる．

この観点から，コンパクト Riemann 面を表す Fuchs 群の *Teichmüller* 空間は，上半平面での擬等角変形全体と捉えられる．これは Fuchs 群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への表現とみなせるが，擬等角変形のサポートを上半平面に限っているので，Fuchs 群の変形空間としてはいわば「半分だけ」の変形である．これを Klein 群の変形空間として，full にした変形

空間は quasi-Fuchsian space と呼ばれる． Γ を $\mathbb{H}$ の商空間がコンパクトになる Fuchs 群とする．このとき，quasi-Fuchsian space $\mathcal{QF}(\Gamma)(= D(\Gamma))$ は

$$\mathcal{QF}(\Gamma) = \{w \mid w \text{ は正規化された } \hat{\mathbb{C}} \text{ 上の } \Gamma\text{-同変な擬等角写像}\} / \sim$$

とも表現される．ここで， $w_1 \sim w_2$ は $w_1|_{\mathbb{R}} = w_2|_{\mathbb{R}}$ と思ってもよい． $\mathcal{QF}(\Gamma)$ は自然に G の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への表現空間 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ に埋め込まれる．

Bers の同時一意化定理により， $\mathcal{QF}(\Gamma)$ は Γ の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ の直積と双正則になる．したがって， $T(\Gamma)$ の解析的性質はある程度 $\mathcal{QF}(\Gamma)$ に伝播するが，さらに次のことが知られている ([31])．

Proposition 4.2 (McMullen). $\mathcal{QF}(\Gamma)$ は $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ で *disk convex* である．すなわち，単位円板の閉包 $\bar{\Delta}$ で連続で， Δ で正則である写像 $\Phi: \bar{\Delta} \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ が $\Phi(\partial\Delta) \subset \mathcal{QF}(\Gamma)$ であれば，常に $\Phi(\Delta) \subset \mathcal{QF}(\Gamma)$ となっている．

一般の Klein 群の変形空間で同様の考察を行う．以下は主として論文 [42] の結果である．

Theorem 4.1. G を成分が全て単連結であるような Klein 群とする． φ を単位円板 Δ 内のある AB-removable なコンパクト集合 K の外部 $\Delta_K := \Delta \setminus K$ から $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ への正則写像で，任意の $z \in \Delta_K$ に対して $\varphi(z)(\gamma)$ が *parabolic* になるのは $\gamma \in G$ が *parabolic* のときのみとする．このとき， $\varphi(\partial\Delta) \subset D(G)$ であれば， φ は Δ から $D(G)$ への正則写像に拡張できる．

上の定理で， Δ のコンパクト集合 K が AB-removable とは， Δ_K で定義された任意の有界正則関数が Δ まで正則に拡張されるときをいう．例えば，1 次元ハウスドルフ測度が 0 であるコンパクト集合は AB-removable である．

Theorem 4.1 の「成分が全て単連結であるような Klein 群」という条件を満たすものは，quasi-Fuchs 群以外にも b-群や蜘蛛の巣群 (web group) と呼ばれる Klein 群がある．一方で，この条件を満たさない Klein 群においては，次のように状況は全く異なる．

Theorem 4.2. G を有限生成 Klein 群で，単連結でない成分を持つものとする．このとき， $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ で定義され， $\varphi(z)$ がつねに群同型となるような $D(G)$ への正則写像 φ で， Δ まで正則に拡張できないものが存在する．

Theorem 4.2 は Theorem 4.1 の比較においても興味深い，そこに現れる現象を解析することで，変形空間 $D(G)$ の構造を調べることができる．

Theorem 4.3. G を有限生成 Klein 群とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $D(G)$ において Carathéodory 擬距離は距離である．
2. G の成分が全て単連結であれば，Carathéodory 距離は完備である．特に， $D(G)$ は H^∞ -凸である．
3. G が単連結でない成分を持てば， $D(G)$ は H^∞ -凸ではない．特に，Carathéodory 距離は完備ではない．

また， $D(G)$ の Kobayashi 距離については，

Theorem 4.4. 有限生成 *Klein* 群 G の変形空間 $D(G)$ において, *Kobayashi* 距離は *Teichmüller* 距離 $d_T^{D(G)}$ と等しい. したがって完備である. また, G が単連結でない成分を持てば, $D(G)$ において *Kobayashi* 距離と *Carathéodory* 距離と *Kobayashi* 距離は異なる.

参考文献

- [1] W. Abikoff, On Boundaries of Teichmüller spaces and kleinian groups III, *Acta Math.* 134 (1975), 212–237.
- [2] J. A. Anderson and B. Maskit, On the local connectivity of limit sets of Kleinian groups, *Complex Variables* 31 (1996), 177–183.
- [3] A. F. Beardon and B. Maskit, Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra, *Acta Math.* 132 (1974), 1–12.
- [4] J. Becker and C. Pommerenke, Hölder continuity of conformal mappings and non-quasiconformal Jordan curves, *Comment. Math. Helv.* 57 (1982), 221–225.
- [5] M. Beck, Y. Jiang, S. Mitra and H. Shiga, Extending holomorphic motions and monodromy, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **37** (2012), 53–67.
- [6] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups I. *Ann. of Math.* 91 (1970), 570–600.
- [7] C. J. Earle, On the Carathéodory metric in Teichmüller spaces, in “Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, 1973 Maryland Conference”, Princeton University Press Princeton, NJ, 99–103, 1974.
- [8] C. J. Earle, I. Kra and S. L. Krushkal’, Holomorphic motions and Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 927–948.
- [9] C. J. Earle and A. Marden, On holomorphic families of Riemann surfaces, *Contemporary Math.* **573** (2012), 67–97.
- [10] C. J. Earle and C. McMullen, Quasiconformal isotopies, in “Holomorphic Functions and Moduli I”, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 143–154, 1988.
- [11] B. D. A. Epstein and A. Marden, Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces, *London Math. Soc. Lecture Notes* 111 (1987), 114–253.
- [12] W. J. Floyd, Group completions and limit sets of Kleinian groups, *Invent. Math.* 57 (1980), 205–218.
- [13] F. W. Gehring and C. Pommerenke, On the Nehari univalence criterion and quasicircles, *Comment. Math. Helv.* 59 (1984), 226–242.
- [14] R. C. Gunning, Introduction to holomorphic functions of several variables, Volume I, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.
- [15] J. H. Hubbard, Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller, *Mem. Amer. Math. Soc.* **166** (1976), 1–137.
- [16] J. H. Hubbard, *Teichmüller Theory*–Vol. 1, Matrix Editions, 2006.
- [17] Y. Iwayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Tokyo 1992.
- [18] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, 1970.
- [19] I. Kra, On spaces of Kleinian groups, *Comment. Math. Helv.* **47** (1972), 53–69.
- [20] I. Kra, Deformation spaces, in ‘A crash course on Kleinian groups’, *Lecture Notes in Math.* **400** Springer-Verlag, Berlin, (1974), 48–70.
- [21] I. Kra and B. Maskit, The deformation space of a Kleinian group, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 1065–1102.
- [22] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, GTM 109, Springer-Verlag 1986.

- [23] R. Mañe, P. Sad, and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), 193–217.
- [24] A. Marden and H. Masur, A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks, *Math. Scand* **36** (1975), 211–228.
- [25] V. Markovic, Caratheodory’s Metrics on Teichmueller Spaces and L-shaped pillowcases, to appear in *Duke Journal of Mathematics*
- [26] B. Maskit, A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds, *Ann. of Math.* **65** (1965), 341–355.
- [27] B. Maskit, On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups: II, *Ann. of Math.* **91** (1970), 607–639.
- [28] B. Maskit, Self-maps on Kleinian groups, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 840–856.
- [29] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*, Clarendon Press Oxford 1998.
- [30] C. T. McMullen, Kleinian groups and John domains, *Topology* **37** (1998), 485–496.
- [31] C. T. McMullen, Complex earthquakes and Teichmüller theory, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), 283–320.
- [32] C. McMullen, Local connectivity, Kleinian groups, and geodesics on the blowup of the torus, *Invent. Math.* **146** (2001), 35–91.
- [33] Y. Minsky, On rigidity, limit set, and end invariants of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 539–588.
- [34] S. Mitra and H. Shiga, Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of Möbius groups, *Osaka J. Math.* **47** (2010), 1167–1187.
- [35] H. Miyachi, Moduli of continuity of Cannon-Thurston maps, in “Spaces of Kleinian groups”, *Lond. Math. Soc. Lec. Notes* **329** 121–149, 2005.
- [36] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag Berlin 1992.
- [37] R. Riley, Holomorphically parameterized families of subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$, *Mathematika* **32** (1985), 248–264.
- [38] S. Segawa, Martin boundaries of Denjoy domains and quasiconformal mappings, *J. Math. Kyoto Univ.*, **30** (1990), 297–316.
- [39] H. Shiga, On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **24** (1984), 441–452.
- [40] H. Shiga, On complex analytic properties of limit sets and Julia sets. *Kodai Math. J.*, **28** (2005), 368–381.
- [41] H. Shiga, Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups, *J. London Math. Soc.*, **90** (2009), 716–728.
- [42] H. Shiga, On analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 6627–6642.
- [43] H. Shiga, The quasiconformal equivalence of Riemann surfaces and the universal Schottky space, *arXiv:1807.01096v1*.
- [44] Z. Slodkowski, Holomorphic motions and polynomial hulls, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), 347–355.
- [45] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II.: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, *Acta Math.* **150** (1985), 243–260.
- [46] T. Yamaguchi, Word length and limit sets of Kleinian groups, *Kodai Math. J.* **28** (2005), 439–451.