

相対 Dolbeault コホモロジーと その佐藤超関数論への応用

諏訪 立雄 (北海道大学)*

1. 序

超関数の理論は佐藤幹夫により創始され([23], [24]),その後代数解析と呼ばれる分野形成の礎となった(佐藤幹夫 - 河合隆裕 - 柏原正樹 [25], 柏原正樹 - P. Schpaura [15] およびそれらの参考文献参照). 超関数は実解析関数の自然な拡張で L. Schwartz の distributions を含む. またその空間は線形微分方程式の解を尽くすという意味で十分大きく, 線形微分方程式論を始め諸課題で重要な役割を果たす(小松彦三郎 [17] 等).

1次元空間上の超関数は複素平面上実軸を除いた所で正則な関数で代表され, その関数が実軸を超えて正則関数として拡張される時, 零となるものとして定められる. 従ってこの場合は比較的簡明で具体的扱いも可能である. 高次元空間上の超関数は局所コホモロジーにより定義され, 理論は導来関手の言葉で展開される. これを具体化するため金子晃 [13], 森本光生 [22] は超関数の“直感的表示”を導入した. この方面の最近の研究として小森大地 - 梅田耕平 [20] がある.

一方, 講演者は Čech-de Rham コホモロジーとその上の積分論, 特にその相対版を用いて特性類の局所化理論を研究していた([5], [26], [27]). 同様にして Čech-Dolbeault コホモロジー理論も展開し種々の応用を試みていた([1], [28]). その後, ここで自然に現れる相対 Dolbeault コホモロジーは正則微分形式の層を係数とする A. Grothendieck, 佐藤幹夫の局所(相対)コホモロジーと規準的に同型になり, このことを用いると高次元の超関数が1次元の時と同様に扱えることを見出した([29], [30]). 即ち, **任意次元の超関数は自然なコサイクル条件を満たす C^∞ 微分形式の対で表せる**. この表示は超関数の扱いを著しく簡明にするばかりでなく, 超関数論に新しい見地を与え, 既存の方法では得難かった結果をももたらすことが分かってきた.

本講演では相対 Dolbeault コホモロジー論の概要を述べ, 応用として超関数, その基本的演算, 関連した局所双対性等の表示について話したい. 特筆すべき点の一つは, 我々の立場では超関数の積分は Čech-de Rham コホモロジーの積分論に由来し, C^∞ 級微分形式の普通の積分で与えられる. また実解析関数の超関数への埋め込み(さらに一般に正則関数の境界値射)はトポロジーと解析の接点であり, 我々の立場では相対 de Rham コホモロジーから相対 Dolbeault コホモロジーへの射影で表される. ここでは Thom 類の相対 de Rham コホモロジーでの表示が本質的な役割を果たす.

以上のアイディア, 方法には更なる可能性があり, 代数解析の諸課題, 例えば Laplace 超関数の理論([10], [11], [18]), 擬微分作用素の表象理論([2], [3])等にも応用される. 実際梅田 [31] は前者, 小森 [19] は後者につき, この立場から理論展開を行っている.

本講演は本多尚文, 伊澤 毅 との共同研究 [12] の一部を含む. 講演では基本的アイディアの説明に重点をおき, 詳細, さらなる展開については [12] を参照して頂きたい.

本研究は科研費(課題番号:16K05116)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 32A45, 32C35, 32C36, 46F15, 55N30, 58J15

キーワード: 相対 Dolbeault コホモロジー, 佐藤超関数, Thom 類

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学 大学院理学研究院

e-mail: tsuwa@sci.hokudai.ac.jp

2. 相対 Dolbeault コホモロジー

この節では相対 Dolbeault コホモロジーの概略, またそれが正則微分形式層を係数とする相対 (局所) コホモロジーと規準的に同型となることを述べる.

2.1. 層係数のコホモロジー

この部分節の参考文献として [6], [16] をあげておく. $\mathcal{S}$ を位相空間 X 上の加群の層とする. X の開集合 V に対し, V 上の切断のなす加群を $\mathcal{S}(V)$ で表す. さらに開部分集合 $V' \subset V$ に対し V' 上零になる切断のなす部分加群を $\mathcal{S}(V, V')$ で表す.

標準的コホモロジー理論としては脆弱 (flabby) 分解によるものを用いる. ここで層 $\mathcal{F}$ が脆弱であるとは X の任意の開集合 V に対し, 制限射 $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が全射となることを言う. X' を X の開集合とすると, 複体 $\mathcal{F}^\bullet(X, X')$ の q -次コホモロジーを $H^q(X, X'; \mathcal{F})$ と書く, ただし $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ は $\mathcal{F}$ の脆弱分解である. このコホモロジーは脆弱分解の取り方によらず規準的同型を除き一意に決まる. これは $S = X \setminus X'$ として $H_S^q(X; \mathcal{F})$ とも書く. このコホモロジーは最初の表現で $\mathcal{F}$ の (X, X') 上の**相対コホモロジー**と呼ばれ [24], 2 番目の表現で S に台を持つ $\mathcal{F}$ の X 上の**局所コホモロジー**と呼ばれる [8]. $H^q(X; \mathcal{F}) = H^q(X, \emptyset; \mathcal{F})$ とする.

2.2. Čech-Dolbeault コホモロジー

X を n 次元複素多様体とする. X 上の正則 p -形式, C^∞ 級 (p, q) -形式の層をそれぞれ $\mathcal{O}_X^{(p)}$, $\mathcal{E}_X^{(p,q)}$ で表す. $\mathcal{O}_X^{(0)}$ は単に $\mathcal{O}_X$ と書く. 添字 X は誤解の恐れがないときは略す. Dolbeault 複体 $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}, \bar{\partial})$ は $\mathcal{O}^{(p)}$ の細 (fine) 分解を与える:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(p,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(p,n)} \longrightarrow 0.$$

Dolbeault コホモロジー: X の (p, q) -型の Dolbeault コホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ は複体 $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(X), \bar{\partial})$ の q 次コホモロジーである. 次の同型がある (Dolbeault の定理):

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \simeq H^q(X; \mathcal{O}^{(p)}). \quad (1)$$

上の同型を与える射の中に規準的なものがある ([29], [30]).

Čech-Dolbeault コホモロジー: Čech-Dolbeault コホモロジーは複素多様体の任意の開被覆に対し定義できるが, ここでは二つの開集合からなる被覆の場合を考え, 一般の場合および詳細については [28], [29] を参照されたい.

$\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$ を X の開被覆とし, $V_{01} = V_0 \cap V_1$ とおく. ベクトル空間 $\mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V})$ を次により定義する:

$$\mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V}) = \mathcal{E}^{(p,q)}(V_0) \oplus \mathcal{E}^{(p,q)}(V_1) \oplus \mathcal{E}^{(p,q-1)}(V_{01}).$$

従って $\mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V})$ の元は三つ組 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_{01})$ で与えられる. 微分 $\bar{\partial}$ を次により定める:

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{E}^{(p,q+1)}(\mathcal{V}), \quad \bar{\partial}(\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) = (\bar{\partial}\xi_0, \bar{\partial}\xi_1, \xi_0 - \xi_1 - \bar{\partial}\xi_{01}).$$

そうすると $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ となることは容易に確かめられる.

定義 2.1 複体 $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V}), \bar{\partial})$ の q -次コホモロジーを $\mathcal{V}$ 上の (p, q) -型 Čech-Dolbeault コホモロジーとよび, $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V})$ で表す.

定理 2.2 $\omega \mapsto (\omega|_{V_0}, \omega|_{V_1}, 0)$ で与えられる包含 $\mathcal{E}^{(p,q)}(X) \hookrightarrow \mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V})$ は次の同型を導く：

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}).$$

上の同型射の逆は (ξ_0, ξ_1, ξ_{01}) の類に対し、 $\rho_0 \xi_0 + \rho_1 \xi_1 - \bar{\partial} \rho_0 \wedge \xi_{01}$ の類を対応させることにより得られる。ここで $\{\rho_0, \rho_1\}$ は $\mathcal{V}$ に従属した C^∞ 級の 1 の分解である。

2.3. 相対 Dolbeault コホモロジー

X を上の通りとし、 S を X の閉集合とする。 $V_0 = X \setminus S$, V_1 を S の X 内の近傍とし、 $X, X \setminus S$ の被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$, $\mathcal{V}' = \{V_0\}$ を考える。次のようにおく：

$$\mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{\xi \in \mathcal{E}^{(p,q)}(\mathcal{V}) \mid \xi_0 = 0\} = \mathcal{E}^{(p,q)}(V_1) \oplus \mathcal{E}^{(p,q-1)}(V_{01}).$$

そうすると $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\partial})$ は $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V}), \bar{\partial})$ の部分複体である。

定義 2.3 複体 $(\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\partial})$ の q -次 コホモロジーを $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ の (p, q) -型の**相対 Dolbeault コホモロジー**とよび、 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ で表す。

複体の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{p,\bullet}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}^{p,\bullet}(\mathcal{V}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}^{p,\bullet}(V_0) \longrightarrow 0, \quad (2)$$

ただし $j^*(\xi_1, \xi_{01}) = (0, \xi_1, \xi_{01})$, $i^*(\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) = \xi_0$, から次の完全列を得る：

$$\cdots \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q-1}(V_0) \xrightarrow{\delta} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \xrightarrow{j^*} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}) \xrightarrow{i^*} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V_0) \longrightarrow \cdots, \quad (3)$$

ただし δ は θ の類に対し $(0, -\theta)$ の類を対応させる。上の列と 定理 2.2 より次を得る：

命題 2.4 コホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ は V_1 の取り方によらず、標準的同型を除き一意的に定まる。

上により $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, X \setminus S)$ と書く。

命題 2.5 (切除性質) S を含む任意の開集合 V に対し、次の標準的同型が存在する：

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, X \setminus S) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V, V \setminus S).$$

相対 Dolbeault コホモロジー は $\mathcal{O}^{(p)}$ -係数の X の相対 (局所) コホモロジーと他の基本的性質も共有する。実際次が成り立つ ([29], [30])：

定理 2.6 (相対 Dolbeault 定理) 次の標準的な同型が存在する：

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, X \setminus S) \simeq H_S^q(X; \mathcal{O}^{(p)}).$$

注意 2.7 1. $0 \rightarrow \mathcal{O}^{(p)} \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ を $\mathcal{O}^{(p)}$ の脆弱分解とし、 $X' = X \setminus S$ とすると定義より

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet(X, X') \xrightarrow{j^*} \mathcal{F}^\bullet(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}^\bullet(X') \longrightarrow 0 \quad (4)$$

は完全である。ただし j^*, i^* は包含 $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, X')$, $i : X' \hookrightarrow X$ よりひき起こされる射。これが脆弱分解による相対コホモロジーの定義が理論的にはうまく行く理由である。実際にはこのコホモロジーを具体的に表したいのであるが、例えば細分

解 $0 \rightarrow \mathcal{O}^{(p)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p,\bullet)}$ を用いると (4) で i^* に対応する射が全射にならない. そこで $\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(X)$, $\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(X, X')$ を上のような $\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V})$, $\mathcal{E}^{(p,\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ で置き換えると (2) の完全列があり, 議論がうまく進む. つまり細層の場合 X' 上の切断 ξ_0 は必ずしも X に延ばせないが $S = X \setminus X'$ の近傍 V_1 とその上の切断 ξ_1 をとり, それらと共に “差” ξ_{01} も記録しておけばよい.

2. 上の相対 Dolbeault コホモロジーは導来圏の理論における “mapping-cone” に双対な複体のコホモロジーとも解釈することが出来, 定理 2.6 はこの立場からも証明出来る ([30]). 従ってこのコホモロジーは導来圏の理論にもうまくあてはまる.

3. Čech-Dolbeault コホモロジーでもカップ積, 積分等が定義できる. これらについては後に関連する場合に議論する.

3. 佐藤超関数

この節では佐藤超関数の定義を想起し, その相対 Dolbeault コホモロジーによる表現について超形式のそれと共に述べる.

3.1. 超関数と超形式

M を n 次元実解析多様体とし, X をその複素化とする. X 上の層 $\mathcal{S}$ に対し, 前層 $V \mapsto H_{M \cap V}^q(V, \mathcal{S})$ により定められる層を $\mathcal{H}_M^q(\mathcal{S})$ と書く. この層は M に台を持ち, M 上の層と考えられる. 次の基本定理を引用する ([14], [15], [25]):

定理 3.1 1. M は X の内で $\mathcal{O}_X$ に関し純 n -余次元的, 即ち $\mathcal{H}_M^i(\mathcal{O}_X) = 0, i \neq n$.

2. 層 $\mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)$ は脆弱.

M 上の**佐藤超関数の層**は次で与えられる ([15], [25]):

$$\mathcal{B}_M = \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbb{Z}_M} \text{or}_{M/X},$$

ここで $\text{or}_{M/X} = \mathcal{H}_M^n(\mathbb{Z}_X)$ は相対向き付け層, 即ち法束 $T_M X$ の向き付け層である. さらに一般に次を導入する:

定義 3.2 M 上の p -**超形式**の層を次により定める:

$$\mathcal{B}_M^{(p)} = \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X^{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_M} \text{or}_{M/X}.$$

これは超関数係数の p -形式の層と言われてきたものに他ならない. X は複素多様体なので常に向き付け可能であるが, 以下考える向きは必ずしも “普通のもの” とは限らない. ここで X の向きが普通であるとは $(z_1, \dots, z_n)$, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, を X 上の複素座標系とすると $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ が正の座標系となる向きを言う. M が向きづけ可能であれば, $T_M X$ もそうである. 従ってこの時, 任意の開集合 $U \subset M$ に対し, 次が成り立つ

$$\mathcal{B}_M^{(p)}(U) = H_U^n(V; \mathcal{O}_X^{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} H_U^n(V; \mathbb{Z}_X), \quad (5)$$

ここで V は X の開集合で U を閉集合として含むものである. 以下そのような V を U の X 内の**複素近傍**ということにする.

注意 3.3 上の (5) では M が X の中で $\mathcal{O}_X^{(p)}$ および $\mathbb{Z}_X$ に関し純 n -余次元的であることを用いた. 後者は Thom 同型より分かる (下の部分節 5.1 参照).

向きの決め方： M が向き付け可能のとき $X, T_M X, M$ の向きは次のように定める：

$$X \text{ の向き} = T_M X \text{ の向き} + M \text{ の向き}. \quad (6)$$

従って X と M の向きを指定すると, $T_M X$ の向きが定まり, 規準的同型 $or_{M/X} \simeq \mathbb{Z}_X$ さらに次の規準的同型が定まる：

$$\text{任意の開集合 } U \subset M \text{ に対し, } \mathcal{B}_M^{(p)} \simeq \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X^{(p)}), \quad \mathcal{B}_M^{(p)}(U) \simeq H_U^n(V, \mathcal{O}_X^{(p)}). \quad (7)$$

以下, コホモロジー $H_U^n(V; \mathbb{Z}_X)$ は $H_U^n(V; \mathbb{C}_X)$ に埋め込み, 後者は相対 de Rham コホモロジーで表され, 一方 $H_U^n(V; \mathcal{O}_X^{(p)})$ は相対 Dolbeault コホモロジーで表される.

3.2. 相対 Dolbeault コホモロジーによる超形式の表現

簡単のため $M = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n = X$ とする. さらに $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{C}^n$ は $(x_1, \dots, x_n)$ および $(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$ が正の座標系になるように向き付けておく. 従って $(y_1, \dots, y_n)$ が法方向の正の座標系となる. そうすると開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の p -超形式の空間は (7) で与えられる. 一方, 定理 2.6 により次の規準的同型が存在する：

$$\mathcal{B}^{(p)}(U) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U).$$

以下, この同型により $\mathcal{B}^{(p)}(U)$ と $H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U)$ を同一視し, 超形式およびそれらのいくつかの基本的演算の具体的表示を与える.

$V_0 = V \setminus U$, V_1 を U の V の中での近傍とし, $V, V \setminus U$ の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$, $\mathcal{V}' = \{V_0\}$ を考える. そうすると $H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U) = H_{\bar{\partial}}^{p,n}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ となり, p -超形式は対 (ξ_1, ξ_{01}) で表せる. ここで ξ_1 は V_1 上の (p, n) -形式 (自動的に $\bar{\partial}$ -閉), ξ_{01} は V_{01} 上の $(p, n-1)$ -形式で V_{01} 上 $\xi_1 = \bar{\partial}\xi_{01}$ となるものである. 次の完全列がある ((3) 参照)

$$H_{\bar{\partial}}^{p,n-1}(V) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,n-1}(V \setminus U) \xrightarrow{\delta} H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U) \xrightarrow{j^*} H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V).$$

Grauert の定理 [7] により, V として Stein 開集合をとることが出来, この時 $H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V) \simeq H^n(V, \mathcal{O}^{(p)}) = 0$ である. 従って δ は全射で $H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U)$ の任意の元は $(0, -\theta)$ という形のコサイクルで表される, ここで θ は $V \setminus U$ 上の $\bar{\partial}$ -閉な $(p, n-1)$ -形式である.

$n > 1$ の時, $H_{\bar{\partial}}^{p,n-1}(V) \simeq H^{n-1}(V, \mathcal{O}^{(p)}) = 0$ となり, δ は同型射である. $n = 1$ の時, 次の完全列がある

$$H_{\bar{\partial}}^{p,0}(V) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,0}(V \setminus U) \xrightarrow{\delta} H_{\bar{\partial}}^{p,1}(V, V \setminus U) \longrightarrow 0,$$

ここで $H_{\bar{\partial}}^{p,0}(V \setminus U) \simeq H^0(V \setminus U, \mathcal{O}^{(p)})$, $H_{\bar{\partial}}^{p,0}(V) \simeq H^0(V, \mathcal{O}^{(p)})$ なので, これは $p = 0$ の時, 1 変数超関数の佐藤による元表現を与える.

注意 3.4 多くの場合, 超形式は一つの微分形式で表されるが, 一般には対 (ξ_1, ξ_{01}) で表されることに留意しておくことが大切である.

4. 基本的演算

部分節 3.2 におけるように, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, V を $\mathbb{C}^n$ の中の U の複素近傍とする.

実解析関数による積： $\mathcal{A}(U)$ を U 上の実解析関数のなす空間とする．積

$$\mathcal{A}(U) \times H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U)$$

を $(f, [\xi]) \mapsto [(\tilde{f}\xi_1, \tilde{f}\xi_{01})]$ により定める．ここで $\tilde{f}$ は f の複素化を表す．

偏微分： 偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : H_{\bar{\partial}}^{0,n}(V, V \setminus U) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{0,n}(V, V \setminus U)$$

は次のように定められる． (ξ_1, ξ_{01}) を U 上の超関数の代表とし， $\xi_1 = f d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$ ， $\xi_{01} = \sum_{j=1}^n g_j d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$ と表す． $\frac{\partial}{\partial x_i}[\xi]$ は次のコサイクルで表される：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_i} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n, \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial z_i} d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n \right).$$

以上より微分作用素 $P(x, D)$ に対し， $P(x, D) : H_{\bar{\partial}}^{0,n}(V, V \setminus U) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{0,n}(V, V \setminus U)$ が定義できる．

微分： 微分 ([29] 参照，ここでは ∂ を d と書く)

$$d : H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{p+1,n}(V, V \setminus U) \quad (8)$$

は (ξ_1, ξ_{01}) の類に対し $(-1)^n(\partial\xi_1, -\partial\xi_{01})$ の類を対応させることにより定める．

なおこれは超形式の de Rham 複体

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{(1)} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{B}^{(n)} \longrightarrow 0.$$

を導く ([12], [29]).

超形式の積分： $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{C}^n$ の向きを部分節 3.2 のように定める． K を U 内のコンパクト集合とし， K に台を持つ U 上の p -超形式の空間 $\mathcal{B}_K^{(p)}(U)$ を次の完全列により定める：

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_K^{(p)}(U) \longrightarrow \mathcal{B}^{(p)}(U) \longrightarrow \mathcal{B}^{(p)}(U \setminus K) \longrightarrow 0.$$

そうすると次が成り立つ：

命題 4.1 K を含む X の開集合 V に対し 規準的同型がある：

$$\mathcal{B}_K^{(p)}(U) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus K).$$

V を U の複素近傍とする． $V_0 = V \setminus K$ ， V_1 を K の V 内の近傍とし，被覆 $\mathcal{V}_K = \{V_0, V_1\}$ ， $\mathcal{V}'_K = \{V_0\}$ を考える，そうすると $\mathcal{B}_K^{(p)}(U) = H_{\bar{\partial}}^{p,n}(\mathcal{V}_K, \mathcal{V}'_K)$ と表せる． R_1 を V_1 の実 $2n$ -次元部分多様体で C^∞ 境界 ∂R_1 を持つものとし $R_{01} = -\partial R_1$ とおく．積分

$$\int_U : \mathcal{B}_K^{(n)}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を次のように定める．超形式 $u \in \mathcal{B}_K^{(n)}(U) = H_{\bar{\partial}}^{(n)}(\mathcal{V}_K, \mathcal{V}'_K)$ が

$$\xi = (\xi_1, \xi_{01}) \in \mathcal{E}^{(n,n)}(\mathcal{V}_K, \mathcal{V}'_K) = \mathcal{E}^{(n,n)}(V_1) \oplus \mathcal{E}^{(n,n-1)}(V_{01})$$

で表されるとき

$$\int_U u = \int_{R_1} \xi_1 + \int_{R_{01}} \xi_{01}$$

とおく．これは代表 ξ の取り方によらない．

局所双対： K, V, V_1 を上の通りとすると、次の双一次形式がある：

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V, V \setminus K) \times H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}(V_1) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\partial}}^{n,n}(V, V \setminus K) \xrightarrow{f} \mathbb{C}.$$

最初の矢はカップ積でコサイクルレベルでは $((\xi_1, \xi_{01}), \eta) \mapsto (\xi_1 \wedge \eta, \xi_{01} \wedge \eta)$ で与えられる。次のように定める：

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}[K] = \lim_{V_1 \supset K} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V_1).$$

そうすると上の双一次形式は射

$$\bar{A} : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V, V \setminus K) \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}[K]^* = \lim_{V_1 \supset K} H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}(V_1)^* \quad (9)$$

をひき起す。これを $\bar{\partial}$ -Alexander 射という。以上では代数的双対を考えたが、双対同型を得るには位相的双対を考える必要がある。

Martineau の定理： 次の A. Martineau の定理 [21] ([9],[16] も参照) は我々の枠組では位相的双対を考えると $\bar{\partial}$ -Alexander 射が同型となる例で、従って双対性は上に述べたようなカップ積と積分の組み合わせで与えられる。

定理 4.2 K を $\mathbb{C}^n$ 内のコンパクト集合で $H^q(K, \mathcal{O}^{(p)}) = 0, q \geq 1$, を満たすものとする。このとき K を含む $\mathbb{C}^n$ 内の任意の開集合 V に対し、 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V, V \setminus K)$ および $H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}[K]$ はそれぞれ自然な FS および DFS 空間の構造を持ち、次が成り立つ：

$$\bar{A} : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(V, V \setminus K) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}[K]' = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathcal{O}^{(n-p)}[K]' & q = n. \end{cases}$$

ここで ' は強双対を表す。

この定理は原論文では $p = 0$ のときに局所コホモロジーを用いて述べられている。我々の枠組ではこの双対性は ($q = n$ の時) 次のように記述できる。 $V_0 = V \setminus K, V_1$ を K の V 内の近傍とし、 $V, V \setminus K$ の被覆 $\mathcal{V}_K = \{V_0, V_1\}, \mathcal{V}'_K = \{V_0\}$ を考える。 R_1, R_{01} を前の通りとすると、双対性は、 $\mathcal{E}^{(p,n)}(\mathcal{V}_K, \mathcal{V}'_K)$ のコサイクル (ξ_1, ξ_{01}) と K の近くの正則 $(n-p)$ -形式 η に対し次で与えられる：

$$\int_{R_1} \xi_1 \wedge \eta + \int_{R_{01}} \xi_{01} \wedge \eta. \quad (10)$$

なお仮定 $H^q(K, \mathcal{O}^{(p)}) = 0, q \geq 1$, は Grauert の定理により K が $\mathbb{R}^n$ の部分集合のとき常に満たされている。

$K \subset \mathbb{R}^n$ とし、 $\mathcal{A}^{(p)}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の実解析的 p -形式の層とすると

$$\mathcal{O}^{(p)}[K] = \lim_{V_1 \supset K} \mathcal{O}^{(p)}(V_1) \simeq \lim_{U_1 \supset K} \mathcal{A}^{(p)}(U_1) = \mathcal{A}^{(p)}[K],$$

ここで V_1 は K の $\mathbb{C}^n$ 内の近傍を亘り、 $U_1 = V_1 \cap \mathbb{R}^n$ である。

系 4.3 K を含む任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し、対

$$\mathcal{B}_K^{(p)}(U) \times \mathcal{A}^{(n-p)}[K] \longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{n,n}(V, V \setminus K) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

は位相的に非退化で

$$\mathcal{B}_K^{(p)}(U) \simeq \mathcal{A}^{(n-p)}[K]'.$$

デルタ関数： $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ の場合を考え、次のようにおく

$$\Phi(z) = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \quad \Phi_i(z) = (-1)^{i-1} z_i dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

$\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 上の 0-Bochner-Martinelli 形式を次により定める：

$$\beta_n^0 = C'_n \frac{\sum_{i=1}^n \overline{\Phi_i(z)}}{\|z\|^{2n}}, \quad C'_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n}.$$

そうすると $\beta_n = \beta_n^0 \wedge \Phi(z)$ は $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 上の Bochner-Martinelli 形式である.

定義 4.4 デルタ関数 $\delta(x)$ は $\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) = H_{\bar{\partial}}^{0,n}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ の超関数で次により表されるものとする：

$$(0, -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \beta_n^0).$$

系 4.3 の同型は今の場合 $\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathcal{A}_0^{(n)})'$ となる, ただし $\mathcal{A}_0^{(n)}$ は $\mathcal{A}^{(n)}$ の 0 における茎である.

命題 4.5 デルタ関数 $\delta(x)$ は $\mathcal{A}_0^{(n)}$ の芽の代表 $\omega = h(x)\Phi(x)$ に値 $h(0)$ を対応させる超関数である.

デルタ形式： 再度 $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ の場合を考える.

定義 4.6 デルタ形式 $\delta^{(n)}(x)$ は $\mathcal{B}_{\{0\}}^{(n)}(\mathbb{R}^n) = H_{\bar{\partial}}^{n,n}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ の元で

$$(0, -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \beta_n)$$

で代表されるものである.

系 4.3 の同型は今の場合 $\mathcal{B}_{\{0\}}^{(n)}(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathcal{A}_0^{(n)})'$ となる.

命題 4.7 デルタ形式 $\delta^{(n)}(x)$ は $\mathcal{A}_0^{(n)}$ の芽の代表 $h(x)$ に値 $h(0)$ を対応させる超形式.

注意 4.8 $\mathbb{C}^n$ を普通の座標系 $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ が正となるように向き付けると, デルタ関数 $\delta(x)$ は $(0, -\beta_n^0)$ で表される. またデルタ形式 $\delta^{(n)}(x)$ は $(0, -\beta_n)$ で表される. ちなみにこれは階数 n の自明な複素ベクトル束の Thom 類の表現と同じである ([26, Ch.III, Remark 4.6]).

5. 実解析関数の超関数への埋め込み

M を実解析多様体とし X をその複素化とする. M 上の実解析関数の層 $\mathcal{A}$ の超関数の層 $\mathcal{B}$ への埋め込みは定数 1 の超関数としての規準的見なし方により決まる (下記部分節 5.3). 規準的同一視 $\mathbb{Z}_M = \text{or}_{M/X} \otimes \text{or}_{M/X}$ と規準的射 $\text{or}_{M/X} = \mathcal{H}_M^n(\mathbb{Z}_X) \rightarrow \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)$ より, 次の規準的射を得る：

$$\mathbb{Z}_M = \text{or}_{M/X} \otimes \text{or}_{M/X} \longrightarrow \mathcal{B}_M = \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_{M/X}.$$

これは単射 (注意 3.3) で 1 の像が対応する超関数である. これを我々の枠組で具体的に求める. このために $\text{or}_{M/X}$ の複素化 $\text{or}_{M/X}^c = \mathcal{H}_M^n(\mathbb{C}_X)$ を考えると上の射は次のように拡張される

$$\mathbb{C}_M = \text{or}_{M/X}^c \otimes \text{or}_{M/X} \longrightarrow \mathcal{B}_M. \quad (11)$$

以下, 射 $\mathcal{H}_M^n(\mathbb{C}_X) \rightarrow \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)$ を相対 de Rham コホモロジーと 相対 Dolbeault コホモロジーを用いて調べる.

5.1. 相対 de Rham コホモロジー

Čech-de Rham コホモロジー理論の詳細は [4], [26] を, また相対 de Rham コホモロジーおよびこれにおける Thom 類については [26] を参照されたい.

X を m 次元 C^∞ 多様体とし, $\mathcal{E}_X^{(q)}$ を X 上の C^∞ q -形式の層とする. de Rham 複体 $(\mathcal{E}^{(\bullet)}, d)$ は定数層 $\mathbb{C} = \mathbb{C}_X$ の細分解を与える:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(m)} \longrightarrow 0.$$

q -次 de Rham コホモロジー $H_d^q(X)$ は $(\mathcal{E}^{(\bullet)}(X), d)$ の q -次コホモロジーである. 次の同型がある (de Rham の定理): $H_d^q(X) \simeq H^q(X; \mathbb{C}_X)$. なおこのような同型の内, 規準的なものがある ([27], [30]).

Čech-de Rham コホモロジーは Čech-Dolbeault コホモロジーの定義において, Dolbeault 複体を de Rham 複体で置き換えて得られる. 微分 $\bar{\partial}$ は D で置き換えられる. 相対 de Rham コホモロジーも同様に定義される. 即ち, S を X の閉集合とすると, $V_0 = X \setminus S$, V_1 を S の X 内の近傍とし, 前のように X , $X \setminus S$ の被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$, $\mathcal{V}' = \{V_0\}$ を考える. 次のようにおく:

$$\mathcal{E}^{(q)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \mathcal{E}^{(q)}(V_1) \oplus \mathcal{E}^{(q-1)}(V_{01}).$$

また微分 $D: \mathcal{E}^{(q)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \rightarrow \mathcal{E}^{(q+1)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を $D(\sigma_1, \sigma_{01}) = (d\sigma_1, \sigma_1 - d\sigma_{01})$ により定める.

定義 5.1 複体 $(\mathcal{E}^{(\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), D)$ の q -次コホモロジーを $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ の q -次 **相対 de Rham コホモロジー** とよび, $H_D^q(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ で表す.

Dolbeault のときと同様に, このコホモロジーは V_1 の取り方によらず, 同型を除いて一意に決まるので, $H_D^q(X, X \setminus S)$ と表す. 次の規準的同型がある (相対 de Rham 定理 [27], [30]):

$$H_D^q(X, X \setminus S) \simeq H^q(X, X \setminus S; \mathbb{C}_X). \quad (12)$$

注意 5.2 層係数コホモロジー $H^q(X; \mathbb{Z}_X)$ は規準的に X の $\mathbb{Z}$ -係数有限鎖の特異ホモロジー $H^q(X; \mathbb{Z})$ と同型で, $H^q(X, X \setminus S; \mathbb{Z}_X)$ は相対特異コホモロジー $H^q(X, X \setminus S; \mathbb{Z})$ と同型である.

Thom 類: $\pi: E \rightarrow M$ を C^∞ 多様体 M 上の階数 l の向き付けられた C^∞ 実ベクトル束とし, M を零切断の像と同一視する. このとき次の Thom 同型がある:

$$T: H^{q-l}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^q(E, E \setminus M; \mathbb{Z}).$$

E の **Thom 類** $\Psi_E \in H^l(E, E \setminus M; \mathbb{Z})$ は $[1] \in H^0(M; \mathbb{Z})$ の T による像である.

$\mathbb{C}$ -係数の Thom 同型は de Rham コホモロジーと 相対 de Rham コホモロジーを用いて表せる:

$$T: H_d^{q-l}(M) \xrightarrow{\sim} H_D^q(E, E \setminus M).$$

この逆は π に沿ったファイバー積分で与えられる [26, Ch.II, Theorem 5.3]. $W_0 = E \setminus M$, $W_1 = E$ とし, $E, E \setminus M$ の被覆 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$, $\mathcal{W}' = \{W_0\}$ を考えると $H_D^q(E, E \setminus M) = H_D^q(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ と表せる.

命題 5.3 自明な束 $E = \mathbb{R}^l \times M$ に対しては, Ψ_E は $\mathcal{E}^{(l)}(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ のコサイクル $(0, -\psi_l)$ で表せる.

上で ψ_l は $\mathbb{R}^l$ 上の“角形式”で次により与えられる:

$$\psi_l = C_l \frac{\sum_{i=1}^l \Phi_i(x)}{\|x\|^l}, \quad \Phi_i(x) = (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_l. \quad (13)$$

ここで C_l は $l = 2k$ の時 $\frac{(k-1)!}{2\pi^k}$, $l = 2k+1$ の時 $\frac{(2k)!}{2^l \pi^k k!}$ により与えられる定数である. 重要な点はこれが閉形式で, $\mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ 内の普通に向き付けられた $(l-1)$ -次元球面 S^{l-1} に対し, $\int_{S^{l-1}} \psi_l = 1$ となることである.

X を m 次元 C^∞ 多様体, $M \subset X$ を n 次元閉部分多様体とし, $l = m - n$ とする. $T_M X$ を M の X における法束とすると, 管状近傍定理と切除性質により, 次の同型がある:

$$H^q(X, X \setminus M; \mathbb{Z}) \simeq H^q(T_M X, T_M X \setminus M; \mathbb{Z}).$$

X と M は向き付けられているとする. そうすると $T_M X$ は束として向き付け可能であるが, 向きは (6) に準じて付ける. このとき M の X 内の Thom 類 $\Psi_M \in H^l(X, X \setminus M; \mathbb{Z})$ を $q = l$ のときの上の同型により $T_M X$ の Thom 類に対応する類として定める. また次の Thom 同型がある:

$$T : H^{q-l}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus M; \mathbb{Z}). \quad (14)$$

これから M は X の中で $\mathbb{Z}_X$ に関し純 l -余次元的であることが分かる. さらに Thom 類 Ψ_M は M の各点で規準的生成元を与える $or_{M/X} \simeq \mathbb{Z}_M$ の大域的切断と考えられる. 相対向き付け層の複素化 $or_{M/X}^c$ と M の任意の開集合 U に対し, (12) より次を得る:

$$or_{M/X}^c(U) \simeq H_U^l(V; \mathbb{C}_X) \simeq H_D^l(V, V \setminus U), \quad (15)$$

ここで V は X の開集合で U を閉集合として含むものである.

5.2. 相対 de Rham コホモロジーから相対 Dolbeault コホモロジーへの射影

X を n 次元複素多様体とする. 射 $\rho^q : \mathcal{E}^{(q)} \rightarrow \mathcal{E}^{(0,q)}$ を q -形式 ω にその $(0, q)$ -成分 $\omega^{(0,q)}$ を対応させることにより定める. そうすると $\rho^{q+1}(d\omega) = \bar{\partial}(\rho^q \omega)$ が成り立ち, 次の複体の射を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(0)} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^{(1)} & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^{(q)} & \xrightarrow{d} & \cdots \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow \rho^0 & & \downarrow \rho^1 & & & & \downarrow \rho^q & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{(0,0)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{(0,1)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{(0,q)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \end{array}$$

従って X の任意の開集合 X' に対し射 $\rho^q : H_D^q(X, X') \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{0,q}(X, X')$ が定まり, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} H_D^q(X, X') & \xrightarrow{\rho^q} & H_{\bar{\partial}}^{0,q}(X, X') \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^q(X, X'; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota} & H^q(X, X'; \mathcal{O}). \end{array} \quad (16)$$

5.3. 超関数としての 1

M, X をこの節の初めと同様とする. まず 1 の射 (11) による像を求める. 簡単のため M は向き付け可能とする. U を M 内の座標近傍とし, V を U の X 内の複素近傍と

する. X, M の向きを, V, U に部分節 3.2 の向きが与えられるように決める. そうすると次の規準的同型を得る:

$$\mathbb{C}_M(U) \simeq \mathcal{H}_M^n(\mathbb{C}_X)(U) \simeq H_U^n(V; \mathbb{C}), \quad \mathcal{B}_M(U) = \mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)(U) \simeq H_U^n(V; \mathcal{O}).$$

最初の同型は対 (V, U) に対する $\mathbb{C}$ -係数 Thom 同型 (14) である. U は連結とし, $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ を部分節 3.2 のような被覆とする. そうすると次の可換図式を得る ((15), (16)):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} = H^0(U; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & H_U^n(V; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota} & H_U^n(V; \mathcal{O}) \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ & & H_D^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}') & \xrightarrow{\rho^n} & H_{\bar{\partial}}^{0,n}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'). \end{array}$$

T による 1 の像が U の Thom 類 Ψ_U であることを想起し, これを $H_D^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ で表す $\mathcal{E}^{(n)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ のコサイクルを (ψ_1, ψ_{01}) とすると, 以上の考察から 1 の局所表示を得る:

定理 5.4 超関数として 1 は $\mathcal{E}^{(0,n)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ のコサイクル $(\psi_1^{(0,n)}, \psi_{01}^{(0,n-1)})$ で表せる.

命題 5.3 より, (ψ_1, ψ_{01}) として特に $(0, -\psi_n)$ を選ぶことが出来る. ここで ψ_n は $\mathbb{R}_y^n$ の角形式 (13). この時 1 は $(0, -\psi_n^{(0,n-1)})$ で表され, $\psi_n^{(0,n-1)}$ は次により与えられる:

$$\psi_n^{(0,n-1)} = (\sqrt{-1})^n C_n \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i (z_i - \bar{z}_i) d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n}{\|z - \bar{z}\|^n}.$$

特に $n = 1$ の時,

$$\psi_1^{(0,0)} = \frac{1}{2} \frac{y}{|y|}.$$

実解析的形式の超形式への埋め込み: U, V を上の通りとする. 射

$$\mathcal{A}^{(p)}(U) \longrightarrow \mathcal{B}^{(p)}(U) = H_{\bar{\partial}}^{p,n}(V, V \setminus U)$$

を $\omega(x) \mapsto [(\psi_1^{(0,n)} \wedge \omega(z), \psi_{01}^{(0,n-1)} \wedge \omega(z))]$ により定める. ただし (ψ_1, ψ_{01}) は上のように Thom 類の代表で, $\omega(z)$ は $\omega(x)$ の複素化である. ここで $\omega(z)$ が正則なので $(\psi_1^{(0,n)} \wedge \omega, \psi_{01}^{(0,n-1)} \wedge \omega)$ はコサイクルになる. 上の射は $\mathcal{A}^{(\bullet)}, \mathcal{B}^{(\bullet)}$ の微分 d と可換な層の単射 $\iota^{(p)}: \mathcal{A}^{(p)} \rightarrow \mathcal{B}^{(p)}$ を引き起こす. 特に $p = 0$ の時, 実解析関数の超関数への埋め込み $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ を得る. Distributions の超関数への埋め込みについては [12] 参照.

参考文献

- [1] M. Abate, F. Bracci, T. Suwa and F. Tovena, *Localization of Atiyah classes*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 547-578.
- [2] T. Aoki, *Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. I, II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), 227-250, **36** (1986), 143-165.
- [3] T. Aoki, N. Honda and S. Yamazaki, *Foundation of symbol theory for analytic pseudodifferential operators, I*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), 1715-1801.
- [4] R. Bott and L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math. **82**, Springer, 1982.
- [5] J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, *Vector Fields on Singular Varieties*, Lecture Notes in Math. **1987**, Springer, 2009.
- [6] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

- [7] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. **68** (1958), 460-472.
- [8] R. Hartshorne, *Local Cohomology, A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961*, Lecture Notes in Math. **41**, Springer, 1967.
- [9] R. Harvey, *Hyperfunctions and partial differential equations*, Thesis, Stanford Univ., 1966.
- [10] N. Honda and K. Umeta, *On the Sheaf of Laplace Hyperfunctions with Holomorphic Parameters*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **19** (2012), 1-28.
- [11] N. Honda and K. Umeta, *Laplace hyperfunctions in several variables*, J. Math. Soc. Japan, **70** (2018), 111-139.
- [12] N. Honda, T. Izawa and T. Suwa, *Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology*, arXiv: 1807.01831.
- [13] 金子 晃, 新版 超函数入門, 東京大学出版会, 1996.
- [14] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄, 代数解析学の基礎, 紀伊國屋数学叢書 **18**, 紀伊國屋書店, 1980.
- [15] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Math. **292**, Springer, 1990.
- [16] 小松彦三郎, 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大数学教室 セミナリー・ノート **22**, Tokyo, 1968.
- [17] H. Komatsu, *On the regularity of hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **20** (1973), 107-119.
- [18] H. Komatsu, *Laplace transforms of hyperfunctions: a new foundation of the Heaviside calculus*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **34** (1987), 805-820.
- [19] D. Komori, *Analytic pseudodifferential operators and Čech-Dolbeault cohomology*, in preparation.
- [20] D. Komori and K. Umeta, *Intuitive representation of local cohomology groups*, in preparation.
- [21] A. Martineau, *Les hyperfonctions de M. Sato*, Sémin. N. Bourbaki, 1960-1961, n° 214.
- [22] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [23] 佐藤幹夫, 超函数の理論, 数学 **10** (1958), 1-27.
- [24] M. Sato, *Theory of hyperfunctions I, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** (1959), 139-193, 387-436.
- [25] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Proceedings Katata 1971 (H. Komatsu, ed.), Lecture Notes in Math. **287**, Springer, 1973, 265-529.
- [26] T. Suwa, *Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1998.
- [27] T. Suwa, *Residue Theoretical Approach to Intersection Theory*, Contemp. Math. **459**, Amer. Math. Soc., 207-261, 2008.
- [28] T. Suwa, *Čech-Dolbeault cohomology and the $\bar{\partial}$ -Thom class*, Singularities – Niigata-Toyama 2007, Adv. Studies in Pure Math. **56**, Math. Soc. Japan, 321-340, 2009.
- [29] T. Suwa, *Relative Dolbeault cohomology*, in preparation.
- [30] T. Suwa, *Representation of relative sheaf cohomology*, in preparation. A summary of it is published under the title “Relative cohomology for the sections of a complex of fine sheaves” in the Proc. Kinoshita Algebraic Geometry Symposium 2017, 113-128, 2018.
- [31] K. Umeta, *Laplace hyperfunctions from the viewpoint of Čech-Dolbeault cohomology*, in preparation.