日本数学会・2018年度秋季総合分科会(於: 岡山大学)・企画特別講演
msjmeeting-2018sep-00f004

ラプラシアンの第1固有値の最大化と極小曲面

納谷　信　(名古屋大学)*

序論

本講演の目的は, 閉曲面上のラプラシアンの第1固有値をリーマン計量を動かして最大化する問題における近年の進展について解説することである. 本題に入る前に, このような問題意識の出発点となったHerschの不等式[8]とそのYang-Yauによる高種数の場合への一般化[18]について述べることから始めよう.

M を向き付け可能な閉曲面(境界のないコンパクト曲面)とし, M 上のリーマン計量 ds^2 に対して

$$\Lambda(ds^2) := \lambda_1(ds^2) \cdot \mathrm{Area}(ds^2)$$

とおく. ここで, $\lambda_1(ds^2)$ は ds^2 に関するラプラシアン

$$\Delta_{ds^2} \colon f \in C^\infty(M) \mapsto \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \in C^\infty(M)$$

の第1固有値(最小の正固有値)であり, $\mathrm{Area}(ds^2)$ は (M, ds^2) の面積である.

例 1. $(M, ds^2) = (S^2, ds^2_{S^2})$ のとき, $\lambda_1(ds^2_{S^2}) = 2$, $\mathrm{Area}(ds^2_{S^2}) = 4\pi$ であるから $\Lambda(ds^2_{S^2}) = 8\pi$ である. ここで, $ds^2_{S^2}$ は S^2 上のガウス曲率 $\equiv 1$ の計量(標準計量)である.

次に述べるHerschの不等式は, S^2 上のすべての計量の中での標準計量 $ds^2_{S^2}$ が汎関数 Λ を最大化することを主張する.

定理 1 (Hersch [8])**.** 球面 S^2 上の任意の計量 ds^2 に対して $\Lambda(ds^2) \leq 8\pi$ が成り立つ.

Herschの不等式はYang-Yauによって任意種数の場合に一般化された.

定理 2 (Yang-Yau [18])**.** 次数 d の有理型関数 $(M, ds^2) \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ が存在するならば

$$\Lambda(ds^2) \leq 8\pi \cdot d \tag{1}$$

が成り立つ. とくに, M が種数 γ のとき, M 上の任意の計量 ds^2 に対して

$$\Lambda(ds^2) \leq 8\pi \cdot \left[\frac{\gamma + 3}{2} \right] \tag{2}$$

が成り立つ.

以上の二定理から自然に派生する問題として次がある:

(i) 種数 γ を固定したとき, Yang-Yauの不等式(2)はシャープか?

本研究は科研費(課題番号:17H02840)の助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 58J50, 53A10
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学　大学院多元数理科学研究科
e-mail: nayatani@math.nagoya-u.ac.jp

(ii) $\Lambda(\gamma) := \sup_{ds^2} \Lambda(ds^2)$ を実現する計量は存在するか? また, 定数倍を除いて一意的か?

(iii) Λ 最大化計量はどのような幾何学的特徴を持つか?

種数 0 の場合は問題 (i), (ii) の解答はいずれも肯定的である.

なお, 高次元の場合, $\lambda_1(ds^2) \cdot \mathrm{Vol}(ds^2)^{2/n}$ がスケール不変になるので, これを最大化する問題を考えることは自然であるが, この量の上限は必ず無限大になることが知られている. この量を無限大に発散させる計量の列は, 浦川 [17] によって S^3 上に初めて構成された.

次節以降で上記の問題に関する 90 年代から最近までの進展について述べていく. まず, 第 1 節では種数 1 の場合を扱う. この場合には最大化問題は Nadirashvili [11] によって完全に解決されている. また, 同じ論文で最大化問題の解と球面内の極小曲面との間の美しい関係が見出されているので, 併せて紹介する. 第 2 節では種数 2 の場合に, ある計量 (ただし有限個の錐状特異点をもつ) が最大化問題の解を与えるであろうという JLNNP 予想 [9] を紹介する. この予想は, 最近になって庄田敏宏氏 (佐賀大) と講演者によって肯定的に解決されたので, 証明の概要を第 4 節で述べる. 第 3 節では, JLNNP 予想と極小曲面のモース指数を計算する問題との間の関係について述べる. 第 5 節では, Kähler 多様体の場合に関連した問題が定式化されているので, それを紹介し, 曲面の場合には共形類を固定して汎関数 Λ を最大化する問題と同等であることをみる. 最後に補遺において, Hersch の不等式の証明を与え, Yang-Yau の不等式についても証明の概要を述べておく.

1. 種数 1 の場合–Nadirashvili の結果–

種数 1, すなわちトーラス T^2 の場合を考えよう. T^2 上の平坦計量の範囲では, 汎関数 Λ の上限は等辺トーラス $\mathbb{R}^2/\Gamma$ の平坦計量によって実現されることが確かめられる. ここで, Γ は $(1,0)$ と $(1/2, \sqrt{3}/2)$ によって生成される格子である. (この計量について, $\lambda_1 = 16\pi^2/3$, Area $= \sqrt{3}/2$, $\Lambda = 8\pi^2/\sqrt{3}$ である.) Berger [2] は次の問題を提起した: T^2 上のすべての計量の中で, 等辺トーラスの平坦計量が汎関数 Λ の上限 $\Lambda(1)$ を実現するだろうか? すなわち, $\Lambda(1) = 8\pi^2/\sqrt{3}$ だろうか? 1996 年になって Nadirashvili [11] は Berger の問題を肯定的に解決し, 同時に種数が 1 の場合に前節で述べた問題のすべてに対して解答を与えた.

定理 3 (Nadirashvili [11])**.** $\gamma = 1$ のとき, $\Lambda(1) = 8\pi^2/\sqrt{3}$ で, この値は等辺トーラスの平坦計量の定数倍, そしてそれらによってのみ実現される.

この定理により, 種数 1 の場合は Yang-Yau の不等式 (2) はシャープでないことが分かる. 一方, 汎関数 Λ の上限 $\Lambda(1)$ を実現する計量が定数倍を除いて一意的に存在する. このように, 種数 1 の場合, 問題 (i), (ii) の解答はそれぞれ否定的, 肯定的である. 次の例は問題 (iii) に対して一定の解答を与えている.

例 2. 等辺トーラス $\mathbb{R}^2/\Gamma$ の平坦計量を ds^2 とする. 写像 $\phi\colon \mathbb{R}^2/\Gamma \to S^5$ (S^5 は $\mathbb{C}^3$ 内の単位球面) を

$$\phi((x,y) \bmod \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(e^{\frac{4\pi i y}{\sqrt{3}}}, e^{2\pi i\left(x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right)}, e^{2\pi i\left(x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)} \right)$$

によって定めると, これは極小埋め込みであり, $\phi^* ds^2_{S^5} = \frac{8\pi^2}{3} ds^2$ となる. (すなわち, 埋め込みは相似的である.)

次の定理は, 例 2 の状況が種数に依らずに成立することを主張する.

定理 4 (Nadirashvili [11]). M を種数 γ の閉曲面とし, ds^2 を $\Lambda(\gamma)$ を実現する M 上の計量とする. このとき, ds^2 のラプラシアンの第 1 固有関数 $f_1, \cdots, f_d$ を適当にとると, $f = (f_1, \cdots, f_d)\colon M \to \mathbb{R}^d$ は S^{d-1} への相似的極小はめ込みを与える.

種数 γ が一般の場合の $\Lambda(\gamma)$ を実現する計量の存在についても, かなりのことが分かってきている.

定理 5 (Petrides [16]). M を種数 γ の閉曲面とする. このとき, もし $\Lambda(\gamma) > \Lambda(\gamma - 1)$ ならば $\Lambda(\gamma)$ を実現する計量 (ただし, 有限個の錐状特異点を持ち得る) が存在する.

2. 種数 2 の場合–JLNNP 予想–

$\gamma = 2$ の場合, 不等式 (2) は $\Lambda(ds^2) \leq 16\pi$ になる. 等号成立の候補として, 論文 [9] の著者達は次の計量に注目した.

$$B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4 + 1)\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

は種数 2 の閉リーマン面であり, **Bolza 曲面**とよばれる. B 上の有理型関数 $g_B\colon (z, w) \in B \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ は次数 2 であり, 6 点 $(0,0), (\infty,\infty), (\pm 1, 0), (\pm i, 0)$ を分岐点にもつ. $ds^2_{S^2}$ を $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ 上の標準計量として $ds^2_B = {g_B}^* ds^2_{S^2}$ とおくと, ds^2_B は g_B の分岐点において, そしてそこでのみ退化する特異リーマン計量である. g_B は 2 重の分岐被覆であるので $\mathrm{Area}(ds^2_B) = 8\pi$ である.

予想 1 ([9]). $\lambda_1(ds^2_B) = 2$, したがって $\Lambda(ds^2) = 16\pi$ が成立する.

この予想–JLNNP 予想とよぶ–は, 2017 年になって庄田敏宏氏 (佐賀大) と講演者によって肯定的に解決された. 証明の概要を第 4 節で述べることにする.

3. 極小曲面のモース指数との関連

$\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面やトーラス T^3 内のコンパクト極小曲面のモース指数 (不安定指数) を評価・計算する問題は, Fischer-Colbrie [6] の研究に始まり, その後多くの人々によって研究されてきた. この節では, JLNNP 予想がこの問題と密接に関わることを述べる.

M を $\mathbb{R}^3$ 内の向き付け可能な極小曲面とし, はめ込み写像を $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ とする. $f_t\colon M \to \mathbb{R}^3$ $(|t| < \varepsilon)$ を f の変分でコンパクト台 Ω をもつものとするとき, M の第 1 変分は零であり, M の面積の第 2 変分は

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Area}(\Omega, {f_t}^* ds^2_{\mathbb{R}^3})|_{t=0} = \int_\Omega (|du|^2 + 2Ku^2)\, da$$

によって与えられる. ここで, $V = \frac{d}{dt} f_t|_{t=0}$ を変分ベクトル場, N を M の単位法ベクトル場として, $u = \langle V, N \rangle$ である. また, K, da はぞれぞれ M のガウス曲率, 面積要素を表す. 極小曲面 M は, 任意のコンパクト台をもつ変分に対して第 2 変分が非負であるときに, **安定**であるといわれる. M の完備性を仮定すると, 安定になるのは平面の場合に限る [3, 7]. つまり, 平面以外の完備極小曲面はすべて不安定である. そこで M の**モース**

指数 $\mathrm{Ind}(M)$ を以下のように定義する．まず，コンパクト領域 $\Omega \subset M$ に対して $\mathrm{Ind}(\Omega)$ を

$$\forall u \in V \setminus \{0\}, \quad \int_\Omega (|du|^2 + 2Ku^2)\, da < 0$$

をみたす線形部分空間 $V \subset C_0^\infty(\Omega)$ の最大次元 (有限) として定義する．そして

$$\mathrm{Ind}(M) = \sup_\Omega \mathrm{Ind}(\Omega)$$

と定める．ここで，sup はすべてのコンパクト領域 $\Omega \subset M$ にわたってとる．こうして定義された $\mathrm{Ind}(M)$ は無限大になり得るが，Fischer-Colbrie [6] によって，

$$\mathrm{Ind}(M) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_M (-K)\, da < \infty$$

が証明されている．したがって，$\mathrm{Ind}(M)$ を定量的に調べる場合は $\displaystyle\int_M (-K)\, da < \infty$ と仮定してよい．そしてこの場合，M はコンパクトリーマン面 $\overline{M}$ から有限個の点を除いたもの (有限型リーマン面) にリーマン面として同型であり，M のガウス写像 $g\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ は $\overline{M}$ 上の有理型関数 $\overline{g}\colon \overline{M} \to \overline{\mathbb{C}}$ に拡張することが知られている．(Osserman の古典的結果．cf. [15].)

一般に，コンパクトリーマン面 M 上の非定値な有理型関数 $g\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ に対して，先に特異計量 ds_B^2 を構成したのと同様に g によって $\overline{\mathbb{C}} = S^2$ の標準計量を引き戻すことにより，M 上の特異計量 ds_g^2 が得られる．ds_g^2 のラプラシアンを Δ_g で表し，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}(g) = -\Delta_g \text{ の 2 未満の固有値の個数 (重複度を込めて数える)}, \\
&\mathrm{Nul}(g) = -\Delta_g \text{ の固有値 2 の重複度}
\end{aligned}$$

と定める．

命題 6 ([6, 4, 10])**.** $\mathbb{R}^3$ 内の全曲率有限な完備極小曲面 M のモース指数 $\mathrm{Ind}(M)$ は $\mathrm{Ind}(\overline{g})$ ($\overline{g}$ は拡張されたガウス写像) に等しい．また，$\mathrm{Nul}(\overline{g})$ は M 上の有界ヤコビ場全体のなすベクトル空間の次元に等しい．

$-\Delta_g$ は必ず定数関数を 0 固有関数とするので $\mathrm{Ind}(g) \geq 1$ である．JLNNP 予想は，$g = g_B$ の場合にその次に小さい固有値が 2 であることを主張しており，したがって $\mathrm{Ind}(g_B) = 1$ と同値である．

4. JLNNP 予想の証明の概要

第 2 節で述べたように JLNNP 予想は庄田敏宏氏 (佐賀大) と講演者によって肯定的に解決された．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 7 (納谷-庄田 [14])**.** B を Bolza 曲面，g_B を B の各点 (z, w) に第 1 座標 z を対応させる B 上の有理型関数，ds_B^2 を g_B によって $\overline{\mathbb{C}} = S^2$ の標準計量を引き戻すことによって得られる M 上の特異計量とする．このとき，$\lambda_1(ds_B^2) = 2$ が成り立つ．言い換えれば，$\mathrm{Ind}(g_B) = 1$ が成り立つ．

この定理から，不等式 $\Lambda(ds^2) \leq 16\pi$ は非特異計量のクラスにおいてもシャープであることが従うが，等号の成立は不明である．

以下, この定理の証明の概要を述べる. まず, Bolza曲面の変形

$$B_\theta = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4 + 2\cos 2\theta \cdot z^2 + 1)\} \cup \{(\infty,\infty)\} \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

を考える. $B_{\pi/4} = B$ である.

$$s_1(z,w) = (\bar{z}, \bar{w}), \quad s_2(z,w) = (-\bar{z}, i\bar{w}), \quad s_3(z,w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^3)$$

で定義される写像 s_1, s_2, s_3 は B_θ の反正則な対合を与え,

$$s_1 \circ s_3 = s_3 \circ s_1, \quad s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2, \quad s_2 \circ s_1 = j \circ s_1 \circ s_2$$

をみたす. ここで, $j\colon B_\theta \to B_\theta$ は超楕円的対合 $j(z,w) = (z,-w)$ である.

有理型関数 $g_\theta\colon (z,w) \in B_\theta \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ による $\overline{\mathbb{C}} = S^2$ の標準計量の引き戻しを ds_θ^2, 対応するラプラシアンを Δ_θ で表す. ds_θ^2 は g_θ の6個の分岐点 $(0,0)$, $(e^{\pm i(\pi/2 \pm \theta)}, 0)$, (∞,∞) において退化する特異計量であり, 次のように記述される. $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ 上の3個の大円弧 C_1, C_2, C_3 を

$$C_1 = \{t \mid t \geq 0\} \cup \{\infty\},\ C_2 = \{e^{i(\pi/2+t)} \mid -\theta \leq t \leq \theta\},\ C_2 = \{e^{-i(\pi/2+t)} \mid -\theta \leq t \leq \theta\}$$

と定めると, (B_θ, ds_θ^2) は $(S^2, ds_{S^2}^2)$ の二つのコピーを C_1, C_2, C_3 に沿って貼り合わせたものである. $\theta \to 0$ とすると, C_1 は変化せず, 一方, C_2, C_3 はそれぞれ点 i, $-i$ につぶれていく. $(S^2, ds_{S^2}^2)$ の二つのコピーを, $\pm i$ における接着を無視して, C_1 に沿ってのみ貼り合わせて得られる計量を ds_0^2 とし, 対応するラプラシアンを Δ_0 で表す. 固有値は余次元2の集合を感知しないと考えられるので, $\theta \to 0$ のとき $-\Delta_\theta$ の固有値は $-\Delta_0$ の固有値に収束すると期待される. 実際, 次が成立する.

補題 8. *$-\Delta_\theta$ の第 k 固有値 $\lambda_k(ds_\theta^2)$ は θ について連続であり, $\theta \to 0$ のとき $-\Delta_0$ の第 k 固有値 $\lambda_k(ds_0^2)$ に収束する.*

この補題は [13, Theorem 1] の証明と同様の議論によって証明される.

$-\Delta_0$ の固有値は [12] において明示的に計算されており, とくに

$$\lambda_k(ds_0^2) = 0\ (k=0), \quad 3/4\ (k=1,2), \quad 2\ (k=3,4,5), \quad > 2\ (k \geq 6)$$

である. 一方, 任意の非定値な有理型関数 g に対して, $-\Delta_g$ の固有値2の重複度は3以上である. 何故なら, S^2 の固有値2の3個の独立な固有関数の g による引き戻しが $-\Delta_g$ の固有値2の固有関数となるからである. これらの事実と補題8から, θ が十分0に近いとき

$$\lambda_k(ds_\theta^2) = 0\ (k=0), \quad < 2\ (k=1,2), \quad 2\ (k=3,4,5), \quad > 2\ (k \geq 6)$$

となることが分かる.

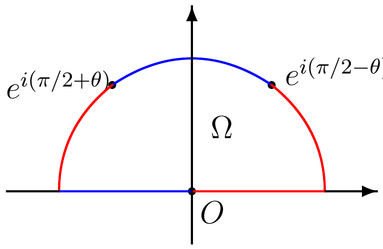
次に, θ を $\pi/4$ まで増加させて, $\lambda_k(ds_\theta^2)$ の挙動, とくにレベル2を横切るか否かを調べることにする. そのためにまず, $-\Delta_\theta$ の固有値2の重複度の変化を調べる.

再び, $g\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ を一般の非定値な有理型関数 (M はコンパクトリーマン面) とし, Δ_g を M 上の特異計量 $ds_g^2 = g^* ds_{S^2}^2$ のラプラシアンとする. $-\Delta_g$ の固有値2の固有関数で, S^2 の固有値2の固有関数の g による引き戻しの形に表せないものは, **余分固有関数**

(extra eigenfunction) とよばれる. そして, 江尻-小谷 [4] と Montiel-Ros[10] により, 余分固有関数は g をガウス写像に持ちエンドがすべて平面的であるような完備極小曲面の台関数 (はめ込み写像と単位法ベクトル場の内積) として得られることが示されている. そのような極小曲面の Weierstrass 表現公式による記述を経由して, 余分固有関数を求める問題は代数的な問題に帰着する.

$g = g_\theta$ の場合にこの問題を実際に解くことにより, $0 < \theta < \pi/4$ の範囲では, 余分固有関数は $\theta = \theta_1 = 0.65\cdots$ のときに限って丁度 2 次元分存在することが分かる. また, 基底をなす余分固有関数 u_1, u_2 を明示的に書き下すこともできる.

θ が 0 に近いところから増加して θ_1 に到達すると, そこで $-\Delta_\theta$ の固有値 2 の重複度が 2 だけ増加する. θ が θ_1 を通過するときの $-\Delta_\theta$ の固有値の挙動は, B_θ の対称性 (三つの反正則な対合 s_1, s_2, s_3 と超楕円的対合 j の存在) を用いて調べることができる. 実際, 余分固有関数 u_1 を下図の上半平面と単位円板の共通部分 Ω に制限して Ω 上の関数と考えると, u_1 が境界の赤い部分で Neumann 条件をみたし, 青い部分で Dirichlet 条件をみたすことが分かる.



θ が大きくなるとき, 単位円周上の赤い部分は短くなり, 青い部分は長くなるので, 関数空間

$$W_0^{1,2}(\Omega_\theta) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \partial\Omega \text{ の赤い部分で } u = 0\}$$

は増大する. したがって, Ω における上記の境界条件下でのラプラシアンの固有値 $\lambda_k(\Omega_\theta)$ は, その変分法的特徴付け

$$\lambda_k(\Omega_\theta) = \inf_{U \subset W_0^{1,2}(\Omega_\theta),\, \dim U = k+1} \ \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \int_\Omega |du|^2_{S^2}\, da_{S^2} \Big/ \int_\Omega u^2\, da_{S^2}$$

により増加することが分かる. u_2 についても同様であり, 以上のことから, θ が増加して θ_1 を通過するとき, $-\Delta_\theta$ の二つの固有値が増加してレベル 2 を横切ることが導かれる. すなわち, 2 より小さい固有値は二つ減って 0 のみになり, $\theta_1 \le \theta \le \pi/4$ においては 2 が $-\Delta_\theta$ の第 1 固有値を与える. とくに, $\theta = \pi/4$ とすると, この主張は JLNNP 予想に他ならない.

5. Kähler 多様体の場合

(M, ω) を複素次元 n のコンパクト Kähler 多様体とする. $\Omega = [\omega]$ を ω を含む de Rham コホモロジー類とし, $\mathcal{K}_\Omega$ で Ω に含まれる Kähler 計量の全体を表す:

$$\mathcal{K}_\Omega = \{\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi \mid \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0\}.$$

そして, $\mathcal{K}_\Omega$ において, $\Lambda(\Omega) = \sup_{\omega \in \mathcal{K}_\Omega} \lambda_1(\omega)$ を実現する計量を求める問題を考える. この問題について, 次の結果が知られている.

定理 9 (Apostolov-Jakobson-Kokarev [1])**.** $\omega \in \mathcal{K}_\Omega$ を $\Lambda(\Omega)$ を実現する Kähler 計量とする．このとき, ω のラプラシアンの第 1 固有関数 $f_1, \cdots, f_d$ を適当にとると,

$$\sum_{j=1}^{d} \left(\lambda_1(\omega^2 {f_j}^2 - 2\lambda_1(\omega)|df_j|^2 + 4|\partial\overline{\partial} f_j|^2\right) = 0 \tag{3}$$

がみたされる．

$n = 1$ の場合,

$$\mathcal{K}_\Omega = \{\lambda\omega \mid \lambda \in C^\infty(M),\, \lambda > 0,\, \mathrm{Area}(\lambda\omega) = \mathrm{Area}(\omega)\}$$

であるので, 上記の問題は, 閉曲面上の計量の共形類を固定して, そこで面積一定の仮定の下でラプラシアンの第 1 固有値を最大化する問題となる．$(\Delta_\omega f)\omega = -2i\partial\overline{\partial} f$, $|\omega|^2 = 1$ であるので, (3) の左辺 $(*)$ は

$$(*) = \sum_{j=1}^{d} \left(2\lambda_1(\omega)^2 {f_j}^2 - 2\lambda_1(\omega)|df_j|^2\right) = -\lambda_1(\omega)\Delta_\omega \left(\sum_{j=1}^{d} {f_j}^2\right)$$

と書き換えられる．したがって, 次を得る．

系 10 (El Soufi-Ilias [5])**.** $n = 1$ とし, $\omega \in \mathcal{K}_\Omega$ を $\Lambda(\Omega)$ を実現する計量とする．このとき, ω のラプラシアンの第 1 固有関数 $f_1, \cdots, f_d$ を適当にとると, $f = (f_1, \cdots, f_d)\colon M \to \mathbb{R}^d$ は S^{d-1} へのエネルギー密度が一定 $(|df|^2 \equiv \lambda_1(\omega))$ な調和写像を与える．

この系は定理 4 の共形版に他ならない．

閉曲面上の計量の共形類において, 汎関数 Λ の上限を実現する計量 (ただし, 有限個の錐状特異点を持ち得る) の存在は Petrides [16] によって証明されている．なお, 系 10 は, 次元が 3 以上のコンパクト多様体上の計量の共形類に対しても成立するが, そこにおいて汎関数 Λ の上限を実現する計量の存在は知られていないようである．

補遺

Hersch の不等式 (定理 1) を証明し, 最後に Yang-Yau の不等式 (定理 2) の証明の概要を述べる．

まず, $\lambda_1(ds^2)$ の変分法的特徴付け

$$\lambda_1(ds^2) = \inf_{\int_{S^2} u\, da = 0} \int_{S^2} |du|^2_{ds^2}\, da \Big/ \int_{S^2} u^2\, da \tag{4}$$

を思い出しておく．ここで, da は ds^2 の面積要素である．$(S^2, ds^2_{S^2})$ を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面とみなし, $\mathbb{R}^3$ の座標 x^1, x^2, x^3 の S^2 への制限を同じ記号で表す．S^2 上の任意の計量 ds^2 に対して共形的微分同相 $\phi\colon (S^2, ds^2) \to (S^2, ds^2_{S^2})$ が存在する．$u = x^i \circ \phi$ に対して (4) の右辺の Rayleigh 商を計算する．ディリクレ積分の共形不変性と部分積分により, 分子は

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} |d(x^i \circ \phi)|_{ds^2}\, da &= \int_{S^2} |dx^i|_{ds^2_{S^2}}\, da_{S^2} \\
&= -\int_{S^2} x^i \Delta_{ds^2_{S^2}} x^i\, da_{S^2} \\
&= 2\int_{S^2} (x^i)^2\, da_{S^2} = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

と計算される．三番目の等号で x^i が $\Delta_{ds^2_{S^2}}$ の第 1 固有関数であることを使った．一方，分母については，

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{S^2} (x^i \circ \phi)^2 \, da = \mathrm{Area}(ds^2)$$

であるから，少なくとも一つの i に対して

$$\int_{S^2} (x^i \circ \phi)^2 \, da \geq \frac{\mathrm{Area}(ds^2)}{3}$$

となる．したがって，あと $\int_{S^2} x^i \circ \phi \, da = 0$ が示されれば

$$\lambda_1(ds^2) \leq \int_{S^2} |d(x^i \circ \phi)|_{ds^2} \, da \Big/ \int_{S^2} (x^i \circ \phi)^2 \, da \leq \frac{8\pi}{\mathrm{Area}(ds^2)}$$

となって Hersch の不等式の証明が完結するが，これは次の主張から従う．

主張． ϕ を，すべての i に対して $\int_{S^2} x^i \circ \phi \, da = 0$ となるように選ぶことができる．

主張の証明． $p \in B^3$ に対して $A_p \colon \overline{B^3} \to \overline{B^3}$ を $A_p(0) = p$ をみたす双曲的メビウス変換とし，写像 $F \colon B^3 \to B^3$ を $F(p) = \int_{S^2} A_p \circ \phi \, da$ によって定義する．F は $\partial B^3 = S^2$ まで連続的に拡張して $F|_{S^2} = \mathrm{id}$ となるので，F は全射であり，したがって $F(p) = 0$ となる $p \in B^3$ が存在する．　(主張の証明終わり)

以上で Hersch の不等式の証明が終わる．

次に，Yang-Yau の不等式の証明の概要を述べる．g を M 上の次数 d の有理型関数とし，g の分岐値でない点 $p \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して

$$(ds^2_*)_p = \sum_{q \in g^{-1}(p)} (g^{-1})^*(ds^2)_q$$

と定める．ここで，あとの g^{-1} は局所的な逆写像である．ds^2_* は $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ 上の L^1 計量であるので，Hersch の議論が適用できて不等式 (1) を得る．不等式 (2) は，任意の種数 γ の閉リーマン面上に，必ず次数 $\left[\frac{\gamma+3}{2}\right]$ 以下の有理型関数が存在するという事実による．

参考文献

[1] V. Apostolov, D. Jakobson and G. Kokarev, *An extremal eigenvalue problem in Kähler geometry*, J. Geom. Phys. **91** (2015), 108–116.

[2] M. Berger, *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemmaniennes*, Compositio Math. **26** (1973), 129–149.

[3] M. do Carmo and C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1** (1979), 903–906.

[4] N. Ejiri and M. Kotani, *Index and flat ends of minimal surfaces*, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 1, 37–48.

[5] A. El Soufi and S. Ilias, *Extremal metrics for the first eigenvalue of the Laplacian in a conformal class*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1611–1618.

[6] D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 1, 121–132.

[7] D. Fischer-Colbrie and R. M. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in* 3*-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 199–211.

[8] J. Hersch, *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogénes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A-B **270** (1970), A1645–A1648.

[9] D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, N. Nigam, I. Polterovich, *How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two?*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 63, 3967–3985.

[10] S. Montiel and A. Ros, Schrödinger operators associated to a holomorphic map, in: Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1990), Lecture Notes in Math. **1481**, Springer, Berlin, 1991, pp. 147–174.

[11] N. Nadirashvili, *Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 5, 877–897.

[12] S. Nayatani, *Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space*, Osaka J. Math. **27** (1990), no. 2, 453–464.

[13] S. Nayatani, *Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 4, 511–537.

[14] S. Nayatani and T. Shoda, *Metircs on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian*, preprint, arXiv:1704.06384 [math.DG].

[15] R. Osserman, A survey of minimal surfaces. Second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[16] R. Petrides, *Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces*, Geom. Funct. Anal. **24** (2014), 1336–1376.

[17] H. Urakawa, *On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 209–226.

[18] P. C. Yang and S. T. Yau, *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **7** (1980), no. 1, 55–63.