日本数学会・2018年度秋季総合分科会(於: 岡山大学)・企画特別講演
msjmeeting-2018sep-00f006

Inhomogeneous Dirichlet-boundary value problem for one dimensional nonlinear Schrödinger equations

林　仲夫 *

1. 主結果

非線形 Schrödinger 方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} Lu = f(t,x), x \in \mathbf{R}^+, \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R}^+, \\ u\left(t,0\right) = h\left(t\right), \ t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで $h\left(t\right)$ は原点における境界条件, $L = i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta$, $\Delta = \partial_x^2$, そして $f(t,x)$ は p 次のべき乗型非線形項

$$f(t,x) = \lambda \left|u\right|^{p-1} u, \lambda \in \mathbf{C}$$

とする．整合条件 $u_0(0) = h(0)$ を仮定する．Fourier sine 変換を形式的に用いて計算をすると, (1) の解は

$$u\left(t\right) = w\left(t\right) + z\left(t\right)$$

と書くことができる．ここで

$$w\left(t\right) = U_D\left(t\right) u_0 - i \int_0^t U_D\left(t-\tau\right) f(\tau) d\tau,$$

$$U_D\left(t\right)\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} \int_0^\infty \left(e^{\frac{i|x-y|^2}{2t}} - e^{\frac{i|x+y|^2}{2t}} \right) \phi\left(y\right) dy,$$

$$z\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \int_0^t e^{\frac{ix^2}{2\tau}} \frac{x}{\tau\sqrt{\tau}} h\left(t-\tau\right) d\tau.$$

すなわち積分方程式の解として表現できる．以下ここで述べる解とは積分方程式の解とする．

非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題は多くの人によって研究されている．例えば Cazenave による本 [5] 及びそこに引用されている文献を参照．さらに境界条件が零である斉次 Dirichlet 境界値問題に対しても, いくつかの研究が行われている ([2], [10], [11], [12], [13], [20], [21], [23])．境界条件が零でない非斉次 Dirichlet 境界値問題の研究はこれらに比べると多いとは言えない．空間 1 次元の場合は [3], [4] による存在定理に関する研究があり, 解の漸近的振る舞いに関しては Kaikina による [18], [19] の研究がある．また逆散乱法用いた結果として [7], [8]．さらに最

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q35.
Keywords: Inhomogeneous Dirichlet, Asymptotics of solutions.
* 560-0043, 大阪府豊中市待兼山町 1 番 1 号, 大阪大学理学研究科, 数学専攻
e-mail: nhayashi@math.sci.osaka-u.ac.jp

近の仕事として [9] がある. 論文 [9] では $(u_0, h) \in \left(\mathbf{H}^s\left(\mathbf{R}^+\right), \mathbf{H}^{2s+1}(0,T)\right)$ $s > \frac{1}{2}$ なる条件のもと局所解の存在が示されている. 多次元の場合は [22] において研究されているが, 論文 [22] では, 弱解の存在が示されているのみで解の一意性は証明されていない.

本講演では解の漸近的振る舞いに関する [6] の研究成果を中心に報告する. また用いる関数空間として重み付き Sobolev 空間を用いるので, 時間局所解の存在定理も述べることにする.

エネルギー法と発展作用素を行くつかの作用素に分解する方法, さらに作用素 $J = x + it\partial_x$ を用いて以下に述べる結果を証明する.

時間局所解の存在を述べるために関数空間

$$\mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right) = \left\{\phi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^+\right); \|\phi\|_{\mathbf{H}^{1,0}(\mathbf{R}^+)} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} + \|\partial_x\phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} < \infty\right\}$$

及び

$$\mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right) = \left\{\phi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbf{R}^+\right); \|\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} + \|x\phi\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} < \infty\right\}$$

を用いる.

定理 1. べき乗型非線形項の指数 p が $p \geq 2$ を満たし, 初期境界値条件が

$$u_0 \in \mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right) \cap \mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right), h \in \mathbf{C}^1\left([0, T_1)\right)$$

及び整合条件 $u_0(0) = h(0)$ を満たすとする. このとき適当な正の時間 $T \leq T_1$ が存在し, (1) は一意的な解

$$u \in \mathbf{C}\left([0,T); \mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right) \cap \mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right)\right)$$

を持つ . さらに, 初期値, 境界値が

$$\|u_0\|_{\mathbf{H}^{1,0}(\mathbf{R}^+)} + \|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)} \leq \rho, \sup_{t\in[0,T_1)} |h(t)| = \sup_{t\in[0,T_1)} |\partial_t h(t)| \leq \rho^p$$

を満たすとき, 存在時間 T は

$$T = O\left(\min\left\{\frac{1}{10^4\rho^{\frac{4}{3}(p-1)}}, \frac{1}{10^4\rho^{\frac{4}{7}(p-1)}}, \frac{1}{4|\lambda| p^2 2^{\frac{1}{2}(p+1)} 3^p \rho^{p-1}}\right\}\right)$$

のように書くことができる.

定理 1 からわかるように, 初期値, 境界値が与えられた空間の持つノルムの意味で小さいとき, 存在時間は大きく取ることができる.

非線形項が分散項として働くとき, すなわち $\lambda > 0$ の場合は, 解のエネルギー空間での評価が求まり次の結果が成立する.

定理 2. 初期境界値条件が

$$u_0 \in \mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right) \cap \mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right), h \in \mathbf{C}^1\left([0, \infty)\right)$$

及び整合条件 $u_0(0)=h(0)$ を満たし $p\geq 2$, $\lambda>0$ とする．このとき (1) は一意的な解

$$u(t)\in\mathbf{C}\left([0,\infty);\mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right)\cap\mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right)\right)$$

を持つ．

次に臨界べき非線形項である $p=3$ の場合に関する結果を述べる．

定理 3. $\lambda\in\mathbf{R}$, $p=3$ とし，

$$u_0\in\mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right)\cap\mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right),h\in\mathbf{C}^1\left([0,\infty)\right),$$

$u_0(0)=h(0)=0$ を仮定する．また

$$\|u_0\|_{\mathbf{H}^{1,0}(\mathbf{R}^+)\cap\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)}\leq\varepsilon,$$

$$|h(t)|\leq\varepsilon^3\langle t\rangle^{-\frac{3}{4}-\varepsilon^4},|\partial_t h(t)|\leq\varepsilon^3\langle t\rangle^{-\frac{7}{4}-\varepsilon^4}$$

とする．このとき, 適当な $\varepsilon>0$ が存在して (1) は一意的な時間大域解

$$u\in\mathbf{C}\left([0,\infty);\mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right)\cap\mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right)\right)$$

を持ち, 時間減衰評価

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)\cap\mathbf{C}([0,\infty))}\leq C\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}$$

を満足する．

最後に, 解の漸近的振舞いに関する結果を述べる．

定理 4. $u(t,x)$ を前の定理で得られた解とする．このとき, 任意の $(u_0,h(t))$, に対して一意的な関数 $\Psi\in\mathbf{L}^\infty\left(\mathbf{R}^+\right)\cap\mathbf{C}\left([0,\infty)\right)$ が存在して

$$u(t,x)=e^{\frac{i|x|^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{it}}\Psi\left(\frac{x}{t}\right)e^{-i\lambda\left|\Psi_+\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2\log t}+O\left(\varepsilon^2 t^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(1+\log t\right)\right)$$

を満足する．

以下定理 2, 定理 3 の証明の概略を述べることにする．定理 1 に関しては, 定理 2 の証明と同じよう出来るので割愛する．また定理 4 に関しては定理 3 の手法と初期値問題で用いた議論を用いることにより証明することが出来る．定理 4 から解の主要項が斉次境界値問題の解になること, すなわち, 境界からの影響が剰余項に含まれことがわかる．境界値の時間減衰が緩やかなときには, 主要項に境界値が影響を与えると思われるが分かっていない．

2. 定理 2 の証明

定理 1 の結果を仮定して定理 2 の証明方針を述べることにする. エネルギー法を用いると時間局所解に対して次の評価

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \le \|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \int_0^t |\partial_x u(\tau,0)| \, |h(\tau)| \, d\tau$$

と

$$\begin{aligned} &\|\partial_x u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \le \|\partial_x u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \lambda \frac{1}{p+1} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{p+1}(\mathbf{R}^+)}^{p+1} \\ &+ \int_0^t |\partial_x u(\tau,0)| \, |\partial_\tau h(\tau)| \, d\tau. \end{aligned}$$

が $\lambda > 0$ の時わかる. さらに Strauss and Bu [22] の方法を用いると

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\partial_x u(\tau,0)|^2 \, d\tau \\ \le \; & \lambda \frac{2}{p+1} \int_0^t |h(\tau)|^{p+1} \, d\tau + \|\partial_x u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \\ & + \|\partial_x u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} + \int_0^t |h(\tau)| \, |\partial_\tau h(\tau)| \, d\tau \end{aligned}$$

が成立する. これらの評価式より, エネルギー空間における解の評価

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \\ \le \; & \frac{3}{2} \|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \frac{3}{2} \|\partial_x u_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \lambda \frac{1}{p+1} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{p+1}(\mathbf{R}^+)}^{p+1} \\ & + \int_0^t \left(|h(\tau)|^2 + |\partial_\tau h(\tau)|^2 \right) d\tau + \lambda \frac{2}{p+1} \int_0^t |h(\tau)|^{p+1} \, d\tau \end{aligned}$$

が求まる. $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)$ 空間における評価を示すために, 作用素 J が Schrödinger 作用素と交換可能であることを利用する. 再びエネルギー法を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Ju(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \\ = \; & -\frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_0^\infty \partial_x \left(\partial_x Ju \cdot \overline{Ju} \right) dx + \mathrm{Im} \lambda \int_0^\infty J |u|^{p-1} u \cdot \overline{Ju} dx. \end{aligned}$$

右辺第一項は境界条件により

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \partial_x \left(\partial_x Ju \cdot \overline{Ju} \right) dx \right| \\ \le \; & 2t \, |h(t)| \, |\partial_x u(t,0)| + 4t^2 \, |\partial_t h(t)| \, |\partial_x u(t,0)| \\ & + 4 \, |\lambda| \, t^2 \, |h(t)|^p \, |\partial_x u(t,0)| \end{aligned}$$

と評価される. $\int_0^t |\partial_x u(\tau,0)|^2 \, d\tau$ に対する評価と境界条件によって

$$\|Ju\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \leq C\,(u_0,h) + C\int_0^t \|u\,(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}^{p-1} \|Ju\,(\tau)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \, d\tau$$

が分かり, $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)$ 空間における評価が求まる. これとエネルギー空間の評価を合わせると定理 2 の結果になる.

3. 定理 3, 証明の概略

時間局所解の評価を求めることによって示す. 解を $u = w + z$ と二つに分解する. ここで w, z はそれぞれ

$$\begin{cases} Lw = \lambda\,|u|^2\,u,\ x \in \mathbf{R}^+, t > 0, \\ w(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R}^+, \\ w\,(t,0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} Lz = 0, x \in \mathbf{R}^+, t > 0, \\ z(0,x) = 0, x \in \mathbf{R}^+, \\ z\,(t,0) = h\,(t) \end{cases} \tag{3}$$

の解とする. 次の関数空間を

$$\mathbf{X}_T = \left\{ u\,(t) \in \mathbf{C}\left([0,T)\,; \mathbf{H}^{1,0}\left(\mathbf{R}^+\right) \cap \mathbf{H}^{0,1}\left(\mathbf{R}^+\right)\right); \|u\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\}$$

を用いる. ここで

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{X}_T}^2 \quad &= \quad \sup_{t\in[0,T)} \langle t\rangle^{-2\varepsilon} \|u\,(t)\|_{\mathbf{X}}^2 \\ &\quad + \sup_{t\in[0,T)} \|Ju\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon} + \sup_{t\in[0,T)} \|u\,(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}^2 \langle t\rangle \end{aligned}$$

及び

$$\|u\,(t)\|_{\mathbf{X}}^2 = \|u\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 + \|\partial_x u\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2$$

とする.

補題 1. u を (1) の時間局所解とする. このとき

$$\sup_{t\in[0,T)} \langle t\rangle^{-2\varepsilon} \|u\,(t)\|_{\mathbf{X}}^2 + \sup_{t\in[0,T)} \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon} \|Ju\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \leq C\varepsilon^2$$

が成立する.

w は斉次境界値問題の解なので, 初期値問題の場合と同様に証明を行うことができるので割愛する. $z\,(t)$ に関する評価を求めるために, エネルギー法により示すことができる

$$\|z\,(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}^2 \leq \int_0^t |\partial_x z\,(\tau,0)|\,|h\,(\tau)|\,d\tau, \tag{4}$$

$$\|\partial_x z(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \le \int_0^t |\partial_x z(\tau,0)|\,|\partial_\tau h(\tau)|\,d\tau, \tag{5}$$

及び

$$\|Jz(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \le \int_0^t |\partial_x z(\tau,0)|\left|\tau h(\tau) + 2\tau^2\partial_\tau h(\tau)\right| d\tau \tag{6}$$

を用いる. 第一章で定義した $z(t,x)$ に $x=0$ を代入して, 部分積分を使うと

$$\begin{aligned}
&\partial_x z(t,0)\\
=\;& \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\partial_t h(t-\tau)\,d\tau = \left\{\int_0^{\frac{t}{2}} + \int_{\frac{t}{2}}^t\right\}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\partial_t h(t-\tau)\,d\tau\\
=\;& \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\partial_t h(t-\tau)\,d\tau - \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\partial_\tau h(t-\tau)\,d\tau\\
=\;& \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\partial_t h(t-\tau)\,d\tau - \int_{\frac{t}{2}}^t \partial_\tau\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}h(t-\tau)\right)d\tau\\
&+\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{2}\frac{1}{\tau\sqrt{\tau}}h(t-\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

となる. 条件 $|\partial_t h(t)| \le C\varepsilon^3\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}-\gamma}, |h(t)| \le C\varepsilon^3\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}-\gamma}, \gamma=\varepsilon^4$ 及び $h(0)=0$ から

$$|\partial_x z(t,0)| \le C\varepsilon^3\langle t\rangle^{-1-\gamma}$$

が求まり. この式より

$$\begin{aligned}
\|Jz(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} &\le \int_0^t |\partial_x z(\tau,0)|\left|\tau h(\tau) + 2\tau^2\partial_\tau h(\tau)\right| d\tau\\
&\le C\varepsilon^6\int_0^t \langle\tau\rangle^{-1-\gamma}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}-\gamma}d\tau \le C\varepsilon^6\langle t\rangle^{\frac{1}{2}-2\gamma}
\end{aligned} \tag{7}$$

が求まる. 評価式 (4), (5) 及び (7) より,

$$\sup_{t\in[0,T)}\|z(t)\|^2_{\mathbf{X}} + \sup_{t\in[0,T)}\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+2\gamma}\|Jz(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} \le C\frac{\varepsilon^6}{\gamma} = C\varepsilon^2 \tag{8}$$

が従う. w の評価と合わせれば補題 1 が得られる.

一様ノルムにおける局所解の評価を求めるために [16] で用いられたように発展作用素を

$$\begin{aligned}
U_D(t)\psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi it}}\int_0^\infty\left(e^{\frac{i|x-y|^2}{2t}} - e^{\frac{i|x+y|^2}{2t}}\right)\psi(y)\,dy\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi it}}e^{\frac{i|x|^2}{2t}}iD_t\int_0^\infty(\sin(xy))\,e^{\frac{i|y|^2}{2t}}\psi(y)\,dy\\
&= MD_t\mathcal{F}_sM\psi,
\end{aligned}$$

のようにを分解する．ここで $M=e^{\frac{i|x|^2}{2t}}, D_t\phi=\frac{1}{\sqrt{it}}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$,

$$\left(\mathcal{F}_s\phi\right)(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(\sin\left(x\xi\right)\right)\phi\left(x\right)dx.$$

等式

$$\begin{aligned}\psi(t) &= U_D(t)U_D(-t)\psi(t)=MD_t\mathcal{F}_sMU_D(-t)\psi(t)\\ &= MD_t\mathcal{F}_sU_D(-t)\psi(t)+MD_t\mathcal{F}_s(M-1)U_D(-t)\psi(t)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\\ \leq\ & Ct^{-\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}_sU_D(-t)\psi(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}+Ct^{-\frac{3}{4}}\left\|xU_D(-t)\psi(t)\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}\end{aligned}\tag{9}$$

となることがわかる．ここで非斉次境界値問題を扱う場合

$$x\left(\mathcal{F}_s\phi\right)(x)=\mathcal{F}_c\left(\partial_\xi\phi\right)(x)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(0)$$

となることに注意する．w は斉次境界値問題の解なので

$$x\left(\mathcal{F}_sM^{-1}w\right)(t,x)=\mathcal{F}_c\left(\partial_\xi M^{-1}w\right)(t,x)$$

それゆえ関係式 $U_D(-t)=M^{-1}D_{-t}\mathcal{F}_sM^{-1}$ より

$$\begin{aligned}\left\|xU_D(-t)w\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} &= \left\|xM^{-1}D_{-t}\mathcal{F}_sM^{-1}w\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}\\ &= \left\|\mathcal{F}_ct\partial_xM^{-1}w\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}\\ &\leq \left\|t\partial_xM^{-1}w\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}=\left\|Jw\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}\end{aligned}\tag{10}$$

が求まる．この評価式を (9) に用いると

$$\left\|w(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\leq Ct^{-\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}_sU_D(-t)w\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}+Ct^{-\frac{3}{4}}\left\|Jw\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}\tag{11}$$

となり, 右辺第一項の評価が求まれば一様ノルム評価が従う．z に関する評価を求める．剰余項を二つに

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_s(M-1)U_D(-t)z(t)\\ =\ &\mathcal{F}_s(M-1)U_D(-t)\left(z(t,x)-e^{-x}h(t)\right)\\ &+\mathcal{F}_s(M-1)U_D(-t)e^{-x}h(t)\end{aligned}$$

のように分解する．

$$z(t,x)-e^{-x}h(t)\left.\right|_{x=0}=0$$

であることに注意し, (10) を使えば,

$$\begin{aligned}&\left\|MD_t\mathcal{F}_s(M-1)U_D(-t)\left(z(t)-e^{-x}h(t)\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\\ \leq\ & Ct^{-\frac{3}{4}}\left\|Jz(t)\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}+Ct^{\frac{1}{4}}\left|h(t)\right|\end{aligned}\tag{12}$$

が成立することがわかる. 等式 $\mathcal{F}_s U_D(-t)\, e^{-x} = e^{-i\frac{\xi^2}{2}t}\mathcal{F}_s e^{-x}$ と $MD_t\mathcal{F}_s MU_D(-t) = I$ を利用して

$$
\begin{aligned}
& \left\| MD_t\mathcal{F}_s (M-1)\, U_D(-t)\, e^{-x} h(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \\
\leq\ & C\,|h(t)| \left\| e^{-x} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} + Ct^{-\frac{1}{2}}\,|h(t)| \left\| e^{-x} \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)} \\
\leq\ & C\,|h(t)|
\end{aligned} \tag{13}
$$

を $t \geq 1$ に対して導く. このように (12) と (13) から,

$$
\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F}_s (M-1)\, U_D(-t)\, z(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \\
\leq\ & \left\| \mathcal{F}_s (M-1)\, U_D(-t) \left(z(t) - e^{-x} h(t) \right) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \\
& + \left\| MD_t\mathcal{F}_s (M-1)\, U_D(-t)\, e^{-x} h(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \\
\leq\ & Ct^{-\frac{3}{4}} \left\| Jz(t) \right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} + Ct^{\frac{1}{4}}\,|h(t)|
\end{aligned} \tag{14}
$$

が $t \geq 1$ に対して成立することがわかる. よって (9) より

$$
\begin{aligned}
& \left\| z(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \\
\leq\ & Ct^{-\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{F}_s U_D(-t)\, z \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} + Ct^{-\frac{3}{4}} \left\| Jz(t) \right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)} + Ct^{\frac{1}{4}}\,|h(t)|
\end{aligned} \tag{15}
$$

となる. (15) 式右辺第一項を考える.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_s U_D(-t)\, z(t,x) &= \int_0^t i\xi e^{-\frac{i\xi^2}{2}\tau} h(\tau)\, d\tau \\
= \ & \int_0^\infty i\xi e^{-\frac{i\xi^2}{2}\tau} h(\tau)\, d\tau - \int_t^\infty i\xi e^{-\frac{i\xi^2}{2}\tau} h(\tau)\, d\tau
\end{aligned} \tag{16}
$$

と書けるので, 部分積分を用いることによって

$$
\begin{aligned}
\left| \int_t^\infty i\xi e^{-\frac{i\xi^2}{2}\tau} h(\tau)\, d\tau \right| \ \leq\ & C\sqrt{t}\,|h(t)| + C\int_t^\infty \frac{|h(\tau)|}{\sqrt{\tau}} d\tau \\
& + C\int_t^\infty \sqrt{\tau}\,|\partial_\tau h(\tau)|\, d\tau
\end{aligned} \tag{17}
$$

及び

$$
\left| \int_0^\infty i\xi e^{-\frac{i\xi^2}{2}\tau} h(\tau)\, d\tau \right| \leq C\int_0^\infty \sqrt{\tau}\,|\partial_\tau h(\tau)|\, d\tau + \int_0^\infty \frac{|h(\tau)|}{\sqrt{\tau}} d\tau \tag{18}
$$

がわかる. このように (16) (17) と (18) から

$$
\left| \mathcal{F}_s U_D(-t)\, z \right| \leq C\varepsilon^3 \tag{19}
$$

が従う. ここで $|h(t)| \leq C\varepsilon^3 \langle t \rangle^{-\frac{3}{4}}$ を用いた. (15) と (19) より, 求めたい評価式

$$
\left\| z(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)} \leq C\varepsilon^3 t^{-\frac{1}{2}} \tag{20}
$$

が従う. $\|w(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}$ の評価を求めるために, 非線形項を

$$\begin{aligned}|u|^2 u &= \left|y+e^{-x}h(t)\right|^2\left(y+e^{-x}h(t)\right)\\ &= |y|^2 y+R\end{aligned}$$

と書く. ここで R は

$$\begin{aligned}R &= e^{-x}|y|^2 h(t)+2e^{-x}y\mathrm{Re}yh(t)\\ &\quad +e^{-x}|h(t)|^2 y+2e^{-x}h(t)\mathrm{Re}yh(t)+e^{-3x}|h(t)|^2 h(t)\end{aligned}$$

なので, 剰余項と考えられる. 作用素 $\mathcal{F}_s U_D(-t)$ を (2) 式の両辺に作用させると

$$\begin{aligned}&i\partial_t\mathcal{F}_s U_D(-t)\left(y+e^{-x}h(t)\right)\\ =\;&\lambda t^{-1}\left|\mathcal{F}_s U_D(-t)y\right|^2\mathcal{F}_s U_D(-t)y+O\left(\varepsilon^3 t^{-1-\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

となり, この式から

$$\left\|\mathcal{F}_s U_D(-t)\left(y+e^{-x}h(t)\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\le C\varepsilon$$

が従い

$$\|\mathcal{F}_s U_D(-t)w\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\le C\varepsilon \tag{21}$$

が求まる. (21) 式と評価式

$$\|w\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\le C\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{F}_s U_D(-t)w\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}+C\varepsilon t^{-\frac{3}{4}}\|Jw\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)}$$

より

$$\|w(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)}\le C\varepsilon\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

が求められたことになる. (20), (22), 補題 1 より定理 3 が示された.

References

[1] G.Biondini and A.Bui, *On the nonlinear Schrödinger equation on half line with homogeneous Robin boundary conditions*, Stud. Appl. Math. **129**(3) (2012), pp. 249–271.

[2] H. Brezis and T. Gallouet, *Nonlinear Schrödinger evolution equation,* Nonlinear Anal. **4** (1980), pp. 677-681.

[3] C. Bu, *Nonlinear Schrödinger equation on the semi-infinite line*, Chinese Annals of Math. **21A** (2000), pp. 1–12.

[4] R. Carroll and C. Bu, *Solution of the forced nonlinear Schrödinger equation (NLS) using PDE techniques*, Appl. Anal. 41 (1991), pp. 33-51.

[5] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations,* Courant Inst. of Math. Sci., Amer. Math. Soc., New York, Providence, RI, 2003, xiv+323 pp.

[6] L. Esquivel, N. Hayashi and E. Kaikina, *Inhomogeneous Dirichlet-boundary value problem for one dimensional nonlinear Schrödinger equations via factorization techniques,* to appear in J. Differential Equations.

[7] A. S. Fokas and J. Lenells, *An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons*, Inverse Problems **25** (2009), no. 11, 115006, 32 pp.

[8] A. S. Fokas, A. R. Its and L-Y Sung, *The nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Nonlinearity **18**(4) (2005), pp. 1771–1822.

[9] A. S. Fokas, A. A. Himonas and D. Mantzavions, *The nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Trans. Amer. Math. Soc. **369**(1) (2017), pp. 681-709.

[10] N. Hayashi, *Time decay of solutions to the Schrödinger equation in exterior domains I*, Ann. Inst. Henri. Poincaré, Physique Théorique, **50** (1989), pp. 71-81.

[11] N. Hayashi, *Time decay of solutions to the Schrödinger equation in exterior domains II*, Ann. Inst. Henri. Poincaré, Physique Théorique, **50** (1989), pp. 83-93.

[12] N. Hayashi, *Smoothing effect for nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, J. Funct. Anal., **89** (1990), pp. 444-458.

[13] N. Hayashi, *Global existence of small radially symmetric solutions to quadratic nonlinear evolution equations in an exterior domain*, Math. Z. **215** (1994), pp. 381-419.

[14] N. Hayashi and E. Kaikina, *Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line*, North-Holland Mathematics Studies, 194. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. 319 pp.

[15] N. Hayashi and E. Kaikina, *Benjamin-Ono equation on a half-line,* Int. J. Math. Math. Sci. 2010, Art. ID 714534, 38 pp. 35-53.

[16] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369-389.

[17] J. Holmer, *The initial-boundary-value problem for the 1D nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Differential Integral Equations **18**(6) (2005), pp. 647–668.

[18] E. Kaikina, *Asymptotics for inhomogeneous Dirichlet initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **54** (2013), no. 11, 111504, 15 pp.

[19] E. Kaikina, *Inhomogeneous Neumann initial boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation,* J. Differential Equations **255** (2013), pp. 3338-3356.

[20] T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal., **14**(9) (1990), pp. 765-769.

[21] T. Ogawa and T. Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem,* J. Math. Anal. Appl. **155**(2) (1991), pp. 531-540.

[22] W. Strauss and C. Bu, *An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrodinger equations*, Journal of Differential Equations **173** (2001), pp. 79 –91.

[23] Y. Tsutsumi, *Global solutions of the nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations, **8** (1983), pp. 1337-1374.